LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Векторный и тензорный анализ

Лекция 7

Замечание 1.

В ходе доказательства теоремы было установлено, что из условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ вытекает справедливость равенства

$$\boxed{\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = 0}$$

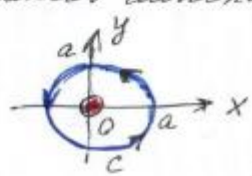
для любого замкнутого контура Г, целиком лежащего в односвязной области D.

Покажем, что в многосвязной области с "лакунами" это равенство, вообще говоря, не выполняется.

Рассмотрим пример.

$$\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Подынтегральное выражение не имеет смысла в т. $O(0,0)$. Выберем в качестве замкнутого контура C окружность радиуса "a" с центром в начале координат:



$C:\ x^2+y^2=a^2.$

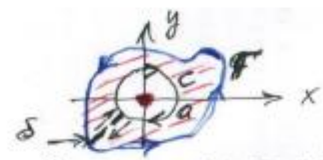
Заметим, что $\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)},$

и интеграл, казалось бы, должен давать 0.

Однако, $\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{a^2}\oint_C x\,dy - y\,dx =$

$$= \frac{1}{a^2}\,2S_{кр} = \frac{1}{a^2}\cdot 2\pi a^2 = 2\pi.$$

Интересно, что получили ненулевой результат, не зависящий от радиуса окружности. Этот результат будет справедлив для любого контура, охватывающего начало координат.



В самом деле. Рассмотрим произвольный замкнутый контур Г, внутри которого находится окружность C. Сделаем разрез δ, соединяющий внешний контур Г с внутренним C. В результате получим односвязную область, охваченную границей Г∪C. Будем обходить контур Г в положительном направлении. С учетом движение по разрезу δ туда и обратно имеем:

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} + \oint_{C^-} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0.$$

Отсюда получим:

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \oint_{C^+} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi.$$

В нашем случае лакуной является выколотая точка. Универсальное число, являющееся значением криволинейного интеграла, охватывающего лакуну, называется циклической постоянной лакуны.

Замечание 2.

Доказанную теорему можно распространить на случай пространственной кривой.

Так, если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ — непрерывно-дифференцируемы в односвязной области $G \subset \mathbb{R}^3$ и одновременно выполняются равенства

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}},$$

то для $\forall$ замкнутого контура Γ, целиком лежащего в G, справедливо равенство:

$$\boxed{\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.}$$

Интегрирование полных дифференциалов.

Полученные результаты позволяют решить следующую задачу: найти функцию $U(x,y,z)$, полный дифференциал которой задается выражением:

$$\boxed{dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.}$$

Ограничимся случаем, когда функции P, Q, R непрерывно-дифференцируемы в односвязной области G. Выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ служит полным дифференциалом некоторой функции в том и только том случае, когда одновременно

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.}$$

Эти условия вытекают из того факта, что $U'_x = P$, $U'_y = Q$, $U'_z = R$, и равенства смешанных производных.

В этой ситуации, как мы уже отмечали,

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

по любому замкнутому контуру Г, целиком лежащему в области G. Это означает, что криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

не зависит от формы пути, соединяющего точки A и B, а определяется только началом и концом движения.

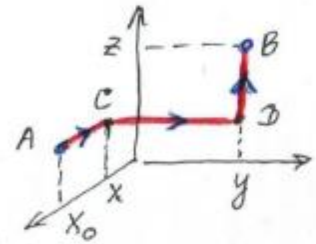
Подставляя выражение для dV под интеграл, имеем:

$$\boxed{\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_{AB} dV = V(B)-V(A).}$$

Зафиксируем точку $A(x_0,y_0,z_0)$, а точку $B(x,y,z)$ будем считать текущей. Тогда,

$$\boxed{V(x,y,z) = \int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz+V(x_0,y_0,z_0).}$$

Выберем в качестве пути AB ломаную, изображенную на рисунке.



Тогда,

$$V(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)\,dz + V(x_0,y_0,z_0).$$

Таким образом, отыскание функции по ее полному дифференциалу сводится к вычислению 3-х интегралов Римана. Эта функция определяется с точностью до неизвестной постоянной, роль которой играет $V(x_0,y_0,z_0)$.

Заметим, что начальную точку можно выбирать как удобно. Например, брать за нее начало координат $O(0,0,0)$, если в этой точке функции P, Q и R не имеют особенностей.

3. Поверхностные интегралы

В различных физических задачах встречаются функции, заданные на той или иной поверхности. Примерами могут служить плотность распределения зарядов на поверхности проводника, освещенность поверхности, скорость жидкости, протекающей через некоторую поверхность и т.д. Эта глава посвящена изучению интегралов от функций, заданных на поверхности, и их применениям.

3.1. Определение поверхности. Способы ее задания.

Определение.

Пусть Ω — односвязная замкнутая область на плоскости $\mathbb{R}^2$. Годограф непрерывной векторной функции

$$\vec{r}:(\Omega\subset\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}^3$$

называется поверхностью S, т.е.

$$S:\ \vec{r}=\vec{r}(u,v),\quad (u,v)\in\Omega.$$

Определение.

Поверхность S называется простой, если ее параметризация

$$\vec{r}:(\Omega\subset\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}^3$$

осуществляет взаимно-однозначное отображение плоской области Ω в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$.

Простая поверхность называется гладкой, если ее параметризация $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ — непрерывно-дифференцируемая функция в Ω или в сокращенной записи

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}(u,v)\in C^1(\Omega).}$$

Простая поверхность S называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа гладких частей.

Примерами гладких поверхностей являются сфера, поверхность тора:

кусочно-гладкой — поверхность куба.

Различают четыре вида задания поверхности.

1. **Векторное задание поверхности**

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ (u,v)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2.}$$

2. **Параметрическое задание**

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2.$$

3. **Явное задание**

$$z=z(x,y),\quad (x,y)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2.$$

4. **Неявное задание**

$$\mathcal{F}(x,y,z)=0.$$

Из параметрического или явного задания поверхности S можно придти к ее векторному заданию.

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},\quad (u,v)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2$$

или

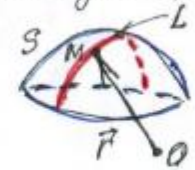
$$\boxed{\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+z(x,y)\vec{k},\quad (x,y)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2.}$$

3.2. Нормаль и касательная плоскость к поверхности.

Проведем на гладкой поверхности S, заданной векторным уравнением

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v),\quad (u,v)\in\Omega,$$

какую-нибудь кривую L. Если на



этой кривой введен некоторый параметр, то каждому значению t будет соответствовать определенная точка поверхности M, которая определяется параметрами "u" и "v" или вектором $\vec{r}$. Таким образом, вдоль кривой L параметры "u" и "v" являются функциями t:

$$\boxed{u=u(t),\ v=v(t).}$$

Эти уравнения называются **уравнениями кривой на поверхности**. Подставив их в уравнение поверхности, получаем параметрическое уравнение кривой на поверхности S: $\boxed{\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t)).}$

Рассмотрим касательную к кривой L. Ее направление определяется вектором производной

$$\frac{d\vec r}{dt} = \frac{\partial \vec r}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec r}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt} = \vec r_u'\cdot\frac{du}{dt} + \vec r_v'\cdot\frac{dv}{dt},$$

который представляет собой линейную комбинацию векторов $\vec r_u'$ и $\vec r_v'$ — координатных векторов. Эти вектора являются соответственно касательными к u-линии: $\vec r=\vec r(u,v_0)$ и v-линии: $\vec r=\vec r(u_0,v)$, проходящим через т. $M_0(u_0,v_0)$ поверхности S.

Касательная плоскость.

Рассмотрим всевозможные кривые на поверхности S, проходящие через заданную т. M_0 и касательные вектора к ним в этой точке.

Каждый из этих векторов представляет собой линейную комбинацию векторов $\vec r_u'$ и $\vec r_v'$, т.е. лежит в определяемой этими векторами плоскости. Эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности S в т. M_0. Поскольку вектора $\vec r_u'$ и $\vec r_v'$ лежат в касательной плоскости, вектор $[\vec r_u',\vec r_v']$ перпендикулярен к ней. Тогда, уравнение касательной плоскости можно записать в виде:

$$\boxed{(\vec r-\vec r_0, [\vec r_u',\vec r_v'])=0,}$$

где $\vec r$ — радиус-вектор текущей точки касательной плоскости, $\vec r_0$ — радиус-вектор точки касания M_0.

Уравнение касательной плоскости можно переписать в виде

$$\boxed{(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v)=0,}$$

что означает компланарность трех векторов.

Если поверхность S задана в явном виде $z=z(x,y)$, то

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z(x,y)\vec{k} -$$

- радиус-вектор точки, лежащей на поверхности. Тогда,

$$\vec{r}'_x=\vec{i}+z'_x\vec{k}; \quad \vec{r}'_y=\vec{j}+z'_y\vec{k} \text{ и}$$

$$(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{r}'_x, \vec{r}'_y)=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix}=$$

$$= z-z_0-z'_x(x-x_0)-z'_y(y-y_0)=0.$$

В результате, уравнение касательной плоскости принимает вид

$$\boxed{z-z_0=z'_x(x-x_0)+z'_y(y-y_0),}$$

где значение производных вычисляются в точке касания (x_0, y_0)

Если поверхность S задана неявным уравнением

$$\boxed{F(x,y,z)=0,}$$ то

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}, \text{ и}$$

уравнение касательной плоскости переходит в

$$\boxed{(x-x_0)F'_x+(y-y_0)F'_y+(z-z_0)F'_z=0.}$$

Значения производных берутся в т. (x_0, y_0, z_0).

Нормаль к поверхности.

В декартовой системе координат вектора $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$ имеют координаты

$$\vec{r}'_u=\{x'_u, y'_u, z'_u\}, \quad \vec{r}'_v=\{x'_v, y'_v, z'_v\}.$$

Тогда вектор, перпендикулярный касательной плоскости, таков

$$[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$$

и имеет компоненты

$$A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Нормируя этот вектор, находим направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ к поверхности S:

$$\cos(\vec{n},\vec{i}) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos(\vec{n},\vec{j}) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos(\vec{n},\vec{k}) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]}{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|}.$$

В частности, если поверхность задана явным уравнением, то

$$A = \begin{vmatrix} 0 & z'_x \\ 1 & z'_y \end{vmatrix} = -z'_x;$$

$$B = \begin{vmatrix} z'_x & 1 \\ z'_y & 0 \end{vmatrix} = -z'_y; \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда,

$$\cos(\vec{n},\vec{i}) = \frac{-z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$

$$\cos(\vec{n},\vec{j}) = \frac{-z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$

$$\cos(\vec{n},\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}.$$

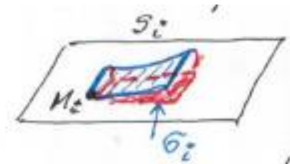
3.3. Площадь поверхности.

Введем по аналогии с длиной пространственной кривой определение площади поверхности.

Определение.

Пусть S – гладкая поверхность, ограниченная кусочно-гладким

Разобьем эту поверхность кусочно-гладкими кривыми на "n" частей S_i $(i=\overline{1,n})$. Выберем в каждой из частей произвольную точку M_i и построим касательную плоскость к поверхности в этой точке. Спроектируем элемент S_i



на эту плоскость и получим на этой касательной плоскости квадрируемую плоскую фигуру σ_i с площадью S_{σ_i}. Площадью поверхности S называется предел

$$S_{пов} = \lim_{\max d(s_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} S_{\sigma_i},$$

который предполагается независимым от способа разбиения поверхности на части и способа выбора точек на этих элементах. Здесь $d(s_i)$ — диаметр элемента s_i. Если предел существует, то поверхность называется квадрируемой.

Замечание.

Кажется, что естественнее всего было бы определить площадь поверхности как предел площади граней, вписанных в поверхность многогранников. По аналогии с длиной кривой, определяемой как предел периметров вписанных в кривую ломаных. Однако, в позапрошлом веке была обнаружена несостоятельность такого определения. Шварц показал, что если в цилиндр радиусом R и высотой H

специальным образом вписать многогранник, то предел площади граней, вообще говоря, не будет стремиться к площади боковой поверхности цилиндра $2\pi RH$.

На вид этот многогранник похож на голенище сапога, собранное в гармошку. Поэтому его иногда называют сапогом Шварца.

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Векторный и тензорный анализ

Лекция 8

Докажем теорему, позволяющую вычислить площадь гладкой поверхности через двойной интеграл.

Теорема.

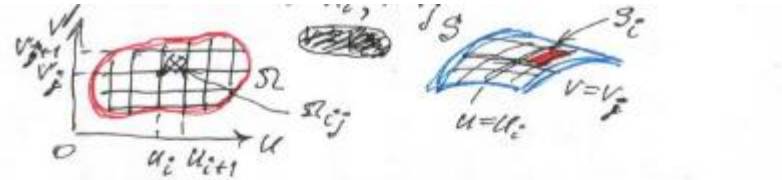
Если гладкая ограниченная поверхность S задана параметризацией $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2$, то площадь поверхности S существует и равна двойному интегралу

$$\boxed{S_{пов}=\iint\limits_{\Omega}\left|[\vec{r}\,'_u,\vec{r}\,'_v]\right|du\,dv.}$$

Д-во:

поскольку поверхность гладкая, ее параметризация $\vec{r}(u,v)\in C^1(\Omega)$. Следовательно, производные $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$ непрерывны, и поэтому функция $\left|[\vec{r}\,'_u,\vec{r}\,'_v]\right|\in C(\Omega)$. Тогда двойной интеграл от нее существует.

