Министерство образования Российской Федерации

Нижегородский государственный университет
им. Н.И.Лобачевского

Радиофизический факультет

Кафедра математики

ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методическая разработка
для студентов радиофизического факультета ННГУ

Нижний Новгород, 1999

УДК 517

Тензорное исчисление,: Методическая разработка для студентов радиофизического факультета ННГУ/. Сост. В.Н. Кошелев, А.И. Саичев, — Нижний Новгород: ННГУ, 1999. - 40 с.

В настоящей методической разработке изучаются аффинный ортогональный тензор и аффинный тензор (в косоугольном базисе). Изложение ведется в пространстве любой размерности. Особое внимание уделено аффинному ортогональному тензору второго ранга, наиболее часто применяемому в физических задачах. Приведенные физические примеры помогают изучению материала. Пособие предназначено для студентов радиофизического факультета университета.

Подготовлено в рамках программы "Интеграция".

Составители: **В.Н. Кошелев, А.И. Саичев**

Нижегородский государственный университет
им. Н.И.Лобачевского, 1999

АФФИННЫЙ ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ТЕНЗОР

1. Преобразование ортонормированных базисов

Рассмотрим два ортонормированных базиса $\mathbf{e}_i$ и $\tilde{\mathbf{e}}_i$ в $\mathbb{R}^n$. Из ортогональности и нормировки следует

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}, \qquad (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_k) = \delta_{ik}.$$

Условимся называть $\mathbf{e}_i$ старым базисом, а $\tilde{\mathbf{e}}_i$ — новым базисом.

Разложив векторы нового базиса $\tilde{\mathbf{e}}_i$ по старому базису $\mathbf{e}_i$, получим

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{e}_j,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

где α_{ij} называют коэффициентами прямого преобразования, а матрицу (α_{ij}) — матрицей перехода от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому $\tilde{\mathbf{e}}_i$. Разлагая векторы старого базиса $\mathbf{e}_i$ по новому $\tilde{\mathbf{e}}_i$, будем иметь

$$\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj}\tilde{\mathbf{e}}_j,\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

где β_{kj} называют коэффициентами обратного преобразования, а матрица (β_{kj}) перехода от нового базиса к старому является матрицей обратной (α_{ij}).

Умножая скалярно (1.1) на $\mathbf{e}_k$, находим

$$(\tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\delta_{ij} = \alpha_{ik}.$$

Аналогично, умножая (1.2) скалярно на $\tilde{\mathbf{e}}_i$, получаем

$$(\tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_k) = \beta_{ki}.$$

Откуда следует, что

$$\beta_{ki} = \alpha_{ik},$$

т.е. матрица (β_{ij}), обратная матрице (α_{ij}), получается транспонированием матрицы (α_{ij}).

Окончательно получаем следующие формулы преобразования ортонормированных базисов

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\tilde{\mathbf{e}}_j.$$

Заметим, что в первой формуле прямого преобразования индекс суммирования у α_{ij} — второй, а во второй формуле обратного преобразования индекс суммирования у α_{ji} — первый.

2. Определение аффинного ортогонального тензора

Определение 2.1. *Скалярная величина L, инвариантная относительно перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису, называется аффинным ортогональным тензором нулевого ранга.*

Определение 2.2. *Пусть объект L в $\mathbb{R}^n$ определяется в каждом ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$ совокупностью n^p чисел*

$$L_{i_1 i_2 \cdots i_p},$$

где $i_s = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, p.$

Если при переходе от базиса $\mathbf{e}_i$ к любому новому ортонормированному базису $\tilde{\mathbf{e}}_i$ эти числа преобразуются по закону

$$\tilde{L}_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_p = 1}^{n} \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_p j_p} L_{j_1 j_2 \cdots j_p},$$

где (α_{ij}) — матрица прямого преобразования, то L называют аффинным ортогональным тензором p-го ранга в пространстве $\mathbb{R}^n$ и обозначают $L_{i_1 i_2 \cdots i_p}$.

Пример 2.1. Любой вектор в $\mathbb{R}^n$ является аффинным ортогональным тензором первого ранга. Во-первых, в каждом ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$ вектор $\mathbf{x}$ определяется 3^1 координатами. Во-вторых, при переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису координаты вектора $\mathbf{x}$ преобразуются по тензорному закону.

Действительно,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) \tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{\mathbf{e}}_i.$$

Откуда следует

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j.$$

Замечание 2.1. Если провести аналогичные преобразования

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \tilde{x}_j \right) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i,$$

то получим формулу преобразования координат вектора $\mathbf{x}$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \tilde{x}_j$$

при переходе от нового ортонормированного базиса к старому ортонормированному базису, т.е. координаты вектора $\mathbf{x}$ в $\mathbf{R}^n$ преобразуются по тем же законам, что и ортонормированные базисы:

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \,, \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \tilde{x}_j \,.$$

Пример 2.2. Символ Кронекера

$$\delta_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j),$$

определенный в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$ пространства $\mathbb{R}^n$, является аффинным ортогональным тензором второго ранга.

Действительно, числа δ_{ij} имеют n^2 значений: $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того при переходе от одного ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$ к другому ортонормированному базису эти числа преобразуются по тензорному закону. В самом деле,

$$\tilde{\delta}_{ij} = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \mathbf{e}_k, \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl} \mathbf{e}_l \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{jl} (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{jl} \delta_{kl}.$$

Пример 2.3. Центральная (неконическая) поверхность второго порядка с центром в начале координат является аффинным ортогональным тензором второго ранга в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Ее уравнение можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} a_{km} x_k x_m = 1,$$

где матрица коэффициентов (a_{km}) — симметричная. Следовательно, поверхность задается 3^2 координатами (ее коэффициентами a_{km}).

Используя закон преобразования вектора при переходе от одного ортонормированного базиса к другому

$$x_k = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} \tilde{x}_i \,, \qquad x_m = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{jm} \tilde{x}_j \,,$$

получим уравнение поверхности в базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} a_{km} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} \tilde{x}_i \sum_{j=1}^{3} \alpha_{jm} \tilde{x}_j = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\alpha_{ik}\alpha_{jm}a_{km}\right)\tilde{x}_i\tilde{x}_j = 1,$$

то есть

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\alpha_{ik}\alpha_{jm}a_{km}.$$

Следовательно, коэффициенты центральной поверхности второго порядка преобразуются по тензорному закону, и рассматриваемая поверхность - аффинный ортогональный тензор в пространстве $\mathbb{R}^3$.

3. Аффинный ортогональный тензор второго ранга как линейный оператор

Перейдем к более подробному изучению аффинного ортогонального тензора второго ранга, так как в физических приложениях наиболее часто используется именно этот тензор.

Определение 3.1. *Рассмотрим линейный оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*

$$\mathbf{y} = L\mathbf{x}.$$

Координатами оператора L в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$ будем называть коэффициенты разложения образов $L\mathbf{e}_i$ по базису $\mathbf{e}_i$.

