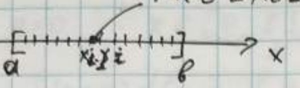
Криволинейные интегралы первого рода.

1.09.21

Интеграл Римана: $m_i \in [x_{i-1}; x_i]$

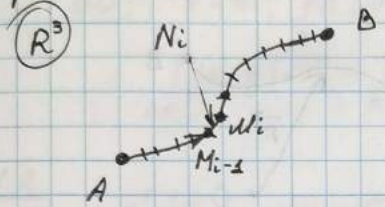


$$f(x),\ x \in [a, b]$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \implies \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i \to \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Криволинейный интеграл: $f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in C = \smile AB$



Разбиваем на элементарные дуги.

$\smile M_{i-1}M_i \in \smile AB$ - элементарная дуга ("n")

$N_i \in \smile M_{i-1}M_i$

$$\boxed{\lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta l_i = \int_{AB} f(x, y, z)\,dl}$$

- криволинейный интеграл 1-го рода (по длине)

Δl_i - длина дуги $\smile M_{i-1}M_i$

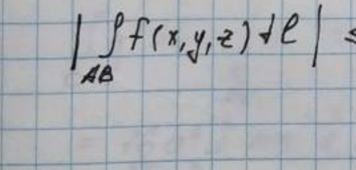
Св-ва интеграла 1-го рода.

1. $\int_{AB} f(x, y, z)\,dl = \int_{BA} f(x, y, z)\,dl$ (не зависит от направления движения по дуге.)

2. $\int_{AB} [c_1 f_1(x, y, z) + c_2 f_2(x, y, z)]\,dl = c_1 \int_{AB} f_1(x, y, z)\,dl + c_2 \int_{AB} f_2(x, y, z)\,dl$

   где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ~ линейность

3. Аддитивность



$$\int_{AB} f(x, y, z)\,dl = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} f(x, y, z)\,dl$$

4. Оценка интеграла

$$\left| \int_{AB} f(x, y, z)\,dl \right| \le \max_{(x, y, z) \in \smile AB} |f(x, y, z)| \cdot L_{AB}$$

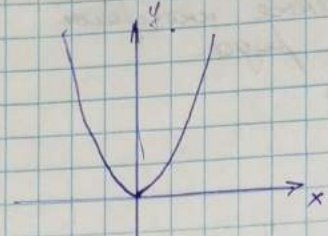
L_{AB} — длина кривой

5. $\int_{AB} dl = L_{AB}$ - длина кривой

Задание кривых.

① $y = f(x)$ - кривая на плоскости

$y = x^2$



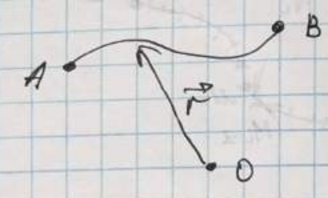
② Параметрическое представление

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

③ Векторное задание

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус-вектор.

$\boxed{\{ \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \}}$ $\cup AB$



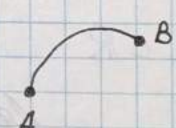
6. Вычисление криволинейного интеграла

$\cup AB$ - гладкая ~ $x(t), y(t), z(t) \in C^1$ (непрер, + есть 1 произв. not)

~ сложные кривые

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}(t))\,|\vec{r}'(t)|\,dt$$

Для плоской кривой: $y = g(x)$, $x \in [a, b]$

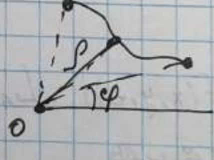


$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, g(x))\sqrt{1 + g'^2(x)}\,dx$$

Если в полярных координатах:

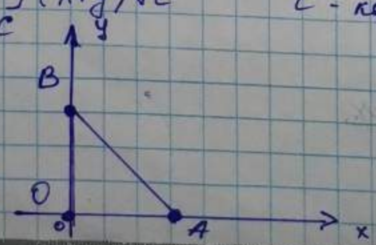
$\cup AB : \rho = \rho(\varphi)$

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$



1.1.

$\int\limits_{C} (x+y)\,dl$ C - контур треугольника с верш. $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$



$$\int_C (x+y)\,dl = \int_{OA}(x+y)\,dl + \int_{AB}(x+y)\,dl + \int_{BO}(x+y)\,dl = 1+\sqrt{2}$$

OA: $y=0$, $x \in [0;1]$

$$\int_{OA}(x+y)\,dl = \int_0^1 x\sqrt{1}\,dx = \frac{1}{2}$$

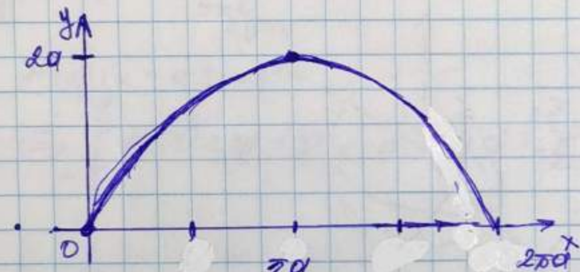
AB: $y = 1-x$, $x \in [0;1)$

$$\int_{AB}(x+y)\,dl = \int_0^1 \sqrt{2}\,dL = \sqrt{2}$$

BO: $x=0$; $y \in [0;1]$

$$\int_{BO}(x+y)\,dl = \int_0^1 y\sqrt{1}\,dy = \frac{1}{2}$$

1.2. $\int_C y^2\,dl$; C - арка циклоиды: $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$



$x'(t) = (at - a\sin t)' = a - a\cos t = a(1-\cos t)$

$y'(t) = (a - a\cos t)' = a\sin t$

$x'^2(t) = a^2(1-\cos t)^2$ | $x'^2(t) + y'^2(t) = a^2(1-2\cos t + \cos^2 t) + a^2\sin^2 t =$

$y'^2(t) = a^2\sin^2 t$

$= a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t =$

$= 2a^2 - 2a^2\cos t = 2a^2(1-\cos t) = 2a^2 \cdot 2\sin^2\frac{t}{2} =$

$= 4a^2\sin^2\frac{t}{2}$

$\sqrt{x'^2 + y'^2} = 2a\sin\frac{t}{2}$

$$\int_C y^2\,dl = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}\,dt =$$

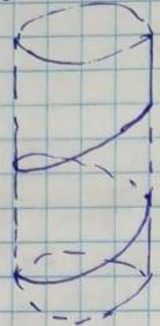
$$= 16a^3\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = 16a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 d\cos\frac{t}{2} =$$

$$= 16a^3\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos^2\frac{t}{2} + \cos^4\frac{t}{2}\right) d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = \left\{ \frac{t}{2} = \beta \right\} = \frac{256}{15}a^3$$

$$= 16a^3 \cdot \left(\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) - 32a^3 \cdot \left(\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\Big|_0^{2\pi}\right) + 16a^3 \cdot \left(\frac{\cos^5\frac{t}{2}}{5}\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= -32a^3 + \frac{64a^3}{3} - \frac{32a^2}{5} = 32a^3\left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

1.5. $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\,dl$; C - часть винтовой линии



$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$x'(t) = -a\sin t$
$y'(t) = a\cos t$
$z'(t) = b$

$x'^2+y'^2+z'^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 - a^2+b^2$

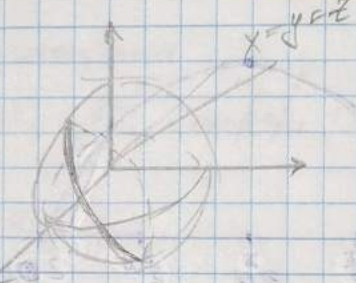
$$\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\,dl = \int\limits_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = a^2\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2\pi + b^2\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi} t^2\,dt =$$

$$= 2a^2\pi\sqrt{a^2+b^2} + b^2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

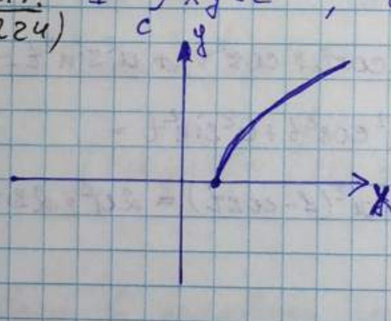
$$= 2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2} + b^2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{8\pi^3}{3} = \frac{2\pi}{3}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,(3a^2+4\pi^2b^2)$$

Доп: $\int\limits_C x^2\,dl$ $\quad C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$



Домашняя работа.

1.7. (4224) $I = \int\limits_C xy\,dl$, C - дуга гиперболы $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases} \quad t \in [0; t_0]$



$x'(t) = \operatorname{sh} t$; $y'(t) = \operatorname{ch} t$

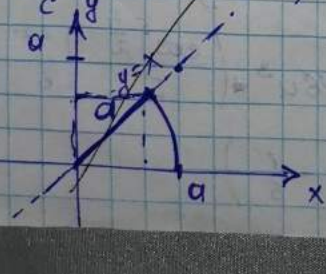
$$I = \int\limits_C xy\,dl = \int\limits_0^{t_0} \operatorname{ch} t\cdot\operatorname{sh} t\cdot\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+\operatorname{ch}^2 t}\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t \to du = (2\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t + 2\operatorname{ch} t\cdot\operatorname{sh} t)\,dt = \\ \qquad = 4\operatorname{sh} t\cdot\operatorname{ch} t\cdot dt \\ t \to t_0 \Rightarrow u \to \operatorname{sh}^2 t_0 + \operatorname{ch}^2 t_0 \equiv u_0 \end{array} \right\}$$

$$= \int\limits_1^{u_0} \operatorname{ch} t\cdot\operatorname{sh} t\cdot\sqrt{u}\,dt = \int\limits_1^{u_0}\frac{1}{4}\sqrt{u}\,du = \frac{2}{4}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_1^{u_0} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(u_0^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{1}{6}\left((\operatorname{ch}^2 t_0 + \operatorname{sh}^2 t_0)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{1}{6}\left(\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}}(2t_0) - 1\right)$$

1.8. $I = \int\limits_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dl$, C - выпуклый контур: $r = a$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$



$x^2+y^2 = a^2$

1.9. (4229)

1.10 (423

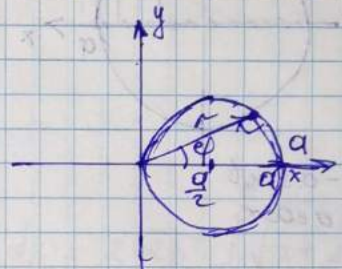
1.11.

$$I = \int_C f(r,\varphi)\,dl = \int_{\varphi}^{\phi} f(r(\varphi),\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi}^{\phi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

1.9. (4229) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, C - окружность $x^2+y^2=ax \to (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$

$r = a\cos\varphi$; $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



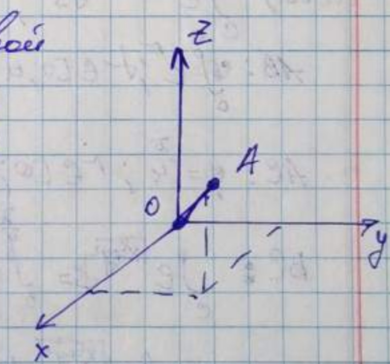
$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\cdot a\,d\varphi =$$

$r'(\varphi) = -a\sin\varphi$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\varphi\,d\varphi = a^2\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{2a^2}}$$

1.10. (4231) Найти длину дуги пространственной кривой

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t^2 \\ z = 2t^3 \end{cases}$$ от. $O(0,0,0)$ до $A(3,3,2)$



$x'(t) = 3$; $y'(t) = 6t$; $z'(t) = 6t^2$

$L = \int_{OA} 1\cdot dl$; Из соотношений верно: $t \in [0;1]$

$$L = \int_{OA} 1\cdot dl = \int_0^1 \sqrt{9+36t^2+36t^4}\,dt = 3\cdot\int_0^1 \sqrt{1+4t^2+4t^4}\,dt =$$

$$= 3\cdot\int_0^1 \sqrt{(2t^2+1)^2}\,dt = \{\text{положительно при } \forall t\} =$$

$$= 3\cdot\int_0^1 (2t^2+1)\,dt = 6\int_0^1 t^2\,dt + 3\int_0^1 dt = 2+3 = \underline{\underline{5}}$$

1.11. Найти статические моменты дуги C астроиды: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(x\geq 0, y\geq 0)$

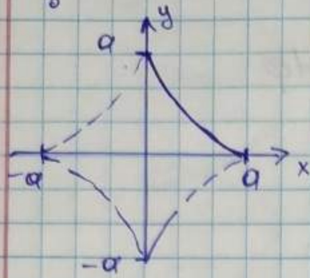
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \text{проверка: } a^{\frac{2}{3}}\cos^2 t + a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t = a^{\frac{2}{3}}$$

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$S_y = \int_C x\,dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\cdot\sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)}\,dt =$$

$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$ $\Rightarrow$ $x'^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t$, $y'^2 = 9a^2\sin^4 t\cos^2 t$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t \cdot 3a\sqrt{\underbrace{\cos^2 t \cdot \sin^2 t}_{\geq 0} \cdot 1}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a^2 \cdot \cos^4 t \cdot \sin t\, dt =$



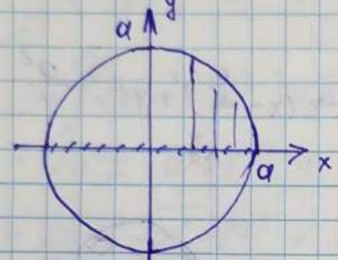
$= -\frac{3a^2}{5}\cdot \cos^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5}$

Аналогично:

$S_x = \int_C y\,dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\cos t\sin t\, dt =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a^2 \sin^4 t \cdot d(\sin t) = \frac{3a^2\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5}$

1.12. Найти момент инерции окружности $x^2+y^2=a^2$, отн. диаметра.



$\begin{cases} x = a\cos^4 t \\ y = a\sin^2 t\end{cases}$ $t\in[0;2\pi]$ $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$

Относит. оси OX: $I = \int_{(m)} r_\perp^2\, dm$

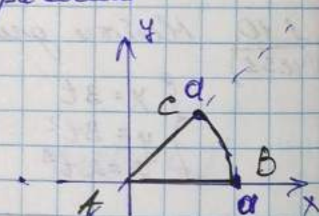
$I_x = \int_C y^2\, dl = 2\int_0^\pi a^2\sin^2 t\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt =$

$x' = -a\sin t$
$y' = a\cos t$

$= 2\int_0^\pi a^3\sin^2 t\,dt = 2a^3\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$

$= \pi a^3 - a^3\int_0^\pi \cos 2t\,dt = \pi a^3 - a^3\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^\pi = \pi a^3$

1.8. (4226.) $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, ds$, где C - выпуклый контур, огр. кривыми $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$



AB: $\varphi=0$; $r\in[0;a]$ $\Rightarrow \int_0^a e^r\, dr = e^r\Big|_0^a = e^a - 1$

AC: $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $r\in[0;a]$ $\Rightarrow \int_0^a e^r\, dr = e^a-1$

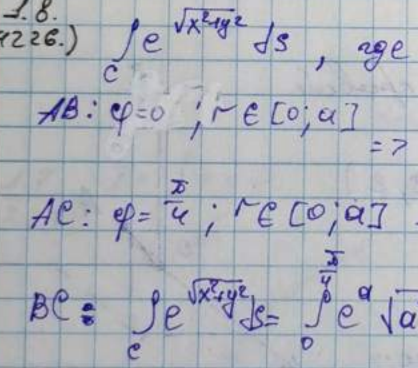
BC: $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\sqrt{a^2}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a\,d\varphi = a\cdot e^a\cdot\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = 2(e^a-1)+\frac{\pi a\cdot e^a}{4}$

4227. $\int_C |y|\,ds$, где C - дуга лемнискаты $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\y=r\sin\varphi\end{cases} \Rightarrow (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)$

$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$



$\cos 2\varphi = 0$

$2\varphi = \frac{\pi}{2}\pm\pi k,\ k\in Z$

$\varphi = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

$\int_C|y|\,ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\varphi\cdot\frac{a^2}{r}\,d\varphi =$

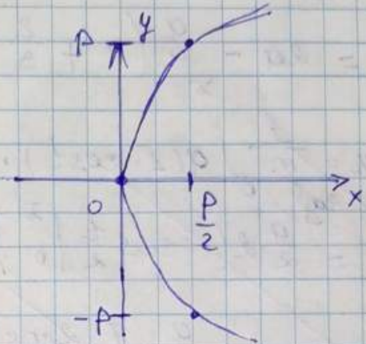
$= 4a^2\cdot\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = 4a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2a^2(2-\sqrt{2})$

$$\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)} = \sqrt{a^2\cos 2\varphi + \left(\frac{a\cdot\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2} = \sqrt{r^2+\frac{a^4\sin^2 2\varphi}{r^2}} =$$

$$=\frac{1}{r}\sqrt{r^4+a^4\sin^2 2\varphi} = \frac{1}{r}\sqrt{a^4\cos^2 2\varphi + a^4\sin^2 2\varphi} = \frac{a^2}{r}$$

$$\int_C |y|\,dS = 2a^2(2-\sqrt{2})$$

4241.2 $y^2=2px$ $\quad \left(0\le x\le \frac{p}{2}\right)$



$\rho=|y|$

$$M=\int_C \rho(x,y,z)\,dS$$

$$M=\int_C |y|\,dS$$

$y=\sqrt{2px}$; $\quad y'=\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{p}{2x}}$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+g'^2(x)}\,dx$$

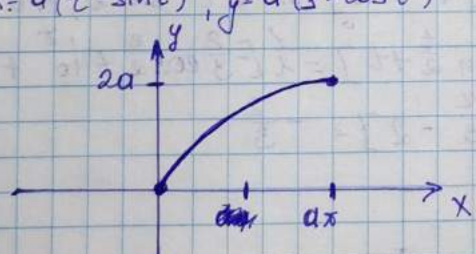
В силу симметрии параболы отн. OX:

$$M=\int_C |y|\,dS = 2\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx = 2\sqrt{2p}\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{x+\frac{p}{2}}\,dx =$$

$$=2\sqrt{2p}\cdot 2\left(\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^{\frac{p}{2}}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{2p}\cdot\left(p^{\frac{3}{2}}-\frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2^3}}\right) =$$

$$=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}\,p^2-\frac{p^2}{2}\right) = \frac{2}{3}p^2(2\sqrt{2}-1)$$

4243. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $\quad (0\le t\le \pi)$



$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\,\rho(x,y,z)\,dS$$

$$y_0=\frac{1}{M}\int_C y\,\rho(x,y,z)\,dS$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_C z\,\rho(x,y,z)\,dS$$

$x'=a-a\cos t$

$y'=a\sin t$

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{(a-a\cos t)^2+a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2-2a^2\cos t+a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t} =$$

$$=\sqrt{2a^2(1-\cos t)} = a\sqrt{4\cdot\sin^2\frac{t}{2}} = \{\text{т.к. } t\in[0;\pi]\} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$$M=\int_0^{\pi}\rho\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\rho\cdot 2\left(-\frac{\cos\frac{t}{2}}{1}\Big|_0^{\pi}\right) = 4a\rho,$$ где ρ - плотность

$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\cdot\rho\,dS = \frac{\rho}{M}\int_0^{\pi} a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi} t\sin\frac{t}{2}\,dt - \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\sin t\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt = \left\{\begin{matrix} u=t \to du=dt \\ dv=\sin\frac{t}{2}dt \to v=-2\cos\frac{t}{2}\end{matrix}\right\} =$$

$$= -at\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} a\cos\frac{t}{2}\,dt - \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{3}{2}t\right)dt =$$

$$= 0 + a\frac{\sin\frac{t}{2}}{1/2}\Big|_0^{\pi} - \frac{a}{4}\left(2\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}t\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= 2a - \frac{a}{4}\left(2+\frac{2}{3}\right) = 2a - \frac{a\cdot \cancel{8}^{2}}{_{1}\cancel{4}\cdot 3} = \frac{4}{3}a$$

$$y_0 = \frac{\rho}{m}\int_0^{\pi} a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt - \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a}{2}2\left(-\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}\right) - \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3}{2}t + \sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= a - \frac{a}{4}\cdot\left(-\frac{2\cos\frac{3}{2}t}{3}\Big|_0^{\pi} + \left(-\frac{\cos\frac{t}{2}}{1/2}\Big|_0^{\pi}\right)\right) =$$

$$= a - \frac{a}{4}\left(\frac{2}{3}+2\right) = a - \frac{a\cdot\cancel{8}^{2}}{_{1}\cancel{4}\cdot 3} = \frac{1}{3}a \quad ?$$

$$y_0 = \frac{\rho}{m}\int_0^{\pi} a\cdot(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{2\rho\cdot a^2}{2\cdot 4a\rho}\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{a}{2}\left[\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt - \int_0^{\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}\,dt\right] =$$

$$= \frac{a}{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\cos t\,dt\right] = \frac{a}{2}\left[2 - \int_0^{\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}\,dt\right] =$$

Отдельно: $\int_0^{\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}\,dt = \left\{\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)\right\} =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{3}{2}t + \sin\left(-\frac{t}{2}\right)\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{3}{2}t - \sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\sin\frac{3}{2}t\,dt - \int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}t\Big|_0^{\pi} + 2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}-2\right] = -\frac{2}{3}$$

$$y_0 = \frac{a}{2}\left(2+\frac{2}{3}\right) = \frac{8a}{2\cdot 3} = \frac{4}{3}a$$

Ответ: $x_0 = y_0 = \frac{4}{3}a$

4228.* (не считается)

$\int\limits_C x^2 dS$, где C окружность

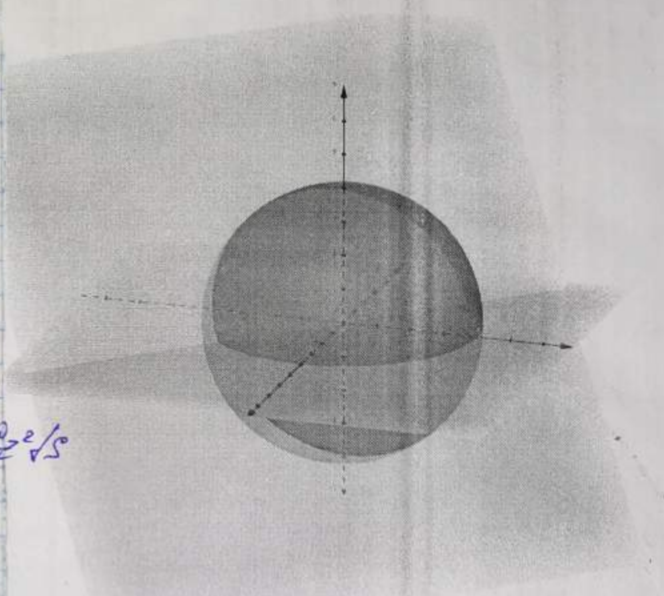
$$x^2+y^2+z^2=a \ ; \ x+y+z=0$$

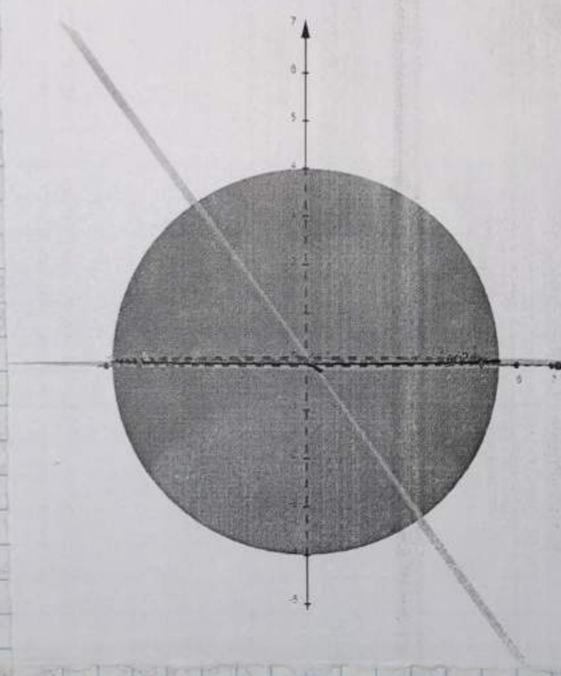
Кривая является окружность с центром в начале координат и радиусом сферы $= a$

Можно представить → повернуть оси так, чтобы две произвольные оси были диаметрами, но это можно сделать и мысленно и рассуждать с позиции симметрии сферы:

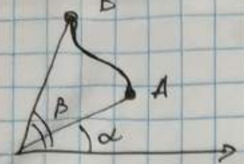
$$\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\,dS = 3\int\limits_C x^2 dS = 3\int\limits_C y^2 dS = 3\int\limits_C z^2 dS$$

$$\Rightarrow \int x^2 dS = \frac{1}{3}\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\,dS = \frac{a^2}{3}\underbrace{\int\limits_C dS}_{\text{длина окружности в единицах}} = \frac{2\pi a^3}{3}$$





8.09.21.



$\rho=\rho(\varphi),\quad \alpha\le\varphi\le\beta$

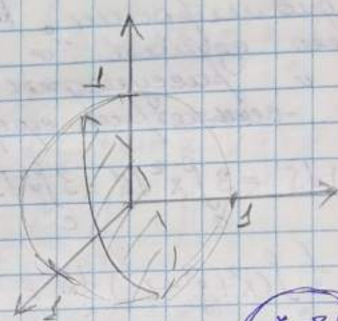
$$\int_{AB} f(x;y)\,dl=\int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho'^2(\varphi)+\rho^2(\varphi)}\,d\varphi$$

$$\cup AB:\ \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi=\rho(\varphi)\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi=\rho(\varphi)\sin\varphi \end{matrix},\quad \alpha\le\varphi\le\beta$$

$$+\left.\begin{matrix} x_\varphi'^2=(\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi)^2 \\ y_\varphi'^2=(\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi)^2 \end{matrix}\right| \Rightarrow\ =\rho'^2(\varphi)+\rho^2(\varphi)$$

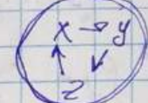
№4238*.

$$\int_C x^2\,dl,\quad C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$



$$\int_C y^2\,dl=\int_C x^2\,dl=\int_C z^2\,dl$$

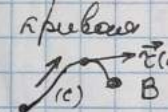
$$3\int_C x^2\,dl=\int_C \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{a^2}\,dl=$$



$$=2\pi a^3\ \Rightarrow\ \int_C x^2\,dl=\frac{2\pi a^3}{3}$$

Криволинейный интеграл второго рода.

Опр.: Пусть C – гладкая кривая с выбранным направлением движения (от A к B)



, а $\vec A(M): C\to\mathbb{R}^3$ – ограниченная векторная ф-я 3х переменных.

Тогда введём вспомогательную функцию $f(M)=(\vec A(M),\vec\tau(M))$, где $\vec\tau(M)$ – единичный касательный вектор к кривой AB в т. $M\in C$, $|\vec\tau(M)|=1$, направленный в сторону движения по кривой.

Тогда криволинейным интегралом 2 рода наз-ся $\int_{AB} f(M)\,dl$

$$\int_{AB} f(M)\,dl=\int_{AB}(\vec A(M),\vec\tau(M))\,dl$$

Св-ва интеграла.

1) $\int_{BA}(\vec A(M),\vec\tau(M))\,dl=-\int_{AB}(\vec A(M),\vec\tau(M))\,dl$

2)

– положительное напр. хода (иначе – отриц.)

$$\oint_C(\vec A(M),\vec\tau(M))\,dl$$

3) Формула вычисления

$\smile AB: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, Пусть $t \in [a; b]$

$\vec{A}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

$\vec{\tau}(M) = \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$

$dl = |\vec{r}'(t)|dt$

$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$

$$\int_C (\vec{A}(M), \vec{\tau}(M))\,dl = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)]\,dt$$

4) Потенциальный случай:

$$\underbrace{\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz}_{\text{интеграл по координатам}} = \int_{AB} dU = \underline{\underline{U(B) - U(A)}}$$

$\Uparrow$

$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU(x,y,z) = U'_x\,dx + U'_y\,dy + U'_z\,dz$

, тогда U - потенциал.

Если кривая замкнутая  $= 0$

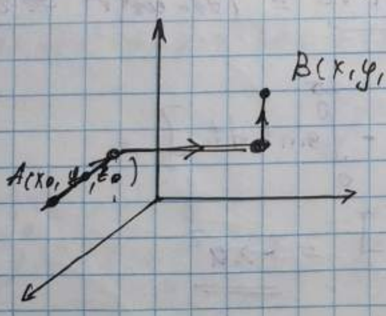
$A=B$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \begin{cases} U'_x = P \\ U'_y = Q \\ U'_z = R \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \end{array}\right\}$$

$\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial y}$

— необх. и дост. условие полного дифференциала.