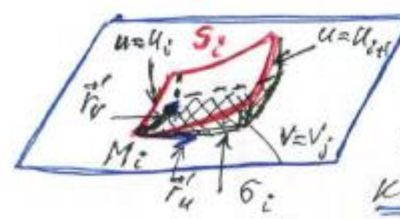
Разобьем поверхность S "u" и "v"-линиями на "n" частей S_i. Тогда плоская область Ω разобьется также на "n" частей горизонтальными и вертикальными прямыми $u=u_i$, $v=v_j$.



При этом прямоугольнику Ω_{ij} в области Ω будет отвечать кривой четырехугольник S_i, причем

$d(\Omega_{ij})\to 0$ при $d(S_i)\to 0$.

Выберем точку $M_i\in S_i$ и проведем касательную плоскость к поверхности S в этой точке.



← касательная плоскость

Спроектируем элемент S_i на касательную плоскость и найдем приближенно площадь проекции σ_i, показанную штриховкой. Эта проекция может приближенно рассматривать как параллелограмм, по сторонам которого направлены вектора $\vec r_u'(M_i)$ и $\vec r_v'(M_i)$, лежащие в касательной плоскости.

Вычислим приближенно длины сторон параллелограмма. Одна из них может быть найдена как

$$a = |\vec r(u_{i+1}, v_j) - \vec r(u_i, v_j)| \simeq$$
$$\simeq |\vec r_u'(u_i, v_j)|\,\Delta u_i$$

по формуле конечных приращений, где $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$. Аналогичным образом находим вторую сторону

$$b = |\vec r(u_i, v_{j+1}) - \vec r(u_i, v_j)| \simeq$$
$$\simeq |\vec r_v'(u_i, v_j)|\,\Delta v_j,$$

где $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$.

Тогда площадь проекции σ_i может быть вычислена как

$$\boxed{S_{\sigma_i} \simeq ab\sin\theta,}$$

где θ – угол между сторонами параллелограмма.

Подставляя выражения для a и b, имеем:

$$S_{\sigma_i} \simeq |\vec r_u'(u_i, v_j)|\,\Delta u_i \cdot |\vec r_v'(u_i, v_j)|\,\Delta v_j \cdot$$
$$\cdot \sin\theta = |[\vec r_u'(u_i, v_j), \vec r_v'(u_i, v_j)]|\,\Delta u_i \Delta v_j.$$

Из определения площади поверхности получаем

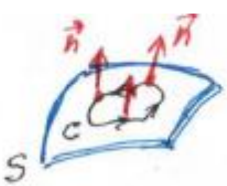
$$S_{пов} = \lim_{\max d(\sigma_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} S_{\sigma_i} =$$
$$= \lim_{\max d(\Omega_{ij}) \to 0} \sum_i \sum_j |[\vec r_u'(u_i, v_j), \vec r_v'(u_i, v_j)]| \cdot$$
$$\cdot \Delta u_i \Delta v_j = \iint_{\Omega} |[\vec r_u', \vec r_v']|\, du\, dv$$

в силу определения двойного интеграла. ∎

Все гладкие поверхности разбиваются на 2 класса.

Определение.

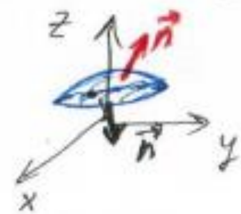
Гладкая поверхность S называется двусторонней, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не имеющему общих точек с ее границей, не меняет направление нормали к поверхности.



Если же на поверхности существует хотя бы один замкнутый контур, при обходе по которому направление нормали меняется на противоположное, то поверхность называется односторонней.

Двусторонние поверхности называют также ориентируемыми, а односторонние – неориентируемыми.

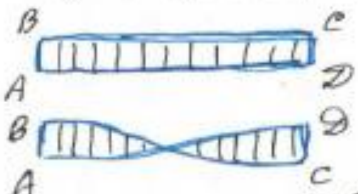
Простейшим примером двусторонней поверхности является плоскость. Любая гладкая поверхность S, заданная уравнением $z=z(x,y)$ – двусторонняя.

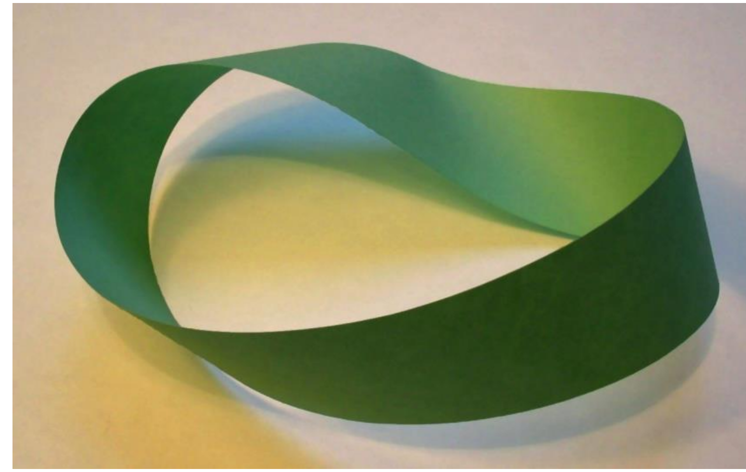


Нормаль может составлять с положительным направлением оси Oz либо острый, либо тупой угол.

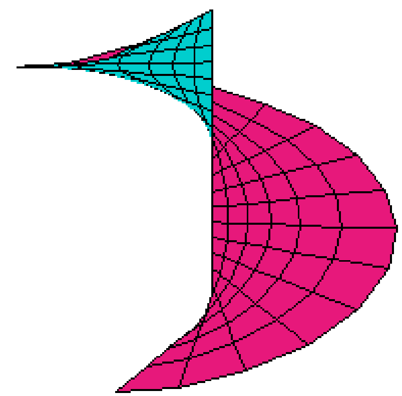
Простейшим примером одно-сторонней поверхности является так называемый лист Мёбиуса.

Его можно получить, взяв полоску бумаги ABCD и склеить так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка B с D, т.е. повернув на 180° один ее край перед склеиванием. При обходе листа Мёбиуса по периметру, направление нормали меняется на ~~[illegible]~~ противоположное.





Лист (лента) Мёбиуса



Двусторонняя поверхность - геликоид

3.4. Поверхностные интегралы первого рода.

В физических приложениях часто встречаются функции, заданные на некоторой поверхности. Например, температура на поверхности Солнца, освещенность поверхности, плотность распределения зарядов и т.д. Для таких функций по аналогии с криволинейными интегралами можно ввести понятие поверхностных интегралов.

Определение.

Пусть в точках ограниченной кусочно-гладкой квадрируемой поверхности S определена некоторая ограниченная функция $f(M)$, $M \in S$.

Разобьем поверхность S кусочно-гладкими кривыми произвольным образом на "n" частей: $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Площадь каждой из частей S_i обозначим ΔS_i.

Выберем на каждой из частей S_i произвольным образом точки M_i, $M_i \in S_i$ $(i=\overline{1,n})$. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

и рассмотрим ее предел, когда $\max d(S_i) \to 0$, где $d(S_i)$ — диаметр части поверхности S_i.

Если существует конечный предел
$$\boxed{\lim_{\max d(S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i ,}$$
не зависящий от способа разбиения поверхности S на части и от выбора точек M_i на частях S_i, то этот предел называется поверхностным интегралом первого рода от функции $f(M)$ по поверхности S и обозначается как
$$\boxed{\iint\limits_S f(M)\,ds.}$$
В декартовой системе координат интеграл записывают в виде

$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds$, но надо иметь в виду, что переменные x, y, z не являются независимыми, а связаны через уравнение поверхности S.

Возникает вопрос об условиях существования и способе вычисления введенного интеграла.

Теорема о вычислении поверхностного интеграла первого рода.

Пусть S – гладкая поверхность, заданная параметризацией $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in\Omega$, где Ω – замкнутая ограниченная область плоскости, а $f(M)$ – некоторая ограниченная функция, определенная на поверхности S. Тогда справедливо равенство
$$\boxed{\iint\limits_S f(M)\,ds=\iint\limits_\Omega f(\vec{r}(u,v))\,|[\vec{r}\,'_u,\vec{r}\,'_v]|\,du\,dv,}$$
~~Таким образом~~ где $\vec{r}(u,v)$ – радиус вектор т. M поверхности S.

Таким образом, поверхностный интеграл первого рода вычисляется через двойной.

Д-во: разобьем поверхность S "u" и "v" линиями: $\vec r=\vec r(u,v_j)$, $\vec r=\vec r(u_i,v)$ на "n" частей, выберем на каждой из частей точку M_i и составим сумму

$$T=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i,$$

где ΔS_i – площадь части S_i.

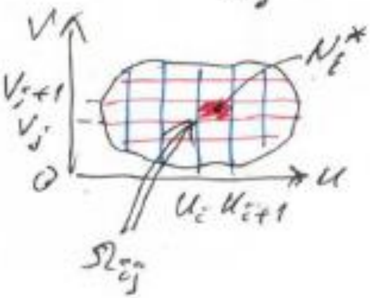
Воспользуемся доказанной ранее теоремой о площади поверхности.

Тогда

$$T=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\iint_{\Omega_{ij}}|[\vec r_u',\vec r_v']|\,du\,dv.$$

Применяя теорему о среднем в двойном интеграле, получаем

$$T=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)|[\vec r_u',\vec r_v']|(N_i^*)\Delta u_i\Delta v_j,$$



причем в силу непрерывности векторного произведения т. $N_i^*\in\Omega_{ij}$.

Заметим, что $d(\Omega_{ij})\to 0$ при $d(S_i)\to 0$, и переходя к пределу, имеем

$$\lim_{\max d(S_i)\to 0} T=\lim_{\max d(\Omega_{ij})\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\cdot|[\vec r_u',\vec r_v']|(N_i^*)\Delta u_i\Delta v_j,$$

где M_i^* – образ точки $M_i\in S_i$ в области Ω_{ij}. Выражение в правой части сводится к двойному интегралу

$$\iint_{\Omega} f(\vec r(u,v))|[\vec r_u',\vec r_v']|\,du\,dv$$

в указанном пределе.

В случае явного задания гладкой поверхности S уравнением $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D\subset R^2$: $\vec r_x'=\vec i+z_x'\vec k$; $\vec r_y'=\vec j+z_y'\vec k$, и формула вычисления переходит в

$$\boxed{\iint_S f(M)\,ds=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy}$$

так как $[\vec r_x',\vec r_y']=\vec k-z_x'\vec i-z_y'\vec j$.

Замечания.

1. Поверхностный интеграл первого рода определен как для односторонних, так и для двусторонних поверхностей.

2. Поверхностный интеграл первого рода по кусочно-гладкой поверхности сводится к сумме интегралов по гладким частям и последующему применению формул сведения к двойному.

Поверхностные интегралы 1-го рода часто встречаются в физических задачах. Пусть по поверхности S распределена некоторая масса с поверхностной плотностью $\rho(M)$, $M \in S$. Такая поверхность носит название материальной оболочки.

Разбивая эту поверхность кусочно-гладкими кривыми на "n" частей S_i и учитывая, что масса части S_i может быть приближенно вычислена как $\Delta m_i \approx \rho(M_i)\Delta S_i$, где M_i – некоторая точка, принадлежащая S_i. Легко найти координаты центра масс материальной оболочки через поверхностный интеграл 1-го рода

$$\boxed{\vec{r}_{цм} = \frac{\iint\limits_S \vec{r}(M)\rho(M)\,ds}{\iint\limits_S \rho(M)\,ds},}$$

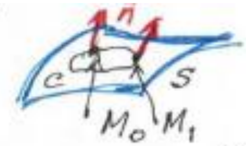
где $\vec{r}(M)$ – радиус-вектор точки M поверхности S, $\vec{r}_{цм}$ – радиус-вектор центра масс.

Здесь была применена формула вычисления центра масс системы материальных точек.

3.5. Поверхностные интегралы второго рода

В отличии от поверхностных интегралов 1-го рода поверхностные интегралы 2-го рода определены только для двусторонних поверхностей. Для этого введем сначала понятие стороны поверхности.

Пусть S – гладкая двусторонняя поверхность. Возьмем на S некоторую точку M_0, проведем через нее нормаль к S и выберем одно из двух возможных ее направлений. Проведем теперь через т. M_0 на S какой-либо замкнутый контур C, не имеющий общих точек с границей поверхности.



Будем передвигать единичный вектор нормали $\vec{n}$ из точки M вдоль контура C так, чтобы этот вектор все время оставался перпендикулярным к S и чтобы его направление менялось при движении непрерывно.

В силу определения двусторонней поверхности вектор $\vec{n}$ при полном обходе должен занять первоначальное положение.

При этом при передвижении из т. M_0 в другую т. M_1 по кривой C нормаль $\vec{n}$ займет в т. M_1 положение, не зависящее от формы пути. Таким образом, на двусторонней поверхности выбор нормали в одной точке определяет ее положение во всех остальных точках.