Теорема 3.1. *Линейный оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является аффинным ортогональным тензором второго ранга в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство: Прежде всего напомним, что в силу линейности оператора для любых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ из пространства $\mathbb{R}^n$ и любых действительных чисел c_1, c_2 выполняется

$$L(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1 L\mathbf{x}_1 + c_2 L\mathbf{x}_2.$$

Пусть разложение образов $L\mathbf{e}_i$ по базису $\mathbf{e}_i$ имеет вид

$$L\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}\mathbf{e}_k.$$

Умножая это равенство скалярно на $\mathbf{e}_j$, получаем выражения для координат L_{ij} линейного оператора L в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$

$$(L\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}\delta_{ik} = L_{ij}.$$

Аналогично в базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$

$$\tilde{L}_{ij} = (L\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j).$$

Подставляя в последнее равенство выражения

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\mathbf{e}_k, \quad \tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{jm}\mathbf{e}_m,$$

имеем

$$\tilde{L}_{ij} = (L\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j) = \left(L\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\mathbf{e}_k, \sum_{m=1}^{n} \alpha_{jm}\mathbf{e}_m \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jm}(L\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jm}L_{km}.$$

Таким образом линейный оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет n^2 координат и эти координаты преобразуются по тензорному закону. Теорема доказана.

Определение 3.2. *Пусть L_{ij} — аффинный ортогональный тензор второго ранга. Будем говорить, что оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ порожден тензором L_{ij}, если для каждого вектора*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$$

вектор $L\mathbf{x}$ определен по формуле

$$L\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i L\mathbf{e}_i,$$

где $L\mathbf{e}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} L_{ki}\mathbf{e}_k$.

Теорема 3.2. *Оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, порожденный аффинным ортогональным тензором второго ранга L_{ij}, является линейным оператором.*

Доказательство: Если

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{e}_i,$$

то для любых постоянных действительных чисел c_1, c_2 имеем

$$L(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(c_1x_i + c_2y_i)L\mathbf{e}_i = c_1\sum_{i=1}^{n} x_iL\mathbf{e}_i + c_2\sum_{i=1}^{n} y_iL\mathbf{e}_i =$$

$$= c_1L\mathbf{x} + c_2L\mathbf{y}.$$

Теорема 3.3. *Линейный оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, порожденный аффинным ортогональным тензором второго ранга L_{ij}, не зависит от выбора ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство: Пусть $\tilde{L}_{ij}$ — координаты тензора L_{ij} в новом базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$. Тогда линейный оператор $\tilde{L}$, порожденный этим тензором, для каждого вектора $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$ принимает значение

$$\tilde{L}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{L} \tilde{\mathbf{e}}_i,$$

где $\tilde{L}\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{L}_{ki} \tilde{\mathbf{e}}_k$.

Докажем, что

$$\tilde{L}\mathbf{x} = L\mathbf{x}.$$

В самом деле

$$\tilde{L}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{L}\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \sum_{k=1}^{n} \tilde{L}_{ki} \tilde{\mathbf{e}}_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \alpha_{kl} \alpha_{im} L_{lm} \right) \tilde{\mathbf{e}}_k =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} \tilde{x}_i \right) \sum_{l=1}^{n} L_{lm} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kl} \tilde{\mathbf{e}}_k \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} x_m \sum_{l=1}^{n} L_{lm} \mathbf{e}_l = \sum_{m=1}^{n} x_m L \mathbf{e}_m = L\mathbf{x}.$$

Теорема доказана.

Вывод. Мы доказали, что каждому аффинному ортогональному тензору второго ранга однозначно ставится в соответствие линейный оператор L. С другой стороны любой линейный оператор L в $\mathbb{R}^n$ можно трактовать как аффинный ортогональный тензор. Таким образом аффинный ортогональный тензор второго ранга можно отождествить с линейным оператором, задаваемым матрицей

$$L = L_{11} L_{21} L_{n1} L_{12} L_{22} L_{n2} L_{1n} L_{2n} L_{nn}.$$

4. Приведение симметричного аффинного ортогонального тензора второго ранга к главным осям

Определение 4.1. *Тензор L_{ij} называется симметричным, если для любых индексов i и j выполняется*

$$L_{ij} = L_{ji}.$$

Пользуясь результатами предыдущего пункта будем рассматривать аффинный ортогональный тензор второго ранга как линейный оператор $\mathbf{y} = L\mathbf{x}$.

Определение 4.2. *Собственными числами и собственными векторами аффинного ортогонального тензора L_{ij} называют собственные числа и собственные вектора линейного оператора, порождаемого этим тензором, т.е. ненулевые решения $\mathbf{x}$ и соответствующие им числа λ уравнения*

$$L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Для симметричного тензора собственные числа λ находятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} L_{11} - \lambda & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} - \lambda & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Если тензор L симметричный, то его собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — вещественны и для них находится система собственных ортонормированных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, образующих базис в пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом базисе матрица оператора L принимает диагональный вид

$$\begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L_n \end{pmatrix}.$$

Определение 4.3. *Выбор базиса $\mathbf{e}_i$, в котором матрица симметричного аффинного ортогонального тензора второго ранга имеет диагональный вид, называется приведением тензора к главным осям.*

5. Инвариантные билинейные формы

Определение 5.1. *Билинейной формой от $2n$ действительных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; $y_1, y_2, \dots, y_n$, порожденной матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется однородный многочлен второй степени

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k.$$

Билинейная форма называется симметричной, если матрица ее коэффициентов симметричная.

Симметричная билинейная форма, у которой всегда $\mathbf{y} = \mathbf{x}$,

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k,$$

называется квадратичной формой.

Билинейная форма называется инвариантной, если при переходе от одного ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$ *к другому ортонормированному базису ее значение для любых векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *не изменяется.*

Теорема 5.1. *Коэффициенты инвариантной билинейной формы образуют аффинный ортогональный тензор второго ранга.*

Доказательство: Предположим,что в базисе $\mathbf{e}_i$ билинейная форма имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k,$$

а в базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$ — вид

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \tilde{a}_{lm} \tilde{x}_l \tilde{y}_m$$

и в силу ее инвариантности выполняется равенство

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \tilde{a}_{lm} \tilde{x}_l \tilde{y}_m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k.$$

Тогда, учитывая что

$$x_i = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{li} \tilde{x}_l, \qquad y_k = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{mk} \tilde{y}_m,$$

получаем

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \tilde{a}_{lm} \tilde{x}_l \tilde{y}_m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_{li} \tilde{x}_l \right) \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_{mk} \tilde{y}_m \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{li} \alpha_{mk} a_{ik} \right) \tilde{x}_l \tilde{y}_m.$$

Откуда, в силу произвольности $\tilde{x}_l$ и $\tilde{y}_m$,

$$\tilde{a}_{lm} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{li} \alpha_{mk} a_{ik}.$$

Теорема 5.2. *Симметричная билинейная форма однозначно восстанавливается с помощью порождаемой ею квадратичной формой.*

Доказательство: Подставим в квадратичную форму

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{x})$$

вместо вектора $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. В силу линейности оператора (матрицы) A и свойств скалярного произведения имеем

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}, A(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, A\mathbf{x} + A\mathbf{y}) =$$

$$= (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, A\mathbf{y}) + (\mathbf{y}, A\mathbf{x}) + (\mathbf{y}, A\mathbf{y}).$$

В силу симметрии матрицы A

$$(\mathbf{y}, A\mathbf{x}) = (A\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$$

и

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}, A(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) + (\mathbf{y}, A\mathbf{y}).$$

Откуда

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\{(\mathbf{x} + \mathbf{y}, A(\mathbf{x} + \mathbf{y})) - (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) - (\mathbf{y}, A\mathbf{y})\},$$

что и доказывает теорему.