Фиксируем точку: $A(x_0, y_0, z_0)$
$B(x, y, z)$

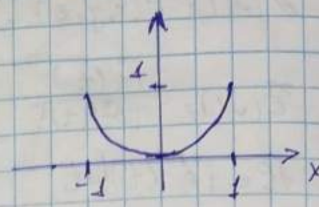


$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)\,dz = \underline{U(x,y,z)} - U(x_0, y_0, z_0)$$

5) $\vec{A}(M) = \vec{F}(M)$ — силовое поле

$$\int_{AB} (\vec{F}(M), \vec{\tau}(M))\,dl = \underbrace{\int_{AB} (\vec{F}(M), d\vec{r}(M))}_{\text{работа по перемещению в силовом поле.}}$$

4250. $\int\limits_C (\underset{=P}{x^2-2xy})dx + (\underset{=Q}{y^2-2xy})dy$ ⊜, где C - парабола $y=x^2$ $(-1\le x\le 1)$



$P'_y \ne Q'_x$

$= \int_{-1}^{1} (x^2-2x^3)dx + (x^4-2x^3)\,2x\,dx =$

$= \int_{-1}^{1}(x^2-2x^3+2x^5-4x^4)dx =$

$= \int_{-1}^{1}(2x^5-4x^4-2x^3+x^2)dx = \int_{-1}^{1}(-4x^4+x^2)dx =$

$= \cancel{-\frac{4x^5}{5}}\ \ 2\int_0^1(x^2-4x^4)dx = 2\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^5}{5}\Big|_0^1\right)=$

$= 2\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right) = \frac{-2\cdot 7}{15} = -\frac{14}{15}$ В роли $t \to x$

4284. $\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\limits_{(1,0)}^{(6,8)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\right)$ ⊜

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{x}{2}\cdot\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac32}} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac32}}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{yx}{(x^2+y^2)^{\frac32}}$

⊜ $\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{\frac12 dx^2 + \frac12 dy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac12\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{d(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(1,0)}^{(6,8)} =$

$= 10 - 1 = 9$

4280. $\int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ ⊜ ; C - виток винтовой линии

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$

$= -\int_0^{2\pi} a^2\sin^2 t\,dt + ab\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt + \underbrace{ab\int_0^{2\pi}\cos t\,dt}_{=0} = \begin{cases} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \cos t\,dt \Rightarrow v = \sin t \end{cases}$

$= -\frac{a^2}{2}\cdot\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt + ab\left[\underbrace{t\sin t\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi}\sin t\,dt\right] =$

$= -\pi a^2 + \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \underbrace{ab\left[\cos t\Big|_0^{2\pi}\right]}_{=0} = \underline{-\pi a^2}$

Д/З*: $\oint\limits_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$ $\quad C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$ пробег. против хода часовой стрелки

Домашняя работа.

4254. $\oint\limits_C \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2} =$, где C - окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая против часовой стрелки

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} \quad t\in[0;2\pi]$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t + a\sin t)a(-\sin t)\,dt - (a\cos t - a\sin t)\,a\cos t\,dt}{a^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\cos t\sin t - \sin^2 t - \cos^2 t + \sin t\cos t}{1}\right) dt = \int_0^{2\pi} -dt =$$

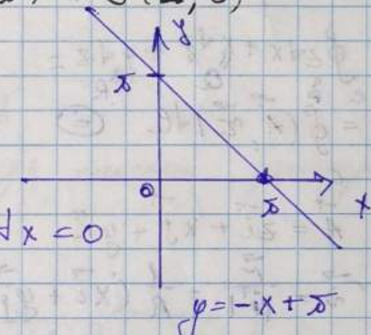
$$= -2\pi$$

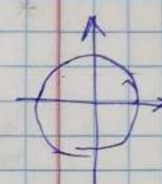
4256. $\int\limits_{AB} dx\cdot\sin y + dy\sin x$, где AB - отрезок прямой между точками $A(0;\pi)$ и $B(\pi;0)$

$$\left.\begin{aligned} P'_y &= \cos y \\ Q'_x &= \cos x \end{aligned}\right| \; P'_y \neq Q'_x$$

$$\int\limits_{AB} [\sin(\pi - x)\,dx + \sin x\cdot(-1)\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin(\pi-x) - \sin x)\,dx = \int_0^{\pi} (\sin x - \sin x)\,dx = 0$$





4263. $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$, вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

$$\left.\begin{aligned} P'_y &= \frac{1}{x^2} \\ Q'_x &= \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} \end{aligned}\right| \Rightarrow P'_y = Q'_y$$

$$\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx}{x^2} - \int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{dy}{x} = \int_2^1 x^{-2}\,dx - \int_1^2 dy = -\frac{1}{x}\Big|_2^1 - y\Big|_1^2 = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

4271. $dz = (x^2+2xy-y^2)\,dx + (x^2-2xy-y^2)\,dy =$

$$\left.\begin{aligned} P'_y &= 2x-2y \\ Q'_x &= 2x-2y \end{aligned}\right| \Rightarrow P'_y = Q'_x$$

$$= \int_0^x x^2\,dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2)\,dy = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$$

4284. $\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz = \int_1^2 x\,dx + \int_1^3 y^2\,dy - \int_1^{-4} z^3\,dz =$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{y^3}{3}\Big|_1^3 - \frac{z^4}{4}\Big|_1^{-4} = 2 - \frac{1}{2} + 9 - \frac{1}{3} - 64 + \frac{1}{4} = -53\frac{7}{12}$$

4290. $du = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz$

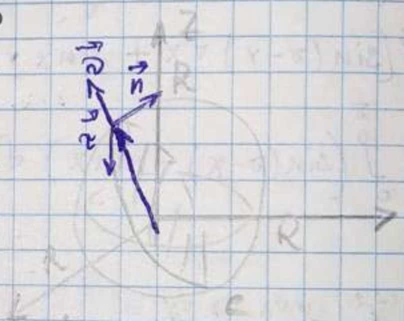
$$u = \int_0^x (x^2)\,dx + \int_0^y y^2\,dy + \int_0^z (z^2 - 2xy)\,dz =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - 2xyz + C = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz + C$$

4291. $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}\,dz \Rightarrow$

$$u = \int_0^z 0 \cdot dz + \int_0^y 0 \cdot dy + \int_0^x \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx =$$
$$= 0 + 0 + x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C$$
$$u = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C$$

*

$$\oint_C z\,dx + \underset{Q}{x}\,dy + \underset{R}{y}\,dz = \qquad C:\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\quad x + y + z = 0$$
$$= \oint_C (\vec{A}, \vec{\tau})\,dl \;=$$



$\vec{A} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$

$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{R}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

$\vec{n} = \{1, 1, 1\}$

$\vec{n} = \frac{(1, 1, 1)}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$

$\vec{\tau} = [\vec{n}, \vec{\nu}]$

$$= \oint_C (\vec{A}, [\vec{n}, \vec{\nu}])\,dl = \oint_C (\vec{A}, \vec{n}, \vec{\nu})\,dl$$

$$(\vec{A}, \vec{n}, \vec{\nu}) = \begin{vmatrix} z & x & y \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ x/R & y/R & z/R \end{vmatrix} = \cancel{\frac{1/R}{\sqrt{3}}}\ \frac{1}{R\sqrt{3}} \cdot \begin{vmatrix} z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{R\sqrt{3}}\left(\underbrace{z^2 + y^2 + x^2}_{R^2}\ \underbrace{- xy - xz - zy}_{\frac{R^2}{2}}\right) = \frac{3R^2}{2} \cdot \frac{1}{R\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$x + y + z = 0$

$(x + y + z)^2 = 0$

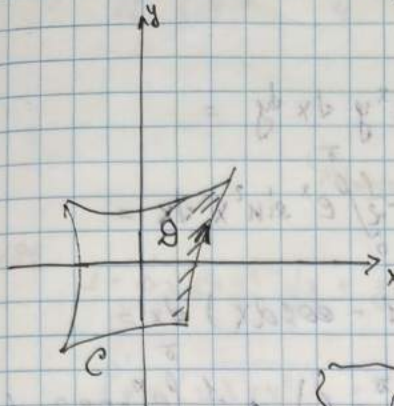
$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{R^2} + 2xy + 2xz + 2yz = 0$

$$= \frac{R\sqrt{3}}{2} \oint_C dl = \underline{\underline{\sqrt{3}\,\pi R^2}}$$

Ответ: $\pi R^2 \sqrt{3}$

1. Формула Грина.

15.09.21



Пусть C – простой кусочно-гладкий контур, огранич. конечную, односвязную плоскую область D, и пробегаемый в положительном направлении.

Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – ф-ии 2-х переменных, непр. вместе с P'_y и Q'_x в области $\bar{D} = D \cup C$ тогда справедлива формула.

$$\boxed{\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy}$$ – ф-ла Грина.

Следствие:

1. Вычисление площадей плоских фигур:

$$Q'_x - P'_y = 1$$

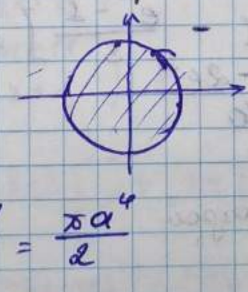
$$\iint_D 1 \cdot dx \cdot dy = S_D = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

1) $P = 0,\ Q = x \rightarrow \boxed{S_D = \oint_C x\,dy}$ ~ пл-дь плоской фигуры.

2) $P = -y;\ Q = 0 \rightarrow \boxed{S_D = -\oint_C y\,dx}$

3) $P = -\frac{y}{2};\ Q = \frac{x}{2} \rightarrow \boxed{S_D = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)}$

4298. $I = \oint_C xy^2\,dy - x^2y\,dx =$; C – окружность $x^2+y^2=a^2$ пробегаемая против хода ч.с.



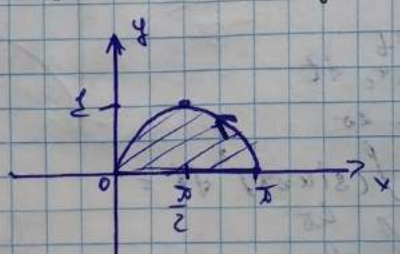
$Q = xy^2 \quad Q'_x = y^2$

$P = -x^2y \ ; \ P'_y = -x^2$

$= \iint_D (y^2+x^2)\,dx\,dy =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3\,dr = 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}$

4300. $I = \oint_C e^x[(1-\cos y)\,dx - (y - \sin y)\,dy] =$ C: контур, огранич. обл. $\begin{cases} 0 < x < \pi \\ 0 < y < \sin x \end{cases}$



$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x(-y+\sin y) \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \sin y$$

$$= \iint_D -e^x y + e^x \sin y - e^x \sin y \, dx\,dy = -\iint_D e^x y \, dx\,dy =$$

$$= -\int_0^\pi e^x dx \int_0^{\sin x} y\,dy = -\int_0^\pi e^x dx \cdot \frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \sin^2 x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = -\frac{1}{4}\int_0^\pi e^x(1-\cos 2x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^\pi e^x dx + \frac{1}{4}\int_0^\pi e^x \cos 2x\,dx = -\frac{1}{4}(e^\pi - 1) + \frac{1}{4}\int_0^\pi e^x \cos 2x\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^\pi e^x \cos 2x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = e^x \to du = e^x dx \\ dV = \cos 2x\,dx \to V = \frac{\sin 2x}{2} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[e^\pi - 1 - \int_0^\pi e^x \operatorname{Re}(e^{2ix})\,dx\right]$$

$$\int_0^\pi e^x \operatorname{Re}(e^{2ix})\,dx = \operatorname{Re}\int_0^\pi e^{x(1+2i)}\,dx =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{x(1+2i)}}{(1+2i)}\Big|_0^\pi\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{\pi+2\pi i} - 1}{1+2i}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{e^\pi - 1}{1+2i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(e^\pi-1)(1-2i)}{1-4i^2}\right) =$$

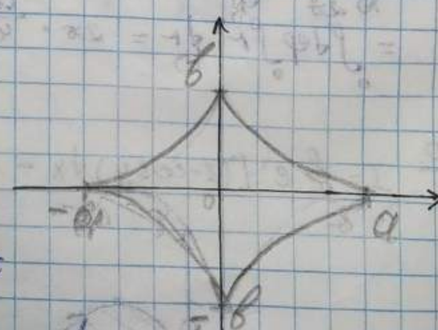
$$= \operatorname{Re}\left(\frac{e^\pi - 2e^\pi i - 1 + 2i}{5}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^\pi - 1 + i(2-2e^\pi)}{5}\right) = \frac{e^\pi - 1}{5}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{4}\left[e^\pi - 1 - \frac{e^\pi - 1}{5}\right] = -\frac{1}{4}\left[\frac{5e^\pi - 5 - e^\pi - 1}{5}\right] =$$

$$= -\frac{4e^\pi - 6}{4 \cdot 5} = \frac{3 - 2e^\pi}{10}$$

4309. Площадь, огр. астроидой

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \qquad t \in (0; 2\pi)$$



$$S_D = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 \cos^6 t \, d\left(\frac{b}{a} tg^3 t\right) =$$

$$d(tg^3 t) = 3tg^2 t \cdot \frac{dt}{\cos^2} = \frac{3\sin^2 t}{\cos^4 t}\,dt$$

$$= \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\,dt = \frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi} (\sin 2t)^2\,dt =$$

$$= \frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{3ab}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= \frac{3ab}{16}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{3ab}{16}(2\pi) = \frac{3\pi ab}{8}$$

Домашняя работа.

4296. $I = \oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y[xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,dy$

$$P'_y = (\sqrt{x^2+y^2})'_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$Q'_x = \left(xy^2 + y\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right)'_x = y^2 + y\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= y^2 + y\cdot\frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

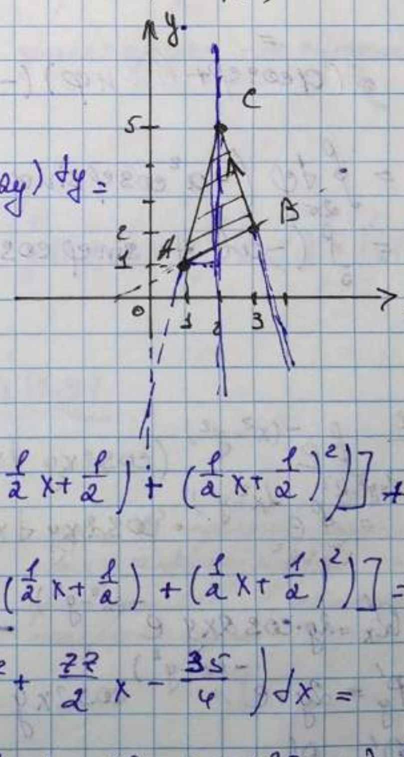
$$\Rightarrow I = \iint_D \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx\,dy = \iint_D y^2\,dx\,dy$$

4297. $I = \oint_K (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy$, где K ~ пробегаемый в положит. напр. контур треугольника ABC

$y = \frac{1}{2}(x+1)$ ~ AB $\qquad A(1,1),\ B(3,2),\ C(2,5)$

$y = 4x-3$ ~ AC

$y = -3x+11$ ~ BC



$$Q'_x - P'_y = -2x - 2(x+y) = -4x - 2y$$

$$1)\ I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} (-4x-2y)\,dy + \int_2^3 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11} (-4x-2y)\,dy =$$

$$= \int_1^2 dx\cdot\left(-(4xy+y^2)\Big|_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{4x-3}\right) +$$

$$+ \int_2^3 dx\cdot\left(-4xy - y^2\Big|_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{-3x+11}\right) =$$

$$= \int_1^2 dx\cdot\left[-\left(4x(4x-3)+(4x-3)^2\right) + \left(4x\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\right)^2\right)\right] +$$

$$+ \int_2^3 dx\left[-\left(4x(-3x+11)+(-3x+11)^2\right) + \left(4x\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\right)^2\right)\right] =$$

$$= \int_2^3\left(\frac{21}{4}x^2 + \frac{49}{2}x - \frac{483}{4}\right)dx + \int_1^2\left(-\frac{119}{4}x^2 + \frac{77}{2}x - \frac{35}{4}\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{119}{4\cdot 3}x^3 + \frac{77}{4}x^2 - \frac{35}{4}x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{21}{12}x^3 + \frac{49}{4}x^2 - \frac{483}{4}x\right)\Big|_2^3 =$$

$$= -\frac{245}{12} - \frac{105}{4} = -\frac{140}{3} = -46\frac{2}{3}$$

$$2)\ I = \int_1^3\left[\left(x+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\right)^2 \cancel{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\left(x^2+\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\right)^2\right)\right]dx +$$

$$+\int_3^2 \left[(x-3x+11)^2+3\left(x^2+(11-3x)^2\right)\right]dx\ +$$

$$+\int_2^1 \left[(x+4x-3)^2-4\left(x^2+(4x-3)^2\right)\right]dx\ =$$

$$=\int_1^3 \left(\frac{7}{4}x^2-\frac{x^2}{8}+\frac{5}{4}x+\frac{1}{8}\right)dx+\int_3^2\left(34x^2-242x+484\right)dx\ +$$

$$+\int_2^1\left(-43x^2+66x-27\right)dx\ =$$

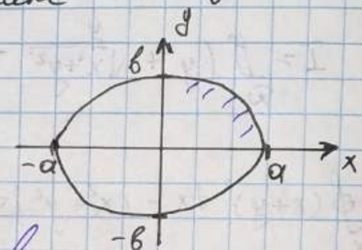
$$=\left(\frac{7}{12}x^3-\frac{x^3}{24}+\frac{5x^2}{8}+\frac{1}{8}x\right)\Big|_1^3+\left(\frac{34x^3}{3}-121x^2+484x\right)\Big|_3^2\ +$$

$$+\left(-\frac{43x^3}{3}+33x^2-27x\right)\Big|_2^1=\frac{58}{3}-\frac{283}{3}+\frac{85}{3}=-\frac{140}{3}=-46\frac{2}{3}$$

4299

$\oint (x+y)\,dx-(x-y)\,dy \ominus$, где C- эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$x=a\cos\varphi$
$y=b\sin\varphi$ $\qquad |J|=abr$



$$Q'_x-P'_y=-1-(1)=-2$$

$$\ominus\iint_D -2\,dx\,dy=-2ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\,dr=-2\pi ab$$

$=$

$$\oint(a\cos\varphi+b\sin\varphi)(-a\sin\varphi)\,d\varphi-(a\cos\varphi-b\sin\varphi)\,b\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=\oint d\varphi\left(-a^2\cos\varphi\sin\varphi-ab\sin^2\varphi-ab\cos^2\varphi+b^2\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-ab+\sin\varphi\cos\varphi(b^2-a^2)\right)d\varphi=-2\pi ab$$

Ответ: $-2\pi ab$.

4301.

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}\left(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy\right)=$$

$$=\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}\cdot\cos 2xy\,dx+e^{-(x^2-y^2)}\sin 2xy\,dy$$

$$Q'_x=2y\cdot\cos 2xy\,e^{-(x^2-y^2)}-2x\cdot e^{-(x^2-y^2)}\sin 2xy$$

$$P'_y=2y\cdot e^{-(x^2-y^2)}\cos 2xy-2x\sin 2xy\cdot e^{-(x^2-y^2)}$$

$$Q'_x-P'_y=0$$

$$\Rightarrow \oint_C e^{-(x^2-y^2)}\left(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy\right)=0$$

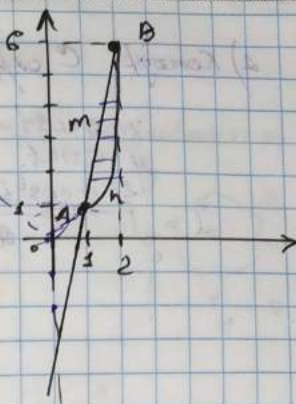
4302. $I_1=\int_{AmB}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy$

$I_2=\int_{AnB}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy$

$Q'_x = -2(x-y)$

$P'_y = 2(x+y)$

$Q'_x - P'_y = -2x+2y-2x-2y = -4x$



$$I_2 - I_1 = \oint\limits_{AnBmA} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy =$$

$$= \iint\limits_D (-4x)\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{2x^2-x}^{5x-4} (-4x)\,dy =$$

$$= \int_1^2 \left(-4x(5x-4) + 4x(2x^2-x)\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(-20x^2+16x+8x^3-4x^2\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(8x^3-24x^2+16x\right) dx =$$

$$= \left(2x^4-8x^3+8x^2\right)\Big|_1^2 = 32-64+32-2-8+8 = -2$$

Ответ: -2

$m: \ y = 5x-4$

$n: \ y = ax^2+bx+c.$

$c=0$

$\begin{cases} 6 = 4a+2b \\ 1 = a+b \end{cases}$

$-\begin{cases} 2a+b=3 \\ a+b=1 \end{cases}$

$a=2 \rightarrow b=-1$

4306. $\int\limits_{AmB} F(x,y)(y\,dx + x\,dy)$

Чтобы ничего не зависело от траектории → случай должен быть потенциальным.

$$P'_y = Q'_x$$

$$\left.\begin{aligned} P'_y &= F'_y(x,y)\cdot y + 1\cdot F(x,y) \\ Q'_x &= F'_x(x,y)\cdot x + F(x,y) \end{aligned}\right| \Rightarrow F'_y(x,y)\cdot y + F(x,y) = F'_x(x,y)\,x + F(x,y)$$

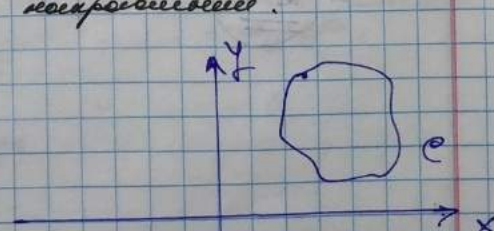
$$\Leftrightarrow y\,F'_y(x,y) = x\cdot F'_x(x,y)$$

4307. $I = \oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \oint\limits_C \frac{x\,dy}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx$, где C - простой замкнутый контур, непроходящий через н.к, пробегаемый в положительном направлении.

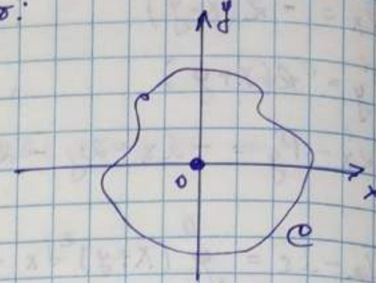
$P'_y = Q'_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

1) Н.к. находится вне контура:

т.к. $P'_y = Q'_x \rightarrow I = 0$



2) Контур C окружает начало координат:



$$x = a\cos t$$
$$y = a\sin t$$
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{a\cos^2 t + a^2\sin^2 t}{a^2}\, dt = 2\pi.$$

№311.

$$x^3 + y^3 = 3axy \quad (a>0)$$

$y = tx$

$$x^3 + t^3x^3 = 3axtx$$
$$x(1+t^3) = 3at$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \Bigg| \; -\infty < t < \infty$$

Накл. асим.: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to -1} t = -1.$

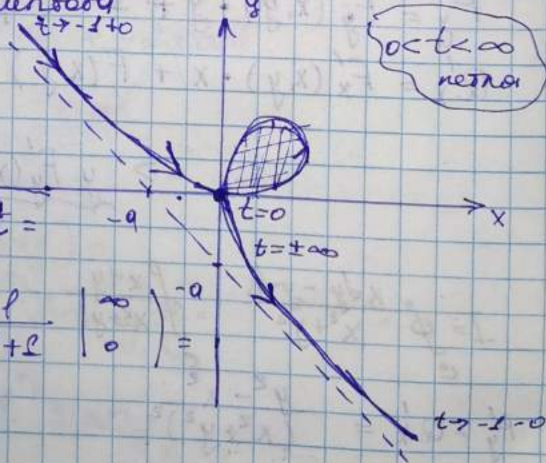
$$t^3 + 1 = 0$$
$$t = -1$$

$$y = kx + b$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{t\to -1} \frac{3at(1+t)}{1+t^3} = \lim_{t\to -1} \frac{3at(1+t)}{(1+t)(1-t+t^2)} =$$
$$= \frac{-3a}{1+1+1} = -a$$

$y = -x - a$ – наклонная асимптота

$t \to -1-0$
$t \to -1+0$
$-\infty < t < +\infty$



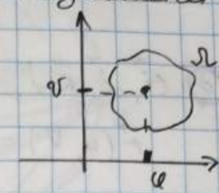
$$S_n = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2\, d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\, dt =$$
$$= \frac{3}{2}a^2 \int_0^\infty \frac{d(t^3+1)}{(t^3+1)^2} = -\frac{3}{2}a^2 \cdot \left(\frac{1}{t^3+1}\Bigg|_0^\infty\right) =$$
$$= \frac{3}{2}a^2$$

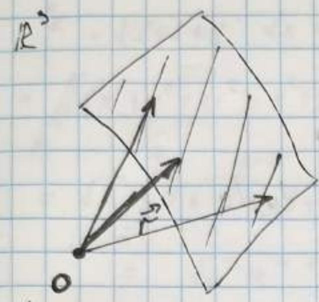
4. Поверхностный интеграл первого рода.

22.09.2..

Опр ~ Годограф векторной функции $\vec{r}: (\Omega \subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$ называется поверхностью.

$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega$





Сфера:  Куб: 

Опр. Пов-ть назыв. гладкой, если $\vec{r}(u, v) \in C^1(\Omega)$

~ кусочно-гладкая, если состоит из конечного числа гладких кусков.

Построение интеграла.

$\mathbb{R}^3$ S - кусочно-гладкая и квадрируемая (имеющая конечную площадь.)

"n" частей. ~ разбиение.

$S_i; \ i = \overline{1, n}$

На каждом кусочке выбираем произвольную точку.

Пусть на S задана огранич. ф-я $f(M)$, $M \in S$.

Построим интегральную сумму: $\lim\limits_{\max d(S_i) \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta S_i$ ~ площадь S_i

$d(S_i)$ - диаметр S_i (макс. расстояние между любыми двумя точками

$\Rightarrow \lim\limits_{\max d(S_i) \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta S_i \equiv \iint\limits_{S} f(M)\, dS$ ~ поверхностный интеграл 1-го рода.

Св-ва пов. инт. 1 рода.

① $\iint\limits_{(S)} dS = S_{\text{пов-ти}}$

② Формула вычисления:

ⓐ Векторное задание S: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (для гладкой)

(1) $$\iint\limits_S f(M)\,dS = \iint\limits_\Omega \underbrace{f(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))}_{f(\vec r(u,v))} \cdot \left|[\vec r'_u, \vec r'_v]\right| \cdot du\,dv$$

② $(\vec i, \vec j, \vec k)$

$$\vec r(u,v) = x(u,v)\vec i + y(u,v)\vec j + z(u,v)\vec k$$

$$[r'_u, r'_v] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

(2) $$\iint\limits_S f(M)\,dS = \iint\limits_\Omega f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \left\| \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \right\| du\,dv$$

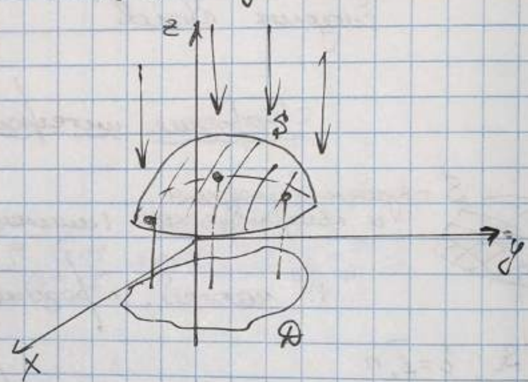
модуль из опред.

③ Явное задание S: $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D \subset R^2$

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases}$$

$u = x$; $v = y$

$$\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = -z'_x \vec i - z'_y \vec j + \vec k.$$



(3) $$\iint\limits_S f(M)\,dS = \iint\limits_D f(x, y, z(x,y)) \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dx\,dy$$

③ Для кусочно-гладкого:

$$\iint\limits_S f(M)\,dS = \sum_{k=1}^{m} \iint\limits_{S_k} f(M)\,dS.$$

S_k - гладкий кусок S.