Определение.

Совокупность точек двусторонней поверхности S с приписанным в них направлением нормали называется **стороной** поверхности и обозначается $(M, \vec{n}(M))$, $M \in S$. В этих обозначениях $(M, -\vec{n}(M))$ – другая сторона поверхности.

Пусть S – гладкая двусторонняя поверхность. Выберем одну из сторон поверхности $(M, \vec{n}(M))$ и рассмотрим векторную функцию $\vec{A} : S \to \mathbb{R}^3$, определенную на поверхности S. Тогда интеграл

$$\boxed{\iint_S (\vec{A}(M), \vec{n}(M))\, ds}$$

называется **поверхностным интегралом второго рода** от вектор-функции $\vec{A}$ по поверхности S. Формально этот интеграл выглядит как поверхностный интеграл первого рода, но подынтегральная функция зависит от свойств поверхности – ее нормали $\vec{n}$.

Согласно определению при переходе к другой стороне поверхности **интеграл меняет знак** на противоположный. Перейдем к теореме о вычислении поверхностного интеграла второго рода.

Теорема о вычислении поверхностного интеграла 2-го рода.

Пусть S – гладкая двусторонняя поверхность с выбранной стороной $(M, \vec{n}(M))$, заданная параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$. Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_S (\vec{A}, \vec{n})\, ds = \iint\limits_\Omega (\vec{A}, \vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}')\, du\, dv,$$

Д-во: воспользуемся ранее доказанной теоремой о вычислении поверхностного интеграла 1-го рода

$$\iint\limits_S (\vec{A}, \vec{n})\, ds = \iint\limits_\Omega (\vec{A}, \vec{n})\, |[\vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}']|\, du\, dv$$

и выражением для нормали к поверхности S

$$\vec{n} = \pm \frac{[\vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}']}{|[\vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}']|}.$$

Если вектора $(\vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}', \vec{n})$ составляют правую тройку с выбранным направлением нормали, то в формуле для $\vec{n}$ нужно взять знак "+". Подставляя это выражение в интеграл, приходим к доказываемой формуле. ∎

Замечание.

Представление поверхностного интеграла 2-го рода в декартовой системе координат.

Если в $\mathbb{R}^3$ введена декартова система координат, то векторную функцию $\vec{A}(M)$ и нормаль $\vec{n}(M)$ можно разложить по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. В результате имеем

$$\vec{A}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

$$\vec{n}(M) = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – косинусы направляющих углов нормали, которые она составляет с осями координат. При этом

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.}$$

Подставляя выражение для $\vec{A}(M)$ и $\vec{n}(M)$ в поверхностный интеграл 2-го рода, получаем

$$\boxed{\iint_S (\vec{A}(M),\vec{n}(M))\,ds=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds.}$$

Учитывая, что

$dydz=ds\cos\alpha$, $dzdx=ds\cdot\cos\beta$, $dxdy=ds\cos\gamma$ – проекции элемента ds поверхности соответственно на координатные плоскости YOZ, XOZ и XOY, имеем окончательно

$$\boxed{\iint_S (\vec{A}(M),\vec{n}(M))\,ds=\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy}$$

Из приведенного ранее соотношения с косинусами направляющих углов нормали вытекает равенство

$$\boxed{\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iint_S P\,dydz+\iint_S Q\,dzdx+\iint_S R\,dxdy.}$$

Каждый из интегралов в правой части похож на двойной, но это – поверхностные интегралы! Следует быть осторожными при переходе от них к двойным. Покажем это на примере.

Пример.

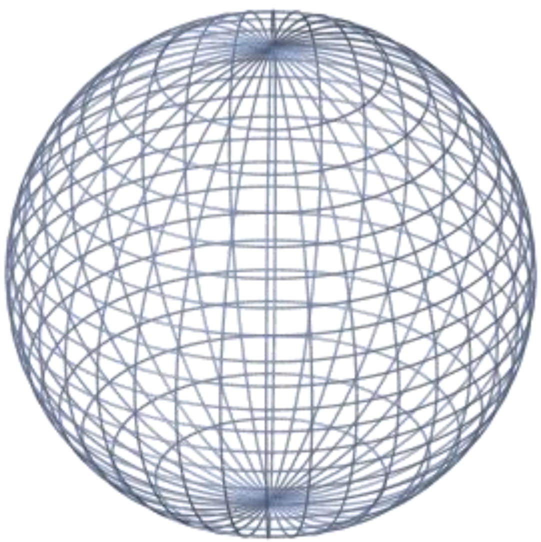
Поверхностный интеграл 2-го рода

$$J=\iint_S R(x,y,z)\,dxdy$$

по внешней стороне сферы

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

записать в виде суммы двойных интегралов.



Решение.

Из уравнения сферы определяем z:

$$z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

При этом в равенстве "+" отвечает верхней половине сферы, у которой нормаль составляет острый угол с осью Oz, а "–" – нижней половине, у которой нормаль направлена под тупым углом к оси Oz. Учитывая знаки косинусов этих углов окончательно имеем:

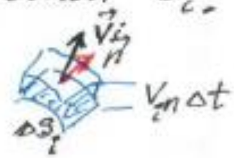
$$\boxed{J=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} R\left(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dxdy-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} R\left(x,y,-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dxdy.}$$

Здесь учтено, что обе половинки сферы проектируются в круг $x^2+y^2\le a^2$ на плоскости XOY.

Физический смысл.

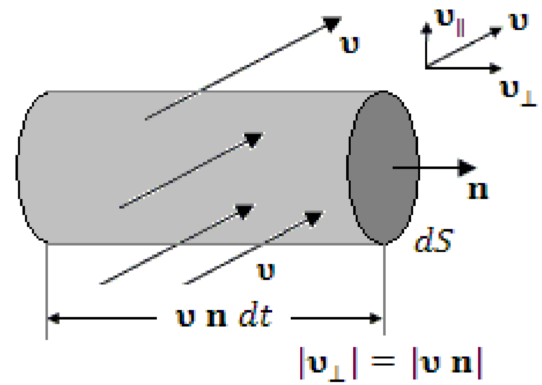
Пусть в пространстве R^3 движется жидкость, частицы которой в каждой точке $M\in R^3$ имеют скорость $\vec{V}(M)$.

Вычислим количество жидкости Q, протекающей через двустороннюю поверхность S в указанную сторону за единицу времени. Направление протекания укажем с помощью нормали к поверхности $\vec{n}(M)$. Разобьем поверхность S кусочно-гладкими кривыми на "n" ячеек S_i, $i=\overline{1,n}$. Будем полагать, что скорость частиц жидкости, протекающих через ячейку S_i постоянна и равна $\vec{V}(M_i)$, где M_i — наугад выбранная точка ячейки S_i.



Тогда объем жидкости, протекающий через площадку ΔS_i ячейки S_i за время Δt приближенно может быть рассчитан как

$$\boxed{\left(\vec{V}(M_i)\right)_n \Delta t\,\Delta S_i = \left(\vec{V}(M_i), \vec{n}(M_i)\right)\cdot \Delta t\,\Delta S_i .}$$



через площадку ΔS_i равно

$$(\vec{V}(M_i), \vec{n}(M_i))\,\Delta S_i.$$

Полное количество жидкости, протекающей через поверхность S является суммой

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (\vec{V}(M_i), \vec{n}(M_i))\,\Delta S_i.}$$

Если перейти в этой сумме к пределу $\max d(S_i) \to 0$, то приходим к

$$\boxed{Q = \iint\limits_S (\vec{V}(M), \vec{n}(M))\,ds.}$$

В физике полученный поверхностный интеграл 2-го рода принято называть потоком поля скоростей.

3.6. Формула Гаусса-Остроградского

Ранее мы вывели формулу, связывающую двойной интеграл по плоской области с криволинейным интегралом 2-го рода по границе этой области (формула Грина). В этом разделе будет получена формула, связывающая тройной интеграл по пространственной области с поверхностным интегралом, взятым по внешней стороне поверхности, ограничивающей эту область. Эта формула, широко применяемая и в математике и в физике, носит название формула Гаусса-Остроградского.

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Векторный и тензорный анализ

Лекция 9

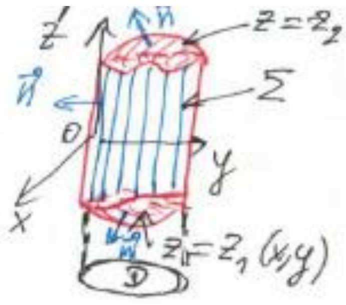
Замечание.

Поясним наличие двух авторов в названии формулы. Исторически Остроградский опубликовал эту формулу в 1828 г. в работе "Заметка о теории тепла". Однако на Западе ее часто называют формулой Гаусса, хотя последний получил ее значительно позже — в 1841 г.

Введем несколько понятий, важных для дальнейшего анализа. Пространственную область V_z, ограниченную кусочно-гладкими поверхностями

$$z=z_1(x,y) \quad \text{и} \quad z=z_2(x,y)$$

и боковой цилиндрической поверхностью Σ с образующими, параллельными оси OZ, назовем z-цилиндрической. Поверхности $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$ назовем ее криволинейными основаниями (нижним и верхним).



Аналогично, область, ограниченную кусочно-гладкими поверхностями:

$$x=x_1(y,z), \quad x=x_2(y,z)$$

и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OX, назовем x-цилиндрической. Аналогично определяется и y-цилиндрическая область.

Заметим, что боковая поверхность может и отсутствовать. Примером служит шар, у которого есть только верхняя и нижняя полусферы.

Далее, назовем пространственную область V простой, если ее можно разбить как на конечное число z-цилиндрических областей, так и на конечное число областей каждого из двух оставшихся видов.

Рассмотрим некоторую z-цилиндрическую область V_z с основаниями $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$ и боковой поверхностью Σ. Всю границу области V_z, состоящую из указанных трех поверхностей обозначим через S. Выберем внешнюю сторону поверхности S и рассмотрим функцию $R(x,y,z)$, определенную и непрерывную вместе со своей частной производной $\frac{\partial R}{\partial z}$ в области V_z с границей S.

Запишем очевидное равенство

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)).$$

Проинтегрируем это равенство по области D на плоскости XOY, в которую проектируется z-цилиндрическая область V_z. Тогда имеем

$$\iint_D dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \iiint_{V_z} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_D R(x,y,z_2(x,y))\,dx\,dy - \iint_D R(x,y,z_1(x,y))\,dx\,dy.$$

Первый интеграл справа представляет собой поверхностный по верхнему основанию, а второй по нижнему с учетом направлений внешних нормалей. Таким образом,

$$\iiint\limits_{V_z} \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_{S_в} R(x,y,z)\,dxdy + \iint\limits_{S_н} R(x,y,z)\,dxdy.$$

Прибавив к правой части равенства интеграл по боковой поверхности

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy,$$

равный 0, приходим к равенству

$$\boxed{\iiint\limits_{V_z} \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \oiint\limits_{S_z} R\,dxdy = \oiint\limits_{S_z} R\cos\gamma\,dS.}$$

Аналогичным образом для x-цилиндрической области V_x легко установить равенство

$$\boxed{\iiint\limits_{V_x} \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \oiint\limits_{S_x} P\,dydz = \oiint\limits_{S_x} P\cos\alpha\,dS.}$$

Для y-цилиндрической области V_y имеем

$$\boxed{\iiint\limits_{V_y} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \oiint\limits_{S_y} Q\,dzdx = \oiint\limits_{S_y} Q\cos\beta\,dS.}$$

Теперь у нас есть все для доказательства следующей теоремы.

Теорема.

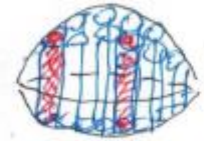
Пусть V — некоторая простая область трехмерного пространства, в которой заданы функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \in C^1(V \cup S)$, где S — кусочно-гладкая двусторонняя поверхность, ограничивающая область V. Тогда справедлива формула Гаусса-Остроградского

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$
$$= \oiint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$
$$= \oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — проекции внешней нормали к S.

Д-во:

разобьем простую область V на конечное число z-цилиндрических областей (см. рис.): V_i $(i=\overline{1,n})$.



Для каждой такой области V_i справедливо ранее доказанное равенство (S_i - граница V_i)

$$\boxed{\iiint\limits_{V_i} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{S_i} R\,dx\,dy\,, \quad i=\overline{1,n}.}$$

Складывая эти равенства, получаем слева тройной интеграл по всей области V, а справа — сумму поверхностных интегралов, которые без учета интегралов по боковым поверхностям, равных 0, дает интеграл по всей поверхности S, ограничивающей область V. В итоге,

$$\boxed{\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S R\,dx\,dy.}$$

Теперь разбивая простую область V на конечное число x-цилиндрических областей, приходим к

$$\boxed{\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S P\,dy\,dz.}$$

Наконец, разбивая простую область V на конечное число y-цилиндрических областей, находим

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \oiint_S Q\,dz\,dx.}$$

Складывая три полученных равенства, приходим к доказываемой формуле.

Применение формулы Гаусса–Остроградского.

Покажем на примере, что не всегда вычисление поверхностных интегралов удобно сводить к вычислению двойных.