Следствие 5.1. *Коэффициенты инвариантной квадратичной формы составляют аффинный ортогональный тензор второго ранга.*

ТЕНЗОРЫ В АФФИННЫХ КООРДИНАТАХ

6. Тензорная символика

Условимся, что каждый индекс принимает n значений: $1, 2, 3, \ldots, n$. Символ A_i означает, что величина A_i принимает значения $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$; символ A_{ij} означает, что величина A_{ij} принимает n^2 значений и т.д. Этой символикой мы уже в некоторой степени пользовались при изучении аффинного ортогонального тензора.

Если в некотором выражении встречаются два индекса, обозначенные одной и той же буквой, то это означает, что по этим индексам (этой букве) произведено суммирование от 1 до n. Например, в пространстве $\mathbb{R}^n$ это означает, что

$$x_i\mathbf{e}^i = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}^i, \qquad a_{ik}x^{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x^{ik}, \qquad A_{ii} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii},$$

в пространстве $\mathbb{R}^3$

$$x_i\mathbf{e}^i = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{e}^i, \qquad a_{ik}x^{ik} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}x^{ik}, \qquad A_{ii} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii},$$

и т.д.

7. Преобразование косоугольных базисов.

Пусть в некоторой точке $M \in \mathbb{R}^n$ выбраны два векторных косоугольных базиса:
"старый" $\mathbf{e}_i$ и "новый" $\tilde{\mathbf{e}}_i$,
и пусть:
$\mathbf{e}^k$ — взаимный базис к $\mathbf{e}_i$ (старый взаимный базис),
$\tilde{\mathbf{e}}^k$ — взаимный к $\tilde{\mathbf{e}}_i$ (новый взаимный базис).
Применяя тензорную символику, будем иметь

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \alpha_i^k\mathbf{e}_k,$$

где α_i^k — коэффициенты прямого преобразования и

$$\mathbf{e}_i = \gamma_i^k\tilde{\mathbf{e}}_k,$$

где γ_i^k — коэффициенты обратного преобразования.

Умножая скалярно первое из этих равенств на $\mathbf{e}^k$, а второе на $\tilde{\mathbf{e}}^k$, получаем

$$\alpha_i^k = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}^k),\ \ \gamma_i^k = (\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}^k)\,. \tag{7.1}$$

Рассмотрим теперь преобразование взаимных базисов

$$\tilde{\mathbf{e}}^k = a_i^k\mathbf{e}^i, \qquad \mathbf{e}^k = b_i^k\tilde{\mathbf{e}}^i.$$

Умножим первое из этих равенств на $\mathbf{e}_i$, а второе на $\tilde{\mathbf{e}}_i$. Тогда

$$a_i^k = (\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}^k),\ \ b_i^k = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}^k)\,. \tag{7.2}$$

Сравнивая (7.1) с (7.2), получаем связь между коэффициентами основных и взаимных базисов

$$a_i^k = \gamma_i^k \qquad b_i^k = \alpha_i^k.$$

Получаем закон преобразования взаимных базисов

$$\tilde{\mathbf{e}}^k = \gamma_i^k \mathbf{e}^i, \ \mathbf{e}^k = \alpha_i^k \tilde{\mathbf{e}}^i,$$

согласно которому преобразование взаимных базисов осуществляется по обратному закону. Это означает, что коэффициентами прямого преобразования для взаимного базиса являются коэффициенты обратного преобразования для основного базиса и наоборот, коэффициентами обратного преобразования для взаимного базиса являются коэффициенты прямого преобразования для основного базиса.

И в заключение этого пункта приведем все формулы преобразования основных и взаимных базисов:

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \alpha_i^k \mathbf{e}_k, \qquad \mathbf{e}_i = \gamma_i^k \tilde{\mathbf{e}}_k,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^k = \gamma_i^k \mathbf{e}^i, \qquad \mathbf{e}^k = \alpha_i^k \tilde{\mathbf{e}}^i.$$

8. Общее определение тензора

Определение 8.1. *Пусть дан объект (p, q) — строения, заданный с помощью n^{p+q} чисел (координат):*

$A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ *— его координаты в старом базисе $\mathbf{e}_i$,*

$\tilde{A}_{k_1 k_2 \dots k_p}^{l_1 l_2 \dots l_q}$ *— его координаты в новом базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$.*

Если при переходе от базиса $\mathbf{e}_i$ к базису $\tilde{\mathbf{e}}_i$ его координаты преобразуются по формулам

$$\tilde{A}_{k_1 k_2 \dots k_p}^{l_1 l_2 \dots l_q} = \alpha_{k_1}^{i_1} \alpha_{k_2}^{i_2} \cdots \alpha_{k_p}^{i_p} \gamma_{j_1}^{l_1} \gamma_{j_2}^{l_2} \cdots \gamma_{j_q}^{l_q} A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q},$$

где α_k^i — коэффициенты прямого преобразования, γ_j^l — коэффициенты обратного преобразования, то объект A называется тензором $p+q$-го ранга, p-раз ковариантным и q-раз контравариантным и обозначается

$$A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}.$$

Нижние индексы называются ковариантными индексами, а верхние — контравариантными индексами.

Пример 8.1. Пусть $\mathbf{e}_i$ — старый, $\tilde{\mathbf{e}}_i$ — новый базисы, $\mathbf{e}^k$ и $\tilde{\mathbf{e}}^k$ — старый и новый взаимные базисы. Вектор $\mathbf{A}$ можно разложить по основному и взаимному базисам

$$\mathbf{A} = A^k \mathbf{e}_k \text{ и } \mathbf{A} = A_k \mathbf{e}^k,$$

где $A^k = (\mathbf{A}, \mathbf{e}^k)$ — контравариантные координаты этого вектора, а $A_k = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_k)$ — ковариантные координаты.

Ковариантные координаты вектора $\mathbf{A}$ образуют ковариантный тензор первого ранга, а контравариантные координаты вектора $\mathbf{A}$ образуют контравариантный тензор первого ранга.