4341. $I_1 = \oiint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$ и $I_2 = \oiint\limits_P (x^2+y^2+z^2)\,dP$

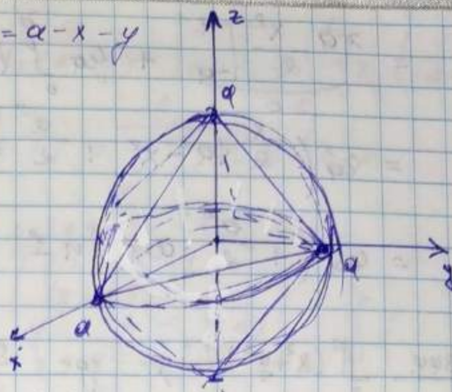
S: $x^2+y^2+z^2 = a^2$ сфера ; P: $|x|+|y|+|z| = a$ октаэдр. $(a > 0)$

$I_1 = a^2 \oiint\limits_S dS = 4\pi a^4$

$I_2 \Rightarrow$

$] \cdot du\,dv$

$x+y+z=a \quad (x>0,\ y>0,\ z\ge0) \to z=a-x-y$



$\iint_{P_1}(x^2+y^2+z^2)\,dp =$

$z'_x=-1$

$z'_y=-1.$

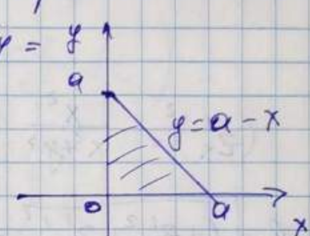
$= \iint_{P_1}(x^2+y^2+(a^2+x^2+y^2-2ax-2ay+2xy)\cdot \sqrt{1+1+1}\,dx\,dy =$

$=\iint_{P_1}(x^2+y^2+a^2+x^2+y^2-2ax-2ay+2xy)\sqrt3\,dx\,dy=$

Из картинки $I_2<I_1$

$=\sqrt3\int_0^a dx\int_0^{a-x}(2x^2+2y^2+a^2-2ax-2ay-2ay+2xy)\,dy =$

$=\sqrt3\,a^4\cdot\frac14$



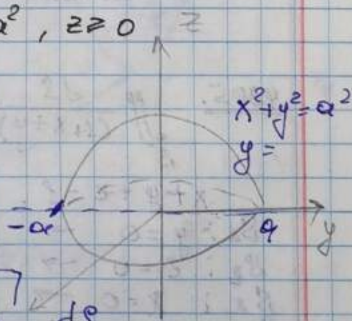
$I_2 = 2\sqrt3\, a^4$, Можно умножить на 8, т.к. $|x|+|y|+|z|=a$ коорд. равноправны, можно менять местами.

$\cancel{I_2-I_1=8\sqrt3a^4-4\pi a^4}$

$I_1-I_2=4\pi a^4-2\sqrt3\,a^4>0.$

Домашняя работа.

4343. $\iint_S(x+y+z)\,dS$, где S - поверхность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\ge0$



$z^2=a^2-x^2-y^2$; $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$(z'_x)^2=\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2=\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}$

$(z'_y)^2=\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}$

$\iint_S(x+y+z)\,dS=\iint_S\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dS=$

$=\iint_S\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dS=\int_{-a}^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy=$

$=\int_{-a}^a dx\left[ax\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy+\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy^2}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}a\,dy\right]=$

$=\int_{-a}^a dx\left[\underbrace{ax\cdot\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\Bigg|_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}}_{=\pi ax}-\underbrace{a\sqrt{a^2-x^2-y^2}\Bigg|_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}}_{=0}+2a\sqrt{a^2-x^2}\right]=$

$=\int_{-a}^a\left(\pi ax+2a\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\pi a\int_{-a}^a x\,dx+2a\int_{-a}^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$

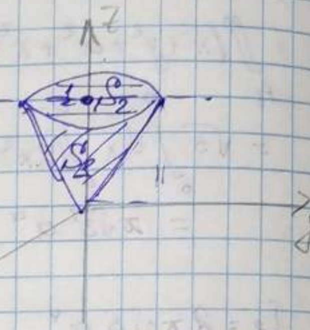
$$= \underbrace{\pi a \frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{a}}_{=0} + 4a\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= 4a\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a\right) =$$

$$= 4a\left(+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin 1\right) = 2a^3\cdot\frac{\pi}{2} = \pi a^3$$

4344. $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, где S - граница тела

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$$



$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$z^2=x^2+y^2$$

$$(z'_x)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2};\quad (z'_y)^2 = \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

1пов: $\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

2пов: $z=1$: $\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y} = 1.$

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS = \iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)\,dS + \iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)\,dS = \left\{\begin{array}{l}\text{цил. коорд.}\\ x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{array}\right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\cdot r^2\cdot\sqrt{2}\,dr + \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r\,dr =$$

$$= \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} + 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1)$$

4345. $\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, где S - граница тетраэдра $x+y+z\le 1$, $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$

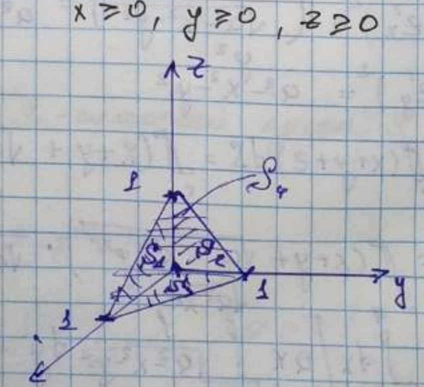
$x+y+z=1.$

S_1: $y=0 \to x+z=1 \to z=1-x$

S_3: $z=0 \to x+y=1.$

S_2: $x=0 \to y+z=1. \to z=1-y$

S_4: $x+y+z=1.$



$$z=1-x-y \to \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y} = \sqrt{3}$$

$$\iint\limits_S\frac{dS}{(1+x+y)^2} = \underbrace{\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}}_{S_4} + \underbrace{\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\frac{dz}{(1+y)^2}}_{S_2} + \underbrace{\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dz}{(1+x)^2}}_{S_1} +$$

$$+ \underbrace{\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}}_{S_3} =$$

$$= (\sqrt{3}+1)\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} + \int_0^1 dy \cdot \left(\frac{z}{(1+y)^2}\Big|_0^{1-y}\right) + \int_0^1 dx \left(\frac{z}{(1+x)^2}\Big|_0^{1-x}\right) =$$

$$= (\sqrt{3}+1)\int_0^1 dx \int_0^{1-x}\frac{d(y+x+1)}{(1+x+y)^2} + \int_0^1 \frac{(1-y)}{(1+y)^2}\,dy + \int_0^1 \frac{(1-x)}{(1+x)^2}\,dx =$$

$$\cancel{= (\sqrt{3}+1)\int_0^1 dx \cdot \left(-\frac{1}{1+x+y}\Big|_0^{1-x}\right)} \quad \left\{\begin{array}{l} 1+x+y=t \\ y=t-x-1 \\ dy=dt \\ y=1-x \Rightarrow t=2 \\ y=0 \Rightarrow t=1+x \end{array}\right\} =$$

$$= (\sqrt{3}+1)\int_0^1 dx\int_{1+x}^2 \frac{dt}{t^2} + 2\left[\int_0^1\frac{d(x)}{(1+x)^2} - \int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x)^2}\right] =$$

$$= (\sqrt{3}+1)\int_0^1 dx\cdot\left(-\frac{1}{t}\Big|_{1+x}^2\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \int_1^2 \frac{t-1}{t^2}\,dt\right) =$$

$$= (\sqrt{3}+1)\underbrace{\int_0^1\frac{(1-x)}{(1+x)}\,dx}_{\text{заменой } 1+x=t} + 2\left(\frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\right) =$$

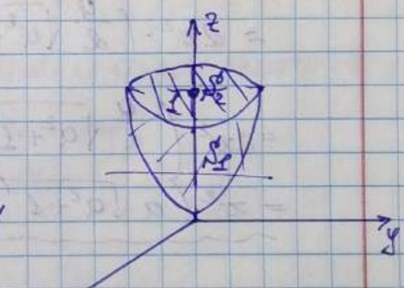
$$= (\sqrt{3}+1)\int_1^2\frac{2-t}{t}\,dt + 2(1-\ln 2) =$$

$$= \underline{\underline{(\sqrt{3}+1)(2\ln 2-1) + 2(1-\ln 2)}}$$

<u>4348.</u> $\iint_S |xyz|\,dS$, где S — часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсеченная пл-ю $z=1$.

$(z'_x)^2 = (2x)^2 = 4x^2$

$(z'_y)^2 = 4y^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$



В силу симметрии посчитаем интеграл в области $x>0,\ y>0,\ z>0 \Rightarrow |xyz| = xyz$ и умножим его на 4.

$$\iint_S |xyz| = 4\left(\iint_{S_1} xyz\,dS + \iint_{S_2} xyz\,dS\right) =$$

$$= 4\cdot\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r\cdot r^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\sqrt{1+4r^2}\,dr =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^5\cdot\sqrt{1+4r^2}\,dr = 2\pi\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,dr = \left\{\begin{array}{l} 1+4r^2=t \\ r=1 \rightarrow t=5 \\ r=0 \rightarrow t=1 \end{array}\right\} = \quad r^2 = \frac{t-1}{4}$$

$$= 2\pi\cdot\int_1^5 \frac{t^2\sqrt{t} - 2t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{128}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{64}\left(\int_1^5 t^{\frac{5}{2}}\,dt - 2\int_1^5 t^{\frac{3}{2}}\,dt + \int_1^5 t^{\frac{1}{2}}\,dt\right) =$$

$$= \frac{\pi}{64}\left(\frac{2t^{\frac{7}{2}}}{7}\Big|_1^5 - 2\cdot\frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}\Big|_1^5 + \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_1^5\right) =$$

$$= \frac{\pi}{32}\left(\frac{t^{\frac{7}{2}}}{7}\Big|_1^5 - \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}\Big|_1^5 + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_1^5\right) = \underline{\underline{\pi\cdot\left(\frac{25\sqrt{5}}{168} - \frac{1}{840}\right)}}$$

4348. $\iint\limits_S z\,dS$, где S — часть поверхности геликоида

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases} \qquad (0<u<a\ ;\ 0<v<2\pi)$$

$$\vec{r}(u,v) = u\cdot\cos v\cdot\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + v\cdot\vec{k}$$

$$[r'_u, r'_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix}$$

$$\cancel{|[r'_u, r'_v]| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u\sin v & u\cos v \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos v & \sin v \end{vmatrix} =}$$

$$\cancel{= u\cos^2 v + u\sin^2 v + \sin v - \cos v = u + \sin v - \cos v}$$

$$[r'_u, r'_v] = \vec{i}\begin{vmatrix} \sin v & 0 \\ u\cos v & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \cos v & 0 \\ -u\sin v & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u\sin v & u\cos v \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\sin v - \vec{j}\cos v + \vec{k}\left(u\cos^2 v + u\sin^2 v\right) =$$

$$= \vec{i}\sin v - \vec{j}\cos v + \vec{k}\cdot u$$

$$|[r'_u; r'_v]| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1+u^2}$$

$$\iint\limits_S z\,dS = \int_0^{2\pi} v\,dv \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du = \frac{v^2}{2}\Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du = \Big\{$$

$$= 2\pi^2\cdot\left(\frac{u}{2}\sqrt{u^2+1} + \frac{1}{2}\ln|u+\sqrt{u^2+1}|\,\Big|_0^a\right) =$$

$$= 2\pi^2\left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{2}\ln|a+\sqrt{a^2+1}|\right) =$$

$$= \pi^2\left(a\sqrt{a^2+1} + \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right)$$

4349. $\iint\limits_S z^2\,dS$, где S — часть поверхности конуса.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\alpha \\ y &= r\sin\varphi\sin\alpha \\ z &= r\cos\alpha \end{aligned} \qquad (0\le r\le a\ ;\ 0\le\varphi\le 2\pi)$$

α — постоянная $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\vec{g}(r,\varphi) = r\cos\varphi\sin\alpha\cdot\vec{i} + r\sin\varphi\sin\alpha\cdot\vec{j} + r\cos\alpha\cdot\vec{k}$$

$$[g'_r; g'_\varphi] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi\sin\alpha & \sin\varphi\sin\alpha & \cos\alpha \\ -r\sin\varphi\sin\alpha & r\cos\varphi\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} \sin\varphi\sin\alpha & \cos\alpha \\ r\cos\varphi\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\alpha & \cos\alpha \\ -r\sin\varphi\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\alpha & \sin\varphi\sin\alpha \\ -r\sin\varphi\sin\alpha & r\cos\varphi\sin\alpha \end{vmatrix} =$$

$= -\vec{i}\, r\cos\varphi\cos\alpha\sin\alpha - \vec{j}\, r\sin\varphi\cos\alpha\sin\alpha + \vec{k}\left(r\cos^2\varphi\sin^2\alpha + r\sin^2\varphi\sin^2\alpha\right) =$

$= -\vec{i}\, r\cos\varphi\cos\alpha\sin\alpha - \vec{j}\, r\sin\varphi\cos\alpha\sin\alpha + \vec{k}\cdot r\sin^2\alpha$

$|[g'_r; g'_\varphi]| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha\sin^2\alpha + r^2\sin^2\varphi\cos^2\alpha\sin^2\alpha + r^2\sin^4\alpha} =$

$= r\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha} = r\sin\alpha\sqrt{1} = r\sin\alpha$

$\iint\limits_S z^2\, dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\cos^2\alpha\cdot r\sin\alpha\, dr =$

$= 2\pi\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^a = \frac{\pi a^4}{2}\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha$

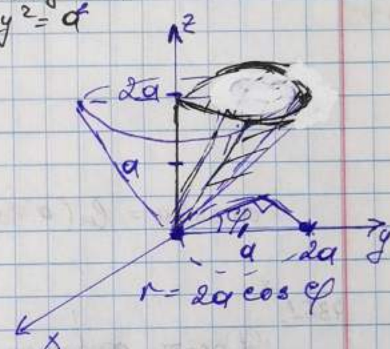
4350. $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$, где S - часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной $x^2+y^2=2ax$

$x^2-2ax+a^2+y^2=a^2$

$(x-a)^2+y^2=a^2$

$(z'_x)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2}$; $(z'_y)^2 = \frac{y^2}{x^2+y^2}$

$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{2}$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r \end{cases}$$

$\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} (r^2\cos\varphi\sin\varphi +$

$+ r^2\sin\varphi + r^2\cos\varphi)\,dr = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3(\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\,dr =$

$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,(\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2a\cos\varphi} =$

$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8a^3\cos^3\varphi}{3}(\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\,d\varphi =$

$= \frac{8\sqrt{2}a^3}{3}\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin\varphi\,d\varphi + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi}_{\text{вн. под дифф.}} + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi}_{\text{понижен. ст.}}\right) =$

$= \frac{8\sqrt{2}a^3}{3}\left(0+0+\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2}\pi a^3$

$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,(\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\varphi} =$

$= \sqrt{2}\cdot\frac{16a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,(\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\,d\varphi =$

$= 4\sqrt{2}a^4\left(\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin\varphi\,d\varphi}_{=0} + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin\varphi\,d\varphi}_{=0} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,d\varphi\right) =$

$= \frac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4$

4348.* $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du = 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du = 2\pi^2 \int_0^{\operatorname{arcsh} a} ch^2 t\,dt =$

$= 2\pi^2 \int_0^{\operatorname{arcsh} a} \frac{1+ch\,2t}{2}\,dt = \pi^2 \operatorname{arcsh} a + \pi^2 \frac{sh\,2t}{2}\Big|_0^{\operatorname{arcsh} a} =$

$= \pi^2 \operatorname{arcsh} a + \pi^2 a\sqrt{1+a^2} = \pi^2\left(\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right) + a\sqrt{1+a^2}\right)$

$sh\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = a \to 2a e^t = e^{2t} - 1$

$(e^t)^2 - 2a e^t - 1 = 0$

$e^t = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2+4}}{2} =$ "−" не подходит.

$e^t = a + \sqrt{1+a^2}$

$t = \ln(a + \sqrt{1+a^2})$

$\operatorname{arcsh} a = \ln(a + \sqrt{1+a^2})$

4351.*

Док-ть формулу Пуассона:

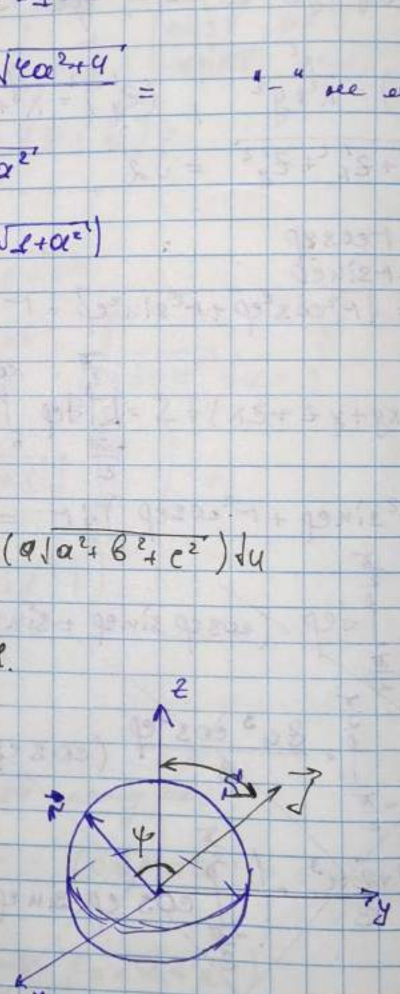
$$\iint_S f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi \int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du$$

S: поверхность един. сферы $x^2+y^2+z^2=1$.

1) Вводим искусственно постоянный вектор $\vec{d} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$ax+by+cz = (\vec{d}, \vec{r}) = |\vec{d}|\cdot|\vec{r}|\cos\psi =$

$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot 1\cdot\cos\psi$



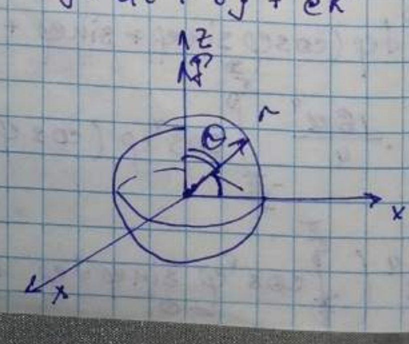
2) Совместим ось z с $\vec{d}$

$\begin{cases} x = \cos\varphi\cdot\sin\theta \\ y = \sin\varphi\,\sin\theta \\ z = \cos\theta \end{cases}$; $r = 1$

$u = \varphi$
$v = \theta$

$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{d} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$



$$[r'_\varphi; r'_\theta] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} = -\sin^2\theta\cos\varphi\cdot\vec i - \sin^2\theta\sin\varphi\cdot\vec j + \vec k\,\sin\theta\cos\theta\,(-\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)$$

$$|[r'_\varphi; r'_\theta]| = \sqrt{\sin^4\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \sin^2\theta\cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} = \sin\theta$$

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\theta\right)\cdot\sin\theta\,d\theta =$$

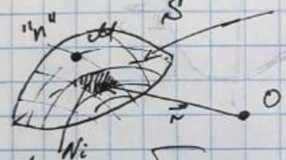
$$= 2\pi\int_0^{\pi} f\Big(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\underbrace{\cos\theta}_{u}\Big)\,d\underbrace{\cos\theta}_{u} = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot u\right)du$$

ч.т.д.

29.09.21.

Приложения поверхностного интеграла первого рода.

①



S — материальная оболочка

$\rho(M)$ – плотность массы в т. M.

$S_i \quad i=\overline{1,n}$

Масса оболочки: (m)

$$\Delta m_i \approx \rho(N_i)\,\Delta S_i$$

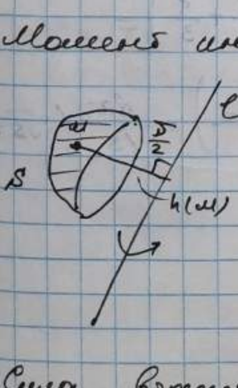
$$\boxed{m = \lim_{\max d(S_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(N_i)\,\Delta S_i = \iint_S \rho(M)\,dS}$$

② $\vec r_{ц.м.} = ?$ центр масс

$$\boxed{\vec r_{ц.м.} = \frac{1}{m}\iint_S \rho\vec r\,dS}$$

$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$ $\qquad$ $\vec r$ – „гуляет“ по поверхности

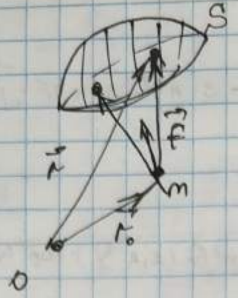
③ Момент инерции:



$$\boxed{I = \iint_S h^2(M)\,\rho(M)\,dS}$$

$h(M)$ – перпенд. от оси вращения до точки на поверхности.

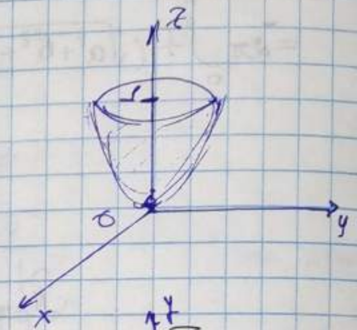
④ Сила взаимодействия поверхности и точечной массы.



$$\vec F = Gm \iint_S \rho \frac{\vec r - \vec r_0}{|\vec r - \vec r_0|^3}\, dS$$

4352.1 Найти массу параболической оболочки.

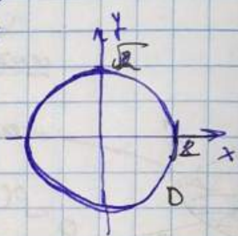
$$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad (0 \le z \le 1)$$



$$\rho = z$$

$$m = \iint_S z\, dS =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = y$$



$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$$

$$m = \iint_\Omega z\sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt2} \frac{1}{2}(r^2) \cdot r \cdot \sqrt{1+r^2}\, dr =$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt2} r^3 \sqrt{1+r^2}\, dr = \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt2} r^2\sqrt{1+r^2}\, dr^2 = \left\{ \cancel{r^2 = u} \right\} =$$

$$\cancel{= \frac{\pi}{2}\int_0^2 u\sqrt{1+u}\, du} = \left\{ \begin{matrix} 1+r^2 = t \\ r^2 = t-1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^3 (t-1)\sqrt t\, dt = \frac{\pi}{2}\left(\int_1^3 t^{\frac32} dt - \int_1^3 t^{\frac12} dt\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{2t^{\frac52}}{5}\Bigg|_1^3 - \frac{2t^{\frac32}}{3}\Bigg|_1^3 \right) =$$

$$= \pi\left(\frac{3^{\frac52}}{5} - \frac{1}{5} - \frac{3^{\frac32}}{3} + \frac{1}{3} \right) = \pi\left(\frac{9\sqrt3}{5} - \sqrt3 - \frac15 + \frac13 \right) =$$

$$= \pi\left(\frac{27\sqrt3}{15} - \frac{15\sqrt3}{15} - \frac{3}{15} + \frac{5}{15} \right) = \pi\left(\frac{12\sqrt3 + 2}{15} \right) = \frac{2\pi}{15}\left(6\sqrt3+1\right)$$

Домашняя работа

№352.2 Найти массу полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z \geq 0)$, плотность которой в каждой её точке $M(x,y,z)$ равна $\frac{x}{a}$

$$\rho = \frac{x}{a}$$

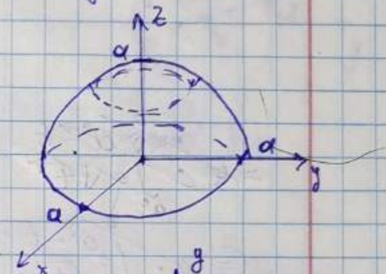
$$m = \iint_S \rho(M)\,dS = \iint_S \frac{x}{a}\,dS$$

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \rightarrow z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

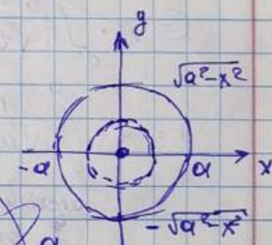
$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}} = \sqrt{\frac{a^2-\cancel{x^2}-\cancel{y^2}+\cancel{x^2}+\cancel{y^2}}{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$



$$m = \iint_{\Omega} \frac{x}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \iint_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\Omega} \frac{x}{z}\,dx\,dy \;\ominus$$



~~Сферические координаты:~~ $z=0 \rightarrow y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad |I| = r^2\sin\theta$$

$$\ominus \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a} \frac{r\cos\varphi\sin\theta}{r\cos\theta}\,dr = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta \int_0^a dr =$$

$$= \sin\varphi\Big|_0^{2\pi}$$

$$\ominus \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r\cos\varphi\cdot r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr$$

$$r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$$m = \iint_S \rho(M)\,dS = \iint_S \frac{x}{a}\,dS$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = \sqrt{a^2-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-r^2(\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta)} = \sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta} \end{cases}$$

$$\frac{-2r}{2\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = \sqrt{a^2-r^2} \end{cases} \qquad \vec{\rho} = r\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\varphi\,\vec{j} + \sqrt{a^2-r^2}\,\vec{k}$$

$$[\rho_r';\rho_\varphi'] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & -\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \sin\varphi & -\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} \\ r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} \\ -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\vec{i} + \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\vec{j} + \vec{k}(r)$$

$$|[\rho'_r;\rho'_\varphi]| = \sqrt{\frac{r^4\cos^2\varphi}{a^2-r^2}+\frac{r^4\sin^2\varphi}{a^2-r^2}+r^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{r^4}{a^2-r^2}+r^2} = \sqrt{\frac{r^4+a^2r^2-r^4}{a^2-r^2}} = \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$\Rightarrow m = \iint_S \frac{x}{a}\,dS = \iint_\Omega \frac{r\cos\varphi}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,d\varphi\,dr =$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi}_{=0}\cdot\int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr = 0 \qquad ?$$

$$I = 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^a\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr = 4\cdot\int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr = \left\{\begin{array}{l} a^2-r^2=t \\ r^2=a^2-t \\ dt=-2r\,dr \\ r=a \to t=0 \\ r=0 \to t=a^2 \\ dr= \end{array}\right\} =$$

$$r=\sqrt{a^2-t} \qquad dr = -\frac{dt}{2r} = -\frac{dt}{2\sqrt{a^2-t}}$$

$$= 4\cdot\int_{a^2}^0 \frac{a^2-t}{\sqrt t}\cdot\left(-\frac{dt}{2\sqrt{a^2-t}}\right) = -2\int_{a^2}^0\frac{\sqrt{a^2-t}}{\sqrt t}\cdot dt$$

$$I = 4\cdot\int_0^a\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr = \left\{\begin{array}{l} r=\sin t \;;\; dr=\cos t\,dt \\ \arcsin a=t \\ \arcsin 0=t \end{array}\right\} =$$

$$= 4\cdot\int_0^{\arcsin a}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\,dt = 4\cdot\int_0^{\arcsin a}\sin^2 t\,dt =$$

$$= 4\cdot\int_0^{\arcsin a}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2\cdot\int_0^{\arcsin a}(dt-\cos 2t\,dt) =$$

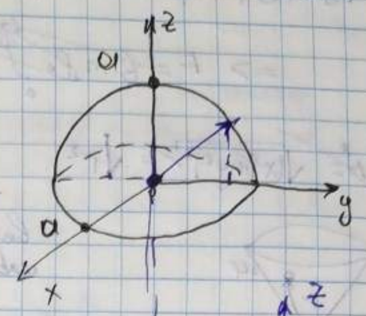
$$= 2\cdot\left(t\Big|_0^{\arcsin a} - \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\arcsin a}\right) = \qquad ?$$

$$= 2\cdot\left(\arcsin a - \frac{\sin(2\arcsin a)}{2}\right) = 2(\arcsin a - a\sqrt{1-a^2})$$

4353. Вычислить момент инерции однородной сферической оболочки $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq 0)$ плотности ρ_0 относительно оси Oz.