Вычислим интеграл

$$\boxed{J = \oiint_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy}$$

по внешней стороне сферы

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Применяя формулу Гаусса-Остроградского, находим

$$J = 3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Переходя к ~~цилиндрическим~~ сферическим координатам, получаем окончательно

$$J = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\Theta\,d\Theta \int_0^{a} r^4\,dr = \frac{12\pi}{5}a^5.$$

Из формулы Гаусса-Остроградского можно вывести формулу вычисления объема тела через поверхностный интеграл.

Полагая $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$, имеем

$$\boxed{V_T = \oiint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.}$$

В частности, при $P=x/3$, $Q=y/3$, $R=z/3$ эта формула дает

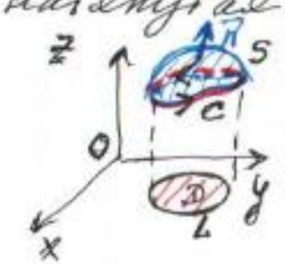
$$\boxed{V_T = \frac{1}{3}\oiint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.}$$

3.7. Формула Стокса.

В этом разделе будет получена формула, связывающая поверхностные интегралы с криволинейными. Она является обобщением формулы Грина.

Теорема.

Пусть C – простой кусочно-гладкий контур, а S – двусторонняя кусочно-гладкая поверхность, натянутая на контур C. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны на $S \cup C$ и непрерывно-дифференцируемы на S.



Тогда, имеет место формула Стокса

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] ds,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности S, согласованной с направлением обхода по контуру с правило "буравчика" (сторона поверхности остается слева при обходе по контуру C).

Д-во:

рассмотрим сначала случай, когда поверхность S задается явно:

$$\boxed{z = z(x,y), \quad (x,y) \in D.}$$

При этом D является проекцией S на плоскость XOY и ограничена контуром L.

Преобразуем криволинейный интеграл $I = \oint\limits_C P\,dx.$

Заметим, прежде всего, что поскольку контур C лежит на поверхности S, то

$$I = \oint\limits_C P(x,y,z)\,dx = \oint\limits_L P(x,y,z(x,y))\,dx.$$

Применяя далее формулу Грина, имеем

$$I = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Из выражений для направляющих косинусов нормали к поверхности

$$\cos\alpha = \pm\frac{-z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}};\quad \cos\beta = \pm\frac{-z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}};$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$$

находим производную: $z'_y = -\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$

Подставляя в двойной интеграл, приходим к

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \;(=)$$

Наконец, из формулы связи двойного и поверхностного интегралов

$$(=)\; \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\,ds =$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds.$$

Итак, окончательно

$$\boxed{\oint\limits_C P\,dx = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds.}$$

Аналогичное равенство будет справедливо и для поверхности S, состоящей из конечного числа рассмотренных частей. Если какие-то из частей перпендикулярна плоскости XOY, то равенство становится тривиальным, поскольку слева и справа будут нули.

Аналогично получаются два других равенства

$$\oint_C Q\,dy = \iint_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma\right) ds,$$

$$\oint_C R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) ds.$$

Складывая три равенства, приходим к <u>формуле Стокса</u>.

4. Теория поля

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики, причем встречаются два типа полей — скалярные и векторные. В этом разделе рассматриваются элементы математического аппарата, применяемого для изучения физических полей.

4.1. Скалярные поля.

Определение.

Говорят, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задано скалярное поле, если $\forall$ т. $M \in \Omega$ поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$.

Примерами скалярных полей являются поле температур внутри нагретого тела, поле освещенности, создаваемое каким-либо источником света, поле плотности масс $\rho(M)$, поле плотности электрического заряда.

Частным случаем пространственного скалярного поля является плоское скалярное поле, заданное в области $D \subset \mathbb{R}^2$.

Достаточно ясное представление о поведении скалярного поля могут дать определенные его характеристики. Одной из них является поверхность уровня.

Определение.

Поверхностью уровня скалярного поля $u(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле $u(M)$ имеет фиксированное значение "c".

В декартовой системе координат уравнение поверхности уровня имеет вид неявного задания

$$\boxed{u(x,y,z)=c.}$$

Очевидно, что поверхности уровня, отвечающие разным константам, заполняют всю область Ω и никакие две поверхности не имеют общих точек:

$$\boxed{u(x,y,z)=C_1\ ;\ u(x,y,z)=C_2.\quad C_1\neq C_2.}$$

В случае плоского скалярного поля поверхности уровня переходят в линии уровня: $u(x,y)=C$.

С помощью линий уровня обычно изображается рельеф местности на топографических картах. Каждая из таких линий состоит из точек, имеющих одну и ту же высоту над уровнем моря. Линии уровня поля температур называются изотермами, поля давления — изобарами.

В физике встречаются поля, обладающие специальными свойствами симметрии. Плоскопараллельным называется поле $u(M)$, если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле переходит само в себя.

Поверхности уровня плоскопараллельного поля — семейство цилиндрических поверхностей.

Если для скалярного поля $u(M)$ можно подобрать такую цилиндрическую систему координат (r,φ,z), в которой оно является функцией переменных r и z: $u=u(r,z)$, то поле называется осесимметрическим. Поверхности уровня такого поля — поверхности вращения вокруг оси

Если значения скалярного поля $u(M)$ зависят лишь от расстояния т. M до некоторой фиксированной т. M_0, то такое поле называется сферическим. Поверхности уровня сферического поля – семейство концентрических сфер с центром в т. M_0.

При изучении скалярного поля нужно описать его локальные свойства, т.е. его изменение при переходе от данной т. M к близким точкам.

Определение.

Производной по направлению $\vec{l}$ в т. M_0 скалярного поля $u(M)$ называется значение предела

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{h\to 0}\frac{u(M')-u(M_0)}{h}},$$

где $h=|\overrightarrow{M_0M'}|$, а $\vec{l}$ – единичный вектор в направлении $\overrightarrow{M_0M'}$. Эта производная характеризует скорость изменения поля $u(M)$ в направлении $\vec{l}$.

Для вычисления $\frac{\partial u}{\partial l}$ введем декартову систему координат, в которой скалярное поле является функцией трех переменных $u(x,y,z)$. Если вектор $\vec{l}$ образует с осями координат углы α, β и γ, то вектор $\overrightarrow{MM'}$ можно записать в виде

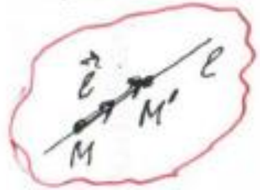
$$\overrightarrow{MM'} = h(\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma),$$

а поле

$$u(M') = u(x+h\cos\alpha,\, y+h\cos\beta,\, z+h\cos\gamma)$$

является сложной функцией аргумента h. Тогда из определения производной по направлению получаем:

$$\boxed{\frac{\partial u(M)}{\partial \ell} = \frac{du}{dh}\Big|_{h=0}.}$$



Применяя правила дифференцирования сложной функции, находим

$$\boxed{\frac{\partial u(M)}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.}$$

Полученное выражение можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов — единичного вектора $\vec\ell$, определяющего направление, по которому берется производная $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ и вектора с компонентами $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Этот вектор называется градиентом скалярного поля $u(M)$ и обозначается

$$\boxed{\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec i + \frac{\partial u}{\partial y}\vec j + \frac{\partial u}{\partial z}\vec k.}$$

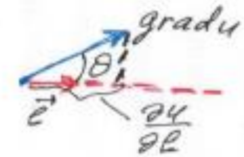
Из выражения для производной по направлению имеем

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \ell} = (\vec\ell, \operatorname{grad} u).}$$

Отсюда можно указать физический смысл введенного понятия. Перепишем соотношение как

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \ell} = |\operatorname{grad} u|\cos\theta,}$$

где θ — угол между $\operatorname{grad} u$ и единичным вектором $\vec\ell$. Из формулы видно, что в каждой точке, где $\operatorname{grad} u \neq 0$, существует един-



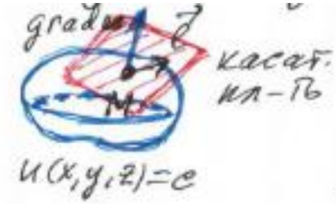
ственное ~~[illegible]~~ направление, в котором $\frac{\partial u}{\partial l}$ имеет наибольшее значение.

Это значение достигается при $\theta=0$, т.е. направление $\operatorname{grad} u$ указывает направление наибыстрейшего возрастания скалярного поля, а скорость этого возрастания задается модулем вектора $\operatorname{grad} u$:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=|\operatorname{grad} u|.$$

Наши выводы о смысле градиента не зависят от выбора системы координат.

Покажем, что градиент поля направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.



В самом деле. На поверхности уровня $u(x,y,z)=c$ выберем точку M и построим в ней касательную плоскость к поверхности. Для любого вектора $\vec l$, лежащего в касательной плоскости $\frac{\partial u}{\partial l}=0$, поскольку поле не меняется вдоль поверхности уровня. С другой стороны,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l}=(\vec l,\operatorname{grad} u)=0},$$

т.е. $\operatorname{grad} u$ перпендикулярен любому вектору $\vec l$ из касательной плоскости. Значит, он направлен по нормали к касательной плоскости, т.е. к поверхности уровня.

4.2. Векторное поле.

Определение.

Говорят, что в области $\Omega \subset R^3$ определено **векторное поле**, если $\forall$ т. $M \in \Omega$ поставлен в соответствие **вектор** $\vec{A}(M)$.

Физическими примерами векторных полей служат поле скоростей стационарного потока жидкости, поле тяготения, электростатическое поле и т.д.

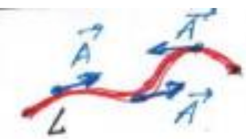
Если в пространстве введена **декартова система координат**, то векторное поле можно представить через проекции

$$\vec{A}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},$$

т.е. совокупность трех скалярных функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$.

Определение.

Пусть в области $\Omega \subset R^3$ задано **векторное поле** $\vec{A}(M)$. Кривая L, лежащая в области Ω, называется **векторной линией**, если в каждой точке этой кривой **направление касательной** совпадает с **направлением векторного поля** $\vec{A}(M)$.



Важную роль в исследовании векторных полей играет задача о нахождении **векторной линии** поля $\vec{A}$, проходящей через заданную т. M_0.

Если кривая L задана векторной функцией $\vec{r}=\vec{r}(t)$ с начальной точкой $\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0$, то вектор $\vec{r}\,'(t)$, как известно, направлен по касательной к кривой. Тогда из определения имеем следующую систему уравнений для определения векторной линии

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec r\,'(t) = \lambda \vec A, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &\vec r(t_0) = \vec r_0. \end{aligned}}$$

В декартовой системе координат

$$\vec r(t) = x(t)\vec i + y(t)\vec j + z(t)\vec k,$$

$$\vec A = P\vec i + Q\vec j + R\vec k,$$

и система уравнений переходит в

$$\boxed{\begin{aligned} &x'(t) = \lambda P, \qquad & x(t_0) = x_0, \\ &y'(t) = \lambda Q, \qquad & y(t_0) = y_0, \\ &z'(t) = \lambda R, \qquad & z(t_0) = z_0. \end{aligned}}$$

Исключая константу λ, приходим

$$\boxed{\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.}$$

Определение.

Ограниченная некоторой поверхностью S часть пространства, в которой задано векторное поле $\vec A$, называется векторной трубкой, если в каждой точке поверхности S нормаль к S ортогональна вектору $\vec A$ в этой же точке.

Таким образом, поверхность векторной трубки как бы „соткана" из векторных линий поля $\vec A$.

Заметим, что для векторных полей различают те же виды симметрии, что и для скалярных полей.

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Векторный и тензорный анализ

Лекция 10

Определение.

Если в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{A}$, а S — двусторонняя поверхность с выбранным направлением нормали $\vec{n}$, то поверхностный интеграл

$$\boxed{\iint\limits_S (\vec{A}, \vec{n})\, ds}$$

называется потоком векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S.

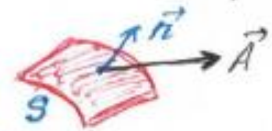
Если $\vec{A} = \vec{v}$ — поле скоростей стационарного потока жидкости, то, как мы ранее видели, эта величина определяет количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность S в направлении нормали $\vec{n}$.

Определение.

По аналогии поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint\limits_S [\vec{n}, \vec{A}]\, ds$$

называют вращением векторного поля $\vec{A}$ по выбранной стороне поверхности.



4.3. Понятие аддитивной функции области и производной по объему. Инвариантное определение градиента.

Мы уже ввели понятие градиента скалярного поля, используя декартову систему координат:

$$\boxed{\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.}$$

Хотелось бы ввести определение, не зависящее от системы координат. Это можно сделать, введя понятие аддитивной функции области.

Определение.

Пусть Ω – произвольная область в трехмерном пространстве. Скалярная (или векторная) функция $F(\Omega)$ называется аддитивной функцией области, если выполнены следующие два условия:

1) Если функция определена для областей Ω_1 и Ω_2, то она определена и для их объединения $\Omega_1 \cup \Omega_2$: $F(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.

2) Если области не имеют общих точек: $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, то

$$\boxed{F(\Omega_1 \cup \Omega_2) = F(\Omega_1) + F(\Omega_2).}$$

Определение.