Действительно,

$$\tilde{A}_k = (\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{e}}_k) = (\mathbf{A}, \alpha_k^i \mathbf{e}_i) = \alpha_k^i (\mathbf{A}, \mathbf{e}_i) = \alpha_k^i A_i$$

и

$$\tilde{A}^k = (\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{e}}^k) = (\mathbf{A}, \gamma_i^k \mathbf{e}^i) = \gamma_i^k (\mathbf{A}, \mathbf{e}^i) = \gamma_i^k A^i.$$

Пример 8.2. Символ Кронекера

$$\delta_i^k = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k),$$

определенный в косоугольном базисе пространства $\mathbb{R}^n$ является тензором второго ранга, один раз ковариантным и один раз контравариантным. Покажем это:

$$\tilde{\delta}_i^k = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}^k) = (\alpha_i^m \mathbf{e}_m, \gamma_n^k \mathbf{e}^n) = \alpha_i^m \gamma_n^k (\mathbf{e}_m, \mathbf{e}^n) = \alpha_i^m \gamma_n^k \delta_m^n.$$

9. Метрический тензор

Определение 9.1. *Пусть* $\mathbf{e}_i$ *— основной, а* $\mathbf{e}^k$ *— взаимный базисы в* $\mathbb{R}^n$*. Совокупность чисел*

$$g_{ik} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)$$

называется ковариантным метрическим тензором, а совокупность чисел

$$g^{ik} = (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^k)$$

называется контравариантным метрическим тензором.

Из определения следует, что метрический тензор симметричный, т.е.

$$g_{ik} = g_{ki} \text{ и } g^{ik} = g^{ki}.$$

Покажем, что координаты метрического тензора преобразуются по тензорному закону:

$$\tilde{g}^{ik} = (\tilde{\mathbf{e}}^i, \tilde{\mathbf{e}}^k) = (\gamma^i_n \mathbf{e}^n, \gamma^k_m \mathbf{e}^m) = \gamma^i_n \gamma^k_m (\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^m) = \gamma^i_n \gamma^k_m g^{mn},$$

$$\tilde{g}_{ik} = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_k) = (\alpha^m_i \mathbf{e}_m, \alpha^n_k \mathbf{e}_n) = \alpha^m_i \alpha^n_k (\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) = \alpha^m_i \alpha^n_k g_{mn}.$$

Метрический тензор устанавливает связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора. Действительно, умножим

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$$

скалярно на $\mathbf{e}_k$. Получим

$$(\mathbf{A}, \mathbf{e}_k) = A^i (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k),$$

т.е.

$$A_k = g_{ik} A^i.$$

Аналогично

$$A^k = g^{ik} A_i.$$

10. Тензорная алгебра

Прежде всего отметим, что все действия в тензорной алгебре вводятся для тензоров, определенных в пространстве одного и того же измерения.

Сложение тензоров.

Определение 10.1. *Пусть* A *и* B *два тензора одинакового строения* (p, q)

$$A = A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}, \qquad B = B^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Суммой тензоров A и B называется объект $C = A + B$, координаты которого определяются по формулам

$$C^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} + B^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Теорема 10.1. *Суммой двух тензоров одинакового строения является тензор того же строения.*

Доказательство: Из определения суммы тензоров видно, что если A и B имеют n^{p+q} координат, то тензор $C = A + B$ имеет также n^{p+q} координат. Покажем, что эти координаты преобразуются по тензорному закону:

$$\tilde{C}^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} = \tilde{A}^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} + \tilde{B}^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} =$$

$$\alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} +$$

$$+ \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} B^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} =$$

$$\alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} \left(A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} + B^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \right) =$$

$$\alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} C^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Умножение тензоров.

Определение 10.2 *Пусть даны два тензора любого строения:*

$$A = A^{j_1 j_2 \ldots j_{q_1}}_{i_1 i_2 \ldots i_{p_1}}, \qquad B = B^{l_1 l_2 \ldots l_{q_2}}_{k_1 k_2 \ldots k_{p_2}}.$$

Произведением двух тензоров A и B называется объект $C = A \cdot B$, координаты которого определяются по формулам

$$C^{j_1 j_2 \ldots j_{q_1} l_1 l_2 \ldots l_{q_2}}_{i_1 i_2 \ldots i_{p_1} k_1 k_2 \ldots k_{p_2}} = A^{j_1 j_2 \ldots j_{q_1}}_{i_1 i_2 \ldots i_{p_1}} \cdot B^{l_1 l_2 \ldots l_{q_2}}_{k_1 k_2 \ldots k_{p_2}}.$$

Теорема 10.2. *Произведением тензора (p_1, q_1) - строения на тензор (p_2, q_2)-строения является тензор строения $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$.*

Доказательство: Очевидно, что объект $C = A + B$ имеет $p_1 + p_2$ ковариантных индексов, $q_1 + q_2$ — контравариантных индексов и, следовательно, имеет $n^{p_1 + p_2 + q_1 + q_2}$ координат. Кроме того,

$$\tilde{C}^{n_1 n_2 \dots n_{q_1} s_1 s_2 \dots s_{q_2}}_{m_1 m_2 \dots m_{p_1} r_1 r_2 \dots r_{p_2}} = \tilde{A}^{n_1 n_2 \dots n_{q_1}}_{m_1 m_2 \dots m_{p_1}} \cdot \tilde{B}^{s_1 s_2 \dots s_{q_2}}_{r_1 r_2 \dots r_{p_2}} =$$

$$= \alpha^{i_1}_{m_1} \alpha^{i_2}_{m_2} \cdots \alpha^{i_{p_1}}_{m_{p_1}} \gamma^{n_1}_{j_1} \gamma^{n_2}_{j_2} \cdots \gamma^{n_{q_1}}_{j_{q_1}} A^{j_1 j_2 \dots j_{q_1}}_{i_1 i_2 \dots i_{p_1}} \times$$

$$\times \alpha^{k_1}_{r_1} \alpha^{k_2}_{r_2} \cdots \alpha^{k_{p_2}}_{r_{p_2}} \gamma^{s_1}_{l_1} \gamma^{s_2}_{l_2} \cdots \gamma^{s_{q_2}}_{l_{q_2}} B^{l_1 l_2 \dots l_{q_2}}_{k_1 k_2 \dots k_{p_2}} =$$

$$= \alpha^{i_1}_{m_1} \cdots \alpha^{i_{p_1}}_{m_{p_1}} \alpha^{k_1}_{r_1} \cdots \alpha^{k_{p_2}}_{r_{p_2}} \gamma^{n_1}_{j_1} \cdots \gamma^{n_{q_1}}_{j_{q_1}} \gamma^{s_1}_{l_1} \cdots \gamma^{s_{q_2}}_{l_{q_2}} \times$$

$$\times \left(A^{j_1 j_2 \dots j_{q_1}}_{i_1 i_2 \dots i_{p_1}} B^{l_1 l_2 \dots l_{q_2}}_{k_1 k_2 \dots k_{p_2}} \right) =$$

$$\alpha^{i_1}_{m_1} \cdots \alpha^{i_{p_1}}_{m_{p_1}} \alpha^{k_1}_{r_1} \cdots \alpha^{k_{p_2}}_{r_{p_2}} \gamma^{n_1}_{j_1} \cdots \gamma^{n_{q_1}}_{j_{q_1}} \gamma^{s_1}_{l_1} \cdots \gamma^{s_{q_2}}_{l_{q_2}} \times$$

$$\times C^{j_1 j_2 \dots j_{q_1} l_1 l_2 \dots l_{q_2}}_{i_1 i_2 \dots i_{p_1} k_1 k_2 \dots k_{p_2}},$$

что и доказывает согласно определению 8.1 теорему.