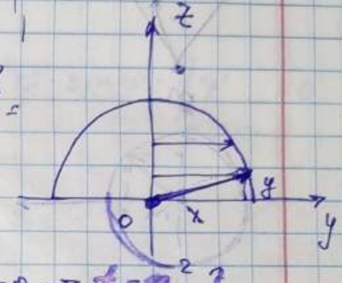
$h^2=x^2+y^2$

$$I_z=\iint_S (x^2+y^2)\rho_0\, dS \ominus$$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\ ;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$



$$\ominus\ \rho_0\iint_{\Omega}(x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\left\{\begin{matrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{matrix}\right\}=$$

$$=a\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr=2\pi a\rho_0\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr=$$

$$=\left\{\begin{matrix}a^2-r^2=t\ ;\ r=\sqrt{a^2-t}\\ r^3=(a^2-t)^{\frac{3}{2}}\end{matrix}\ ;\ dr=\frac{-dt}{2\sqrt{a^2-t}}\ ;\ \begin{matrix}r=0\to t=a^2\\ r=a\to t=0\end{matrix}\right\}=$$

$$=2\pi a\rho_0\int_{a^2}^{0}-\frac{(a^2-t)^{\frac{3}{2}}\,dt}{2\sqrt{t}\,\sqrt{a^2-t}}=2\pi a\rho_0\int_{a^2}^{0}\frac{t-a^2}{2\sqrt{t}}\,dt=$$

$$=\pi a\rho_0\cdot\left(\int_{a^2}^{0}t^{\frac{1}{2}}dt-a^2\int_{a^2}^{0}t^{-\frac{1}{2}}dt\right)=\pi a\rho_0\cdot\left(\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_{a^2}^{0}-2a^2\cdot t^{\frac{1}{2}}\Big|_{a^2}^{0}\right)=$$

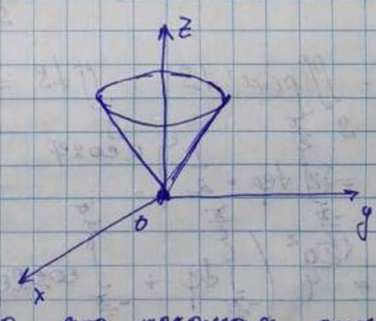
$$=\pi a\rho_0\left(\frac{2}{3}\left(-\sqrt{(a^2)^3}\right)-2a^2\cdot\left(-\sqrt{a^2}\right)\right)=\pi a\rho_0\left(-\frac{2}{3}a^3+2a^3\right)=$$

$$=\pi a\rho_0\cdot\left(\frac{4}{3}a^3\right)=\frac{4}{3}\pi a^4\rho_0$$

4357. С какой силой однородная усечённая коническая поверхность $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r$ $(0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0<b\leq r\leq a)$ плотности ρ_0 притягивает материальную точку массы m, помещённую в вершине этой поверхности

?

$$\vec{F}=Gm\iint_S\frac{\vec{r}-\vec{r_0}}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^3}\,\rho\, dS$$



$\vec{r_0}=0$, т.к. m - в вершине!

$\rho=\rho_0=const.$

$$\vec{F}=Gm\rho_0\iint_S\frac{\vec{r}}{r^3}\,dS$$

Из соображений симметрии ясно, что искомая сила имеет лишь проекцию на ось z:

$$F_z=Gm\rho_0\iint_S\frac{z}{r^3}\,dS$$

$$\vec{\rho}=r\cos\varphi\cdot\vec{i}+r\sin\varphi\,\vec{j}+r\cdot\vec{k}$$

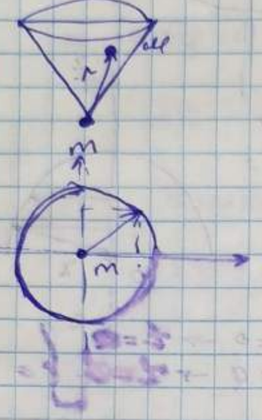
$$[\vec{\rho_r};\vec{\rho_\varphi}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \cos\varphi&\sin\varphi&1\\ -r\sin\varphi&r\cos\varphi&0\end{vmatrix}=-r\cos\varphi\cdot\vec{i}+r\sin\varphi\,\vec{j}+r\cdot\vec{k}$$

$$|[\rho_r'; \rho_\varphi']| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + r^2} = r\sqrt{2}$$

$$\cancel{\Rightarrow F = Gm\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^a \frac{r\cdot r\sqrt{2}}{r^3}\, dr = Gm\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^a \frac{\sqrt{2}}{r}\, dr}$$

$$\cancel{r^3 = \sqrt{(x^2+y^2)^3} = \sqrt{r^2}}$$

Расстояние от материальной точки до точек поверхности следующим образом выражается через используемую в двойном интеграле радиальную координату:



$$\rho_m = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + r^2} = \sqrt{2}\, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow F = Gm\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^a \frac{\sqrt{2}\cdot r^2}{\sqrt{2}\cdot 2 r^3}\, dr = Gm\rho_0\, \pi \ln\frac{a}{b}$$

Ответ: $F = Gm\rho_0 \pi \ln\frac{a}{b}$

4355 а) Найти координаты центра масс части однородной поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2=ax$

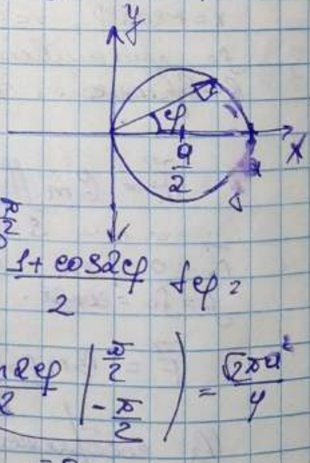
$\rho_0 = 1$, т.к. однородная поверхность.

$x^2+y^2=ax$

$x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}ax + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4}$

$(x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$

рисунок аналогичен з. N4350



$$\vec r_{ц.м.} = \frac{1}{m}\iint_S \rho \vec r\, dS$$

$$m = \iint_S \rho(M)\, dS = \iint_S dS = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r\, dr = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a\cos\varphi} = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}a^2}{4}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi\, d\varphi\right) = \frac{\sqrt{2}a^2}{4}\left(\pi + \underbrace{\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{4}$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{2}$

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_S x\, dS$$

$$x_c = \frac{\sqrt{2}}{m}\iint_D x\, dx\, dy = \frac{1}{m_0}\iint_D x\, dx\, dy =$$

~ площадь m исследуемого куска конической поверхности связана с площадью m_0 - круга в плоскости $z=0$ равенством:

$$m_0 = \frac{m}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot 4}{\sqrt{2}\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2\cos\varphi\, dr = \frac{4}{\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{a\cos\varphi} =$$

$$= \frac{4\cdot a^3}{3\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{4a^3}{3\pi a^2}\cdot\frac{3\pi}{8} = \frac{a}{2}$$

$$y_c = \frac{\sqrt{2}\cdot 4}{\sqrt{2}\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} r^2\sin\varphi\, dr = \frac{4a^3}{3\pi a^2}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi}_{=0} = 0$$

$$z_c = \frac{\sqrt{2}}{m}\iint\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{2}\cdot 4}{\sqrt{2}\pi a^2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} r^2\, dr =$$

$$= \frac{4\, a^3}{\pi a^2\cdot 3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{4a}{3\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\, d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{4a}{3\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d(\sin\varphi) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\, d(\sin\varphi)\right) = \frac{4a}{3\pi}\left(\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{4a}{3\pi}\left(2 - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{4a}{3\pi}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{16a}{9\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_c = \frac{a}{2} \\ y_c = 0 \\ z_c = \frac{16a}{9\pi} \end{cases}$$

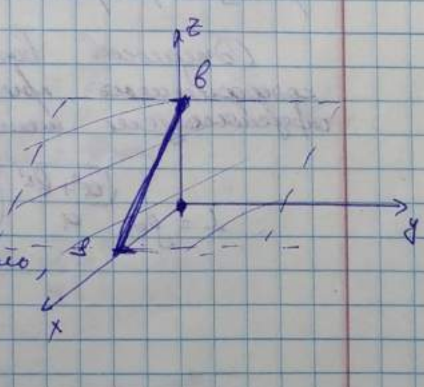
4354. (методичка.)

Вычислить момент инерции однородной конической оболочки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \le z \le b)$$ постоянной плотностью ρ_0,

относительно прямой:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$



$$I = \rho_0\iint_S r_\perp^2\, dS$$

Найдем искомый квадрат расстояния $r_\perp^2$, опустив на указанную прямую, из точки с координатами (x, y, z), перпендикуляр. Очевидно, он достигает заданную прямую в точке с координатами $(x, 0, b)$. А значит, квадрат длины перпендикуляра

$$r_\perp^2 = y^2 + (z-b)^2$$

Следовательно, искомый интеграл принимает вид:

$$I=\rho_0 \iint\limits_S \left(y^2+(z-b)^2\right) dS$$

Преобразуем: $z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$

и спроектировав её на горизонтальную плоскость (x,y). Принимая во внимание, что образующие конической оболочки наклонены к плоскости (x,y) под одним и тем же углом α ($tg\,\alpha=\frac{b}{a}$), получим

$$dS=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\,dx\,dy$$

В итоге приходим к двойному интегралу:

$$I=\rho_0\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\iint\limits_{\Omega}\left[y^2+\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2\right]dx\,dy$$

Здесь Ω – круг $x^2+y^2\le a^2$ в плоскости (x,y). Перейдя в интеграле к полярным координатам будем иметь:

$$I=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\left[\rho^2\sin^2\varphi+\left(\frac{b}{a}\rho-b\right)^2\right]\rho\,d\rho$$

Вычисляем вначале интеграл от первого слагаемого:

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^a\rho^3\,d\rho=\pi a^4/4$$

Интеграл от второго слагаемого равен

$$\frac{b^2}{a^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a(\rho-a)^2\rho\,d\rho=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int\limits_0^a\rho^2(a-\rho)\,d\rho=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^a=$$
$$=2\pi b^2a^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi b^2a^2}{6}$$

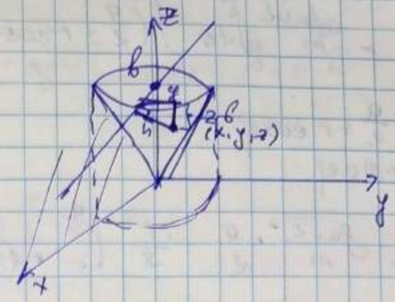
Здесь мы для упрощения интеграла воспользовались тем геометрически очевидным фактом, что график функции $y=f(a-\rho)$ получается из графика $y=f(\rho)$ зеркальным отражением относительно вертикальной прямой $x=a/2$. В нашем случае это означает, что площади криволинейных трапеций, ограниченных кривыми $(\rho-a)^2\rho$ и $\rho^2(a-\rho)$, одинаковы.

Объединяя вычисленные интегралы и домножив их на коэффициент при выписанном выше двойном интеграле, определяющем момент инерции оболочки, получим окончательно:

$$I=\rho_0\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left(\frac{\pi a^4}{4}+\frac{\pi b^2a^2}{6}\right)=\rho_0\frac{\pi a}{12}\sqrt{a^2+b^2}\,(3a^2+2b^2)$$

№4354 $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \quad (0\le z\le b)$

6.10.21.



относ. $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}=t$

$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=b \end{cases}$$

$h^2=y^2+(z-b)^2$

$$I=\iint_S (y^2+(z-b)^2)\,\rho_0\, dS=\rho_0\iint_\Omega [y^2+(z-b)^2]\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,dx\,dy \ominus$$

$$z=\sqrt{\frac{b^2(x^2+y^2)}{a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$z'_x=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ z'_y=\frac{b}{a}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\ominus\ \rho_0\iint_\Omega \left[y^2+\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2\right]\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,dx\,dy=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\left[r^2\sin^2\varphi+\left(\frac{b}{a}r-b\right)^2\right]r\,dr=$$

$$\int_0^a\left[r^2\sin^2\varphi+b^2\left(\frac{r^2}{a^2}-2\frac{r}{a}+1\right)\right]r\,dr=\int_0^a r^3\sin^2\varphi\,dr+\int_0^a\frac{b^2r^3}{a^2}dr-2\int_0^a\frac{b^2r^2}{a}dr+$$

$$+\int_0^a b^2r\,dr=\frac{a^4}{4}\sin^2\varphi+\frac{b^2a^2}{4}-\frac{2}{3}b^2a^2+\frac{b^2a^2}{2}=$$

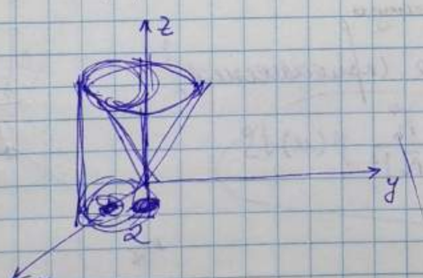
$$=\frac{a^4}{4}\sin^2\varphi+\frac{b^2a^2}{12}$$

$$\ominus\ \frac{\rho_0}{a}\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{b^2a^2\pi}{6}+\frac{a^4}{84}\cdot 2\pi\right]=\rho_0\frac{\pi a}{12}\sqrt{a^2+b^2}\,(3a^2+2b^2)$$

№4355. $S:\ z=\sqrt{x^2+y^2}$

$x^2+y^2=ax$

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$



$\rho=\rho_0=\mathrm{const}$

$$\vec r_{у.м.}=\frac{1}{m}\iint_S \vec r\rho_0\,dS$$

$$\begin{cases} x_{у.м.}=\frac{a}{2} \\ y_{у.м.}=0 \quad \text{из симметрии} \\ z_{у.м.}=\frac{\rho_0}{a} \end{cases}$$

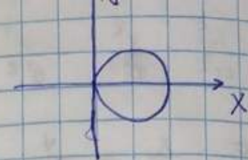
$$m=\iint_S \rho(M)\,dS$$

$$m=\rho_0\iint_S dS=\rho_0\iint_D\sqrt{1+1}\,dx\,dy=\rho_0\sqrt2\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\frac{\pi\rho_0\sqrt2\,a^2}{4}$$

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x_{у.м.}=\frac{1}{m}\iint_S x\rho_0\,dS=\frac{\rho_0}{m}\iint_D x\sqrt2\,dx\,dy=$$

$$= \frac{\rho_0\sqrt{2}}{m}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} + r\cos\varphi\right) r\,dr =$$

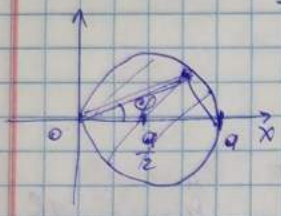


$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$= \frac{\rho_0\sqrt{2}}{m}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{a}{2}}\cdot 2\pi = \frac{\pi\rho_0\sqrt{2}a^3}{8m} = \frac{\pi\rho_0\sqrt{2}a^3\cdot 4}{8\pi\rho_0\sqrt{2}a^2} = \frac{a}{2}$$

$$z_{ц.м.} = \frac{1}{m}\iint_S \rho\, dS = \frac{\rho_0}{m}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy = \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\rho_0}{m}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2\,dr = \frac{\sqrt{2}\rho_0}{3m}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot r^3\Big|_0^{a\cos\varphi} =$$



$$= \frac{\sqrt{2}\rho_0 a^3}{3m}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 d\varphi =$$

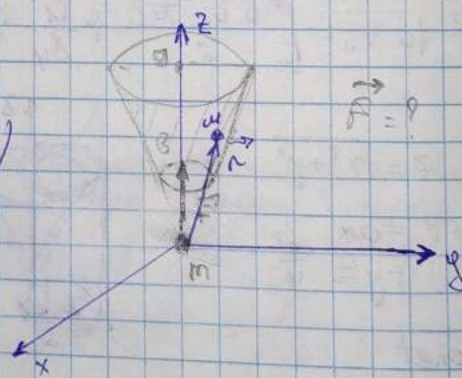
$$= \frac{\sqrt{2}\rho_0 a^3}{3m}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)\, d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\rho_0 a^3}{3m}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}\rho_0 a^3}{3m}\cdot\frac{4}{3} = \frac{\rho_0\sqrt{2}a^3\cdot 4}{9m}$$

$$\Rightarrow z_{ц.м.} = \frac{16}{9}a\pi$$

№4357. $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = r \end{cases}$ — коническая поверхность $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$, $\quad 0 < b \le r \le a$

m - в вершине конуса



$\vec{F} = F\cdot\vec{k}$, $F > 0$ (притяжение)

$$\vec{F} = G\cdot m \iint_S \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}\,\rho(M)\,dS$$

$\vec{r}_0 = 0$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$F = Gm\rho_0\iint_S \frac{z\,dS}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = m\rho_0 G\iint_\Omega \frac{r\cdot\ \ \cdot dr\,d\varphi}{\left(\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + r^2}\right)^3} =$$

$\sqrt{1 + z'_x + z'_y} = \sqrt{2}$ ×

$$= m\rho_0 G\iint_\Omega \frac{r\,dr\,d\varphi\cdot r\sqrt{2}}{(2r^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$|[r'_u ; r'_\varphi]| \to \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = |-r\cos\varphi\,\vec{i} - r\sin\varphi\,\vec{j} + r\cdot\vec{k}| =$$

$$= \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + r^2} = r\sqrt{2}$$

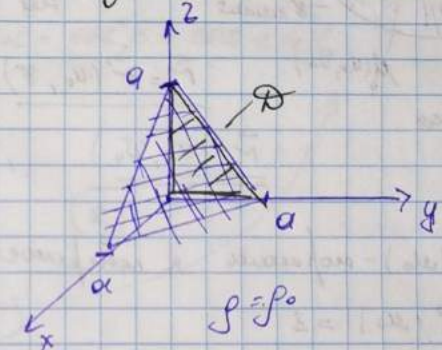
$$= \frac{m\rho_0 G}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^a \frac{dr}{r} = m\rho_0 G\cdot\pi\cdot\ln\frac{a}{b}$$

$$\vec{F} = \pi m\rho_0 G \ln\frac{a}{b}\cdot\vec{k}$$

№ 4858.(3) статический момент однородной треуг. пластинки.

$x+y+z=a \quad \to \quad x = a-y-z$

$(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$



$\rho = \rho_0$

~~$I_0 = \iint_S \rho\, dS$~~

$$\vec{r} = \iint_S \rho(M)\cdot \ldots$$

отн. Ox:

$$I = \iint_S \rho(M)\sqrt{y^2+z^2}\,dS =$$

$$= \rho_0 \iint_D \sqrt{y^2+z^2}\cdot\sqrt{3}\,dy\,dz = \sqrt{3}\rho_0\int_0^a dy\int_0^{a-y}\sqrt{y^2+z^2}\,dz = \left\{ \begin{matrix} z = y\,tg\,t \\ \text{или } z = y\,sh\,t \end{matrix} \right\}.$$

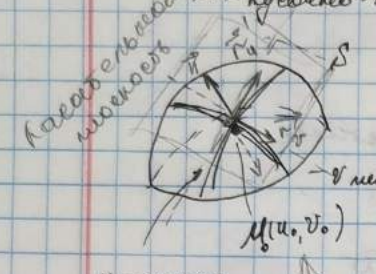
$$dS = \sqrt{1 + {x'_y}^2 + {x'_z}^2} = \sqrt{3}$$

6. Поверхностные интегралы второго рода.

Опр. Пов-ть S называется простой, если её параметризация $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ — осуществляет взаимно-однозначное отображение Ω в $\mathbb{R}^3$.

Опр. S — гладкая, если $\vec{r}(u, v) \in C^1(\Omega)$

S — кусочно-гладкая, когда конечное число гладких кусков.



$\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ — кривая на S — u-линия

$\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ — v-линия

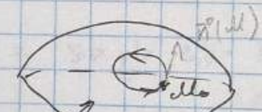
$\vec{r}_u'(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v'(u_0, v_0)$

$\vec{n}(M_0)$ — нормаль к поверхности S в т. M_0

$|\vec{n}(M_0)| = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{n} = \dfrac{[\vec{r}_u'; \vec{r}_v']}{|[\vec{r}_u'; \vec{r}_v']|}}$

$S^+ : (M, \vec{n}(M))$ — выбранная сторона пов-ти

$S^- : (M, -\vec{n}(M))$ — другая сторона двусторонняя пов-ть.



Лист Мёбиуса — односторонняя поверхность.

Опр. Если $\exists$ хотя бы один замкнутый контур на пов-ти S, при обходе по которому направление нормали меняется на противоположное, то S — односторонняя.

Опр. Пусть S — двусторонняя пов-ть с выбранной стороной $(M, \vec{n}(M))$ и $\vec{A}(M)$, $M \in S$ — огранич. вект. ф-я, заданная на S.

Тогда, $\iint\limits_S (\vec{A}(M), \vec{n}(M))\, dS$ — поверхностный интеграл 2-го рода.

1) Замечание: интеграл меняет знак при выборе другой стороны

2) Вычисление:

S: $\vec r = \vec r(u,v)$, $\quad (u,v)\in \Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\iint_S (\vec A,\vec n)\,dS = \iint_\Omega \left(\vec A, \frac{[\vec r_u{}', \vec r_v{}']}{|[\vec r_u{}',\vec r_v{}']|}\right)\cdot|[\vec r_u{}',\vec r_v{}']|\,du\,dv =$$

$(\vec r_u, \vec r_v{}', \vec n)$ — правая тройка.

$$= \boxed{\iint_\Omega (\vec A, \vec r_u{}', \vec r_v{}')\,du\,dv} \qquad (1)$$

$(\vec i,\vec j,\vec k)$

$\vec A = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$

$\vec n = \cos\alpha\cdot \vec i + \cos\beta\cdot \vec j + \cos\gamma\cdot \vec k, \qquad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$\vec r = x(u,v)\vec i + y(u,v)\vec j + z(u,v)\vec k$

$$\boxed{\iint_S (\vec A,\vec n)\,dS = \iint_\Omega \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} du\,dv} \qquad (2)$$

$$\iint_S (\vec A,\vec n)\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \boxed{\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy} \qquad (3)$$

Примеры:

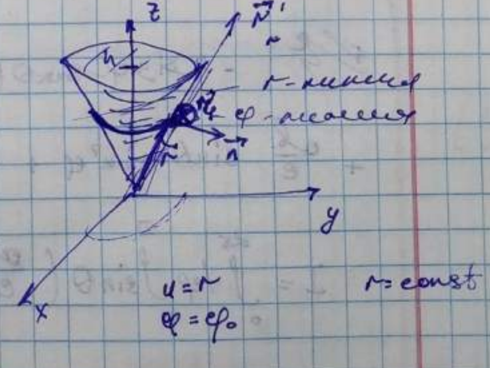
4364.

$$I = \iint_S \underbrace{(y-z)}_{P}\,dy\,dz + \underbrace{(z-x)}_{Q}\,dz\,dx + \underbrace{(x-y)}_{R}\,dx\,dy$$

S - внешняя сторона конической поверхности $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \to z^2 = r^2 \quad \to z = r$$

$$S = \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = r \end{cases} \qquad \Omega:\ \begin{matrix} 0\le r\le h \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{matrix}$$



$\vec A = (y-z)\vec i + (z-x)\vec j + (x-y)\vec k$

$(\vec A, \vec r_\varphi{}', \vec r_r{}') =$

$(\vec r_\varphi{}', \vec r_r{}', \vec n)$ - правая тройка. (из рисунка)

$$(\vec A, \vec r\,'_\varphi, \vec r\,'_r) = \begin{vmatrix} (r\sin\varphi - r) & (r - r\cos\varphi) & (r\cos\varphi - r\sin\varphi) \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos\varphi(\sin\varphi - 1) - r^2\sin^2\varphi(\cos\varphi - r\sin\varphi) + r^2\cos^2\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi) +$$

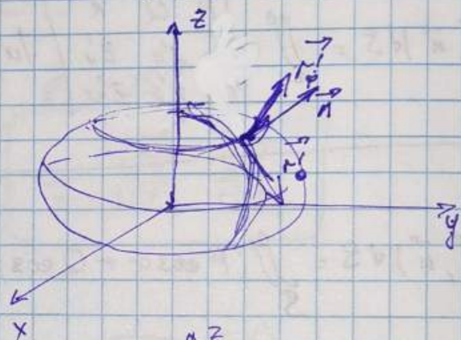
$$+ r^2\sin\varphi(\overset{1-\cos\varphi}{\cancel{\cos\varphi - 1}}) = 2r^2(\sin\varphi - \cos\varphi)$$

$$\iint_\Omega 2r^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\,dr\,d\varphi = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4} r^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\,dr = 0$$

№4365. $I = \iint_S \left(\frac{dy\,dz}{x} + \frac{dz\,dx}{y} + \frac{dx\,dy}{z}\right)$, где S - внешняя сторона эллипсоида:

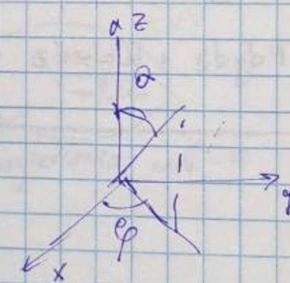
$P = \frac{1}{x}$; $Q = \frac{1}{y}$; $R = \frac{1}{z}$

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow r = 1$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = a\cos\varphi\sin\theta \\ y = b\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}$$

$[\vec r\,'_\theta, \vec r\,'_\varphi] \uparrow\uparrow \vec n$



$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a\cos\varphi\sin\theta} & \frac{1}{b\sin\varphi\sin\theta} & \frac{1}{c\cos\theta} \\ a\cos\varphi\cos\theta & b\sin\varphi\cos\theta & -c\sin\theta \\ -a\sin\varphi\sin\theta & b\cos\varphi\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \cancel{\frac{a\cos^2\varphi\cos\theta \cdot b\sin\theta}{c\cos\theta}} +$$

$$\cancel{-a\sin\varphi\sin\theta\left(-\frac{c}{b\sin\varphi} - \frac{b\sin\varphi}{c}\right)} = \frac{bc}{a}\sin\theta + \frac{ac}{b}\sin\theta +$$

$$+ \frac{ab}{c}\sin\theta\sin^2\varphi + \frac{ab}{c}\sin\theta\cos^2\varphi = \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right)\sin\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right)d\theta = 4\pi\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right)$$

Д/З (доп.)

$$\oiint\limits_S y^2z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dz\,dx$$

S: внешняя сторона

$z = x^2+y^2$

$z=$ · $x^2+y^2=1$,

коорд. пл-сти (1 октант.)

Домашняя работа.