Пусть $\Omega \in R^3$ – область трехмерного пространства, в которой определена скалярная (или векторная) аддитивная функция области $F(\Omega)$ со значениями в R^m $(m \geq 1)$. Пределом функции $F(\tau)$ при "стягивании" подобласти $\tau \subset \Omega$ в точку $M_0 \in \Omega$ называется число (или вектор) A

$$\boxed{\lim_{\tau \to M_0} F(\tau) = A,}$$

таков, что:

$\forall \varepsilon>0: \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0: \forall T\subset O_\delta(M_0):$
$$\|F(T)-A\|_{\mathbb{R}^m}<\varepsilon,$$
где $O_\delta(M_0)$ – δ-окрестность т. M_0, $\|\ldots\|_{\mathbb{R}^m}$ – норма в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Производная по объему.

Производной по объему от аддитивной функции области $F(T)$ в точке M_0, где $T\subset\mathbb{R}^3$ и имеет конечный объем $V(T)>0$, а $M_0\in T$, называют предел:
$$\boxed{\lim_{T\to M_0}\frac{F(T)}{V(T)}}.$$

Пример.

Пусть в области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ непрерывным образом распределена масса некоторого вещества. В этом случае каждой подобласти $T\subset\Omega$ отвечает масса вещества $m(T)$.

Производная по объему
$$\boxed{\lim_{T\to M_0}\frac{m(T)}{V(T)}=\rho(M_0)}$$
определяет объемную плотность масс в т. M_0.

Инвариантное определение градиента.

Пусть в области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ задано скалярное поле $u(M)$. Выберем любую подобласть $T\subset\Omega$, ограниченную кусочно-гладкой двусторонней поверхностью S. Градиентом скалярного поля в точке M_0 области Ω называется производная по объему
$$\boxed{\operatorname{grad} u(M_0)=\lim_{T\to M_0}\frac{1}{V(T)}\iint_S \vec{n}(M)u(M)\,ds,}$$
где $\vec{n}(M)$ – внешняя нормаль к поверхности S.

Теорема о вычислении градиента в декартовых координатах.

Если введена декартова система координат, то градиент скалярного поля $u(x,y,z)\in C^1(\Omega)$ в любой т. $M(x,y,z)\in\Omega$ существует и вычисляется по формуле

$$\boxed{\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.}$$

Д-во:

рассмотрим подобласть $T\subset\Omega$, ограниченную кусочно-гладкой поверхностью S. Представим внешнюю нормаль $\vec{n}$ к S в декартовой системе координат

$$\boxed{\vec{n}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma.}$$

Подставим это выражение в поверхностный интеграл, входящий в определение градиента:

$$\iint\limits_S \vec{n}(M)u(M)\,ds=\vec{i}\iint\limits_S u(M)\cos\alpha\,ds+\vec{j}\iint\limits_S u(M)\cos\beta\,ds+\vec{k}\iint\limits_S u(M)\cos\gamma\,ds.$$

Применим ранее доказанную формулу Гаусса-Остроградского

$$\boxed{\iint\limits_S P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\,ds=\iiint\limits_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz}$$

к трем получившимся интегралам. Тогда,

$$\iint\limits_S \vec{n}(M)u(M)\,ds=\vec{i}\iiint\limits_T\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy\,dz+\vec{j}\iiint\limits_T\frac{\partial u}{\partial y}dx\,dy\,dz+\vec{k}\iiint\limits_T\frac{\partial u}{\partial z}dx\,dy\,dz.$$

Применим теперь теорему о среднем для тройных интегралов, учитывая непрерывность частных производных скалярного поля $u(M)$. В результате придем к

$$\boxed{\oiint\limits_S \vec{n}(M)\,u(M)\,ds = \vec{i}\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_1}\cdot V(T) + \vec{j}\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_2}\cdot V(T) + \vec{k}\,\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_3}\cdot V(T),}$$

где $M_1, M_2, M_3 \in T$. Подставляя это выражение под предел, имеем

$$\boxed{\operatorname{grad} u(M_0) = \lim_{T\to M_0}\left(\vec{i}\,\frac{\partial u(M_1)}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial u(M_2)}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial u(M_3)}{\partial z}\right).}$$

Поскольку при стягивании подобласти T в т. M_0: $M_i \to M_0$ $(i=1,2,3)$, получаем доказываемое соотношение.

Следствие.

1. В ходе доказательства теоремы мы получили соотношение

$$\oiint\limits_S \vec{n}(M)\,u(M)\,ds = \iiint\limits_T \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) dx\,dy\,dz,$$

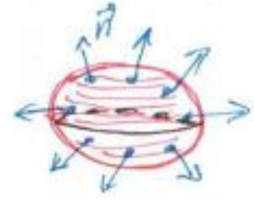
которое можно записать в инвариантном виде

$$\boxed{\oiint\limits_S \vec{n}(M)\,u(M)\,ds = \iiint\limits_T \operatorname{grad} u\, dv.}$$

Эту формулу также называют одной из формул Гаусса–Остроградского.

2. Полагая в полученной формуле $u(M)=1$, приходим к равенству

$$\boxed{\oiint\limits_S \vec{n}(M)\,ds = \vec{0}.}$$



Сумма всех иголок "ёжика" равна 0!

4.4. Инвариантное определение дивергенции векторного поля, ее вычисление и физический смысл.

Введем теперь инвариантным образом две дифференциальные операции, применяемые к векторным полям.

Определение.

Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{A}$, а $T \subset \Omega$ – любая подобласть, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью S. Дивергенцией векторного поля $\vec{A}$ в т. $M_0 \in \Omega$ называется производная по объему от потока векторного поля $\vec{A}$, т.е.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A}(M_0) = \lim_{T \to M_0} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_S (\vec{n}(M), \vec{A}(M))\,dS.}$$

Теорема о вычислении дивергенции.

Если введена декартова система координат, то дивергенция векторного поля $\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, где $\vec{A} \in C^1(\Omega)$ в $\forall$ т. $M_0(x,y,z) \in \Omega$ существует и вычисляется по формуле

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.}$$

Д-во:

пусть $T \subset \Omega$ – подобласть, ограниченная кусочно-гладкой двусторонней поверхностью S. Разлагая внешнюю нормаль $\vec{n}$ к поверхности S по базису

$$\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$$

и подставляя в выражение для потока, находим

$$\boxed{\iint\limits_S (\vec{n}, \vec{A})\,dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.}$$

Из формулы Гаусса-Остроградского следует, что

$$\oiint_S (\vec{n},\vec{A})ds = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Применяя теорему о среднем в тройном интеграле с учетом непрерывности производных векторного поля, имеем

$$\oiint_S (\vec{n},\vec{A})ds = V(T)\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M^*},$$

где $M^*\in T$. Подставляя это выражение в определение дивергенции и учитывая, что при $T\to M_0$ $M^*\to M_0$, приходим к доказываемой формуле. ■

Следствие.

Из доказанной формулы для дивергенции вытекает инвариантная форма записи формулы Гаусса-Остроградского

$$\boxed{\oiint_S (\vec{n},\vec{A})ds = \iiint_T \operatorname{div}\vec{A} * dv.}$$

Физический смысл дивергенции.

Пусть $\vec{A}(M)=\vec{V}(M)$ – поле скоростей частиц несжимаемой жидкости, движущейся стационарно. Тогда

$\iint_S(\vec{n},\vec{v})ds$ – количество жидкости, протекающей через поверхность S в направлении нормали в единицу времени, а $\oiint_S(\vec{n},\vec{v})ds$ – количество жидкости, вытекающей из области T через поверхность S в единицу времени (т.к. $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S). Если

эта величина положительна, то отношение

$$\frac{1}{V(T)}\oiint_S(\vec{n},\vec{v})ds$$

представляет собой среднюю плотность источников, т.е. количество жидкости, возникающей за единицу времени в единице объема области T. Если данная величина отрицательна, то отношение является средней плотностью стоков, т.е. количество жидкости, исчезающей за единицу времени в единице объема области T.

Поскольку это отношение берется предел, то дивергенция поле скорости жидкости представляет плотность источников (стоков) в т. M_0. Иными словами, дивергенция указывает на наличие источников (стоков) в векторном поле $\vec{A}$.

4.5. Инвариантное определение ротора векторного поля, его вычисление и физический смысл.

Кроме градиента и дивергенции в приложениях встречается еще одна дифференциальная операция первого порядка над векторным полем $\vec{A}$.

Определение.

Пусть $\vec{A}$ - векторное поле, заданное в области $\Omega \subset R^3$, а $T \subset \Omega$ - любая подобласть, ограниченная двусторонней кусочно-гладкой поверхностью S. Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{A}$ в т. $M_0 \in \Omega$ называется производная по объему от вращение векторного поля $\vec{A}(M)$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{A}(M_0) = \lim_{T \to M_0} \frac{1}{V(T)} \iint_S [\vec{n}(M), \vec{A}(M)]\, ds,}$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к S.

Теорема о вычислении ротора.

Если введена декартова система координат, то ротор векторного поля $\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, $\vec{A} \in C^1(\Omega)$ в т. $M_0(x,y,z) \in \Omega$ существует и вычисляется по формуле

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.}$$

Доказательство.

Выберем т. M_0 области Ω и рассмотрим любую подобласть $T \subset \Omega$, которая ее содержит. Преобразуем выражение для вращение векторного поля

$$\oiint_S [\vec n, \vec A]\, ds = \oiint_S \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds =$$

$(\vec n = \vec i \cos\alpha + \vec j \cos\beta + \vec k \cos\gamma)$ – нормаль

$$= \vec i \oiint_S (R\cos\beta - Q\cos\gamma)\, ds + \vec j \oiint_S (P\cos\gamma - R\cos\alpha)\, ds + \vec k \oiint_S (Q\cos\alpha - P\cos\beta)\, ds \ominus$$

применяя трижды формулу Гаусса–Остроградского, приходим к

$$\ominus\ \vec i \iiint_T \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dv + \vec j \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dv + \vec k \iiint_T \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dv =$$

далее трижды используем теорему о среднем в тройном интеграле

$$= \vec i \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)_{M_1} \cdot V(T) + \vec j \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)_{M_2} \cdot V(T) + \vec k \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_3} \cdot V(T),\ \text{где } M_1, M_2, M_3 \in T.$$

Подставляя полученное соотношение в определение ротора и переходя к пределу $T \to M_0$, находим

$$\operatorname{rot} \vec A = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec k = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Физический смысл ротора.

Будем, как прежде, рассматривать поле $\vec A$ как поле скоростей $\vec v$ стационарного потока жидкости. Поместим в жидкость маленькое колесико с центром в т. M_0 и лопастями расположенными по ободу колеса. Эти лопасти позволяют колесику вращаться вокруг своей оси под действием потока жидкости. Пусть единичный

вектор $\vec{e}$ направлен вдоль оси вращения. Подсчитаем приближенно угловую скорость вращения колесика, которую будем считать положительной, ~~если~~ когда колесико вращается против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{e}$.

Линейную скорость $V_к$ каждой точки обода колесика считаем средне-арифметическим значением по всем точкам обода тангенциальной проекции скорости жидкости $V_\tau(M) = (\vec{V}(M), \vec{\tau}(M))$, где $\vec{\tau}(M)$ – единичный вектор, касательный к ободу и направленный в сторону вращения колесика.

Таким образом, если ввести радиус колесика R и толщину обода H, то

$$\boxed{V_к = \frac{1}{2\pi RH} \iint\limits_{S_{об}} (\vec{V}(M), \vec{\tau}(M))\, ds,}$$

где $S_{об}$ – поверхность обода. Величина угловой скорости может быть вычислена как

$$\boxed{\omega_к = \frac{V_к}{R} = \frac{1}{2V} \iint\limits_{S_{об}} (\vec{V}, \vec{\tau})\, ds,}$$

где $V = \pi R^2 H$ – объем колесика.

Введем $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности обода колесика. Тогда вектора $(\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{e})$ образуют правую тройку и поэтому $\boxed{\vec{\tau} = [\vec{e}, \vec{n}].}$

Тогда, в силу свойств смешанного произведения векторов

$$(\vec{v},\vec{\tau}) = (\vec{v},[\vec{l},\vec{n}]) = (\vec{v},\vec{l},\vec{n}) =$$
$$= (\vec{l},\vec{n},\vec{v}) = (\vec{l},[\vec{n},\vec{v}]).$$

Поэтому,

$$\omega_к = \frac{1}{2V}\iint\limits_{S_{об}} (\vec{l},[\vec{n},\vec{v}])\,ds =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\vec{l}, \frac{1}{V}\iint\limits_{S_{об}} [\vec{n},\vec{v}]\,ds\Big).$$

Поверхностный интеграл в последнем выражении можно распространить на полную поверхность колесика S, т.к. на верхнем и нижнем основаниях колесика $\vec{n} \parallel \vec{l}$ и поэтому $(\vec{l},[\vec{n},\vec{v}]) = (\vec{v},[\vec{l},\vec{n}]) = 0$. В результате имеем

$$\boxed{\omega_к = \frac{1}{2}\Big(\vec{l}, \frac{1}{V}\oiint\limits_{S} [\vec{n},\vec{v}]\Big).}$$

Переходя в этом выражении к пределу "стягивания" колесика в т. M_0 и пользуясь определением ротора векторного поля, приходим к

$$\boxed{\omega(\vec{l}) = \frac{1}{2}(\vec{l}, \operatorname{rot}\vec{v}).}$$

Как следует из полученного соотношения, величина $\omega(\vec{l})$ принимает наибольшее значение $\frac{1}{2}|\operatorname{rot}\vec{v}|$, когда $\vec{l} \uparrow\uparrow \operatorname{rot}\vec{v}$.