Очевидно, что при перемножении тензоров число сомножителей может быть больше двух.

Индексы в произведении ставятся в порядке их следования в множителях.

Заметим, что если мы станем перемножать тензоры в другом порядке, то получим другой результат, т.е., вообще говоря, $AB \neq BA$.

Свертка тензоров

Определение 10.3. *Пусть*

$$A = A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

аффинный тензор (p, q)-строения. Выберем один ковариантный и один контравариантный индексы, например, i_1 и j_1. Положим $i_1 = i_2 = s$. Тогда объект

$$B^{j_2 j_3 \dots j_q}_{i_2 i_3 \dots i_p} = A^{s j_2 j_3 \dots j_q}_{s i_2 i_3 \dots i_p}$$

будем называть сверткой тензора A по паре индексов (i_1, j_1).

Аналогично определяется свертка аффинного тензора по любой паре разноименных индексов (ковариантного и контравариантного).

Лемма 10.1. *Пусть (α^j_i) — матрица прямого преобразования, а (γ^j_i) — матрица обратного преобразования. Тогда справедливы равенства*

$$\alpha^k_j \gamma^j_i = \delta^k_i, \qquad \alpha^j_i \gamma^k_j = \tilde{\delta}^k_i.$$

Доказательство: Умножая равенство

$$\mathbf{e}_i = \gamma_i^j \tilde{\mathbf{e}}_j$$

скалярно на $\mathbf{e}^k = \alpha_l^k \tilde{\mathbf{e}}^l$, получаем

$$\delta_i^k = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k) = (\gamma_i^j \tilde{\mathbf{e}}_j, \alpha_l^k \tilde{\mathbf{e}}^l) = \gamma_i^j \alpha_l^k (\tilde{\mathbf{e}}_j, \tilde{\mathbf{e}}^l) =$$

$$= \gamma_i^j \alpha_l^k \tilde{\delta}_j^l = \gamma_i^j (\alpha_l^k \tilde{\delta}_j^l) = \gamma_i^j \alpha_j^k = \alpha_j^k \gamma_i^j.$$

Аналогично

$$\tilde{\delta}_i^k = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}^k) = (\alpha_i^j \mathbf{e}_j, \gamma_l^k \mathbf{e}^l) = \alpha_i^j \gamma_l^k (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}^l) =$$

$$= \alpha_i^j \gamma_l^k \delta_j^l = \alpha_i^j (\gamma_l^k \delta_j^l) = \alpha_i^j \gamma_j^k.$$

Теорема 10.3. *Сверткой аффинного тензора* (p, q)*- строения по паре индексов является тензор* $(p-1, q-1)$ *-строения.*

Доказательство: Очевидно, что после сверстки по паре индексов полученный объект содержит $n^{(p-1)+(q-1)}$ координат, столько же координат, что и аффинный тензор $(p-1, q-1)$-строения. Покажем, что эти координаты преобразуются по тензорному закону. По определению тензора

$$\tilde{A}_{k_1 k_2 \ldots k_p}^{l_1 l_2 \ldots l_q} = \alpha_{k_1}^{i_1} \alpha_{k_2}^{i_2} \cdots \alpha_{k_p}^{i_p} \gamma_{j_1}^{l_1} \gamma_{j_2}^{l_2} \cdots \gamma_{j_q}^{l_q} A_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}.$$

Положим $k_1 = l_1 = s$. Тогда

$$\tilde{A}_{s k_2 \ldots k_p}^{s l_2 \ldots l_q} = \alpha_s^{i_1} \alpha_{k_2}^{i_2} \cdots \alpha_{k_p}^{i_p} \gamma_{j_1}^{s} \gamma_{j_2}^{l_2} \cdots \gamma_{j_q}^{l_q} A_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q} =$$

$$= \alpha_{k_2}^{i_2} \cdots \alpha_{k_p}^{i_p} \gamma_{j_2}^{l_2} \cdots \gamma_{j_q}^{l_q} \big(\alpha_s^{i_1} \gamma_{j_1}^{s}\big) A_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}.$$

Используя предыдущую лемму, получаем

$$\tilde{A}_{s k_2 \ldots k_p}^{s l_2 \ldots l_q} = \alpha_{k_2}^{i_2} \cdots \alpha_{k_p}^{i_p} \gamma_{j_2}^{l_2} \cdots \gamma_{j_q}^{l_q} \delta_{j_1}^{i_1} A_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}.$$

Индексы i_1 и j_1 являются индексами суммирования, и так как $\delta_{j_1}^{i_1} = 0$ при $i_1 \neq j_1$, то справа в последнем выражении остаются только те слагаемые, для которых эти индексы равны, т.е. $i_1 = j_1 = s$. Тогда

$$\tilde{A}_{s k_2 \ldots k_p}^{s l_2 \ldots l_q} = \alpha_{k_2}^{i_2} \cdots \alpha_{k_p}^{i_p} \gamma_{j_2}^{l_2} \cdots \gamma_{j_q}^{l_q} A_{s i_2 \ldots i_p}^{s j_2 \ldots j_q}.$$

Но по определению свертки тензоров

$$\tilde{A}_{s k_2 \ldots k_p}^{s l_1 \ldots l_q} = \tilde{B}_{k_2 k_3 \ldots k_p}^{l_2 l_3 \ldots l_q}, \qquad A_{s i_2 \ldots i_p}^{s j_2 \ldots j_q} = B_{i_2 i_3 \ldots i_p}^{j_2 j_3 \ldots j_q}$$

и координаты свертки преобразуются по тензорному закону

$$\tilde{B}^{l_2 l_3 \dots l_q}_{k_2 k_3 \dots k_p} = \alpha^{i_2}_{k_2} \alpha^{i_3}_{k_3} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_2}_{j_2} \gamma^{l_3}_{j_3} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} B^{j_2 j_3 \dots j_q}_{i_2 i_3 \dots i_p}.$$

Замечание. Свертка аффинного ортогонального тензора по паре индексов, например, i_1 и i_2 определяется следующим образом

$$L_{ssi_3 \dots i_p} = \sum_{s=1}^{n} L_{ssi_3 \dots i_p}.$$

Аналогично предыдущей теореме можно показать, что в этом случае ранг тензора также понижается на 2 единицы.

Примеры.