4335.1. Найти объём тела, ограниченного пов-ю

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = -u + a\cos v \quad (u \geq 0,\ a > 0)$$

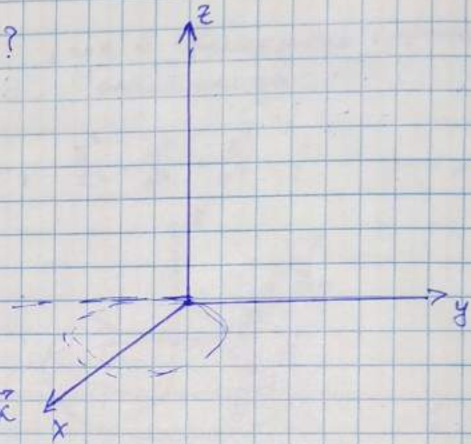
и плоскостями: $x = 0$ и $z = 0$

$$x^2 + y^2 = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2 \quad ; \quad x^2 = u^2\cos^2 v \to \cos^2 v = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$z^2 = \underbrace{u^2}_{x^2+y^2} - \underbrace{2au\cos v}_{x} + \underbrace{a^2\cos^2 v}_{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \qquad u = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$$

$x > 0$

$y > 0$



$$z^2 = x^2 + y^2 - 2ax + \frac{a^2x^2}{x^2+y^2} \quad ?$$

$$x = 0 \to z^2 = y^2 \to z = \pm y$$

$$z = 0 \to x^2 + y^2 - 2ax + \frac{a^2x^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$x = 0,\ y = 0$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r} = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + (-u + a\cos v)\vec{k}$$

$$\vec{r}'_u = \cos v\,\vec{i} + \sin v\,\vec{j} + (-1 + a\cos v)\vec{k}$$

$$\vec{r}'_v = -u\sin v\,\vec{i} + u\cos v\,\vec{j} - a\sin v\,\vec{k}$$

$$(\vec{r}, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v) = \begin{vmatrix} u\cos v & u\sin v & -u + a\cos v \\ \cos v & \sin v & -1 + a\cos v \\ -u\sin v & u\cos v & -a\sin v \end{vmatrix} =$$

$$= -a \cdot u\cos v\sin^2 v + u\cos^2 v(-u + a\cos v) - u^2\sin^2 v(-1 + a\cos v) +$$
$$+ u\sin^2 v(-u + a\cos v) + au\sin^2 v\cos v - u^2\cos^2 v(-1 + a\cos v) =$$

$$= \cancel{-a \cdot u\cos v\sin^2 v} \underline{- u^2\cos^2 v} + au\cos^3 v + \underline{u^2\sin^2 v} - au^2\sin^2 v\cos v -$$
$$\underline{- u^2\sin^2 v} + \cancel{au\sin^2 v\cos v} + au\sin^2 v\cos v + \underline{u^2\cos^2 v} - au^2\cos^3 v =$$

$$= au\cos^3 v - au^2\sin^2 v\cos v + au\sin^2 v\cos v - au^2\cos^3 v =$$

$$= au\cos v(\underline{\cos^2 v} - u\sin^2 v + \underline{\sin^2 v} - u\cos^2 v) = au\cos v(1 - u) \quad ?$$

Чисто формально:

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = -u + a\cos v \end{cases} \to \quad \begin{aligned} &\vec{r} = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + (-u + a\cos v)\vec{k} \\ &\vec{r}'_u = \cos v\,\vec{i} + \sin v\,\vec{j} - \vec{k} \\ &\vec{r}'_v = -u\sin v\,\vec{i} + u\cos v\,\vec{j} - a\sin v\,\vec{k} \end{aligned}$$

$$(\vec{r}, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v) = \begin{vmatrix} u\cos v & u\sin v & -u + a\cos v \\ \cos v & \sin v & -1 \\ -a\sin v & u\cos v & -a\sin v \end{vmatrix} = -\underline{au\sin^2 v\cos v} + u\cos^2 v(-u + a\cos v)$$

$$+ \underline{u^2\sin^2 v} + u\sin^2 v(-u + a\cos v) + \underline{u^2\cos^2 v} + \underline{au\sin^2 v\cos v} =$$

$= u^2 + u(-u + a\cos v) = u^2 - u^2 + au\cos v = au\cos v$

$\Rightarrow$ Как цилиндр. коорд-ты: $v \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$x^2+y^2=u^2$; $z+u=a\cos v \rightarrow u \in [0; a\cos v]$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{a\cos v} au\cos v\, du = \frac{a}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v\, dv \int_0^{a\cos v} u\, du =$$

$$= \frac{a}{3 \cdot 2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \cdot a^2\cos^2 v\, dv = \frac{a^3}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v \cos v (dv) =$$

$$= \frac{a^3}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 v)\, d\sin v = \frac{a^3}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\sin v - \frac{a^3}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v\, d\sin v =$$

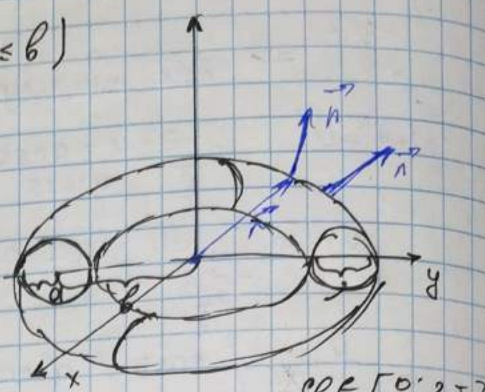
$$= \frac{a^3}{6} \sin v \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{a^3}{6} \cdot \frac{\sin^3 v}{3} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^3}{6}\left(1+1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{a^3}{6}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\cancel{4}^{2} a^3}{\cancel{6}_{3} \cdot 3} = \frac{2a^3}{9}$$

Ответ: $V = \frac{2a^3}{9}$

4351.2. Найти объём тела ограниченного тором

$$\begin{cases} x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi \\ y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi \\ z = a\sin\psi \end{cases} \qquad (0 < a \le b)$$



$\varphi \in [0; 2\pi]$

$\psi \in [-\pi; \pi]$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{r} = (b + a\cos\psi)\cos\varphi\,\vec{i} + (b + a\cos\psi)\sin\varphi\,\vec{j} + a\sin\psi\,\vec{k}$

$\vec{r}'_\psi = -a\cos\varphi\cdot\sin\psi\,\vec{i} - a\sin\varphi\sin\psi\,\vec{j} + a\cos\psi\,\vec{k}$

$\vec{r}'_\varphi = -(b + a\cos\psi)\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi(b + a\cos\psi)\,\vec{j} + 0$

$$(\vec{r}, \vec{r}'_\psi, \vec{r}'_\varphi) = \begin{vmatrix} (b+a\cos\psi)\cos\varphi & (b+a\cos\psi)\sin\varphi & a\sin\psi \\ -a\cos\varphi\sin\psi & -a\sin\varphi\sin\psi & a\cos\psi \\ -\sin\varphi(b+a\cos\psi) & \cos\varphi(b+a\cos\psi) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a\sin\psi \begin{vmatrix} (b+a\cos\psi)\cos\varphi & (b+a\cos\psi)\sin\varphi \\ -a\cos\varphi\sin\psi & -a\sin\varphi\sin\psi \end{vmatrix} - a\cos\psi \begin{vmatrix} (b+a\cos\psi)\cos\varphi & (b+a\cos\psi)\sin\varphi \\ -\sin\varphi(b+a\cos\psi) & \cos\varphi(b+a\cos\psi) \end{vmatrix}$$

$= a\sin\psi\left(-a\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi(b + a\cos\psi) + a\cos\varphi\sin\psi\sin\varphi(b + a\cos\psi)\right) -$

$- a\cos\psi\left(\cos^2\varphi(b + a\cos\psi)^2 + \sin^2\varphi(b + a\cos\psi)^2\right) =$

$= 0 - a\cos\psi(b + a\cos\psi)^2 = -a\cos\psi(b + a\cos\psi)^2$

$$(\vec{r}, \vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_\psi) = \begin{vmatrix} (b+a\cos\psi)\cos\varphi & (b+a\cos\psi)\sin\varphi & a\sin\psi \\ -(b+a\cos\psi)\sin\varphi & (b+a\cos\psi)\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\psi\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi & a\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$= a\cos\psi\cdot\cos^2\varphi(b + a\cos\psi)^2 + a^2\sin^2\psi\sin^2\varphi(b + a\cos\psi) +$
$+ a^2\sin^2\psi\cos^2\varphi(b + a\cos\psi) + a\cos\psi\sin^2\varphi(b + a\cos\psi) =$

$= (b + a\cos\psi)^2 a\cos\psi + (b + a\cos\psi)a^2\sin^2\psi =$

$= (b^2 + 2ab\cos\psi + a^2\cos^2\psi)a\cos\psi + a^2b\sin^2\psi + a^3\sin^2\psi\cos\psi =$

$= ab^2\cos\psi + \underline{2a^2b\cos^2\psi} + a^2\cos^3\psi + \underbrace{a^2b\sin^2\psi}_{(1-\cos^2\psi)} + a^3\sin^2\psi\cos\psi =$

$= a^2b(\cos^2\psi + 1) + a(a^2 + b^2)\cos\psi$

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi}\left(a^2b(\cos^2\psi + 1) + (a^2 + b^2)a\cos\psi\right)d\psi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{2\pi}\left(a^2b\cos^2\psi + a^2b + \underbrace{a^3\cos\psi}_{0} + \underbrace{ab^2\cos\psi}_{0}\right)d\psi =$$

$$= \frac{a^2b}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}(\cos^2\psi + 1)\,d\psi = \frac{2\pi a^2b}{3}\cdot\left(\int_0^{2\pi}\frac{1 + \cos 2\psi}{2}\,d\psi + \int_0^{2\pi} d\psi\right) =$$

$$= \frac{2\pi a^2b}{3}\left(\frac{1}{2}\psi\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\Big|_0^{2\pi} + 2\pi\right) = \frac{3\pi^2\cdot 2a^2b}{3} =$$

$= 2a^2b\pi^2$

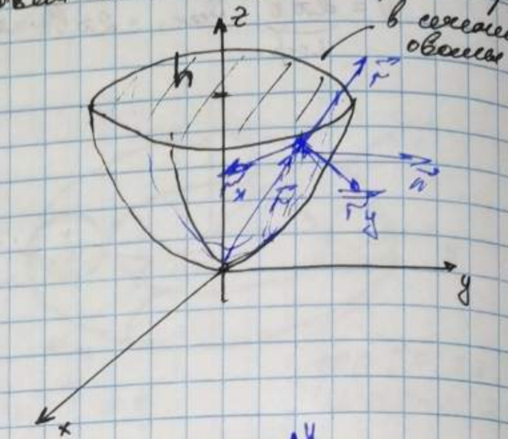
Ответ: $V = 2a^2b\pi^2$

Можно проверить, рассуждая и чисто геометрически:

$$V = \underbrace{2\pi b}_{L_{окр.}} \cdot S_{кр.} = 2\pi b \cdot \pi a^2 = 2\pi^2 a^2 b$$

Под запись.

* Найти V тела, огранич. эллиптич. параб. $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ и пл-ко $z=h$
Проверить интеграл, вычисляя объём с помощью опр. интеграла



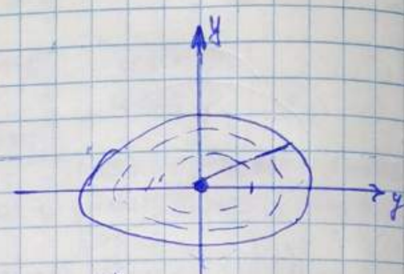
1) Через определённый интеграл:

$$V=\iiint\limits_{(V)} 1\cdot dx\,dy\,dz$$

Цилиндр. координаты:

$$\begin{cases} x=ar\cos\varphi \\ y=br\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \qquad |I|=r\cdot ab$$

$$V=\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{z}}abr\,dr =$$



$$\frac{a^2r^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2\varphi}{b^2}=z\ ;\quad r^2=z$$

$$r=\sqrt{z}\ ;\ z>0$$

$$V=\int_0^h dz\cdot 2\pi\cdot ab\left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{z}}\right)=\pi\cdot ab\cdot\int_0^h z\,dz=\pi ab\cdot\frac{h^2}{2}$$

2) Через поверхностные интегралы.

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

Две поверхности: $S_1:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

$S_2:\ z=h$

S_1: $\begin{cases} x=ar\cos\varphi \\ y=br\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$ $\quad \vec{r}=ar\cos\varphi\,\vec{i}+br\sin\varphi\,\vec{j}+r^2\vec{k}$

$\vec{r}'_\varphi=-ar\sin\varphi\,\vec{i}+br\cos\varphi\,\vec{j}+0$

$r^2=z \qquad \vec{r}'_r=a\cos\varphi\,\vec{i}+b\sin\varphi\,\vec{j}+2r\,\vec{k}$

$$(\vec{r},\vec{r}'_\varphi,\vec{r}'_r)=\begin{vmatrix} ar\cos\varphi & br\sin\varphi & r^2 \\ -ar\sin\varphi & br\cos\varphi & 0 \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi & 2r \end{vmatrix}=$$

$$=r^2\begin{vmatrix} -ar\sin\varphi & br\cos\varphi \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi \end{vmatrix}+2r\begin{vmatrix} ar\cos\varphi & br\sin\varphi \\ -ar\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=r^2(-abr\sin^2\varphi-abr\cos^2\varphi)+2r(abr^2\cos^2\varphi+abr^2\sin^2\varphi)=$$

$$=-abr^3+2abr^3=abr^3$$

S_2: $\begin{cases} x=ar\cos\varphi \\ y=br\sin\varphi \\ z=h \end{cases}$ $\quad \vec{r}=ar\cos\varphi\,\vec{i}+br\sin\varphi\,\vec{j}+h\vec{k}$

$\vec{r}'_\varphi=-ar\sin\varphi\,\vec{i}+br\cos\varphi\,\vec{j}+0$

$\vec{r}'_r=a\cos\varphi\,\vec{i}+b\sin\varphi\,\vec{j}+0$

$$(\vec{r}, \vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_r) = \begin{vmatrix} ar\cos\varphi & br\sin\varphi & h \\ -ar\sin\varphi & br\cos\varphi & 0 \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = h\cdot\begin{vmatrix} -ar\sin\varphi & br\cos\varphi \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= h\cdot(-abr\sin^2\varphi - abr\cos^2\varphi) = -abhr$$

$$(\vec{r}, \vec{r}'_r, \vec{r}'_\varphi) = abhr$$

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_\Omega (\vec{r}, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v)\,du\,dv$$

$$V = \frac{ab}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{h}} r^3\,dr + \frac{abh}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{h}} r\,dr =$$

$$= \frac{2\pi ab}{3}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{h}} + \frac{abh}{3}\cdot 2\pi\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{h}} =$$

$$= \frac{2\pi ab}{12}\cdot h^2 + \frac{abh\cdot 2\pi}{6}\cdot h = \frac{\pi abh^2}{6} + \frac{2\pi abh^2}{6} = \pi ab\frac{h^2}{2}$$

Ответ: $V = \pi ab\dfrac{h^2}{2}$

27.10.21.

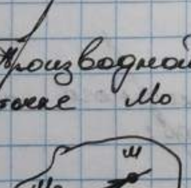
Понятие поля является чрезвычайно важным в современной физике. Поскольку в физ-их задачах чаще всего встречаются величины двух типов - скаляры и векторы, то в мат-ой теории поля рассм-ся скалярное и векторное поля.

Опр: Говорят, что в области Ω трёхмерного пространства задано скалярное поле, если в каждой точке M этой области поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$. Примером такого поля может служить поле температур нагретого тела. Введя декартовы координаты, скалярное поле можно записать в виде функции трёх переменных: $u = u(x, y, z)$.

Опр: Поверхностью уровня скалярного поля $u(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле имеет заданное значение C:

$$u(x, y, z) = C \qquad (1)$$

Опр: Производной по направлению l скалярного поля $u(M)$ в точке M_0 называется значение предела



$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{|M_0M|\to 0}\frac{u(M) - u(M_0)}{|M_0M|} \qquad (2)$$

Если ввести единичный вектор в направлении l:

$$\vec{l} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma,$$

то производную по направлению можно вычислить по правилу:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (3)$$

где частные производные вычисляются в точке M_0

Правую часть в формуле (3) можно рассматривать как скалярное произведение вектора $\vec{e}$ с некоторым другим вектором.

<u>Опр</u>: Градиентом скалярного поля $u(x,y,z)$, являющегося непрерывно-дифференцируемым в области Ω, называется вектор.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \qquad (4)$$

Из соотношения (3) следует, что

$$\frac{\partial u(M)}{\partial e} = (\operatorname{grad} u, \vec{e}) \qquad (5)$$

Из соотношения (5) вытекает смысл градиента - он указывает направление наиболее быстрого возрастания скалярного поля:

$$\vec{e} \uparrow\uparrow \operatorname{grad} u$$

<u>Опр.</u> - Гладкая кривая L, лежащая в области Ω, называется <u>векторной линией</u> поля $\vec{A}(M)$, если в каждой точке этой кривой направление касательной совпадает с направлением поля в этой точке.

Если кривая L задаётся в векторном виде $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то по определению векторная линия находится из уравнения.

$$\vec{r}\,'(t) = \lambda \vec{A}(M), \quad \lambda \in R$$

Это эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (6)$$

<u>Опр</u> - <u>Дивергенцией</u> непрерывно-дифференцируемого векторного поля $\vec{A}(M)$ в данной точке M называется число:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad (7)$$

<u>Опр.</u> - <u>Ротором</u> непрерывно-дифференцируемого векторного поля $\vec{A}(M)$ в данной точке M называется вектор:

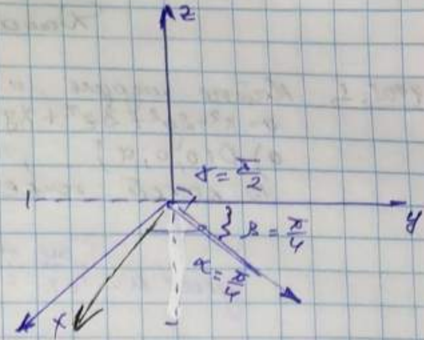
$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

<u>N1.</u> $u = xy - z^2$, $M(-9, 12, 10)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

$\frac{\partial u}{\partial z} = -2z$



$\operatorname{grad} u(M) = 12\vec{i} - 9\vec{j} - 20\vec{k}$

$|\operatorname{grad} u(M)| = \sqrt{12^2 + 9^2 + 20^2} = 25$

$\vec{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$\frac{\partial u}{\partial e} = (\operatorname{grad} u(M), \vec{e}) = 6\sqrt{2} - 4{,}5\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

№2. $\vec{A}(M) = \overset{P}{\frac{y}{z}}\vec{i} + \overset{Q}{\frac{z}{x}}\vec{j} + \overset{R}{\frac{x}{y}}\vec{k}$ $\qquad M(1; 2; -2)$

$\operatorname{rot} A(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{z} & \frac{z}{x} & \frac{x}{y} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x}\right)\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right)\right) +$

$+ \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{z}\right)\right) = \vec{i}\left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right) - \vec{j}\left(\frac{1}{y} + \frac{y}{z^2}\right) + \vec{k}\left(-\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z}\right) =$

$\operatorname{rot} A(M) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{1}\right)\vec{i} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\right)\vec{j} + \left(2 + \frac{1}{2}\right)\vec{k} =$

$= -\frac{5}{4}\vec{i} - \vec{j} + \frac{5}{2}\vec{k}$

№3. $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z} \rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{y} \qquad \ln|x| = \ln|y| + \ln c$

$c_1 x = y$, $\quad x = t$

$c_2 x = z \quad y = c_1 t$

$z = x^2 c_2 \quad z = t^2 c_2 \qquad t = 1 \rightarrow y = c_1 = 1$

$z = 1$

Домашняя работа.

4401. 1. Найти модуль и направление градиента поля $u = x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ в точках:
а) $O(0,0,0)$; б) $A(1,1,1)$ и в) $B(2,0,1)$
В какой точке градиент поля равен нулю?

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + 3$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + x - 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 6z - 6$$

а) $O(0,0,0)$: $\operatorname{grad} u = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{9+4+36} = 7$$

б) $A(1,1,1)$: $\operatorname{grad} u = 6\vec{i} + 3\vec{j}$

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$$

в) $B(2,0,1)$: $\operatorname{grad} u = 7\vec{i}$

$$|\operatorname{grad} u| = 7$$

$\operatorname{grad} u = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x+y+3=0 \\ 4y+x-2=0 \\ 6z-6=0 \end{cases} \rightarrow z=1$

$$\begin{cases} 2x+y=-3 \\ x+4y=2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8-1 = 7$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -12-2 = -14 \quad \Rightarrow x = -2$$

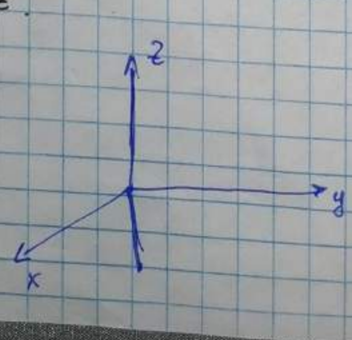
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4+3 = 7 \quad \Rightarrow y = 1.$$

в т. $M(-2;1;1)$

4402.
В каких точках пространства Oxyz градиент поля

$$u = x^3+y^3+z^3-3xyz$$

а) перпендикулярен оси Oz
б) параллелен оси Oz.
в) равен нулю.



$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3yz$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3xz$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$$

а) grad u ⊥ Oz $\to \vec{k}\cdot 0$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0 \to 3z^2-3xy=0 \to z^2=xy$$

б) grad u ∥ u

т.е. $\to \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$

$$\begin{cases}3x^2-3yz=0\\3y^2-3xz=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x^2=yz\\y^2=xz\end{cases}$$

$$\text{grad}\,u=\underbrace{(3x^2-3yz)}_{=0}\vec{i}+\underbrace{(3y^2-3xz)}_{=0}\vec{j}+(3z^2-3xy)\cdot\vec{k}$$

При $x=0,\ y=0 \to \text{grad}\,u=3z^2\cdot\vec{k} \parallel Oz$

При $x=y=z \to \text{grad}\,u=0$

$\Rightarrow$ при $x=y=0$

в) grad u = 0

$$\begin{cases}3x^2-3yz=0\\3y^2-3xz=0\\3z^2-3xy=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x^2=yz\\y^2=xz\\z^2=xy\end{cases}$$

$\Rightarrow$ при $x=y=z$

4403. Дано скалярное поле:

$$u=\ln\frac{1}{r}$$

где $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$. В каких точках пространства Oxyz имеет место р-во $|\text{grad}\,u|=1$?

$$u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=r\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{2(x-a)}{2r}=-\frac{x-a}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=r\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{2(y-b)}{2r}=-\frac{y-b}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}=r\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{2(z-c)}{2r}=-\frac{z-c}{r^2}$$

$$|\text{grad}\,u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

$$|\text{grad}\,u|=\sqrt{\frac{(x-a)^2}{r^4}+\frac{(y-b)^2}{r^4}+\frac{(z-c)^2}{r^4}}=\frac{1}{r^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=$$

$$=\frac{r}{r^2}=\frac{1}{r}$$

По условию: $|\text{grad}\,u|=1 \Rightarrow \frac{1}{r}=1$

$$\frac{1}{r} = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = 1$$

т.е. должно выполняться условие:

$$r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = 1$$

4405. Найти угол φ между градиентами поля

$$u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

в точках $A(1,2,2)$ и $B(-3,1,0)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2+z^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2yx}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

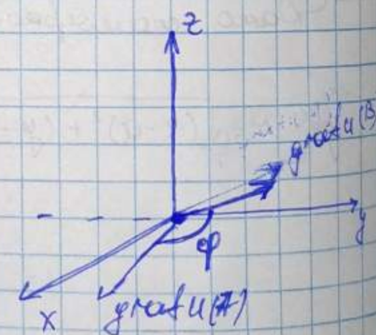
$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = \frac{4+4-1}{81} = \frac{7}{81} \, ; \, \frac{\partial u}{\partial y}(A) = -\frac{4}{81} \, ; \, \frac{\partial u}{\partial z}(A) = -\frac{4}{81}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(B) = \frac{-9+1}{100} = -\frac{8}{100} = -\frac{2}{25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(B) = \frac{2 \cdot 3}{100} = \frac{3}{50} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial z}(B) = 0$$

$$\operatorname{grad} u(A) = \frac{7}{81}\vec{i} - \frac{4}{81}\vec{j} - \frac{4}{81}\vec{k}$$

$$\operatorname{grad} u(B) = -\frac{2}{25}\vec{i} + \frac{3}{50}\vec{j} \quad \perp Oz$$



Из линейной алгебры:

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{(\operatorname{grad} u(A), \operatorname{grad} u(B))}{|\operatorname{grad} u(A)| \cdot |\operatorname{grad} u(B)|}$$

$$|\operatorname{grad} u(A)| = \sqrt{\frac{49}{81^2} + \frac{16}{81^2} + \frac{16}{81^2}} = \sqrt{\frac{81}{81^2}} = \frac{1}{9}$$

$$|\operatorname{grad} u(B)| = \sqrt{\frac{4}{25^2} + \frac{9}{50^2}} = \sqrt{\frac{16+9}{50^2}} = \sqrt{\frac{25}{50^2}} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$

$$(\operatorname{grad} u(A); \operatorname{grad} u(B)) = -\frac{7}{81} \cdot \frac{2}{25} - \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{81}_{27}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{50}_{25}} = -\frac{4}{405}$$

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{4}{405}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}} = -\frac{4\cdot 90}{405} = -\frac{8}{9}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{8}{9}\right)$$

Ответ: $\varphi = \arccos\left(-\frac{8}{9}\right)$

4409. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\cdot\vec{k}$

а) grad r

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r};\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r};\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\text{grad}(r) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r}$$

б) grad(r^2)

$$r^2 = x^2+y^2+z^2 = u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y;\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

$$\text{grad}(r^2) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\cdot\vec{k} = 2\vec{r}$$

в) grad$\left(\frac{1}{r}\right)$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{2(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\left(\frac{x\vec{i}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{y\vec{j}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

4417.
Найти производную поля $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в направлении $\vec{e}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$
В каком случае эта производная равна нулю?

Из прошлого номера (4409)

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3}\vec{i} - \frac{y}{r^3}\vec{j} - \frac{z}{r^3}\cdot\vec{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial e} = (\text{grad}(u), \vec{e}) = -\frac{x}{r^3}\cos\alpha - \frac{y}{r^3}\cos\beta - \frac{z}{r^3}\cos\gamma =, \text{ где } u = \frac{1}{r}$$

$$= -\frac{1}{r^3}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = -\frac{(\vec{r};\vec{e})}{r^3}$$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{l} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$

Или по-другому:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\right) =$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left(\cos(\vec{r},x)\cdot\cos\alpha + \cos(\vec{r},y)\cos\beta + \cos(\vec{r},z)\cos\gamma\right) =$$

$$= -\frac{\cos(\vec{r},\vec{e})}{r^2}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial u}{\partial e} = 0}} \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{r},\vec{e}}) = 0 \Rightarrow (\widehat{\vec{r};\vec{e}}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\underline{\vec{r} \perp \vec{e}}}$$

4418. Найти производную поля $u = u(x,y,z)$ в направлении градиента поля $v = v(x,y,z)$.
В каком случае эта производная будет равна нулю?

$\vec{l} = \operatorname{grad} v$

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \left(\operatorname{grad} u, \frac{\operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}\right)$$

единичный вектор $\vec{e}$

4423. 2. Найти
$$\operatorname{div}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad \underline{\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = 0} \text{ - теорема}$$

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = \operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\right)\vec{j} +\right.$$

$$\left.+\vec{k}\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}\right)}_{\text{не зав. от } x} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\right)}_{\text{не зав. от } y} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right)}_{\text{не зав. от } z} = 0$$

4416. Найти производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $M(x,y,z)$ в направлении радиуса-вектора $\vec{r}$ этой точки.
В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

1) $\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\operatorname{grad} u, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{2x}{a^2}\vec{i} + \frac{2y}{b^2}\vec{j} + \frac{2z}{c^2}\vec{k}$$

$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}$ – единичный вектор напр.-я

$$\underline{\underline{\frac{\partial u}{\partial r}}} = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot a^2} + \frac{2y^2}{b^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{2z^2}{c^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \underline{\underline{\frac{2u}{r}}}$$

2) $|\operatorname{grad} u(M)| = \sqrt{\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4} + \frac{4z^2}{c^4}} = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$

Из условия нужно: $|\operatorname{grad} u(M)| = \frac{\partial u}{\partial r}$

$$2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = 2\left(\frac{x^2}{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y^2}{b^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z^2}{c^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \left(\frac{x^2}{a^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y^2}{b^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z^2}{c^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \quad \Big| \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{x^2b^4c^4 + y^2a^4c^4 + z^2a^4b^4}}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(\frac{x^2b^2c^2 + y^2a^2c^2 + z^2a^2b^2}{a^2b^2c^2}\right)$$

$$(x^2+y^2+z^2)(x^2b^4c^4 + y^2a^4c^4 + z^2a^4b^4) = (x^2b^2c^2 + y^2a^2c^2 + z^2a^2b^2)^2$$

$$b^4c^4x^4 + a^4c^4y^4 + a^4b^4z^4 + 2a^2b^2c^4x^2y^2 + 2a^2b^4c^2x^2z^2 + 2a^4b^2c^2y^2z^2$$

$$\cancel{b^4c^4x^4} + a^4c^4x^2y^2 + a^4b^4x^2z^2 + b^4c^4x^2y^2 + \cancel{a^4c^4y^4} + a^4b^4y^2z^2 + b^4c^4x^2z^2 + a^4c^4y^2z^2 + \cancel{a^4b^4z^4}$$

$$x^2y^2(a^4c^4+b^4c^4) + x^2z^2(a^4b^4+b^4c^4) + y^2z^2(a^4b^4+a^4c^4) = x^2\cdot 2ab^2c^4 + x^2z^2\cdot 2a^2b^4c^2 + y^2z^2\cdot 2a^4b^2c^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2b^2c^4 = a^4c^4 + b^4c^4 \\ 2a^2b^4c^2 = a^4b^4 + b^4c^4 \\ 2a^4b^2c^2 = a^4b^4 + a^4c^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2b^2 = a^4 + b^4 \\ 2a^2c^2 = a^4 + c^4 \\ 2b^2c^2 = b^4 + c^4 \end{cases}$$

$\to (a^2-b^2)^2 = 0$, $a = b$

$\to (b^2-c^2) = 0$, $b = c$

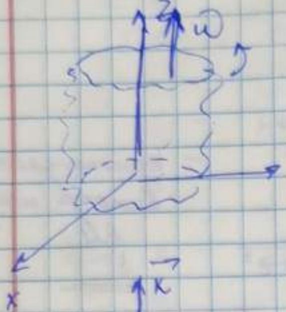
$$\Rightarrow \underline{a = b = c}$$

Ответ: 1) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2u}{|\vec{r}|}$

2) $a = b = c$

4431. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси Oz против часовой стрелки с постоянной угловой ск-ю ω. Найти дивергенцию вектора ск-ти $\vec{v}$ и вектора ускорения $\vec{a}$ в точке $M(x,y,z)$ пространства в данный момент времени.

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

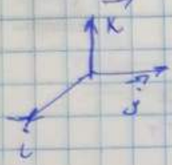


$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \;;\; \vec{\omega} = \omega\cdot\vec{k}$$

$$\vec{v} = [\omega\vec{k}, (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})] = \omega\cdot x[\vec{k},\vec{i}] + \omega y[\vec{k},\vec{j}] + \underbrace{\omega\cdot z[\vec{k},\vec{k}]}_{=0} = \omega\cdot x\cdot\vec{j} - \omega\cdot y\cdot\vec{i}$$



1) $\operatorname{div}\vec{v}$ - ?

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = 0$$

2) $\operatorname{div}\vec{a}$ - ?