Таким образом, ротор векторного поля $\vec{v}(M)$ – это вектор, имеющий в данной точке M направление вектора наибольшей угловой скорости бесконечно малого колесика с центром в т. M, вращаемого полем $\vec{v}$, и по модулю равный удвоенной угловой скорости вращения этого колесика.

4.6. Оператор Гамильтона (вектор "набла"). Дифференциальные операции второго порядка.

Для выполнения сложных расчетов со скалярными и векторными полями удобно ввести **векторный дифференциальный оператор**

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},}$$

называемый **оператором Гамильтона** или **вектором "набла"**.

С помощью "набла" удобно записываются все ранее введенные дифференциальные операции над скалярным $u(x,y,z)$ и векторным $\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ полями. В самом деле,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \nabla u,$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\nabla, \vec{A}),$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\nabla, \vec{A}],$$

т.е. это умножение на скалярное поле, скалярное и векторное произведение с векторным полем.

При выполнении действий с вектором "набла" необходимо учитывать его **дифференциальные свойства** наряду с применением правил векторной алгебры.

Название "набла" ввел английский математик и механик Гамильтон (1805–1865) – так назывался старинный **музыкальный инструмент**, имевший треугольную форму.

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Векторный и тензорный анализ

Лекция 11

Продемонстрируем на примере правила действий с вектором "набла". Вычислим дивергенцию векторного произведения двух векторных полей

$$\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}].$$

Заменим дивергенцию на вектор "набла". В результате получим

$$\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}] = (\nabla, [\vec{A},\vec{B}]) =$$

учтем, что ∇ действует на произведение полей, и воспользуемся правилами дифференцирования, указав вертикальной стрелкой то поле, на которое действует "набла"

$$= (\nabla, [\overset{\downarrow}{\vec{A}},\vec{B}]) + (\nabla, [\vec{A},\overset{\downarrow}{\vec{B}}]) =$$

теперь наша задача ~~...~~ поместить не "стрелочное" поле перед ∇, пользуясь правилами векторной алгебры,

$$= (\nabla, [\overset{\downarrow}{\vec{A}},\vec{B}]) - (\nabla, [\overset{\downarrow}{\vec{B}},\vec{A}]) =$$

применяя циклическое правило для смешанного произведения векторов, приходим окончательно к

$$= (\vec{B}, [\nabla,\vec{A}]) - (\vec{A}, [\nabla,\vec{B}]) =$$

$$= (\vec{B}, \operatorname{rot}\vec{A}) - (\vec{A}, \operatorname{rot}\vec{B}).$$

Наряду с "набла" можно ввести два новых оператора:

$(\vec{A},\nabla)$ – обычный дифференциальный оператор,

$[\vec{A},\nabla]$ – оператор-вектор.

Найдем, например, действие первого оператора на радиус-вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Раскрывая скалярное произведение, имеем

$$(\vec{A},\nabla)\vec{r} = \left(P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot$$

$$\cdot(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \vec{A}.$$

Итак, мы доказали, что для любого векторного поля $\vec{A}$

$$\boxed{(\vec{A},\nabla)\vec{r} = \vec{A}.}$$

Аналогично найдем результат действия $[\vec{A},\nabla]$ скалярно и векторно на $\vec{r}$.

$$[\vec{A},\nabla] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(Q\frac{\partial}{\partial z} - R\frac{\partial}{\partial y}\right) + \vec{j}\left(R\frac{\partial}{\partial x} - P\frac{\partial}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(P\frac{\partial}{\partial y} - Q\,\partial/\partial x\right).$$

Тогда,

$$([\vec{A},\nabla],\vec{r}) = \left(Q\frac{\partial}{\partial z} - R\frac{\partial}{\partial y}\right)x + \left(R\frac{\partial}{\partial x} - P\frac{\partial}{\partial z}\right)y + \left(P\frac{\partial}{\partial y} - Q\frac{\partial}{\partial x}\right)z = 0.$$

$$[[\vec{A},\nabla],\vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Q\,\partial/\partial z - R\,\partial/\partial y & R\,\partial/\partial x - P\,\partial/\partial z & P\,\partial/\partial y - Q\,\partial/\partial x \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-P-P) + \vec{j}(-Q-Q) + \vec{k}(-R-R) =$$

$$= -2\vec{A}.$$

При неправильном использовании "набла" возникают ошибки.

Пример.

$$(\vec{A},\operatorname{rot}\vec{A}) = (\vec{A},\nabla,\vec{A}) = 0\,???$$

Два одинаковых вектора в смешанном произведении, но "набла" действует только на одно поле!

Замечание.

При доказательстве теорем о вычислении градиента, дивергенции и ротора в декартовых координатах мы получили следующие соотношения:

$$\oiint_S \vec{n} u \, ds = \iiint_T \operatorname{grad} u \, dV,$$
$$\oiint_S (\vec{n}, \vec{A}) \, ds = \iiint_T \operatorname{div} \vec{A} \, dV,$$
$$\oiint_S [\vec{n}, \vec{A}] \, ds = \iiint_T \operatorname{rot} \vec{A} \, dV.$$

Эти формулы в совокупности составляют содержание так называемой общей теоремы Гаусса–Остроградского. Их легко запомнить, если заменить дифференциальные операции на «набла». Тогда имеем

$$\boxed{\begin{aligned} \oiint_S \vec{n} u \, ds &= \iiint_T \nabla u \, dV, \\ \oiint_S (\vec{n}, \vec{A}) \, ds &= \iiint_T (\nabla, \vec{A}) \, dV, \\ \oiint_S [\vec{n}, \vec{A}] \, ds &= \iiint_T [\nabla, \vec{A}] \, dV. \end{aligned}}$$

В этих соотношениях нормаль в поверхностном интеграле заменяется на «набла» в тройном (мнемоническое правило).

В приложениях векторного анализа приходится встречаться не только с рассмотренными дифференциальными операциями первого порядка, но и с их комбинациями. Особенно часто в физических приложениях встречаются операции второго порядка, т.е. попарные комбинации градиента, ротора и дивергенции.

Мы можем составить 3x3=9 таких комбинаций, но не все из них имеют смысл, поскольку grad применяется к скалярным полям, а div и rot – к векторным.

Занесем все эти комбинации в таблицу.

	$\operatorname{grad} u$	$\operatorname{div} \vec{A}$	$\operatorname{rot} \vec{A}$
grad	$\times$	$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}$	$\times$
div	Δu	$\times$	0
rot	$\vec{0}$	$\times$	$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}$

Крестиками в ней отмечены запрещенные операции. Две операции второго порядка дают нулевой результат. В самом деле,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = (\nabla, [\nabla, \vec{A}]) = (\nabla, \nabla, \vec{A}) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = \vec{0}.$$

Остаются только три нетривиальные операции.

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla) u = $$
$$\equiv \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u.$$

Оператор $(\nabla, \nabla) \equiv \Delta$, являющийся дифференциальным оператором 2-го порядка, называется оператором Лапласа или лапласианом. Выведем формулу связи двух других операций. Рассмотрим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = [\underset{a}{\nabla}, [\underset{b}{\nabla}, \underset{c}{\vec{A}}]] =$$

применяя формулу для двойного векторного произведения, имеем

$$= \underset{b}{\nabla} (\underset{a}{\nabla}, \underset{c}{\vec{A}}) - (\underset{a}{\nabla}, \underset{b}{\nabla}) \underset{c}{\vec{A}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}.$$

Здесь мы применили только правила векторной алгебры.

4.7. Потенциальные и соленоидальные поля. Основная теорема векторного анализа.

Потенциальное поле.

Определение.

Векторное поле $\vec{A}(M)$, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, называется потенциальным, если его можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля $u(M)$, $M \in \Omega$, т.е.

$$\boxed{\vec{A} = \operatorname{grad} u.}$$

Само скалярное поле $u(M)$ в этом случае называют потенциалом векторного поля $\vec{A}(M)$.

Из определения потенциального поля вытекает, что его векторные линии представляют собой линии градиента его потенциала, т.е. линии наибольшего изменения потенциала.

Теорема о потенциале.

Если векторное поле $\vec{A}(M)$ имеет потенциал, то он определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Д-во:

предположим, что скалярные поля $u(M)$ и $v(M)$ являются потенциалами векторного поля $\vec{A}(M)$, т.е.

$$\boxed{\vec{A} = \operatorname{grad} u, \quad \vec{A} = \operatorname{grad} v.}$$

Тогда, очевидно,

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} v \quad \text{или} \quad \operatorname{grad}(u-v) = 0.$$

Из формулы связи градиента с производной по направлению имеем

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial l}(u-v)=0}$$ по $\forall$ направлению l. Но тогда,

$$u-v=const.$$

■

Теорема о необходимом и достаточном условии потенциальности поля.

Для того, чтобы векторное поле $\vec{A}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{A}=0.}$$

Д-во: необходимость ($\Rightarrow$)

Пусть векторное поле $\vec{A}(M)$ – потенциальное. Тогда по определению: $\vec{A}=\operatorname{grad}u$, и $\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=0.$ ■

достаточность ($\Leftarrow$)

Пусть $\operatorname{rot}\vec{A}=0$ во всех точках области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Тогда,

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0$$

и имеем три равенства

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x};\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x};\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}.}$$

Как мы ранее показали, эти условия представляют собой необходимые и достаточные условия того, что выражение $Pdx+Qdy+Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции, т.е.

$$\boxed{Pdx+Qdy+Rdz=du.}$$

Отсюда следует, что

$$\boxed{P=\frac{\partial u}{\partial x},\ Q=\frac{\partial u}{\partial y},\ R=\frac{\partial u}{\partial z}.}$$

Тогда,

$$\vec{A}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=$$

$$=\operatorname{grad} u,$$

т.е. векторное поле $\vec{A}$ является потенциальным.

■

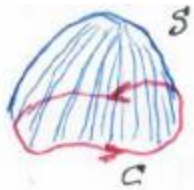
Определение.

Пусть $\vec{A}$ – векторное поле, определенное в области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, а C – замкнутая кусочно-гладкая кривая, лежащая в области Ω. Криволинейный интеграл 2-го рода

$$\boxed{\oint_C(\vec{A},d\vec{r})}$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{A}$ вдоль кривой C.

Если $\vec{A}$ представляет собой силовое поле, то его циркуляция вдоль кривой C имеет смысл работы этого поля вдоль пути C.



Если контур C ограничивает некоторую кусочно-гладкую двустороннюю поверхность S, то циркуляцию векторного поля $\vec{A}$ вдоль кривой C можно выразить по формуле Стокса через поверхностный интеграл 2-го рода:

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ к поверхности S, а P, Q, R — проекции векторного поля $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. В силу определения смешанного произведения имеем

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \iint_S (\vec{n}, \nabla, \vec{A})\,ds =$$

$$= \iint_S (\vec{n}, [\nabla, \vec{A}])\,ds$$

и, принимая во внимание определение ротора, приходим к инвариантной форме записи формулы Стокса

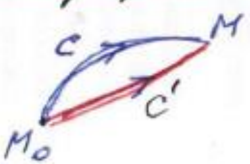
$$\boxed{\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{n})\,ds.}$$

Эта формула показывает, что циркуляция векторного поля по контуру, ограничивающему поверхность S, равна потоку вихря этого поля через поверхность S.

Поскольку для потенциального поля $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$, то циркуляция по любому кусочно-гладкому контуру, лежащему в области определения поля, равна 0:

$$\boxed{\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = 0.}$$

Отсюда, в частности, следует, что работа потенциального поля вдоль кривой C, соединяющей точки M_0 и M не зависит от формы пути интегрирования:



$$\int_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_{C'} (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_{M_0}^{M} (\vec{A}, d\vec{r}).$$

Это обстоятельство позволяет найти потенциал векторного поля через криволинейный интеграл.

Поскольку $\vec{A} = \operatorname{grad} u$ по определению, то

$$\int_{M_0}^{M} (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_{M_0}^{M} (\operatorname{grad} u, d\vec{r}) =$$

$$= \int_{M_0}^{M} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz =$$

$$= \int_{M_0}^{M} du = u(M) - u(M_0).$$

Отсюда следует выражение для потенциала потенциального поля $\vec{A}$

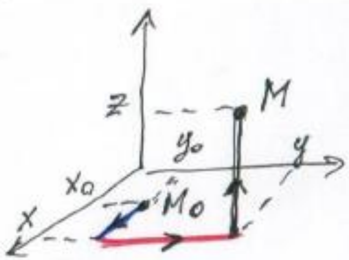
$$\boxed{u(M) = \int_{M_0}^{M} (\vec{A}, d\vec{r}) + c,}$$

где c – произвольная постоянная.

Из предыдущей формулы видно, что работа потенциального поля по любому пути, соединяющему точки M_0 и M, определяется разностью потенциалов

$$\boxed{\int_{M_0}^{M} (\vec{A}, d\vec{r}) = u(M) - u(M_0).}$$

Для определения потенциала $u(x,y,z)$ удобно выбрать ломаный путь, соединяющий точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $M(x,y,z)$, как изображено на рисунке.