1). Если произведение аффинных ортогональных тензоров 1-го ранга $a_i b_j$ подвергнуть свертке, то получим скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_s b_s = \sum_{s=1}^{n} a_s b_s.$$

2). Сверткой аффинного ортогонального тензора 2-го ранга a_{ij} является след матрицы (a_{ij})

$$a_{ss} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}.$$

Перестановка индексов.

Определение 10.4. *Пусть дан тензор*

$$A = A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Будем говорить, что объект

$$B^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_2 i_1 \dots i_p}$$

получается перестановкой двух индексов (одноименных) i_1 и i_2 в тензоре A.

Аналогично определяется перестановка любых двух одноименных индексов (ковариантных или контравариантных).

Теорема 10.4. *Объект, получающейся при перестановке двух одноименных индексов тензора (p, q)-строения, является тензором того же строения.*

Доказательство: Запишем для тензора

$$A = A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

закон преобразования координат

$$\tilde{A}^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} = \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Поменяем местами два индекса i_1 и i_2. Тогда получим

$$\alpha^{i_2}_{k_2} \alpha^{i_1}_{k_1} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_2 i_1 \ldots i_p} = \tilde{A}^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_2 k_1 \ldots k_p},$$

а это означает, что $A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_2 i_1 \ldots i_p}$ — тензор (p, q)-строения.

Симметрирование.

Определение 10.5. *Если для тензора A выполняется равенство*

$$A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_2 i_1 i_3 \ldots i_p} = A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_p},$$

то говорят, что тензор A — симметричный (симметрический) по индексам i_1 и i_2.

Аналогично определяется симметричность тензора по любой паре одноименных индексов.

Тензор A называется симметричным по нескольким одноименным индексам, если он не изменяется при перестановке любых двух из этих индексов а, следовательно, и при любой их подстановке.

Операция симметрирования заключается в следующем: из одноименных индексов выбирается N индексов, над которыми производится $N!$ всевозможных перестановок, и берется среднее арифметическое полученных тензоров.

Те индексы, по которым производится симметрирование, заключаются в круглые скобки $(\ldots)$. Эти индексы мы будем называть симметрированными индексами.

Пример 10.1.

$$A^l_{(ij)k} = \frac{1}{2}\big(A^l_{ijk} + A^l_{jik}\big)\,,$$

$$A^l_{(ijk)} = \frac{1}{6}\big(A^l_{ijk} + A^l_{jki} + A^l_{kij} + A^l_{jik} + A^l_{ikj} + A^l_{kji}\big).$$

Теорема 10.5. *При симметрировании тензора по любой группе одноименных индексов получается тензор того же строения. При этом полученный тензор будет симметричным по симметрированным индексам.*

Доказательство: При перестановке двух индексов а, следовательно, и при любой перестановке выбранных индексов по теореме 10.4 получаем тензор того же строения, что и исходный. При сложении тензоров одинакового строения получается тензор того же строения. Деление суммы тензоров, полученных при всех перестановках симметрированных индексов, на $N!$ можно рассматривать как умножение на тензор нулевого ранга. Поэтому согласно теореме 10.2 строение тензора не изменяется. Таким образом, производя симметрирование тензора (p, q)-строения, получаем тензор (p, q)-строения.

Симметричность тензора следует из того, что если во всех перестановках симметрированных индексов поменять местами одни и те же два индекса, то получим все те же перестановки.

Альтернация.

Определение 10.6. *Если для тензора A выполняется равенство*

$$A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_2 i_1 i_3 \dots i_p} = -A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 i_3 \dots i_p},$$

то говорят, что тензор A — кососимметричный (кососимметрический) по индексам i_1 и i_2.

Тензор называется кососимметричным по нескольким одноименным индексам, если он кососимметричен по любой паре из этих индексов.

Операция альтернации заключается в следующем: из одноименных индексов данного тензора выбирают N индексов и производят $N!$ всевозможных перестановок, результаты четных перестановок берутся со своими знаками, а у результатов нечетных перестановок знак меняется на противоположный, после чего берется среднее арифметическое всех тензоров.

Те индексы, по которым осуществляется альтернация, заключают в квадратные скобки $[\dots]$. Эти индексы будем называть альтернированными индексами.

Пример 10.2.

$$A^l_{[ij]k} = \frac{1}{2}\big(A^l_{ijk} - A^l_{jik}\big)$$

$$A^l_{[ijk]} = \frac{1}{6}\big(A^l_{ijk} + A^l_{jki} + A^l_{kij} - A^l_{jik} - A^l_{ikj} - A^l_{kji}\big).$$

Теорема 10.6. *При альтернации тензора по любой группе одноименных индексов получается тензор того же строения. При этом полученный тензор будет кососимметричным по альтернированным индексам.*

Доказательство: Как и при доказательстве теоремы 10.5 можно установить, что в результате альтернации тензора (p, q)-строения получается тензор того же строения.

Из курса высшей алгебры известно, что при $n \geq 2$ число четных перестановок равно числу нечетных перестановок. Если в перестановке поменять местами два любых индекса, то четная перестановка перейдет в нечетную перестановку и наоборот, нечетная перестановка перейдет в четную. Отсюда и следует кососимметричность тензора, полученного в результате альтернации.

Подъем и опускание индексов.

Лемма 10.2. *Свертка произведения контравариантного и ковариантного метрических тензоров равна символу Кронекера, т.е.*

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k.$$

Доказательство: Обе части разложения вектора взаимного базиса по векторам основного базиса

$$\mathbf{e}^i = c^{ij}\mathbf{e}_j$$

умножим скалярно на $\mathbf{e}^k$

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^k) = c^{ij}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}^k) = c^{ij}\delta^k_j = c^{ik}.$$

Откуда следует что $c^{ij} = g^{ij}$ и, следовательно, разложение вектора взаимного базиса по основному базису имеет вид

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j.$$

Умножая скалярно обе части последнего равенства на $\mathbf{e}_k$, получаем

$$\delta^i_k = (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_k) = g^{ij}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = g^{ij}g_{jk}.$$

Введем операции подъема и опускания индексов. С этой целью изменим нумерацию индексов у тензора, так чтобы для поднимаемого (или опускаемого) индекса было место, куда его следует поставить. Это место мы будем обозначать точкой, например, $A^{\cdot\cdot k \cdot}_{ij \cdot l}$. Такая запись означает, что 1-й и 2-й индекс ковариантный, 3-й контравариантный, 4-й контравариантный.

Поднимем 1-й индекс: для этого тензор умножим на g^{is} и затем произведем свертку, в которой участвует поднимаемый индекс

$$g^{is}A^{\cdot\cdot k \cdot}_{sj \cdot l} = A^{i \cdot k \cdot}_{\cdot j \cdot l}.$$

Опустим верхний индекс: для этого тензор умножим на g_{ks} и произведение свернем

$$g_{ks}A^{\cdot\cdot s \cdot}_{ij \cdot l} = A_{ijkl}.$$

Аналогично поднимают и опускают любые индексы.