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{d\vec{v}}{dt} = x'_t\,\omega\cdot\vec{j} - \omega\cdot y'_t\,\vec{i}$$

$$\cancel{-\frac{dx}{\omega y} = \frac{dy}{\omega x}}$$

$$\cancel{\omega x\,dx = -\omega y\,dy}$$

$$x\,dx = -y\,dy$$

$$\cancel{\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C \quad |\cdot 2} \rightarrow \cancel{x^2 = -y^2 = C}$$

$$\cancel{x^2 + y^2 = C \quad \rightarrow y = \pm\sqrt{C - x^2}}$$

$\vec{a}_n = \omega^2(\vec{r}_n)$ (при вращении – нормальное ускорение)

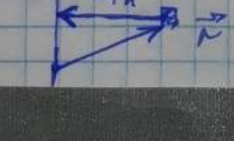
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + \underbrace{z\vec{k}}_{=0} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\operatorname{div}(\vec{a}_n) = -\omega^2 \operatorname{div}(\vec{r}_n)$$

$$\operatorname{div}(\vec{r}_n) = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{a}_n) = -2\omega^2$$

Если рассмотреть с точки зрения физики: условно элементарный кусочек жидкости раскручивается относит. оси z. a_τ - тангенциальное (поступ.) ускорение нет, есть только центростремительное: a_n.



По ф-ле: $\vec{a}_n = \omega^2 R\vec{n}$, но $R\vec{n} = -\vec{r}_n$

где $\vec{r}_n$ – лежит в пл-ти Oxy.

Ответ: 1) $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

2) $\operatorname{div}(\vec{a}_ц) = -2\omega^2$

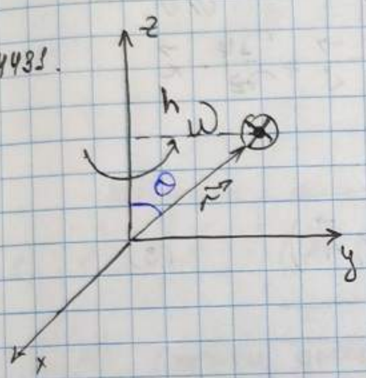
4418. (продолжение)

$\vec{l} = \operatorname{grad} v$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \Big(\operatorname{grad} u, \underbrace{\frac{\operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}}_{\text{единичный в-р } \vec{l}}\Big) = \frac{\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$$

$\Rightarrow$, чтобы $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, тогда $\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$

4431.



$\operatorname{div} \vec{v} = ?$ $\quad \operatorname{div} \vec{w} = ?$

$|\vec{v}| = \omega h = \omega |\vec{r}| \cdot \sin\theta = |\vec{\omega}| |\vec{r}| \cdot \sin\theta$

$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = [\vec{\omega}; \frac{d\vec{r}}{dt}] = [\vec{\omega}, \vec{v}]$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega(y\vec{i} - x\vec{j})$$

$P = -\omega y$; $Q = \omega x$; $R = 0$

$\underline{\underline{\operatorname{div} \vec{v} = 0}}$

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = -\omega(\omega x \vec{i} + \omega y \vec{j})$$

$$\underline{\underline{\operatorname{div} \vec{W}}} = -\omega^2 - \omega^2 = \underline{\underline{-2\omega^2}}$$

17.11.21

9. Действия с вектором „набла".

Введённые на предыд. занятии дифф-ые операции теории поля, а именно, градиент скалярного поля, а также дивергенция и ротор вект-ого поля.

$$(1)\quad \boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$ – оператор Гамильтона (вектор „набла")

Хотя этот вектор не имеет ни направления, ни величины, но, применённый к скалярному или векторному полю, порождает, как оператор, другие скалярные и векторные поля.

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

$$\boxed{\operatorname{grad} u = \nabla u} \qquad (2)$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\nabla, \vec{A})} \qquad (3)$$

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\nabla, \vec{A}]} \qquad (4)$$

Вектор „набла" удобен тем, что при действии с ним можно применять обычные правила векторной алгебры. В то же время, для того, чтобы не сделать ошибки, необходимо помнить, что он одновр. явл. оператором и применять правила дифференцирования.

Некоторые правила векторной алгебры

Пусть λ – скалярная величина, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некоторые векторы

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
2) $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$
3) $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$
4) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
5) $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$
6) $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$
7) $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) \equiv (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
8) $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$

9) $(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$

4424(б). Применяя правила действий с вектором "набла" найти $\operatorname{div}(u\vec{A})$

Здесь скалярное поле u нельзя выносить по правилу 3 знак скалярного произведения, поскольку оно стоит за оператором. Поэтому сначала применяем правила дифф-я произведения полей, указав стрелкой сверху, на что действует оператор Гамильтона.

$$= (\nabla, \overset{\downarrow}{u}\vec{A}) + (\nabla u \overset{\downarrow}{\vec{A}}) =$$

а далее применяют правила 1-9

$$= (\nabla u, \vec{A}) + u(\nabla, \vec{A}) = (\vec{A}, \nabla u) + u(\nabla, \vec{A}) =$$

$$= (\vec{A}, \operatorname{grad} u) + u \operatorname{div}\vec{A}$$

Найдите ошибки в след. в-х: — нужена стрелка

1) $(\vec{A}, \operatorname{rot}\vec{A}) = (\vec{A}, [\nabla, \vec{A}]) = (\vec{A}, \nabla, \overset{\downarrow}{\vec{A}}) = (\nabla, \vec{A}, \vec{A}) = 0$

2) $[\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v] = [\nabla u, \nabla v] \neq [\nabla, \nabla]\, uv = \vec{0}$

№ 4435(б)

$\operatorname{rot}(u\vec{A})$ — с оператором "набла"

$$\operatorname{rot}(u\vec{A}) = [\nabla, u\vec{A}] = [\nabla, \overset{\downarrow}{u}\vec{A}] + [\nabla, u\overset{\downarrow}{\vec{A}}] =$$

$$= [\nabla \overset{\downarrow}{u}, \vec{A}] + u[\nabla, \overset{\downarrow}{\vec{A}}] = -[\vec{A}, \nabla u] + u \operatorname{rot}\vec{A} =$$

$$= [\operatorname{grad} u, \vec{A}] + u \operatorname{rot}\vec{A}$$

(2)

$$\operatorname{grad}(\vec{A}, \vec{B}) = \nabla(\vec{A}, \vec{B}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{A}}, \vec{B}) + \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{B}}, \vec{A}) =$$

$$\nabla(\overset{\downarrow}{\vec{A}}, \vec{B}) = \{\text{через двойное векторное}\} =$$

$$= -[[\nabla, \vec{B}], \vec{A}] + \vec{B}(\nabla, \overset{\downarrow}{\vec{A}}) = [[\vec{B}, \nabla], \vec{A}] + \vec{B} \cdot \operatorname{div}\vec{A}$$

$$= [[\vec{B}, \nabla], \vec{A}] + \vec{B} \operatorname{div}\vec{A} + [[\vec{A}, \nabla], \vec{B}] + \vec{A} \operatorname{div}\vec{B}$$

4438.

$$\operatorname{div}[\vec{A}, \vec{B}] = (\nabla, [\vec{A}, \vec{B}]) = (\nabla, [\overset{\downarrow}{\vec{A}}, \vec{B}]) + (\nabla, [\vec{A}, \overset{\downarrow}{\vec{B}}]) =$$

$$= (\nabla, \overset{\downarrow}{\vec{A}}, \vec{B}) + (\nabla, \vec{A}, \overset{\downarrow}{\vec{B}}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{\vec{A}}, \vec{B}) - (\nabla, \overset{\downarrow}{\vec{B}}, \vec{A}) =$$

$$(\nabla, \overset{\downarrow}{\vec{A}}, \vec{B}) = (\vec{B}, \nabla, \overset{\downarrow}{\vec{A}}) = (\vec{B}, [\nabla, \vec{A}]) = (\vec{B}, \operatorname{rot}\vec{A})$$

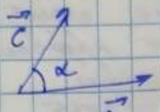
$$= (\vec{B}, \operatorname{rot}\vec{A}) - (\vec{A}, \operatorname{rot}\vec{B})$$

Домашняя работа.

4412. $\operatorname{grad}\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\}$ ($\vec{c}$ – постоянный вектор)

$$|[\vec{c}\times\vec{r}]|^2 = c^2r^2\sin^2\alpha = c^2r^2(1-\cos^2\alpha) = c^2r^2 - (\vec{c},\vec{r})^2$$

скалярное произведение



$$\operatorname{grad}\{|[\vec{c}\times\vec{r}]|^2\} = \operatorname{grad}(c^2r^2 - (\vec{c},\vec{r})^2) = \operatorname{grad}(c^2r^2) - \operatorname{grad}(\vec{c},\vec{r})^2 =$$

$$= c^2\operatorname{grad}(r^2) - \operatorname{grad}(\vec{c},\vec{r})^2 = 2c^2\vec{r} - 2\vec{c}(\vec{c}\cdot\vec{r})$$

1) $\operatorname{grad}(r^2) = \vec{\nabla}\cdot r^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)(x^2+y^2+z^2) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = 2\vec{r}$

2) $\operatorname{grad}(\vec{c},\vec{r})^2 = \vec{\nabla}(\vec{c},\vec{r})^2 = 2(\vec{c},\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\cdot(\vec{c},\vec{r}) = 2(\vec{c},\vec{r})\cdot\vec{c}$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{c},\vec{r}) = [\vec{c},\underbrace{[\vec{\nabla},\vec{r}]}_{\operatorname{rot}\vec{r}=0}] + \vec{r}\underbrace{(\vec{c}\cdot\vec{\nabla})}_{\vec{c}} = \vec{c}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}\{|[\vec{c},\vec{r}]|^2\} = 2c^2\vec{r} - 2\vec{c}(\vec{c}\cdot\vec{r})$$

4424.(а,б)

а) $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}$

$$\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{\nabla},\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{\nabla},\vec{a}) + (\vec{\nabla},\vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}$$

(прямое следствие линейности оператора ∇)

б) $\operatorname{div}(u\cdot\vec{c}) = \vec{c}$ ($\vec{c}$ – постоянный вектор, u – скаляр)

$$\operatorname{div}(u\cdot\vec{c}) = (\vec{\nabla}, u\vec{c}) = (\vec{\nabla}, \overset{\downarrow}{u}\vec{c}) + (\vec{\nabla}, u\overset{\downarrow}{\vec{c}}) =$$

$$= (\vec{\nabla}u, \vec{c}) + (\vec{\nabla}\vec{c}, u) = (\vec{c}\,(\vec{\nabla}\cdot u)) = \vec{c}\cdot\operatorname{grad}u$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{c} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) = 0$$ (т.к. $\vec{c}$ – постоянный)

4427. а) $\operatorname{div}\vec{r} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 3$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{r}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) = 3$$

б) $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right) = \left(\vec{\nabla}, \overset{\downarrow}{\frac{1}{r}}\cdot\vec{r}\right) + \left(\vec{\nabla}, \frac{1}{r}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{r}}\right) =$

$$= \frac{1}{r}\underbrace{(\vec{\nabla},\vec{r})}_{=3} + \left(\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{r}, \vec{r}\right) = \frac{3}{r} + \left(-\frac{\vec{r}}{r^3}, \vec{r}\right) ⊜$$

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{r} = \{r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$ (из прошлой д/з)

$$⊜\ \frac{3}{r} - \frac{1}{r^3}(\vec{r},\vec{r}) = \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{2}{r}$$

4428. $\operatorname{div}[f(r)\cdot\vec{c}]$ ($\vec{c}$ – постоянный вектор)

$$\operatorname{div}[f(r)\cdot\vec{c}] = (\vec{\nabla}\cdot f(r)\vec{c}) = (\vec{\nabla}\overset{\downarrow}{f(r)}, \vec{c}) + \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{c}, f(r))}_{=0} ⊜$$

$\vec\nabla \cdot f(r) = \text{grad}\, f(r) = \{$ где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\to f(r)$ - сложная ф-я $\} =$

$= f'(r) \cdot \text{grad}\, r = f'(r) \cdot \frac{\vec r}{r}$ (с прошлой д/р)

$\ominus \left(f'(r) \cdot \frac{\vec r}{r}, \vec c\right) = \frac{f'(r)}{r} (\vec r, \vec c) = \underbrace{\frac{f(r)}{r} (\vec c \cdot \vec r)}$

$\Rightarrow \text{div}[f(r) \cdot \vec c] = \frac{f'(r)}{r} (\vec c \cdot \vec r)$

4429. $\text{div}[f(r), \vec r]$. В каком случае дивергенция этого вектора равна нулю?

$\text{div}[f(r), \vec r] = (\vec\nabla, f(r)\vec r) = (\vec\nabla f(r), \vec r) + f(r) \underbrace{(\vec\nabla \cdot \vec r)}_{=3} =$

$= \{$ из 4428 и 4427 $\} = \left(\frac{f'(r)}{r} \cdot \vec r, \vec r\right) + 3f(r) = \frac{f'(r)}{r} \cdot r^2 + 3f(r) =$

$= r f'(r) + 3f(r)$

Когда равно нулю?: $r f'(r) + 3f(r) = 0$ — когда удовлетв. такому дифф-ому уравнению.

$r f' + 3f = 0$

$\frac{r\, df}{dr} = -3f$

$\int \frac{df}{f} = -\int \frac{3\, dr}{r}$

$\ln f = -3 \ln r + \ln C$

$\Rightarrow \underbrace{f = \frac{C}{r^3}}$

$\Rightarrow \text{div}[f(r), \vec r] = r f'(r) + 3f(r)$ $\quad \left(= 0, \text{ когда } f = \frac{C}{r^3}\right)$

4437. а) $\text{rot}\, \vec c f(r)$ ($\vec c$ - постоянный вектор)

$\text{rot}\, \vec c f(r) = [\vec\nabla \times \vec c f(r)] = [\vec\nabla \times \vec c f(r)] + [\vec\nabla \times \vec c f(r)] =$

$= f(r) \underbrace{[\vec\nabla \times \vec c]}_{\substack{\text{rot}\, \vec c = 0 \\ \text{пост. вектор}}} + [\vec\nabla f(r) \times \vec c] = \{\vec\nabla f(r) = f'(r) \cdot \frac{\vec r}{r}$ из 4428 $\} =$

$= \left[f'(r) \frac{\vec r}{r} \times \vec c\right] = \underbrace{\frac{f'(r)}{r} [\vec r \times \vec c]}$

$\Rightarrow \text{rot}\, \vec c f(r) = \frac{f'(r)}{r} [\vec r \times \vec c]$

б) $\text{rot}\, [\vec c \times f(r) \cdot \vec r]$ ($\vec c$ - постоянный вектор)

$\text{rot}\, [\vec c \times f(r) \cdot \vec r] = [\vec\nabla \times [\vec c \times f(r) \cdot \vec r]] = [\vec\nabla f(r) \times [\vec c \times \vec r]] +$

$+ f(r) [\vec\nabla \times [\vec c \times \vec r]] \ominus \{$ посчитаем каждое отдельно $\}$

1) $[\vec\nabla f(r) \times [\vec c \times \vec r]] = \frac{f'(r)}{r} [\vec r \times [\vec c \times \vec r]] = \frac{f'(r)}{r} \{\vec c (\vec r \cdot \vec r) - \vec r (\vec c \cdot \vec r)\} =$

2) $f(r) [\vec\nabla \times [\vec c \times \vec r]] = f(r) [\vec c (\vec\nabla \cdot \vec r) - \vec r (\vec\nabla \cdot \vec c)] = (3\vec c - \vec c) \cdot f(r) = 2f(r) \cdot \vec c$

— из методички 9.1. (см. приложение)

$\ominus \frac{f'(r)}{r} \left(\vec c (\vec r \cdot \vec r) - \vec r (\vec c \cdot \vec r)\right) + 2f(r) \vec c$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rot}[\vec{c} \times f(r)\vec{r}] = \frac{f'(r)}{r}[\vec{c}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{c})] + 2f(r)\vec{c}$$

4432. Найти дивергенцию гравитационного силового поля, создаваемого конечной системой притягивающих центров.

Закон тяготения относительно произвольной точки $O(x, y, z)$:

$$\vec{F} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i^3}\vec{r_i},$$

где $\vec{r_i} = (x - x_i)\vec{i} + (y - y_i)\vec{j} + (z - z_i)\vec{k}$ ~ это часть расст-е отн. т. $O(x, y, z)$ до произвольного i-го тела системы.

Из 4424 знаем: $\mathrm{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{div}\,\vec{a} + \mathrm{div}\,\vec{b}$, т.к. $\vec{\nabla}$ - линейный оператор, то для $\vec{F}$:

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = -\sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{r_i}}{r_i^3}\right)$$ ~ т.е. можно представить как сумму дивергенций

Для произвольного тела:

$$\mathrm{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \left(\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\cdot\vec{r}\right) + \frac{1}{r^3}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) =$$

$$= \left(\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\cdot\vec{r}\right) + \frac{3}{r^3} \ominus \{1\text{-ое слагаемое отдельно}\}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{r^3} = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right); \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$u = \frac{1}{r^3} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\mathrm{grad}\,u: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{3}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot y$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot z$$

$$\Rightarrow \mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3\left(\frac{x\vec{i}}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{y\vec{j}}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right) =$$

$$= -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

$$\Rightarrow \left(\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)\cdot\vec{r}\right) = -\frac{3}{r^5}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = -\frac{3}{r^3}$$

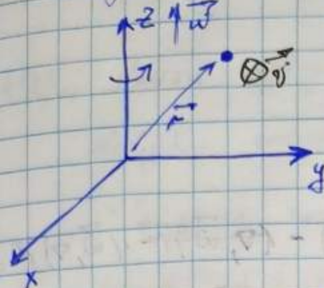
$$\ominus \quad -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

$\Rightarrow$ Следовательно, во всем пространстве кроме точек, где расположены сами тела, $\Rightarrow$ дивергенция $= 0$

4440. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $\vec{e}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ с постоянной угловой ск-ю ω. Найти ротацию (ротор) линейной скорости $\vec{v}$ в точке пространства $M(x, y, z)$ в данный момент времени.

$$\vec{e} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$$

Задача похожая на 4431 из прошлой д/р:



$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

В нашем случае $\vec{\omega}$ можно представить как:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e} \quad \text{(по усл.)}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \omega [\vec{e} \times \vec{r}]$$

Нужно найти ротацию ск-ти, т.е. "ротор":

$$\text{rot}\, \vec{v} = \text{rot}(\omega [\vec{e} \times \vec{r}]) \circleddash \{\vec{e} - \text{постоянный вектор}\}$$

$$\circleddash\ \omega [\vec{\nabla} \times [\vec{e} \times \vec{r}]] = \omega \{[\vec{\nabla} \times [\vec{e} \times \vec{r}]] + [\vec{\nabla} \times [\vec{e} \times \vec{r}]]\} =$$

$$= \omega \{ \underbrace{\vec{e}(\vec{\nabla} \times \vec{r})}_{=0} - \underbrace{\vec{r}(\vec{\nabla} \cdot \vec{e})}_{=0} + \underbrace{\vec{e}(\vec{\nabla} \times \vec{r})}_{3\vec{e}} - \underbrace{\vec{r}(\vec{\nabla} \cdot \vec{e})}_{\vec{e}} \} =$$

т.к. $\vec{e}$ – пост. вектор

$$= \omega (3\vec{e} - \vec{e}) = 2\omega \vec{e} \equiv 2\vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \text{div}\, \vec{v} = 2\omega \vec{e} \equiv 2\vec{\omega}$$

Из презентации:

4436.1. а) $\text{rot}\, \vec{r} = [\vec{\nabla} \times \vec{r}] = 0$

$$\text{rot}\, \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ x & z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ x & y \end{vmatrix} = $$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \text{rot}\, \vec{r} = [\vec{\nabla} \times \vec{r}] = 0$$

б) $\text{rot}[f(r)\vec{r}] = [\vec{\nabla} \times f(r)\vec{r}] = [\vec{\nabla} f(r) \times \vec{r}] + f(r) \underbrace{[\vec{\nabla} \times \vec{r}]}_{=0} =$

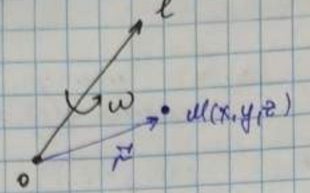
$$= [\text{grad}\, f(r) \times \vec{r}] = \{\text{из 4428 } \text{grad}\, f(r) = \frac{f'(r)}{r} \cdot \vec{r}\} =$$

$$= \frac{f'(r)}{r} [\vec{r} \times \vec{r}] = 0$$

$$\Rightarrow \text{rot}[f(r)\vec{r}] = 0$$

24.11.21. 4440.

$$\vec{l} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$$



$$\operatorname{rot}\vec{v} = ?$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{l}$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$\operatorname{rot}[\vec{\omega},\vec{r}] = [\nabla,[\vec{\omega},\vec{r}]] = [\nabla,[\vec{\omega},\overset{\downarrow}{\vec{r}}]] = \vec{\omega}(\nabla,\vec{r}) - (\nabla,\vec{\omega})\vec{r}\cdot(\vec{\omega},\nabla)\vec{r} =$$

$$= \vec{\omega}\operatorname{div}\vec{r} - (\vec{\omega},\nabla)\vec{r} = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\operatorname{div}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

$$(\vec{\omega},\nabla) = \omega(\vec{l},\nabla) = \omega\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$(\vec{\omega},\nabla)\vec{r} = \omega(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}) = \omega\vec{l} = \vec{\omega}$$

Дифференциальные операции второго порядка с вектором "набла". Оператор Лапласа.

Часто в физ-их приложениях приходиться иметь дело с диф-ными операциями второго порядка, которые применяются к скалярным и векторным полям.

	$\operatorname{grad} u$	$\operatorname{div}\vec{A}$	$\operatorname{rot}\vec{A}$
grad	X	$\vec{B}$	X
div	Δu	X	0
rot	0	X	$\vec{B}-\Delta\vec{A}$

X – не имеет смысла

Укажем две операции второго порядка, которые дают нулевой результат.

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = (\vec{\nabla},\operatorname{rot}\vec{A}) = (\vec{\nabla},[\vec{\nabla},\vec{A}]) = (\nabla,\nabla,\vec{A}) = 0$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\vec{\nabla},\operatorname{grad} u] = [\vec{\nabla},\vec{\nabla} u] = [\vec{\nabla},\vec{\nabla}]u = 0$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla,\operatorname{grad} u) = (\nabla,\nabla u) = (\nabla,\nabla)u = \Delta u,$$ где

$$\Delta = (\nabla,\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ – оператор Лапласа (лапласиан)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = [\nabla,\operatorname{rot}\vec{A}] = [\nabla,[\nabla,\vec{A}]] =$$

$$= \nabla(\nabla,\vec{A}) - (\nabla,\nabla)\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Положим,

$\text{grad div}\,\vec{A} \equiv \vec{B}$ ~ в таблице

4426. Найти $\text{div grad}\, f(r)$, где $r = |\vec{r}|$, в каком случае $\text{div grad}\, f(r) = 0$?

Найдём сначала $\text{grad}\, f(r)$.

По ф-ле сложной ф-ии: $\text{grad}\, f(r) = f'(r)\,\text{grad}\, r = f'(r) \cdot \text{grad}\, r =$

$$\text{grad}\, r = \text{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{f'(r)}{2r}(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}) = \frac{f'(r)}{r}\vec{r}$$

Далее для вычисления дивергенции применяем вектор „набла".

$$\text{div grad}\, f(r) = \left(\nabla, \frac{f'(r)}{r}\vec{r}\right) = \left(\nabla, \frac{f'(r)}{r}\vec{r}\right) + \left(\nabla, \frac{f'(r)}{r}\vec{r}\right) =$$

$$= \left(\vec{r}, \text{grad}\,\underbrace{\frac{f'(r)}{r}}_{g(r)}\right) + \frac{f'(r)}{r}(\nabla, \vec{r}) = (\vec{r}, \text{grad}\, g(r)) + \frac{f'(r)}{r}\,\text{div}\,\vec{r} =$$

$$= \left(\vec{r}, \frac{g'(r)}{r}\vec{r}\right) + \frac{3f'(r)}{r} = \frac{g'(r)}{r}r^2 + 3\frac{f'(r)}{r} = \left(\frac{f'(r)}{r}\right)' r + \frac{3f'(r)}{r} =$$

$$= \frac{f''(r)\cdot r - f'(r)}{r} + 3\frac{f'(r)}{r} = f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r}$$

$$\text{div grad}\, f(r) = 0 \Rightarrow f'' + \frac{2f'}{r} = 0 \quad \{f' = y(r)\}$$

$$y' + \frac{2y}{r} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{2dr}{r} \Rightarrow \ln y = -2\ln r + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow f'(r) = \frac{C_1}{r^2} \to f(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

4430 (а) Найти $\text{div}(u\,\text{grad}\,u)$

$$\text{div}(u\,\text{grad}\,u) = (\vec{\nabla}\cdot u\vec{\nabla}u) = (\vec{\nabla}\cdot \overset{\downarrow}{u}\vec{\nabla}u) + (\vec{\nabla}\cdot u\cdot\vec{\nabla}\overset{\downarrow}{u}) =$$

$$= (\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}u) + u(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})u = (\text{grad}\,u\cdot\text{grad}\,u) + u\cdot\Delta u$$

③ Найти $\text{rot}(u\,\text{grad}\,v)$

$$[\vec{\nabla}, u\,\text{grad}\,v] = [\nabla, \overset{\downarrow}{u}\,\text{grad}\,v] + [\nabla, u\,\text{grad}\,\overset{\downarrow}{v}] =$$

$$= -[\text{grad}\,v, \nabla u] + u[\nabla, \text{grad}\,v] = -[\text{grad}\,v, \text{grad}\,u] +$$

$$+ u\,\underbrace{\text{rot grad}\,v}_{=0} = [\text{grad}\,u, \text{grad}\,v]$$

④ Найти $\text{grad}(u\,\text{div}\,\vec{A}) = \nabla(u\,\text{div}\,\vec{A})\ \text{div}\,\vec{A}\cdot\nabla u + u\,\nabla\,\text{div}\,\vec{A} =$

$$= \text{div}\,\vec{A}\cdot\text{grad}\,u + u\,\nabla\,\text{div}\,\vec{A} = \cancel{\text{grad}}.$$

$$= \text{grad}\,u\cdot\text{div}\,\vec{A} + u(\text{rot rot}\,\vec{A} + \Delta\vec{A})$$

⑤ Найти $\operatorname{div}(u \operatorname{rot}\vec{A}) = (\vec{\nabla}, u \operatorname{rot}\vec{A}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{u} \operatorname{rot}\vec{A}) + (\nabla, u \operatorname{rot}\overset{\downarrow}{\vec{A}}) =$

$= (\operatorname{rot}\vec{A}, \nabla u) + u(\nabla, \operatorname{rot}\vec{A}) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{rot}\vec{A}) + u \underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}}_{=0} =$

$= \underline{(\operatorname{grad} u, \operatorname{rot}\vec{A})}$

Домашняя работа

4429. $\operatorname{div}(f(r)\cdot\vec{r})$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = (\vec{\nabla}, f(r)\cdot\vec{r}) = (\vec{\nabla}, \overset{\downarrow}{f(r)}\vec{r}) + (\vec{\nabla}, f(r)\overset{\downarrow}{\vec{r}}) =$

$= (\vec{\nabla}, \overset{\downarrow}{f(r)}\cdot\vec{r}) + f(r)\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}, \vec{r})}_{=3} = 3f(r) + (\vec{\nabla}f(r), \vec{r}) ⊜$

$\vec{\nabla}f(r) = \operatorname{grad} f(r) = f'(r)\cdot\operatorname{grad} r = \{r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\} = f'(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

$⊜\ 3f(r) + \frac{f'(r)}{r}\underbrace{(\vec{r}, \vec{r})}_{=r^2} = \underline{3f(r) + rf'(r)}$

Когда равно нулю? $rf'(r) + 3f(r) = 0$

$r\cdot f' + 3f = 0$

$\frac{r\,df}{dr} = -3f$

$\int\frac{df}{f} = -\int\frac{3dr}{r}$

$\ln f = -3\ln r + \ln C$

$\Rightarrow \underline{f = \frac{C}{r^3}}$

Ответ: 1) $\operatorname{div}(f(r)\cdot\vec{r}) = 3f(r) + rf'(r)$

2) $= 0$ когда $f = \frac{C}{r^3}$

4430 (б). $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = (\vec{\nabla}, u\cdot\vec{\nabla}v) = (\vec{\nabla}\overset{\downarrow}{u}, \cdot\vec{\nabla}v) + (\vec{\nabla}, u \operatorname{grad}\overset{\downarrow}{v}) =$

$= (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}}_{\Delta}v = (\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v) + u\cdot\Delta v$

Ответ: $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v) + u\cdot\Delta v$

4435 (а)

Док-ть, что $\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b}) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}$

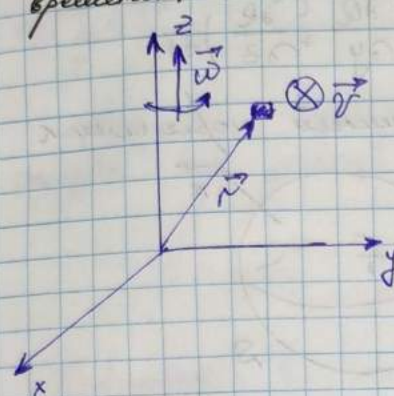
$\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b}) = [\vec{\nabla}, (\vec{a}+\vec{b})] = [\vec{\nabla}, \vec{a}] + [\vec{\nabla}, \vec{b}] = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}$

по св-ву вект. пр-я

что и т.д.