Путь состоит из трех отрезков, причем каждый раз мы движемся параллельно одной из координатных осей.

Подставляя в интеграл векторное поле в виде

$$\vec{A} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

получаем три интеграла Римана

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)\,dz + C.$$

На практике начальную точку M_0 обычно берут начало координат $O(0,0,0)$, если она не является особой.

Соленоидальное поле.

Определение.

Векторное поле $\vec{A}(M)$, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, называется соленоидальным, если его можно представить в форме ротора некоторого другого векторного поля $\vec{B}(M)$, $M \in \Omega$, т.е.

$$\boxed{\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B}.}$$

Векторное поле $\vec{B}$ называют векторным потенциалом поля $\vec{A}$, а само поле $\vec{A}$ часто называют еще вихревым.

Теорема о векторном потенциале.

Векторный потенциал соленоидального поля определяется с точностью до $\operatorname{grad}\varphi$, где φ – произвольное непрерывно-дифференцируемое скалярное поле.

Д-во:

пусть поле $\vec{A}$ имеет два векторных потенциала $\vec{B}$ и $\vec{C}$, т.е.

$\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B}$ и $\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{C}$. Вычитая из первого равенства второе, получаем: $\operatorname{rot}(\vec{B}-\vec{C}) = 0$ во всех точках области определения Ω. Но тогда по критерию потенциальности поле $\vec{B}-\vec{C}$ является потенциальным. Тогда в силу определения

$\vec{B}-\vec{C} = \operatorname{grad}\varphi$. ▨

Теорема о необходимом и достаточном условии соленоидальности поля.

Для того, чтобы векторное поле $\vec{A}$, непрерывно-дифференцируемое в области $\Omega \subset R^3$, было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы всюду в области Ω

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = 0.}$$

Д-во:

проведем доказательство в декартовых координатах.

необходимость ($\Rightarrow$)

Пусть векторное поле соленоидально, т.е. $\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B}$. Но, тогда

$$\operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B} = 0. \quad ▨$$

достаточность ($\Leftarrow$)

Пусть дано векторное поле

$\vec{A} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, для которого $\operatorname{div}\vec{A}=0$. Нужно показать, что его можно представить в виде $\vec{A}=\operatorname{rot}\vec{B}$, где

$$\vec{B}=B_1(x,y,z)\vec{i}+B_2(x,y,z)\vec{j}+B_3(x,y,z)\vec{k}.$$

Фактически далее нам нужно найти проекции поля $\vec{B}$: B_1, B_2, B_3.

Разложим ротор поля $\vec{B}$ по тройке $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial B_3}{\partial y}-\frac{\partial B_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial B_1}{\partial z}-\frac{\partial B_3}{\partial x}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial B_2}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Сравнивая проекции полей $\vec{A}$ и $\operatorname{rot}\vec{B}$, получаем систему уравнений:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial B_3}{\partial y}-\frac{\partial B_2}{\partial z}=P,\\ &\frac{\partial B_1}{\partial z}-\frac{\partial B_3}{\partial x}=Q,\\ &\frac{\partial B_2}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial y}=R.\end{aligned}}$$

Поскольку векторный потенциал определен с точностью до градиента скалярного поля, найдем частное решение полученной системы и покажем, что оно существует при условии

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{A}=0,}$$

которое является следствием системы при условии непрерывности вторых производных проекций B_1, B_2, B_3.

В силу того, что мы ищем любое частное решение системы, положим для простоты $B_3\equiv 0$.

Тогда система уравнений упрощается и переходит в

$$\boxed{\frac{\partial B_2}{\partial z}=-P,\quad \frac{\partial B_1}{\partial z}=Q,\quad \frac{\partial B_2}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial y}=R.}$$

Интегрируя первые два уравнения по z, получаем

$$B_2=-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)\,dz+f(x,y),$$

$$B_1=\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\,dz+g(x,y),$$

где $f(x,y)$ и $g(x,y)$ – неизвестные функции. Положим (без ограничения общности) одну из них равной нулю: $g(x,y)\equiv 0$.

Подставляя соотношения для B_1 и B_2 в третье уравнение, имеем

$$\boxed{-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dz+\frac{\partial f}{\partial x}=R.}$$

Из уравнения равенства нулю дивергенции поля $\vec{A}$ получаем

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=-\frac{\partial R}{\partial z},$$

что дает

$$\int_{z_0}^{z}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz+\frac{\partial f}{\partial x}=R$$

или

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=R(x,y,z_0).}$$

Интегрируя это уравнение по x, определяем неизвестную функцию $f(x,y)$

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}R(x,y,z_0)\,dx.$$

Таким образом, частное решение системы найдено и имеет вид

$$B_1=\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\,dz;\quad B_3=0;$$

$$B_2=-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)\,dz+\int_{x_0}^{x}R(x,y,z_0)\,dx.$$

Искомое поле построено.

Перейдем к изучению специфических свойств, присущих соленоидальному полю.

Из формулы Гаусса-Остроградского следует, что

$$\boxed{\oiint\limits_S (\vec{A},\vec{n})\,ds = \iiint\limits_T \operatorname{div}\vec{A}\,dv = 0.}$$

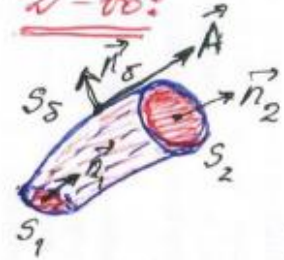
Таким образом, поток соленоидального поля через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность равен нулю. В физике такое свойство присуще магнитному полю $\vec{B}$.

Закон сохранения интенсивности векторной трубки.

Теорема.

Поток соленоидального поля через любое сечение векторной трубки не меняется.

Д-во:



рассмотрим поле $\vec{A}$, векторную трубку, заключенную между двумя ее сечениями S_1 и S_2. Как уже отмечалось, поток соленоидального поля через полную поверхность трубки равен нулю.

$$\oiint\limits_S (\vec{A},\vec{n})\,ds = -\iint\limits_{S_1} (\vec{A},\vec{n}_1)\,ds + \iint\limits_{S_2} (\vec{A},\vec{n}_2)\,ds + \iint\limits_{S_б} (\vec{A},\vec{n}_б)\,ds = 0.$$

Однако, по определению векторной трубки на боковой поверхности $S_б$: $(\vec{A},\vec{n}_б)\equiv 0$, а внешняя нормаль на сечении S_1 равна $-\vec{n}_1$.

В результате получаем

$$\iint\limits_{S_1} (\vec{A},\vec{n}_1)\,ds = \iint\limits_{S_2} (\vec{A},\vec{n}_2)\,ds. \quad \blacksquare$$

Из уравнения неразрывности жидкости

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})=0,}$$

где ρ – ее плотность, а $\vec{v}$ – скорость; вытекает, что для несжимаемой жидкости $\rho=const$.

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{v}=0,}$$

т.е. поле ее скорости является соленоидальным.

В этой ситуации закон сохранения интенсивности векторной трубки будет проявляться в том, что при сужении реки скорость ее течения возрастает.

Лапласово векторное поле.

Определение.

Векторное поле $\vec{A}$, определенное в области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, называется лапласовым, если для $\forall$ т. $M\in\Omega$ выполняются одновременно соотношения

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{A}(M)=0,\ \operatorname{div}\vec{A}(M)=0.}$$

Таким образом, лапласово поле является одновременно и потенциальным и соленоидальным и сохраняет все свойства последних.

Так как лапласово поле является потенциальным, оно имеет скалярный потенциал $u(M)$, причем $\vec{A}=\operatorname{grad}u$. Тогда из второго условия находим уравнение для потенциала скалярного поля

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u=0\Rightarrow\boxed{\Delta u=0.}$$

Это уравнение носит название уравнения Лапласа, а его решения — гармоническими функциями. Отсюда и берется название лапласова поле.

Лапласово векторное поле обладает одним специфическим свойством, присущим только ему.

Теорема.

Если лапласово векторное поле $\vec{A}(M)$, $M \in \Omega$ на границе S области $T \subset \Omega$ имеет нулевую нормальную составляющую $(\vec{A},\vec{n})\big|_S = 0$, то внутри области T это поле равно 0.

Д-во:

пусть $u(M)$ — потенциал лапласова поле $\vec{A}(M)$, т.е. $\vec{A} = \operatorname{grad} u$. Применяя правила действий с "набла", вычислим

$$\operatorname{div}(u\vec{A}) = (\nabla, u\vec{A}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{u}\vec{A}) + (\nabla, u\overset{\downarrow}{\vec{A}}) =$$
$$= (\vec{A}, \nabla u) + u(\nabla, \vec{A}) = (\vec{A}, \operatorname{grad} u) +$$
$$\underbrace{u \operatorname{div}\vec{A}}_{0} = (\vec{A}, \operatorname{grad} u) = (\vec{A}, \vec{A}),$$

поскольку $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

Применим формулу Гаусса-Остроградского для векторного потока поле $u\vec{A}$ через поверхность S, ограничивающую область T:

$$\oiint_S (u\vec{A}, \vec{n})\, ds = \iiint_T \operatorname{div}(u\vec{A})\, dv =$$
$$= \iiint_T (\vec{A}, \vec{A})\, dv.$$

Поверхностный интеграл зануляется в силу условий теоремы

$$\oiint_S (u\vec{A}, \vec{n})\, ds = \oiint_S u(\vec{A}, \vec{n})\, ds = 0.$$

В результате приходим к

$$\boxed{\iiint\limits_T |\vec{A}|^2 dv = 0.}$$

В силу непрерывности и неотрицательности функции $|\vec{A}|^2$ внутри области T получаем $\vec{A}(M) \equiv 0$ для $\forall$ т. $M \in T$. ■

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Векторный и тензорный анализ

Лекция 12

Теорема.

Если лапласово векторное поле $\vec{A}(M)$, $M \in \Omega$ на границе S области $T \subset \Omega$ имеет нулевую нормальную составляющую $(\vec{A}, \vec{n})|_S = 0$, то внутри области T это поле равно 0.

Следствие.

Если два лапласовых поля $\vec{A}(M)$ и $\vec{B}(M)$, $M \in \Omega$ имеют одинаковые нормальные составляющие на границе области $T \subset \Omega$, то внутри области T эти поля совпадают.

Основная теорема векторного анализа. Обратная задача.

После изучения специальных классов векторных полей можно сформулировать следующую теорему о разложении произвольного непрерывно-дифференцируемого векторного поля. Ее обычно называют основной теоремой векторного анализа.

Теорема.

Любое непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{A} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей

$$\boxed{\vec{A} = \vec{A}_{пот} + \vec{A}_{сол}.}$$

Д-во:

представим векторное поле в виде суммы двух полей: $\vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$ и будем без ограничения общности полагать поле $\vec{B}$ потенциальным.

Тогда, согласно определению,

$$\boxed{\vec{B}=\operatorname{grad}\varphi,}$$

а φ – скалярное поле, которое нам нужно найти. Теперь мы должны доказать, что поле $\vec{C}$ является соленоидальным. Из н. и д. условия соленоидальности векторного поля получаем цепочку равенств

$$\operatorname{div}\vec{C}=0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{A}-\vec{B})=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{A}-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi=\operatorname{div}\vec{A}.}$$

Мы пришли к уравнению Пуассона для неизвестного потенциала φ, которое всегда имеет решение. ▨

Обратная задача ВА.

На основе доказанной теоремы мы можем сформулировать и решить обратную задачу векторного анализа, состоящую в отыскании векторного поля по его ротору и дивергенции.

Задача.

Пусть даны скалярное поле $u(M)$ и векторное поле $\vec{B}(M)$. Нужно найти векторное поле $\vec{A}(M)$, удовлетворяющее соотношениям

$$\boxed{\begin{cases}\operatorname{div}\vec{A}=u,\\ \operatorname{rot}\vec{A}=\vec{B}.\end{cases}}$$

Поскольку $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}=0$, то задача будет корректно поставлена, если $\boxed{\operatorname{div}\vec{B}=0.}$

Решение.

Согласно основной теореме векторного анализа будем искать поле $\vec{A}$ в виде суммы потенциального $\vec{A}_1$ и соленоидального $\vec{A}_2$ полей. Тогда эти поля должны удовлетворять системам уравнений:

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{A}_1 = 0, \\ \operatorname{div} \vec{A}_1 = u, \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{A}_2 = \vec{B}, \\ \operatorname{div} \vec{A}_2 = 0. \end{cases}}$$

Найдем решение первой системы. Представим $\vec{A}_1 = \operatorname{grad} \varphi$. Подставляя это соотношение во второе уравнение, приходим к

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = u \Rightarrow \boxed{\Delta \varphi = u.}$$

Это уравнение Пуассона имеет решение всегда.

Так как $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, то первое уравнение второй системы является уравнением для определения векторного потенциала поля $\vec{B}$. Оно имеет решение. Допустим, что это решение $\vec{A}_0$. Но тогда,

$$\boxed{\vec{A}_2 = \vec{A}_0 + \operatorname{grad} \psi,}$$

где ψ – неизвестное скалярное поле. Это вытекает из теоремы, что векторный потенциал соленоидального поля определяется с точностью до градиента произвольной скалярной функции.