Так как для метрических тензоров выполняется соотношение $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$, то операции подъема и опускания индексов взаимно-обратные. Например для контравариантных координат вектора $\mathbf{A}$ имеем

$$A^i = g^{ij}A_j = g^{ij}g_{jk}A^k = \delta^j_k A^k = A^i.$$

Тензоры, полученные друг из друга путем подъема или опускания индексов, называют ассоциированными.

11. Обратный тензорный признак

Если нам дано, например, уравнение вида

$$A^r_{st}B^{st} = C^r,$$

связывающее тензоры A_{st} и B^{st} — тензоры указанных типов, то мы можем заключить, что C^r есть тензор, так как он получен умножением и последующим свертыванием.

Важно уметь распознавать тензоры обратным способом: если мы знаем, что C^r и B^{st} — тензоры, можем ли мы заключить, что A^r_{st} — тензор?

Теорема 11.1. *Пусть нам дано уравнение*

$$A(r,s,t)B^{st} = C^r,$$

где C^r является некоторым определенным тензором, а B^{st} — произвольный тензор, тогда $A(r,s,t)$ есть тензор, который может быть представлен как A^r_{st}.

Доказательство: В старом базисе $\mathbf{e}_i$ имеем

$$A(r,s,t)B^{st} = C^r.$$

В новом базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$:

$$\tilde{A}(r,s,t)\tilde{B}^{st} = \tilde{C}^r.$$

Но

$$\tilde{C}^r = \gamma^r_m C^m = \gamma^r_m A(m,n,p)B^{np}.$$

А так как при переходе от базиса $\tilde{\mathbf{e}}_i$ к базису $\mathbf{e}_i$ роль коэффициентов преобразований α^j_i и γ^j_i меняется (γ^j_i становятся как бы коэффициентами прямого преобразования, а α^j_i — коэффициентами обратного преобразования), то

$$B^{np} = \alpha^n_s \alpha^p_t \tilde{B}^{st}.$$

Поэтому

$$\tilde{A}(r,s,t)\tilde{B}^{st} = \gamma^r_m \alpha^n_s \alpha^p_t A(m,n,p)\tilde{B}^{st}$$

или

$$\left[\tilde{A}(r,s,t) - \alpha^n_s \alpha^p_t \gamma^r_m A(m,n,p)\right]\tilde{B}^{st} = 0.$$

Так как B^{st}, а следовательно и $\tilde{B}^{st}$ — произвольный тензор, то все его коэффициенты при $\tilde{B}^{st}$ должны равняться нулю, т.е.

$$\tilde{A}(r,s,t) = \alpha_s^n \alpha_t^p \gamma_m^r A(m,n,p),$$

что и показывает, что $A(r,s,t)$ является аффинным тензором третьего ранга и что его правильная запись есть A_{st}^r.

12. Физические примеры тензоров

Тензор Инерции

Рассмотрим абсолютно твердое тело с объемной плотностью $\rho(\mathbf{r})$. Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ –поле скорости точек этого тела. Рассчитаем его кинетическую энергию. По определению она равна

$$T = \frac{1}{2}\iiint\limits_{v} \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}^2(\mathbf{r})dv\,,$$

где интегрирование ведется по области v, занятой телом.

Известно, что скорость произвольной точки абсолютно твердого тела удобно представить в виде:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]\ .$$

Здесь $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\omega}$ –одинаковые для всех точек тела векторы, имеющие прозрачный физический смысл: $\mathbf{V}$ –скорость поступательного движения тела, равная скорости его центра инерции, а $\boldsymbol{\omega}$ –вектор угловой скорости вращения тела. Кроме того здесь $\mathbf{r}$ –радиус-вектор в движущейся с телом системе отсчета, центр которой совпадает с центром инерции тела. Напомним, что в такой системе координат

$$\iiint\limits_{v} \mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\,dv \equiv 0\,. \tag{12.1}$$

Подставив правую часть равенства для скорости тела в интеграл, выражающий его кинетическую энергию, получим:

$$T = \frac{1}{2}V^2\iiint\limits_{v} \rho(\mathbf{r})\,dv + \iiint\limits_{v} \rho(\mathbf{r})\left(\mathbf{V}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\right)\,dv + \tag{12.2}$$
$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{v} \rho(\mathbf{r})\left([\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\right)\,dv\,.$$

Обсудим каждое из входящих сюда слагаемых по отдельности. Первое из них дает *кинетическую энергию поступательного движения тела* и имеет такой вид:

$$T_{\text{п}} = \frac{1}{2}m\,V^2 \qquad \left(m = \iiint\limits_{v} \rho(\mathbf{r})dv \quad \text{масса тела}\right)$$

–как если бы вся масса тела была сосредоточена в его центре инерции. Второе слагаемое в (12.2) равно нулю, а третье слагаемое

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{v} \rho(\mathbf{r})\left([\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\right)\,dv$$

–выражает *кинетическую энергию вращательного движения тела.* Обсудим ее подробнее, для чего преобразуем входящее сюда скалярное произведение двух векторных произведений к более удобному виду. Пользуясь свойствами скалярных и векторных произведений, нетрудно показать, что

$$([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]) = r^2\,\omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 \ .$$

Пусть в некоторой декартовой системе координат вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ обладает координатами $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, а радиус-вектор $\mathbf{r}$ имеет координаты $\{x_1, x_2, x_3\}$. В данной системе координат полученное выражение запишется в виде:

$$r^2\,\omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = \omega_l \omega_m \left(\delta_{ml} r^2 - x_l x_m\right) \ .$$

Подставив правую часть этого равенства в формулу кинетической энергии вращательного движения твердого тела, будем иметь:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \omega_l \omega_m I_{lm} \, . \tag{12.3}$$

Здесь

$$I_{lm} = \iiint\limits_{v} \rho(\mathbf{r}) \left[\delta_{lm}\, r^2 - x_l x_m\right]\, dv$$

–координаты так называемого *тензора инерции абсолютно твердого тела.* В том что это действительно тензор, нетрудно убедиться с помощью следующих рассуждений: Величина кинетической энергии вращения твердого тела не зависит от ориентации системы координат. Следовательно, правая часть выражения (12.3) представляет собой инвариантную квадратичную форму, коэффициенты которой I_{lm} должны преобразовываться при повороте системы координат по закону преобразования координат аффинного ортогонального тензора 2-го ранга.