4438. (решаем в прошлом д/з)

Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси Oz против часовой стрелки с постоянной угловой ск-ью ω. Найти дивергенцию вектора скорости $\vec{v}$ и вектора ускорения $\vec{a}$ в точке $M(x,y,z)$ пространства в данный момент времени.



$$\vec{v}=[\vec{\omega},\vec{r}], \quad \text{где } \vec{\omega}=\omega\vec{k}$$

Рассуждения те же, просто посчитаем, используя оператор $\vec{\nabla}$.

$$\operatorname{div}\vec{v}=(\vec{\nabla},\vec{v})$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\vec{v}=[\omega\vec{k},(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})]=\omega\cdot x[\vec{k},\vec{i}]+\omega y[\vec{k},\vec{j}]+$$
$$+\omega\cdot z\underbrace{[\vec{k},\vec{k}]}_{=0}=\omega\cdot x\cdot\vec{j}-\omega y\cdot\vec{i}=-\omega y\cdot\vec{i}+\omega x\vec{j}$$

1) $\Rightarrow \operatorname{div}\vec{v}=(\vec{\nabla},\vec{v})=(\vec{\nabla},(-\omega y\cdot\vec{i}+\omega x\vec{j}))=(\vec{\nabla},-\omega y\cdot\vec{i})+(\vec{\nabla},\omega x\vec{j})=$
$$=-\omega\underbrace{(\vec{\nabla},y\vec{i})}_{=0}+\omega\underbrace{(\vec{\nabla},x\vec{j})}_{=0}=0$$
$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{v}=0$$

2) $$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=[\vec{\omega},\frac{d\vec{r}}{dt}]=[\vec{\omega},\vec{v}]$$
$$\Rightarrow \vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega\\-\omega y&\omega x&0\end{vmatrix}=-\omega(\omega x\vec{i}+\omega y\vec{j})=-\omega^2x\vec{i}-\omega^2y\vec{j}$$
$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{a}=(\vec{\nabla},\vec{a})=(\vec{\nabla},(-\omega^2x\vec{i}-\omega^2y\vec{j}))=-\omega^2\underbrace{(\vec{\nabla},x\vec{i})}_{=1}-\omega^2\underbrace{(\vec{\nabla},y\vec{j})}_{=1}=$$
$$=-\omega^2-\omega^2=\underline{\underline{-2\omega^2}}$$
$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{a}=-2\omega^2$$

4440 (см. прошлое д/з.)

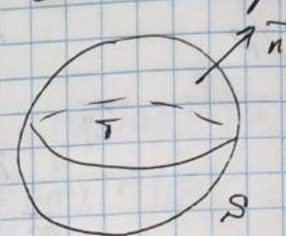
01.12.21.

Формула Гаусса-Остроградского

Если S - кусочно-гладкая пов-ть, которая ограничивает область T, а $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ - ф-ии непр. вместе со своими частными производными 1-го порядка в замкнутой области $T+S$, то справедлива формула Г.-О.:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dT$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - напр. косинусы внешней нормали к замкнутой пов-ти S



Если ввести векторное поле $\vec A$ с проекциями $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$

$$\vec A(\vec r) = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$$

формулу Г.-О. можно записать в компактном инвариантном виде:

$$\iint_S (\vec A \cdot \vec n)\,dS = \iiint_T \operatorname{div} \vec A\, dV$$

С помощью вектора „набла" (используя мнемоническое правило)

$$\iint_S (\vec A \cdot \vec n)\,dS = \iiint_T (\vec\nabla \cdot \vec A)\cdot dV$$

„Кто и шутя и скоро пожелаетъ пи узнать, число ужъ знаетъ"

~ коротко о мнемонике. ~> $\pi \approx 3{,}1415926536$

№1378. $$\oiint_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\ominus \iiint_T \frac{y^2+z^2+x^2+z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\iiint_T \frac{dV}{r}$$

№1380. $$\underbrace{\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS}$$

$$= \iint_S (\operatorname{rot}\vec A \cdot \vec n)\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec A\, dV = 0$$

№ 4389.

$$\iint_S (x-y+z)\,dy\,dz + (y-z+x)\,dz\,dx + (z-x+y)\,dx\,dy \ominus$$, где S — внешняя сторона пов-ти:

$$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$$

$P=x-y+z$; $Q=y-z+x$; $R=z-x+y$

$$\ominus 3\iiint_T dV$$

Первое, что приходит в голову — взять за новые координаты, стоящие под знаком модулей комбинации x, y, z:

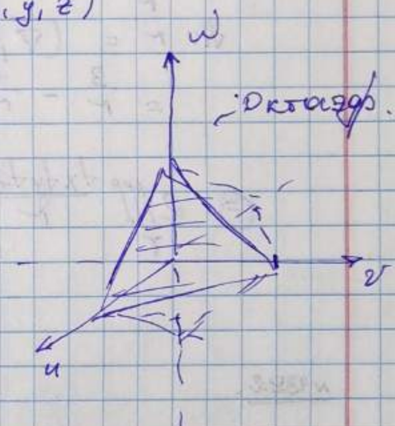
$$\begin{cases} u = x-y+z \\ v = y-z+x \\ w = z-x+y \end{cases} \to |u|+|v|+|w|=1.$$

Картинка в методичке (10.3)

Вычислим прежде всего якобиан: $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$

$\frac{1}{J} = \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{J} = \begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \\ \downarrow & \downarrow & \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad \to \quad J = \frac{1}{4}$$



$$I = \frac{3}{4}\cdot 8 \iiint\limits_{\substack{u+v+w\le 1 \\ u\ge0,\, v\ge0,\, w\ge0}} du\,dv\,dw = 6\int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^{1-u-v} dw = 1.$$

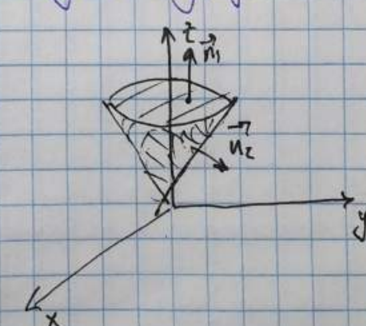
№4390

$$I = \iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$$, где S — часть конической пов-ти $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$.

Указание: присоединить часть плоскости $z=h$, $x^2+y^2\le h^2$, тогда интеграл будет по замкнутому контуру.

Найдём в начале вклад от круглой крышки.
Он равен:

$$L = \iint_\sigma h^2\,dx\,dy$$, где σ — указанный круг радиуса h и площадью πh^2



здесь учтено, что $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$.

$z=h \to L = \pi h^4$.

Из теоремы Г.-О. следует, что сумма вкладов конической пов-ти и крышки равна объёмному интегралу:

$$I + L = I + \pi h^4 = 2\iiint_V (x+y+z)\,dV$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \to dV = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

В итоге получили:

$$I+\pi h^4 = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^z \rho\, d\rho\, [\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)+z]$$

$$\Rightarrow I+\pi h^4 = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h z\, dz \int_0^z \rho\, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h z^3\, dz = \frac{\pi h^4}{2}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\pi h^4}{2}$$

4391. Док-ть формулу:

$$\iiint_T \frac{dx\,dy\,dz}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\widehat{\vec r, \vec n})\, dS,$$ где S - замкнутая пов-ть, огранич. объём T

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

$$\cos(\widehat{\vec r, \vec n}) = \left(\frac{\vec r}{r}\cdot\vec n\right)$$

$$\iint_S \left(\frac{\vec r}{r}\cdot\vec n\right) dS = \iiint \operatorname{div}\frac{\vec r}{r}\, dV \ominus$$

$$\operatorname{div}\frac{\vec r}{r} = \left(\vec\nabla, \frac{\vec r}{r}\right) = \frac{1}{r}(\vec\nabla, \vec r) + \left(\vec\nabla\cdot\frac{1}{r}, \vec r\right) =$$
$$= \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$

$$\ominus\ 2\iiint_T \frac{dx\,dy\,dz}{r} \rightarrow \iiint_T \frac{dx\,dy\,dz}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\widehat{\vec r, \vec n})\, dS$$

ч.т.д.

№4392.

Домашняя работа.

4376. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy = I$

$$\iint\limits_S (\vec{A}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\cdot dV$$

$$\vec{A} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = div\,\vec{A} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Rightarrow \iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy = 3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

* Если $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \iint\limits_S \dots = 3\iiint\limits_V r^2\,dV$

Ответ: $I = 3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$

4377.

$$\iint\limits_S yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx + xy\,dx\,dy = I$$

$$\vec{A} = yz\cdot\vec{i} + zx\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow div\,\vec{A} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = \underline{\underline{0}} \quad \Rightarrow I = 0$$

Ответ: $I = 0$

4379. $\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS = I$

$$\vec{A} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$div\,\vec{A} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =$ {Если записать, используя лапласиан} $=$

$= \Delta u$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS = \iiint\limits_V \Delta u\,dV = \iiint\limits_V \Delta u\,dx\,dy\,dz$$

Ответ: $I = \iiint\limits_V \Delta u\cdot dx\,dy\,dz$

4381. Док-ть, что если S - замкнутая простая пов-ть и $\vec{e}$ - любое постоянное направление, то

$$\iint\limits_S \cos(\vec{n},\vec{e})\,dS = 0$$

$\cos(\vec{n},\vec{e}) = \left(\frac{\vec{e}}{e}\cdot\vec{n}\right)$, тогда перепишем интеграл

$$\iint\limits_S \cos(\vec{n},\vec{e})\,dS = \iint\limits_S \left(\frac{\vec{e}}{e}\cdot\vec{n}\right) dS = \iiint\limits_V div\left(\frac{\vec{e}}{e}\right) dV$$

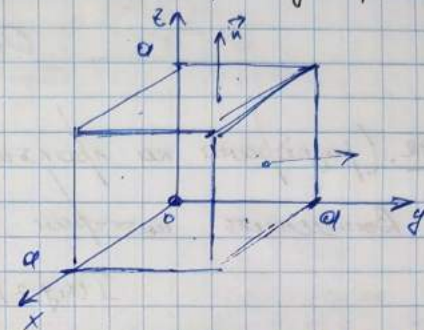
$\vec{e}$ - постоянное векторное поле, т.е. его можно представить в виде: $\vec{e} = C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k}$

тогда сразу верно, что $div\left(\frac{\vec{e}}{e}\right) = 0$ (производное от конст

$\Rightarrow$ Исходный интеграл $I = 0$, т. к.

$$\iint\limits_S \cos(\vec{n}, \vec{e})\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}}{e}\right) dV = 0$$

4387. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S – внешняя сторона границы куба: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$



$$I = \iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy = 2\iiint\limits_V (x+y+z)\,dV$$

$P = x^2 \to \frac{\partial P}{\partial x} = 2x$

$Q = y^2 \to \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y$

$R = z^2 \to \frac{\partial R}{\partial z} = 2z$

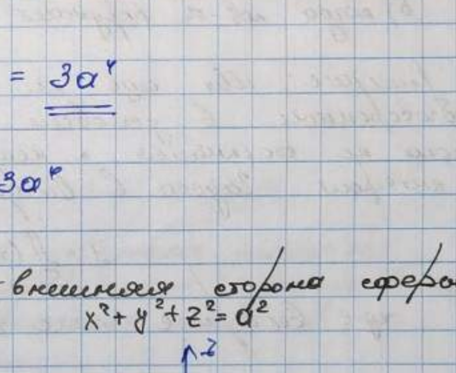
$$\Rightarrow I = 2\cdot\int_0^a dx \cdot \int_0^a dy \cdot \int_0^a (x+y+z)\,dz = 2\Big(\underbrace{\int_0^a x\,dx \int_0^a dy \int_0^a dz}_{=I_x} + \underbrace{\int_0^a dx \int_0^a y\,dy \int_0^a dz}_{=I_y} + \underbrace{\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z\,dz}_{I_z}\Big) \ominus$$

$\ominus$ $\{I_x = I_y = I_z$ просто домножим на $3\}$ $=$

$$= 6\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z\,dz = 6\cdot a\cdot a\cdot\frac{a^2}{2} = \underline{\underline{3a^4}}$$

Ответ: $I = 3a^4$

4388. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$



$P = x^3 \to \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2$

$Q = y^3 \to \frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2$

$R = z^3 \to \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$

$$I = \iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy = 3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

Перейдём в сферическую с.к.:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad I = r^2\sin\theta$$

$\varphi \in [0; 2\pi]$; $\theta \in [0; \pi]$

$$\ominus\ 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a (r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)\, r^2\sin\theta\, dr =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a r^4\sin\theta\, dr = 3\cdot 2\pi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^a r^4\, dr = 12\pi\cdot\frac{a^5}{5}$$

$\Rightarrow I = \frac{12}{5}\pi a^5$

* Если в $3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, подинтегральное выражение заменить на a^2 → придём к неправильному ответу. $I = \frac{4\pi a^5}{3}$

Ответ: $I = \frac{12}{5}\pi a^5$

4392. (разобрана на практике ~ из методички.)

Вычислить интеграл Гаусса

$$I(x,y,z) = \iint_S \frac{\cos(\vec r, \vec n)}{r^2}\, dS,$$ где S - простая замкнутая гладкая пов-ть, огр. объём V.

$\vec n$ - внешняя нормаль к поверхности S в её точке (x,y,z), $\vec r$ - радиус-вектор, соедин. точку (x,y,z) с точкой (x_0,y_0,z_0), а

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

Рассмотреть два случая:

а) когда пов-ть не окружает точку (x_0,y_0,z_0)

б) когда пов-ть окружает точку (x_0,y_0,z_0).

Решение: Мы ещё не понимаем, чем отличаются случаи, оговоренные в условии задачи. Поэтому не будем различать их, пока не столкнёмся с непредвиденными затруднениями. Запишем интеграл Гаусса в векторной форме:

$$I = \iint_S (\vec A\cdot\vec n)\,dS,$$

где векторное поле $\vec A$ равно:

$$\vec A = \frac{\vec r}{r^3}$$

Преобразуем поверхностный интеграл с помощью Гаусса-Остроградского для чего вычислим дивергенцию фигурирующего в поверхностном интеграле векторного поля:

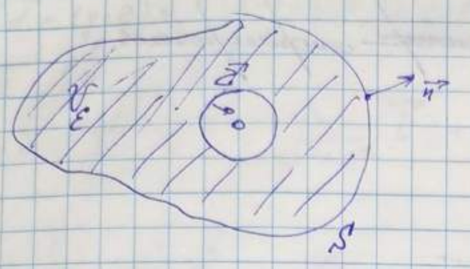
$$\left(\vec\nabla\cdot\frac{\vec r}{r^3}\right) = \left(\vec r\cdot\vec\nabla\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3}(\vec\nabla\cdot\vec r) = -\frac{3}{r^5}(\vec r\cdot\vec r) + \frac{3}{r^3} = -\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3} = 0$$

Поскольку дивергенция векторного поля $\vec A$ всюду равна нулю, равен нулю объёмный интеграл от дивергенции, а значит, по формуле Гаусса-Остроградского, равен нулю и поверхностный гауссов интеграл.

Пусть теперь точка (x_0,y_0,z_0) явл. внутр. точкой области T. В этой точке векторное поле недифференцируемо, и не имеет смысла говорить о каком-либо значении дивергенции в данной точке. Соответственно, теперь уже нельзя утверждать, что объёмный интеграл от $\operatorname{div}\vec A$ равен нулю.

Чтобы обойти возникшую проблему, окружим данную точку сферой Σ с центром в этой точке и радиусом ε - настолько таким, чтобы сфера Σ целиком находилась внутри пов-ти S. Применим формулу Г.-О. к области V_ε, находящейся между поверхностями S и Σ. Поскольку особая точка (x_0, y_0, z_0) вырезана из области интегрирования V_ε, то объемный интеграл вновь равен нулю, и мы приходим к равенству

$I + I_\varepsilon = 0$, где за I_ε обозначен интеграл по указанной сфере:



$$I_\varepsilon = \iint_\Sigma \frac{(\vec r \cdot \vec n)}{r^3}\, dS$$

Его легко вычислить. Действительно, ~~выходящее~~ входящее сюда скалярное произведение всюду одинаково и равно $(\vec r, \vec n) = -\varepsilon$ (знак минус появился потому, что вектор нормали, внешний к области V_ε, направлен внутрь сферы). Кроме того и r во всех точках сферы принимает одинаковое значение $r = \varepsilon$.

Таким образом:

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi$$

Следовательно, если точка (x_0, y_0, z_0) находится внутри пов-ти S, то гауссов интеграл равен $I = -I_\varepsilon = 4\pi$

Формула Стокса.

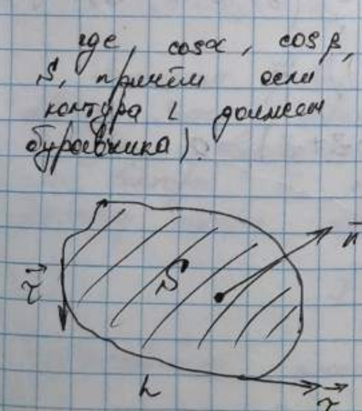
8.12.21

Теорема. Если $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ - непрерывно-дифф-ые ф-ии и L - простой кусочно-гладкий контур, ограничивающий конечную кусочно-гладкую двустороннюю пов-ть S, то имеет место формула Стокса:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - напр. косинусы нормали $\vec n$ к поверхности S, причём если смотреть с верхнего конца нормали, то обход контура L должен совершаться против хода часовой стрелки (правило буравчика).

Если $\vec A(\vec r) = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$



Формулу можно представить компактно:

$$\oint_L (\vec A \cdot d\vec r) = \iint_S (\vec n \cdot \operatorname{rot} \vec A)\, dS$$

4367. Вычислить: $I = \oint\limits_{L} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где L - окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$

Найдём компоненты вектора нормали:

$$ax+by+cz+d=0$$

$\vec{m} = \{a, b, c\}$ + нужно ~~нормир~~ отнормировать.

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

$$\vec{A} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\Rightarrow (\vec{n} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{A}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_S -\sqrt{3}\,dS = -\sqrt{3}\iint\limits_S dS = -\sqrt{3}\,\pi a^2$$

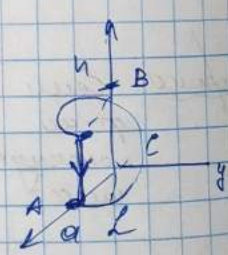
4368

$$I = \int\limits_{A\to B} (x^2-yz)\,dx + (y^2-xz)\,dy + (z^2-xy)\,dz,$$

взятый по отрезку винтовой линии: $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \frac{h}{2\pi}\varphi$

от точки $A(a, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, h)$.

$$I + I_0 = \iint\limits_S (\vec{n} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{A})\,dS$$



I_0 ~ дополнение отрезком от т. A до т. B.

$$\vec{A} = (x^2-yz)\vec{i} + (y^2-xz)\vec{j} + (z^2-xy)\vec{k}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2-yz & y^2-xz & z^2-xy \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2-xy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2-xz)\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(z^2-xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2-yz)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(z^2-xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2-yz)\right) =$$

$$= \vec{i}(-x+x) - \vec{j}(-y+y) + \vec{k}(-z+z) = 0$$

$$\Rightarrow I = -I_0 = -\int_h^0 z^2\,dz = \int_0^h z^2\,dz = \frac{h^3}{3}$$

$$I_0 = \oint\limits_L \cancel{x\,dx + y\,dy + z\,dz} = \cancel{\oint\limits_L z}$$

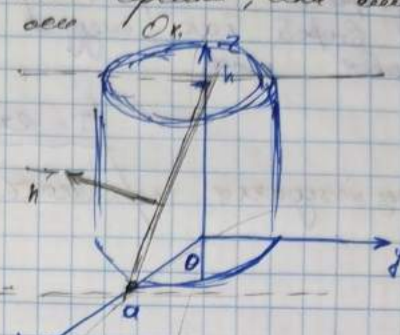
~~$x=a$~~ $\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 = \int\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{B\to A} \underbrace{P\,dx}_{0} + \underbrace{Q\,dy}_{0} + \underbrace{R\,dz}_{z^2}$

$$\Rightarrow I = I_0 = \frac{h^3}{3}$$

4341.

$$I = \oint\limits_{\ell} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$$

где ℓ - эллипс $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$ пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

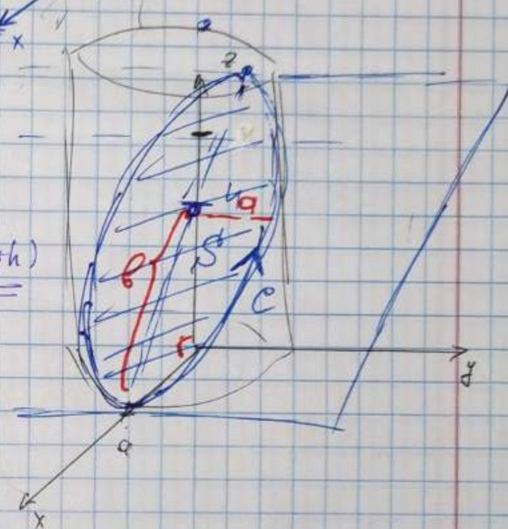


$$\vec{A} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$$

$$\vec{m} = \left\{\frac{1}{a};\ 0;\ \frac{1}{h}\right\}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{m}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}} = \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}\vec{j}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-1) - \vec{j}(1+1) + \vec{k}(-1-1) = -2(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$



$$(\vec{n}, \operatorname{rot}\vec{A}) = -2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_S -\frac{2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}}\,dS = -\frac{2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}} = -2\pi a(a+h)$$

$$S_{эл} = \pi a\sqrt{a^2+h^2}$$

Ответ: $I = -2\pi a(a+h)$

4372. (11.7 в методичке)

$$I = \oint\limits_{\ell} (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$$, где ℓ - кривая $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R,\ z>0)$

$$\vec{A} = (y^2+z^2)\vec{i} + (x^2+z^2)\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = 2(y-z)\vec{i} + 2(z-x)\vec{j} + 2(x-y)\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad z = \sqrt{2Rx-x^2-y^2}$$

Заменим криволинейный интеграл на поверхностный по указанной пов-ти. Затем спроектируем поверхность на круг σ в плоскости (x,y) и выразим поверхностный интеграл через двойной. Заметив при этом что векторы $\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$, и внешняя нормаль $\vec{n}$ к вырезаемому участку сферы образуют правую тройку, получим:

$$I = \iint\limits_{\sigma} (\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{r}_x, \vec{r}_y)\,dx\,dy.$$

Вычислим смешанное произведение:

$$(\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{r}_x, \vec{r}_y) = 2\begin{vmatrix} y-z & z-x & x-y \\ 1 & 0 & \frac{R-x}{z} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{z} \end{vmatrix} = 2\left(x-y+\frac{y}{z}(z-x)+\frac{1}{z}(z-y)(R-x)\right) =$$

$$= 2R\left(1-\frac{y}{z}\right) = 2R\left(1-\frac{y}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\right)$$

$$I = 2R\iint\limits_{D} dx\,dy - 2R\int\limits_{0}^{2r} dx \int\limits_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} \frac{y\,dy}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}$$

Первый интеграл равен площади круга $D: (x-r)^2+y^2<r^2$, а второй как следует из соображений симметрии равен нулю.

$$\Rightarrow \boxed{I = 2\pi R r^2}$$

11.5 (из методички переписать.)

Домашняя работа.

4369. $\oint\limits_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$ – ? C – замкнутый контур, расп. в плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$

$$d\vec{r} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}$$

$$\vec{n} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = ([d\vec{r}, \vec{n}], \vec{r}) = ([\vec{n}, \vec{r}], d\vec{r})$$

По ф-ле Стокса:

$$\oint\limits_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \iint\limits_S (\vec{n}, \operatorname{rot}[\vec{n}, \vec{r}])\, dS \ominus$$

$$\operatorname{rot}[\vec{n}, \vec{r}] = [\vec{\nabla}, [\vec{n}, \vec{r}]] = [\vec{\nabla}, [\vec{n}, \vec{r}]] + [\vec{\nabla}, [\vec{n}, \vec{r}]] =$$

$$= \vec{n}(\vec{\nabla}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\nabla}, \vec{n}) + \vec{n}\underbrace{(\vec{\nabla}, \vec{r})}_{=3} - (\vec{\nabla}, \vec{n})\vec{r} =$$

$$= 3\vec{n} - \vec{n} = 2\vec{n}$$

$$\ominus\ 2\iint\limits_S \underbrace{(\vec{n}, \vec{n})}_{=1} dS = \underline{\underline{2S}}$$, S ~ площадь, огр. контуром.

Ответ: $I = 2S$

4370. $\oint\limits_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, где C ~ эллипс $\begin{cases} x = a\sin^2 t \\ y = 2a\sin t\cos t \\ z = a\cos^2 t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$

$P = y+z$; $Q = z+x$; $R = x+y$

$$\oint\limits_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{n})\, dS$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = \vec{i}(1-1) - \vec{j}(1-1) + \vec{k}(1-1) = 0$$

$$\Rightarrow I = \oint\limits_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0$$

Ответ: $I = 0$

4375*. Док-ть, что функция

$$W(x,y,z) = \kappa i \iint\limits_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2}\, dS \qquad (\kappa = \text{const})$$

где S – площадка, ограниченная контуром C, $\vec{n}$ – нормаль к пов-ти S и $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий точку пространства

$M(x,y,z)$ с текущей точкой $A(\xi,\eta,\zeta)$ контура C, является потенциалом магнитного поля $\vec{H}$, создаваемого током i, протекающим по контуру C.

$$d\vec{H} = k i \frac{(\vec{r}, d\vec{S})}{r^3}$$

$$\vec{r} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j} + (\zeta - z)\vec{k}$$ r по условию

$$\vec{H} = \oint_C k i \frac{(\vec{r}, d\vec{S})}{r^3}$$

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k}$$?

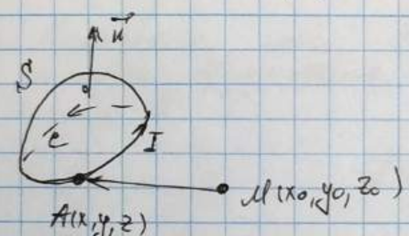
$$-\frac{\vec{r}}{r^3} = grad\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla \cdot \frac{1}{r}$$

(1) $W(x_0, y_0, z_0) = kI \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^3} dS$? док-ть

(2) $\vec{H} = kI \oint_C \frac{[\vec{r}, d\vec{l}]}{r^3}$, где

Переобозначим: $M(x_0, y_0, z_0)$, $A(x,y,z)$

$\vec{r} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$, а направление нормали $\vec{n}$ составляет с направлением тока „правило буравчика"



Решение: Введём для простоты обозначение $\vec{A} = kI\frac{\vec{r}}{r^3}$ и разложим вектор под интегралом по ортонормированной тройке $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$[\vec{A}, d\vec{l}] = \vec{i}(\vec{i}, [\vec{A}, d\vec{l}]) + \vec{j}(\vec{j}, [\vec{A}, d\vec{l}]) + \vec{k}(\vec{k}, [\vec{A}, d\vec{l}]) =$$

применяя св-ва смешанного произведения находим

$$= \vec{i}(d\vec{l}, [\vec{i}, \vec{A}]) + \vec{j}(d\vec{l}, [\vec{j}, \vec{A}]) + \vec{k}(d\vec{l}, [\vec{k}, \vec{A}])$$

Подставляя полученное выражение в (2)

Для вычисления роторов применим технику действий с вектором "набла" и формулу для двойного векторного произведения

$$rot[\vec{i}, \vec{A}] = [\nabla, [\vec{i}, \vec{A}]] = \vec{i}(\nabla, \vec{A}) - (\nabla, \vec{i})\vec{A} = \vec{i}\, div\vec{A} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}$$

поскольку

$$div\vec{A} = kI\left(\nabla, \frac{1}{r^3}\vec{r}\right) = kI\{(\nabla$$

15.12.23.