Геометрически, равенство (12.3) задает некоторый эллипсоид в декартовой системе координат $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Его называют *эллипсоидом инерции.* Направления в теле, совпадающие с полуосями эллипсоида инерции, называют *главными осями инерции* тела. Если направить оси системы координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ вдоль главных осей инерции, то тензор инерции окажется приведенным к диагональному виду, а кинетическая энергия вращения твердого тела окажется равной:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \left(I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2\right) \ .$$

Если все главные моменты инерции (собственные числа тензора инерции) равны, то все направления оказываются равноправными и тензор инерции в любой системе координат приобретает вид: $I_{ij} = I \delta_{ij}$. Очевидно, к телам с таким вырожденным тензором энергии относится шар. Нетрудно показать также, что главные моменты инерции одинаковы у однородного куба. Поэтому куб, наряду с шаром, называют *шаровым волчком.*

Тензор относительных движений сплошной среды

Рассмотрим теперь движущуюся сплошную среду. Пусть движение среды в некоторый момент времени характеризуется полем скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Сравним относительное движение частиц среды в двух бесконечно близких точках $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Оно описывается векторным дифференциалом $d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})$, координаты которого равны:

$$
\begin{aligned}
dv_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\, dx_3 \,, \\
dv_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\, dx_3 \,, \\
dv_3 &= \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\, dx_3 \,,
\end{aligned}
$$

или в векторной форме:

$$d\mathbf{v} = W\, d\mathbf{r} \,,$$

где W оператор, матрица которого имеет вид:

$$W = v_1x_1v_1x_2v_1x_3v_2x_1v_2x_2v_2x_3v_3x_1v_3x_2v_3x_3.$$

Поскольку $d\mathbf{v}$ и $d\mathbf{r}$ –истинные векторы, то по обратному тензорному признаку применительно к матрицам второго ранга следует, что W –тензор.

Разложим тензор W на симметричное и антисимметричное слагаемые: $W = S + A$. Здесь

$$S = v_1x_1\frac{1}{2}\,(v_1x_2 + v_2x_1)\frac{1}{2}\,(v_1x_3 + v_3x_1)\frac{1}{2}\,(v_2x_1 + v_1x_2)v_2x_2\frac{1}{2}\,(v_2x_3 + v_3x_2)\frac{1}{2}\,(v_3x_1 + v_1x_3)$$

–симметрированный тензор W, а

$$A = 0{-}\omega_1\omega_2\omega_3 0{-}\omega_1{-}\omega_2\omega_1 0,$$

–альтернированный. В него входят всего три независимых координаты

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right),$$
$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right).$$

Разбиение тензора на симметричную и антисимметричную части обычно имеет глубокий физический смысл. Продемонстрируем это на обсуждаемом примере тензора относительных движений. Для этого заметим, что выписанные координаты антисимметричного тензора A равны координатам вектора ротора

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\mathbf{v}\,.$$

Соответственно, дифференциал поля скорости может быть представлен в виде:

$$d\mathbf{v} = S\,d\mathbf{r} + [\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}]\ ,$$

где последнее слагаемое, отвечающее антисимметричной части, уже знакомо нам по предыдущему примеру движения абсолютно твердого тела. Первое же слагаемое, содержащее симметричный тензор, ответственно за деформации –сжатия и растяжения сплошной среды.

Тензор деформаций

В теории упругих тел ключевую роль играет тензор деформаций. Он вводится следующим образом. Рассмотрим некоторое деформируемое тело. Пусть в исходном недеформированном состоянии каждой частице тела соответствовал свой радиус-вектор $\mathbf{r}$ с координатами $\{x_1, x_2, x_3\}$. Изменим каким либо образом расположение и конфигурацию тела. Тогда каждой точке тела будет сопоставлен новый радиус-вектор $\mathbf{r}'$. Разность между радиус-векторами нового и старого положений выделенной частицы тела образует так называемый *вектор смещения*

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' - \mathbf{r}\,.$$

Естественно трактовать его как векторное поле, зависящее от координат первоначального положения частиц тела. В развернутой форме векторное поле смещений имеет вид:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_1\,u_1(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{e}_2\,u_2(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{e}_3\,u_3(x_1, x_2, x_3)\,.$$

Будем в дальнейшем считать функции u_1, u_2, u_3 –непрерывно дифференцируемыми во всей интересующей нас области пространства.

При деформировании тела меняются взаимные расположения его соседних частиц и в частности расстояния между ними. Выясним, как изменится расстояние между двумя частицами, изначально расположенными в бесконечно близких точках $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Очевидно, после деформирования дифференциал расстояния между ними будет равен:

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + d\mathbf{u}\,.$$

Применяя правила дифференциального исчисления нетрудно показать, что главная часть квадрата расстояния между указанными частицами после деформации равна:

$$\begin{gathered} {dr'}^2 = dr^2 + 2(d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{u}) + du^2 = \\ dr^2 + 2u_{ij}dx_i\,dx_j = dr^2 + 2d\mathbf{r}\,U\,d\mathbf{r}\,, \end{gathered} \tag{12.4}$$

где координаты u_{ij} тензора U определяются равенством:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) . \tag{12.5}$$

То что это действительно тензор, вытекает из обратного тензорного признака. Этот тензор и называют тензором деформаций.

Из (12.4) видно, что если все координаты тензора U равны нулю, то расстояние между рассматриваемыми частицами тела не меняется, а значит тензор деформаций ответственен за явления, связанные со сжатием и растяжением тел. Как любой симметричный тензор, тензор деформаций может быть приведен к главным осям. Иными словами, в каждой точке тела можно выбрать такую систему координат, в которой отличны от нуля только диагональные координаты тензора деформаций. Обозначим их $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$. После приведения к главным осям тензора деформаций, квадрат расстояния между рассматриваемыми частицами деформируемого тела можно представить в виде:

$$dr'^2 = [1 + u^{(1)}]dx_1^2 + [1 + u^{(2)}]dx_2^2 + [1 + u^{(3)}]dx_3^2 .$$

Последнее на физическом языке означает, что деформацию каждого бесконечно малого элемента объема тела можно представить как совокупность трех независимых деформаций — сжатий или растяжений — по трем взаимно перпендикулярным направлениям — главным осям тензора деформаций. Отсюда же следует, что относительное сжатие или растяжение вдоль произвольной i-й главной оси равно

$$\frac{dr'}{dr} = \sqrt{1 + u^{(i)}} .$$

В большинстве прикладных проблем теории упругости оно близко к единице, а $|u^{(i)}| \ll 1$. Поэтому на практике чаще всего отбрасывают в (12.5) слагаемое 2-го порядка малости и используют следующее приближенное выражение для координат тензора деформаций:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) .$$

Заметим в заключение, что тензор деформаций входит в основное уравнение теории упругости и кристаллофизики — обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{pq} = \lambda_{pqrs} u_{rs} ,$$

где тензор 2-го ранга σ_{pq} называют *тензором напряжений*, а тензор 4-го ранга λ_{pqrs} –*тензором модулей упругости.*

ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методическая разработка
для студентов радиофизического факультета ННГУ

Составители:

Кошелев Виктор Николаевич, Саичев Александр Иванович

Подписано к печати . Формат 60x84 1/16.
Печать офсетная. Бумага оберточная. Усл.печ.л. .
Тираж 500 экз. Заказ . Бесплатно.
Нижегородский государственный университет
им.Н.И.Лобачевского.
603600 ГСП-20, Н.Новгород, просп.Гагарина, 23.
Типография ННГУ. 603000, Н.Новгород, ул.Б.Покровская, 37.