Задачи теории поля.

Понятие потока

$$\Pi = \iint\limits_S (\vec{A}\cdot\vec{n})\,dS$$

векторного поля $\vec{A}$ через заданную пов-ть S в указанную вектором нормали $\vec{n}$ сторону.

Понятие работы.

$$U = \int\limits_L (\vec{F}\cdot d\vec{r})$$

силового поля $\vec{F}$ вдоль пробегаемой в заданном направлении кривой L. В иных физ-их задачах, к примеру если $\vec{F} = \vec{H}$ - магнитное поле, а контур L замкнут, предпочитают говорить о циркуляции.

$$\Gamma = \oint\limits_L (\vec{H}\cdot\vec{\tau})\,dl$$

Опр. Векторное поле $\vec{A}$ назыв. потенциальным, если его можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля u

$$\vec{A} = \operatorname{grad} u.$$

Поле u наз-ся потенциалом векторного поля $\vec{A}$

Из определения вытекает, что

$$\operatorname{rot}\vec{A} \equiv \vec{0}$$

Это соотношение является необх. и дост. условием потенциальности поля. Из формулы Стокса следует:

$$\oint\limits_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0$$

Опр. Векторное поле $\vec{A}$ называется соленоидальным, если его можно представить в виде ротора некоторого векторного поля $\vec{B}$

$$\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B}$$

Поле $\vec{B}$ назыв. потенциалом поля $\vec{A}$.

Из опр-я вытекает, что (как проверка на соленоид.)

$$\operatorname{div}\vec{A} \equiv 0$$

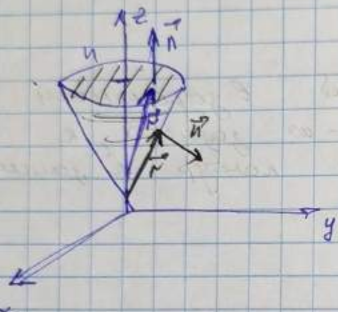
Это соотношение явл. необх. и дост. усл. соленоид. поля

Из формулы Г-О следует, что

$$\iiint_T \operatorname{div}\vec{A}\, dT = 0$$

т.е. поток соленоид. поля через любую замкн. кусочно-гладкую пов-ть равен нулю.

№4441. Найти поток радиус-вектора $\vec{r}$:
а) через боковую пов-ть конуса $x^2+y^2\le z^2$ $(0\le z\le h)$;
б) через основание этого конуса.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Pi_{бок} = \iint_{S_{бок}} (\vec{n},\vec{r})\,dS = 0$$

Через $S_{осн}$: $\vec{n} = h\vec{k}$

$$\Pi_{осн} = \iint_{S_{осн}} (\vec{n},\vec{r})\,dS = h\underbrace{\iint_{S_{кр}} dS}_{=\pi h^2} = \pi h^3$$

2 способ.

$$\oiint_{S_{бок}+S_{кр}} (\vec{n},\vec{r})\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\vec{r}\,dv = 3V_{кон} = 3\cdot\frac{1}{3}\pi h^2\cdot h = \pi h^3$$

№4442. Найти поток вектора $\vec{A} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$
а) через боковую пов-ть цилиндра $x^2+y^2\le a^2$ $(0\le z\le h)$;
б) через полную пов-ть этого цилиндра.

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}yz + \frac{\partial}{\partial y}xz + \frac{\partial}{\partial z}xy = 0$$

$\rightarrow$ поле соленоидально, по т. Г-О поток через полную пов-ть цилиндра с "дном" и "крышкой" равен нулю.

№4443. Найти поток радиус-вектора $\vec{r}$ через пов-ть: $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$

Поток через круг в плоскости (x,y), замыкающий нашу пов-ть, равен нулю. По той причине, что радиус-вектор любой точки этой плоскости перпендикулярен её вектору нормали $\vec{n}$. Следовательно, применяя Г-О, имеем:

$$\iint (\vec{A}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{r})\,dV = 3\iiint_V dV = 3V = \underline{\underline{\pi}}$$

где $V=\frac{\pi}{3}$ - объём конуса, огранич. указанным конусом и пл-ю $z=0$

№ 44. Найти поток вектора $\vec{A} = m\frac{\vec{r}}{r^3}$, через замкнутую пов-ть S, окр. начало координат.

особая точка.

Окружаем особую точку сферой:

$S_{сф}: \ x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\Rightarrow \oiint\limits_{S+S_{сф}} (\vec{n}, \vec{A})\,dS \overset{Г-О}{=} \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\vec{A}\,dV = 0$

$\operatorname{div}\vec{A} = 0$

$0 = \oiint\limits_{S} (\vec{n}, A)\,dS + \oiint\limits_{S_{сф}} (\vec{n}, \vec{A})\,dS$

$\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r}$

$(\vec{n}, \frac{m\vec{r}}{r^3}) = -(\frac{\vec{r}}{r}, \frac{m\vec{r}}{r^3}) = -m\frac{r^2}{r^4} = -\frac{m}{r^2}$

$-\oiint\limits_{S_{сф}} \frac{m}{r^2}\,dS = -\frac{m}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi m$

$\Rightarrow \oiint\limits_{S} (\vec{n}, \vec{A})\,dS = \underline{4\pi m}$

№ 4452.1.

Найти работу поля $\vec{F} = \frac{1}{y}\vec{i} + \frac{1}{z}\vec{j} + \frac{1}{x}\vec{k}$

вдоль прямолинейного отрезка между точками $M(1,1,1)$ и $N(2,4,8)$

$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{1}{y} & 1/z & 1/x \end{vmatrix} \neq 0$ поле непотенциально.

Ур-е прямой „в отрезках": $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

$MN: \ \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z-1}{8-1} = t$; $\vec{A} = \frac{1}{y}\vec{i} + \frac{1}{z}\vec{j} + \frac{1}{x}\vec{k}$

$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+3t \\ z = 1+7t \end{cases} \quad t \in [0;1]$

$U = \int\limits_{MN} (\vec{A}, d\vec{r}) = \int\limits_{MN} \frac{1}{y}dx + \frac{1}{z}dy + \frac{1}{x}dz = \int\limits_0^1 \frac{dt}{3t+1} + \frac{3dt}{7t+1} + \frac{7dt}{t+1} =$

$= \frac{1}{3}\ln(3t+1) + \frac{3}{7}\ln(7t+1) + 7\ln(t+1)\Big|_0^1 = \frac{188}{21}\ln 2$

№4454

Найти циркуляцию вектора $\vec{A} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$ (c – постоянная)

а) вдоль $x^2+y^2=1$, $z=0$

б) вдоль окружности $(x-2)^2+y^2=1$, $z=0$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & c \end{vmatrix} = 2\vec{k}$$

$\vec{n} = \vec{k}$ по ф-ле Стокса:

$$\Gamma = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n})\,dS = 2\iint\limits_S dS = 2\pi$$ – для обоих кругов. (и в а) и б))

№4457. Док-ть, что поле

$$\vec{A} = yz(2x+y+z)\vec{i} + xz(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$$

– потенциальное и найти потенциал поля.

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$ (можно посчитать)

$\cancel{\frac{\partial}{\partial x} Q = 2xz + 2yz}$ $\Rightarrow \operatorname{grad} u = \vec{A} \to u = ?$

1) $$\int\limits_{AB} (\vec{A}, d\vec{r}) = \int\limits_{AB} yz(2x+y+z)\,dx + xz(x+2y+z)\,dy + xy(x+y+2z)\,dz =$$

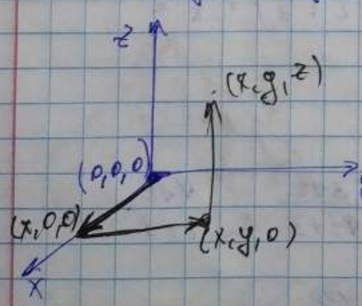
$$= \int\limits_{AB} yz\,dx^2 + y^2z\,dx + yz^2\,dx + x^2z\,dy + xz\,dy^2 + xz^2\,dy + x^2y\,dz + xy^2\,dz + xy\,dz^2 =$$

$$= \int\limits_{AB} d(x^2yz) + d(xy^2z) + d(xyz^2) = \int\limits_{AB} d\underbrace{(x^2yz + xy^2z + xyz^2)}_{u}$$

$$\Rightarrow u = xyz(x+y+z) + C$$

2) $\frac{\partial u}{\partial x} = P$; $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$; $\frac{\partial u}{\partial z} = R$

$$\vec{A} = yz(2x+y+z)\vec{i} + xz(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$$



$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{AB} du = u(B) - u(A)$$

$A(0,0,0)$ и $B(x,y,z)$

$$\int_0^x 0\cdot 0(2x+0+0)\,dx + \int_0^y x\cdot 0(x+2y+0)\,dy + \int_0^z xy(x+y+2z)\,dz = xyz(x+y+z)\ \cancel{C} = u(x,y,z) - C$$

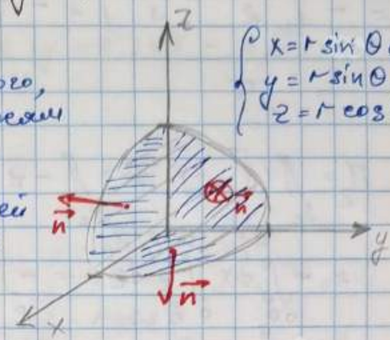
Домашняя работа

4444. $\vec{A} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через положительный октант сферы:

$x^2+y^2+z^2=1$

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

$\Pi = \iint\limits_S (\vec{A}\cdot\vec{n})\,dS$



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Применим формулу Гаусса-Остроградского, дополним область четвертями кругов по осям (синяя штриховка)

$\vec{A} \perp \vec{n}$ на этих четвертьях окружностей $\Rightarrow$ поток через эти пов-ти равен нулю:

$$\Rightarrow \Pi = \oiint\limits_S (\vec{A}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{A}\,dV =$$

$$= 2\iiint\limits_V (x+y+z)\,dV = 2\cdot\left(\iiint\limits_V x\,dV + \iiint\limits_V y\,dV + \iiint\limits_V z\,dV\right) \ominus$$ отдельно в сферич. коорд.

$$\iiint\limits_V x\,dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r\sin\theta\cos\varphi\cdot r^2\sin\theta\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta \int_0^1 r^3\,dr = \frac{1}{4}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$$

$$\iiint\limits_V y\,dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3\sin^2\theta\sin\varphi\,dr = \frac{1}{4}\cdot\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{16}$$

$$\iiint\limits_V z\,dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\,dr = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d(\sin\theta) = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

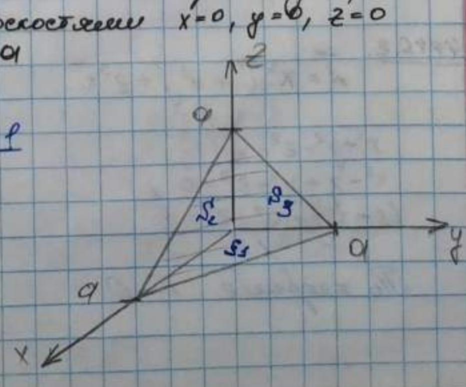
$$\Rightarrow \ominus\ 2\cdot\left(\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

Ответ: $\Pi = \dfrac{3\pi}{8}$

4445.1. $\vec{A} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через полную пов-ть пирамиды, огранич. плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0$

$x+y+z=a$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$



Здесь не понятно как $\vec{A}$ будет ориентирован с нормалями, поэтому посчитаем поток отдельно для каждой области (треугольника)

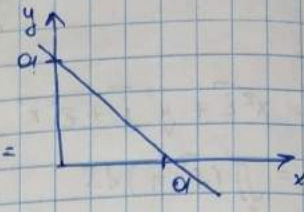
$S_1:\ \vec{n} = -\vec{k}$

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1}(\vec{A}, -\vec{k})\,dS = -\iint\limits_{S_1} x\,dx\,dy =$$

$$= -\int_0^a dx \int_0^{a-x} x\,dy = -\int_0^a x\,dx \int_0^{a-x} dy =$$

$$= -\int_0^a x(a-x)\,dx = -\left(\int_0^a ax\,dx - \int_0^a x^2 dx\right) =$$

$$= -\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = -\frac{a^3}{6}$$

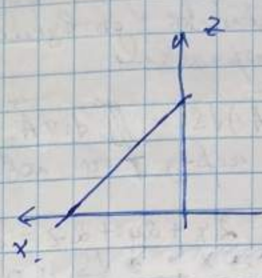


$y = -x + a$

S_2: $\vec{n} = -\vec{j}$

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} (\vec{A}, -\vec{j})\,dS = \iint_{S_2} -z\,dS =$$

$$= -\int_0^a z\,dz \int_0^{a-z} dx = -\frac{a^3}{6}$$



S_3: $\vec{n} = -\vec{i}$

$$\Pi_3 = \iint_{S_3} (\vec{A}, -\vec{i})\,dS = -\iint_{S_3} y\,dS = -\int_0^a dy \int_0^{a-y} y\,dz = -\frac{a^3}{6}$$

S_4 ~ наклонная плоскость: $z = a - x - y$

$$\Rightarrow \vec{A} = y\vec{i} + (a-x-y)\vec{j} + x\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + (a-x-y)\vec{k}$$

$$(\vec{A}, \vec{r}_x, \vec{r}_y) = \begin{vmatrix} y & (a-x-y) & x \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x + y + 1(a-x-y) = a$$

$$\Rightarrow \Pi_4 = \iint_{S_4} (\vec{A}, \vec{r}_x, \vec{r}_y)\,dx\,dy = a\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy = a\int_0^a (a-x)\,dx =$$

$$= a\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^3}{2}$$

$$\Rightarrow \Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = -\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} = 0$$

Ответ: $\Pi = 0$

4445.2. $\vec{A} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$

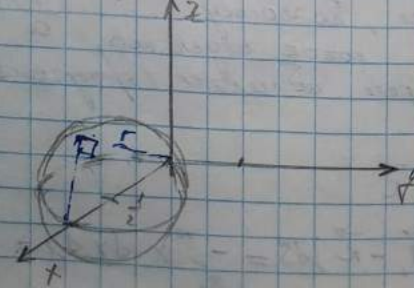
через сферу: $x^2 + y^2 + z^2 = x$

$x^2 + y^2 + z^2 = x$

$x^2 - x + y^2 + z^2 = 0$

$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$

По теореме Г.-О.



$$\Pi = \oint_S (\vec{A}, \vec{n})\, dS = \iiint_T \operatorname{div}\vec{A}\, dV = 3\iiint_T (x^2+y^2+z^2)\, dV$$

Сместим начало координат в центр сферы: $\begin{cases} u = x - \frac{1}{2} \\ y = y \\ z = z \end{cases}$

$$\Pi = 3\iiint_T \left(u^2 - u + \frac{1}{4} + y^2 + z^2\right) dV = 3\iiint_T (u^2+y^2+z^2)\, dV - 3\iiint_T u\, dV + \frac{3}{4}\iiint_T dV =$$

Отдельно: 1) $\frac{3}{4}\iiint_T dV = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{8}$

2) $3\iiint_T u\, dV = \left\{ \text{сферич. сис. коорд.}\ \begin{matrix} u = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{matrix} \right\} =$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} r^3 \sin^2\theta\cos\varphi\, dr = 3\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi}_{=0} \int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} r^3\, dr = 0$$

3) $3\iiint_T (u^2+y^2+z^2)\, dV = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} r^4 \sin\theta\, dr =$

$$= 3\cdot 2\pi\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{1}{5} = 3\cdot 4\pi\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3\pi}{8\cdot 5}$$

$$\Pi = \frac{3\pi}{8\cdot 5} + \frac{\pi}{8}^{\cdot 5} = \frac{8\pi}{8\cdot 5} = \frac{\pi}{5}$$

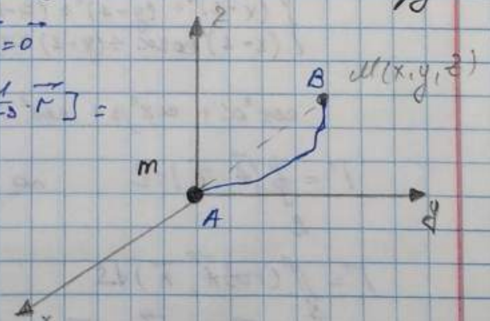
$-\frac{3r^2}{r^6}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

Ответ: $\Pi = \frac{\pi}{5}$

4458. Найти потенциал гравитационного поля:

$$\vec{A} = -\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

создаваемого массой m, помещенной в начале координат.



Необх. и дост. усл. потенциальности: $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{A} = [\vec{\nabla}, \vec{A}] = [\vec{\nabla}, -\frac{m}{r^3}\vec{r}] = -m[\vec{\nabla}, \frac{1}{r^3}\vec{r}] =$$

$$= -m[\vec{\nabla}, \frac{1}{r^3}\vec{r}] - m[\vec{\nabla}, \frac{1}{r^3}\cdot\vec{r}] =$$

$$= +m[\vec{r}, \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}] - m\cdot\frac{1}{r^3}\underbrace{[\vec{\nabla}, \vec{r}]}_{=0} =$$

$$= m[\vec{r}, \vec{\nabla}\cdot\frac{1}{r^3}] =$$

$$= -\frac{3m}{r^5}[\vec{r}, \vec{r}] = 0 \quad \Rightarrow \text{поле потенциально}$$

Через полный дифференциал:

$$U = \int_{AB}(\vec{A}, d\vec{r}) = -m\int_{AB}\frac{(\vec{r}, d\vec{r})}{r^3} = -m\int_{AB}\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{m}{2}\int_{AB}\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = +\frac{m}{2}\cdot 2\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C = \frac{m}{r} + C$$

Ответ: $U = \frac{m}{r} + C$

4452.2. Найти работу поля

$$\vec{A} = \frac{1}{y}\vec{i} + \frac{1}{z}\vec{j} + \frac{1}{x}\vec{k}$$

вдоль прямого отрезка, соединяющего точки $M(1,1,1)$ и $N(2,4,8)$

Разобрано в классе.

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1/y & 1/z & 1/x \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right)\right) - \ldots \neq 0$$

$\Rightarrow$ поле непотенциально.

Ур-е прямой в отрезках: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

$$MN: \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z-1}{8-1} = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+3t \\ z = 1+7t \end{cases} \quad t\in[0;1]$$

$$U = \int\limits_{MN}(\vec{A}, d\vec{r}) = \int\limits_{MN}\frac{1}{y}dx + \frac{1}{z}dy + \frac{1}{x}dz = \int_0^1 \frac{dt}{3t+1} + \frac{3dt}{7t+1} + \frac{7dt}{t+1} =$$

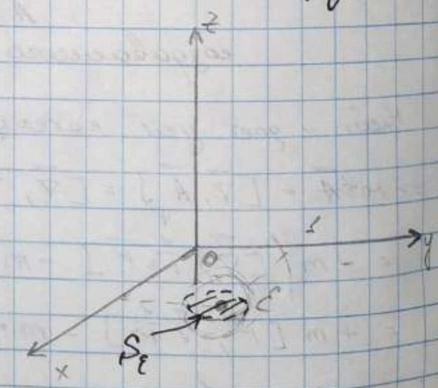
$$= \frac{1}{3}\ln(3t+1) + \frac{3}{7}\ln(7t+1) + 7\ln(t+1)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2^2 + \frac{3}{7}\ln 2^3 + 7\cdot\ln 2^1 = \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{9}{7}\ln 2 + 7\cdot\ln 2 = \frac{188}{21}\ln 2$$

Ответ: $U = \frac{188}{21}\ln 2$

4455. $\vec{A} = \frac{y}{\sqrt{x}}\vec{i} - \frac{x}{\sqrt{z}}\vec{j} + \sqrt{xyz}\,\vec{k}$

Вычислив $\operatorname{rot}\vec{A}$ в точке $M(1,1,1)$, приближенно найти циркуляцию Γ поля вдоль бесконечно малой окружности



$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2 \\ (x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

$$\Gamma = \oint\limits_{\ell}(\vec{A}\cdot\vec{\tau})\,d\ell \quad \text{по ф-ле Стокса:}$$

$$\Gamma = \iint\limits_{S}(\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{n})\,dS$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{y}{\sqrt{x}} & -\frac{x}{\sqrt{z}} & \sqrt{xyz} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{xyz}) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right)\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{xyz}) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)}_{=0}\right) +$$

$$+ \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{\sqrt{z}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\right) =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{xz}{2\sqrt{xyz}} - \frac{x}{2z\sqrt{z}}\right) - \vec{j}\left(\frac{yz}{2\sqrt{xyz}}\right) + \vec{k}\left(-\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

В т. M:

$$\operatorname{rot}\vec{A}(M) = \vec{i}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \vec{j}\left(\frac{1}{2}\right) + \vec{k}\left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2}\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{rot}\vec{A}(M), \vec{n}\right) = -\frac{1}{2}\cos\beta - 2\cos\gamma$$

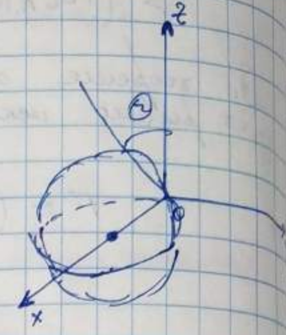
По теореме о среднем (т.к. область малая, то прибл. будет равно искомому интегралу)

$$\Gamma \approx \left(-\frac{1}{2}\cos\beta - 2\cos\gamma\right)\cdot \underbrace{S_\varepsilon}_{\text{натянем окружность}} = \left(-\frac{1}{2}\cos\beta - 2\cos\gamma\right)\pi\varepsilon^2$$

$$\Gamma \approx -\pi\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\cos\beta + 2\cos\gamma\right)$$

22.12.21 чрез. 2.

$$\vec{A} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k} \qquad S: x^2+y^2+z^2 = x \to \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



$$\oint_S (\vec{A}, \vec{n})\, dS = \iiint_T \operatorname{div}\vec{A}\, dV = 3\iiint_T (x^2+y^2+z^2)\, dV \ominus$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le r \le \frac{1}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{matrix}$$

$$\ominus\ 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1/2} \left(r^2 + r\cos\varphi\sin\theta + \frac{1}{4}\right)\cdot r^2\sin\theta\, dr = \frac{\pi}{5}$$

4455. $\vec{A} = \frac{y}{\sqrt{x}}\vec{i} - \frac{x}{\sqrt{z}}\vec{j} + \sqrt{xyz}\,\vec{k}$, $M(1,1,1)$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\frac{x}{z^{3/2}}\right) - \vec{j}\left(+\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}} - 0\right) + \vec{k}\left(-\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{A}(M) = -\frac{1}{2}\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$C: \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2 \\ (x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0 \end{cases} \to \vec{n} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$$

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \iint_S (\vec{n}, \operatorname{rot}\vec{A})\, dS = -\pi\varepsilon^2\left(\frac{\cos\beta}{2} + 2\cos\gamma\right)$$

Расчёт потенциалов векторных полей. Отыскание векторных линий.

Способы отыскания потенциала потенциального поля.

Шаг 1. Проверить потенциальность:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$$

Шаг 2. Найти потенциал.

$$\vec{A} = \operatorname{grad} u \to \vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

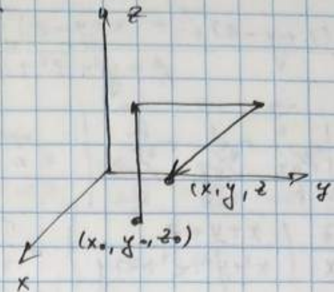
Способ 1. Из решения системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R$$

Интегр. самое простое из ур-ий (2), подставляют найденное решение в другое ур-е системы.

Способ 2. Из криволинейного интеграла по ломаной:

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(x,y,z)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)\,dy+$$
$$+\int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\,dz+C$$



Отыскание векторного потенциала соленоидального поля.

$$\vec{A}=\operatorname{rot}\vec{B}$$

$$\vec{A}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$

Шаг 1. Проверить соленоидальность:

$$\operatorname{div}\vec{A}\equiv 0$$

Шаг 2. Решаем систему:

$$\begin{cases} P=\dfrac{\partial B_3}{\partial y}-\dfrac{\partial B_2}{\partial z}\\ Q=\dfrac{\partial B_1}{\partial z}-\dfrac{\partial B_3}{\partial x}\\ R=\dfrac{\partial B_2}{\partial x}-\dfrac{\partial B_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0\end{cases}$$

Для простоты можно положить $B_3(x,y,z)\equiv 0$, тогда система имеет вид

$$B_1=\int_{z_0}^{z} Q(x,y,z)\,dz,\quad B_2=-\int_{z_0}^{z} P(x,y,z)\,dz+\varphi(x,y)$$

$$R(x,y,z)=-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dz+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ \rightarrow\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=R(x,y,z_0)$$

$$R(x,y,z)=R(x,y,z)-R(x,y,z_0)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

Отыскание векторных линий

Векторные линии поля

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

находятся из следующей системы ур-ий:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

№1. Найти потенциал.

$$\vec{A} = \frac{(x+y-z)\vec{i} + (x+y-z)\vec{j} + (x+y+z)\vec{k}}{x^2+y^2+z^2+2xy}$$

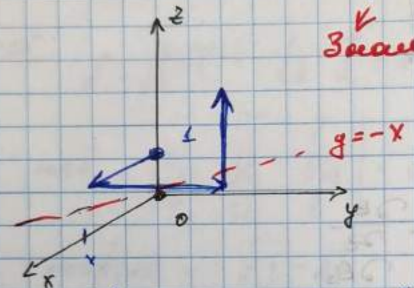
$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+2xy}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}\right)\right) -$$

$$-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+2xy}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}\right)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}\right) -\right.$$

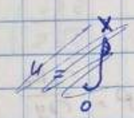
$$\left.- \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}\right)\right) = 0 \ !$$

$$\vec{A} = \frac{(x+y-z)\vec{i} + (x+y-z)\vec{j} + (x+y+z)\vec{k}}{(x+y)^2+z^2}$$

Знам $\neq 0$ $\rightarrow$ $z \neq 0$, $y \neq -x$



$M_0(0,0,1)$ – к примеру



$$\int_0^x P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_0^x \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^x - \operatorname{arctg} x\Big|_0^x =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x$$

$$\int_0^y Q\,dy = \int_0^y \frac{x+y-1}{(x+y)^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\ln\left[(x+y)^2+1\right]\Big|_0^y - \operatorname{arctg}(x+y)\Big|_0^y =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[(x+y)^2+1\right] - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg}(x+y) + \operatorname{arctg} x$$

$$\int_1^z R\,dz = \int_1^z \frac{x+y+z}{(x+y)^2+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\ln\left[(x+y)^2+z^2\right]\Big|_1^z + \operatorname{arctg}\frac{z}{x+y}\Big|_1^z =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[(x+y)^2+z^2\right] - \frac{1}{2}\ln\left[(x+y)^2+1\right] + \operatorname{arctg}\frac{z}{x+y} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x+y}.$$

Всё складываем

а) $u = \frac{1}{2}\ln\left[(x+y)^2+z^2\right] + \operatorname{arctg}\frac{z}{x+y} + \underbrace{\left(C - \frac{\pi}{2}\right)}_{=C'}$

$\operatorname{arctg}\frac{1}{x+y} = \operatorname{arcctg}(x+y)$

№2. Найти потенциал.

$$\vec{A} = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\vec{j} - \frac{xy}{z^2}\vec{k}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}$$

$$u = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)x + C(y, z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = +\frac{x}{y^2} + \frac{x}{z} + \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{x^2}{z} + \frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \rightarrow C = C(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yx}{z^2} + C'_z = -\frac{xy}{z^2} \Rightarrow C(z) = C$$

$$\Rightarrow \underline{u = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)x + C}$$

№3. Найти векторные линии поля $\vec{A} = (x^2 - y^2 - z^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} + 2xz\vec{k}$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \rightarrow \frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \ln y = \ln z - \ln C_1 \Rightarrow z = C_1 y$$

$$\cdot 2x \Big/ \frac{dx}{x^2 - y^2(1 + C_1^2)} = \frac{dy}{2xy} \Rightarrow \frac{d(x^2)}{x^2 - y^2(1 + C_1^2)} = \frac{dy}{y}$$

$$y\, d(x^2) = x^2 dy - y^2(1 + C_1^2)dy$$

$$\frac{y\, d(x^2) - x^2 dy}{y^2} = -(1 + C_1^2)dy$$

$$\int d\left(\frac{x^2}{y}\right) = -\int (1 + C_1^2)dy \Rightarrow \frac{x^2}{y} = -(1 + C_1^2)y + C_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{x^2 = C_2 y - (1 + C_1^2)y^2} \\ \underline{z = C_1 y} \end{cases}$$