Подставляя это соотношение во второе уравнение второй системы, приходим к

$$\operatorname{div}(\vec{A}_0 + \operatorname{grad} \psi) = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \psi = -\operatorname{div} \vec{A}_0.}$$

Пришли опять к уравнению Пуассона, которое всегда имеет решение.

В итоге, поле $\vec{A}$ найдено:

$$\boxed{\vec{A} = \vec{A}_0 + \operatorname{grad}(\varphi + \psi).}$$

■

5. Дифференциальные операции теории поля в ортогональных криволинейных координатах.

В предыдущей части были введены дифференциальные операции теории поля: градиент, дивергенция и ротор и были найдены их выражения в декартовой прямоугольной системе координат.

При решении реальных задач выбирают ту систему координат, которая больше отвечает геометрии задачи. Для объектов с осью симметрии применяют цилиндрическую систему координат, с центром симметрии — сферическую и т.д.

Задача этой главы заключается в выводе общих соотношений для операций теории поля в произвольной ортогональной системе координат.

5.1. Понятие основного и взаимного базисов.

К понятию взаимного базиса приводит задача о разложении любого вектора по базису, которая заключается в нахождении координат вектора в этом базисе.

Пусть $\vec{e}_i$ $(i=1,2,3)$ — ортонормированный базис в R^3, т.е.

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i\neq k. \end{cases}$$

Тогда разложение вектора $\vec{a}$ имеет вид

$$\boxed{\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i.}$$

Домножая обе части этого равенства скалярно на $\vec{e}_k$, имеем

$$(\vec{a},\vec{e}_k)=\sum_{i=1}^{3} a_i(\vec{e}_i,\vec{e}_k)=\sum_{i=1}^{3} a_i\delta_{ik}=a_k.$$

Таким образом, координаты вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе находятся по формулам

$$\boxed{a_k=(\vec{a},\vec{e}_k).}$$

Пусть теперь $\vec{e}_i$ $(i=1,2,3)$ — произвольный косоугольный базис в R^3, $V=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\neq 0$. Рассмотрим опять задачу разложения произвольного вектора $\vec{A}\in R^3$ по этому базису.

Определение.

Пусть вектора $\vec{e}_i$ $(i=1,2,3)$ образуют базис в R^3, который назовем основным. Будем говорить, что вектора $\vec{e}^{\,k}$ $(k=1,2,3)$ образуют взаимный базис для базиса $\vec{e}_i$, если

$$\boxed{(\vec{e}_i,\vec{e}^{\,k})=\delta_{ik}.}$$

Из определения вытекает, что базис $\vec{e}_i$ будет взаимным для базиса $\vec{e}^{\,k}$, т.е. понятие обратимо.

Определение.

Координаты вектора $\vec{A}\in R^3$ в основном базисе $\vec{e}_i$ называют контравариантными координатами и обозначают A^i, а во взаимном базисе $\vec{e}^{\,k}$ — ковариантными и обозначают A_k.

Разложение вектора $\vec{A}$ по базисам $\vec{e}_i$ и $\vec{e}^k$ таково

$$\boxed{\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A^i \vec{e}_i \;, \quad \vec{A} = \sum_{k=1}^{3} A_k \vec{e}^k.}$$

Умножая первое равенство скалярно на $\vec{e}^k$, получаем

$$\boxed{A^k = (\vec{A}, \vec{e}^k).}$$

Аналогично

$$\boxed{A_i = (\vec{A}, \vec{e}_i).}$$

Таким образом, координаты вектора в основном базисе находятся с помощью взаимного базиса. Тогда встает вопрос о его построении.

Теорема.

Пусть $\vec{e}_i$ $(i=1,2,3)$ – основной базис в $\mathbb{R}^3$. Тогда вектора

$$\vec{e}^1 = \frac{1}{V}[\vec{e}_2, \vec{e}_3], \quad \vec{e}^2 = \frac{1}{V}[\vec{e}_3, \vec{e}_1], \quad \vec{e}^3 = \frac{1}{V}[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$$

образуют взаимный базис для $\vec{e}_i$, где $V = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Д-во:

достаточно доказать все для вектора $\vec{e}^1$. Далее все аналогично. Проверим пару равенств.

$$(\vec{e}_1, \vec{e}^1) = \left(\vec{e}_1, \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{V}\right) = \frac{1}{V}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1,$$

$$(\vec{e}_2, \vec{e}^1) = \left(\vec{e}_2, \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{V}\right) = \frac{1}{V}(\vec{e}_2, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0.$$

Теперь остается показать, что $V' = (\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3) \neq 0$, т.е. некомпланарность векторов.

$$V' = (\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3) = (\vec{e}^1, [\vec{e}^2, \vec{e}^3]) =$$

$$= \left(\vec{e}^1, \left[\vec{e}^2, \frac{1}{V}[\vec{e}_1, \vec{e}_2]\right]\right) = \frac{1}{V}\left(\vec{e}^1, [\vec{e}^2, [\vec{e}_1, \vec{e}_2]]\right)$$

Используя известную формулу векторной алгебры для двойного векторного произведения

$$\boxed{[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}),}$$

находим

$$[\underset{a}{\vec e^{\,2}},[\underset{b}{\vec e_1},\underset{c}{\vec e_2}]] = \underset{b}{\vec e_1}(\underset{a}{\vec e^{\,2}},\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\underset{c}{\vec e_2}}) - \underset{c}{\vec e_2}(\underset{a}{\vec e^{\,2}},\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\underset{b}{\vec e_1}}) = \underline{\underline{\vec e_1}}.$$

Подставляя в выражение для V', получаем

$$V' = \frac{1}{V}(\vec e^{\,1},\vec e_1) = \frac{1}{V} \neq 0.$$

Таким образом, $\underline{\underline{VV' = 1}}$, что показывает одинаковость знака смешанных произведений базисных векторов. Это означает, что оба базиса либо <u>левые</u>, либо <u>правые</u>.

5.2. Криволинейные координаты в пространстве R^3.

Определение.

Пусть x, y, z – прямоугольные декартовы координаты в R^3. Упорядоченная тройка чисел q_1, q_2, q_3 называется криволинейными координатами в R^3, если каждой тройке q_1, q_2, q_3 ставится в соответствие точка $(x,y,z) \in R^3$ с помощью функций

$$x = x(q_1, q_2, q_3),\ y = y(q_1, q_2, q_3),\ z = z(q_1, q_2, q_3),$$

удовлетворяющих условиям

1) функции $x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3)$, $z(q_1, q_2, q_3)$ – дважды непрерывно-дифференцируемые в R^3,

2) якобиан $\boxed{J = \dfrac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(q_1,q_2,q_3)} \neq 0.}$

Необходимость второго условия связана с тем, что можно выразить переменные (q_1, q_2, q_3) через (x,y,z) и рассматривать функции

$$\boxed{q_1 = q_1(x,y,z),\ q_2 = q_2(x,y,z),\ q_3 = q_3(x,y,z).}$$

Важным понятием в криволинейных координатах является понятие локального базиса. Если в декартовой системе координат в каждой точке пространства R^3 можно задать один и тот же базис, получаемый параллельным переносом, то в криволинейных координатах это не так. Здесь в каждой точке можно задать базис, который будет меняться при переходе от одной точки к другой. Такой базис называют локальным.

Теорема о локальном базисе в криволинейных координатах.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана криволинейные координаты q_1, q_2, q_3. Тогда радиус-вектор точки $M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\vec{r}(q_1,q_2,q_3) = x(q_1,q_2,q_3)\vec{i} + y(q_1,q_2,q_3)\vec{j} + z(q_1,q_2,q_3)\vec{k}.$$

При этом система векторов

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

образует базис в данной точке (локальный базис), а система векторов

$$\vec{e}^{\,k} = \nabla q_k = \operatorname{grad} q_k$$

образует взаимный базис (локальный взаимный базис).

Д-во:

для проверки, что вектора $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ $(i=1,2,3)$ образуют базис, необходимо проверить их некомпланарность. Вычислим смешанное произведение

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(q_1,q_2,q_3)} \neq 0.$$

Проверим теперь, что базис $\vec{e}^{\,k} = \operatorname{grad} q_k$ является взаимным к базису $\vec{e}_i$. Вычислим скалярное произведение

$$(\vec{e}^{\,k},\vec{e}_i) = \left(\nabla q_k, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial q_k}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial q_k}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial q_k}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial q_k}{\partial q_i} = \delta_{ik},$$

поскольку $q_k = q_k(x,y,z)$ — сложная функция:

$$q_k = q_k(x(q_1,q_2,q_3), y(q_1,q_2,q_3), z(q_1,q_2,q_3)). \blacksquare$$

Другими важными понятиями являются координатные линии и координатные поверхности.

Определение.

Поверхность

$$x = x(q_1, q_2, c_3),$$
$$y = y(q_1, q_2, c_3),$$
$$z = z(q_1, q_2, c_3),$$

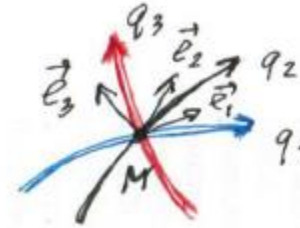
где $c_3 = const$ называется координатной поверхностью $q_3 = c_3$. Аналогично определяются координатные поверхности $q_1 = c_1$ и $q_2 = c_2$.

Кривая

$$x = x(q_1, c_2, c_3),$$
$$y = y(q_1, c_2, c_3),$$
$$z = z(q_1, c_2, c_3),$$

где c_2 и c_3 – const называется координатной линией q_1. Аналогично определяются координатные линии q_2 и q_3.

Координатная q_i-линия – это кривая, вдоль которой изменяется только криволинейная координата q_i.



С введением координатных линий становится понятным геометрический смысл локального базиса $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$. Вектор $\vec{e}_1$ вычисляется при фиксированных значениях q_2 и q_3 и поэтому является касательным к координатной линии q_1. Аналогично для остальных базисных векторов.

5.3. Ортогональные криволинейные координаты

Определение.
Система криволинейных координат называется ортогональной, если любой ее локальный базис $\vec{e}_i \ (i=1,2,3)$ – ортогональный.

Теорема (критерий ортогональности криволинейной системы координат)

Для того, чтобы криволинейные координаты, определяемые функциями

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3),$$

были ортогональными н. и д., чтобы выполнялись следующие условия

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_j} = 0, \quad i \neq j.}$$

Д-во:

проверим ортогональность векторов локального базиса

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad (i=1,2,3).$$

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right) =$$

$$= \frac{\partial x}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_j}.$$

Отсюда и следует необходимость и достаточность условия ортогональности. ▨

Используя доказанную теорему, вычислим квадрат элемента длины в ортогональных криволинейных координатах.

По теореме Пифагора:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \circeq$$

учитывая, что x, y, z являются функциями трех переменных q_1, q_2, q_3, имеем:

$$= \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y}{\partial q_i} dq_i\right)^2 +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial q_i} dq_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_j} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial y}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_j}\right) dq_i\, dq_j =$$

в силу условия ортогональности остается одна сумма

$$= \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2\right] (dq_i)^2.$$

Вводя обозначение

$$\boxed{H_i = |\vec{e}_i| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}},$$

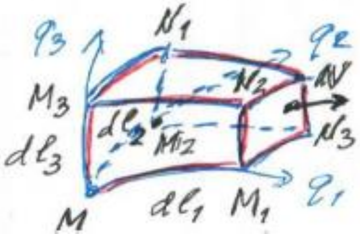
перепишем формулу для квадрата длины как

$$\boxed{(dl)^2 = H_1^2 (dq_1)^2 + H_2^2 (dq_2)^2 + H_3^2 (dq_3)^2}.$$

Величины H_1, H_2, H_3 называют параметрами или коэффициентами Ламе.

Габриель Ламе (1795–1870) – французский математик, механик и инженер.

Рассмотрим бесконечно малый параллелепипед с вершиной в точке $M(q_1, q_2, q_3)$ и боковыми гранями (координатными поверхностями) $q_i = const$, $q_i + dq_i = const$, построенный на координатных линиях как на ребрах.



Имея в виду, что вдоль каждого ребра изменяется только одна криволинейная координата, находим из общего соотношения длины ребер:

$$dl_1 = H_1 dq_1, \quad dl_2 = H_2 dq_2, \quad dl_3 = H_3 dq_3.$$

Площади граней $d\sigma_1$ $(q_1 = \text{const.})$, $d\sigma_2$ $(q_2 = \text{const.})$, $d\sigma_3$ $(q_3 = \text{const.})$ соответственно приближенно равны

$$\boxed{d\sigma_1 \approx H_2 H_3\, dq_2\, dq_3, \quad d\sigma_2 \approx H_3 H_1\, dq_3\, dq_1, \quad d\sigma_3 \approx H_1 H_2\, dq_1\, dq_2.}$$

Наконец, объем параллелепипеда приближенно равен

$$\boxed{dv \approx dl_1 \cdot dl_2 \cdot dl_3 = H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3}$$

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Векторный и тензорный анализ

Лекция 13

5.4. Дифференциальные операции теории поля в ортогональных криволинейных координатах

Пусть $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ $(i=1,2,3)$ ортогональный локальный базис в $\mathbb{R}^3$. Построим ортонормированный базис. Поскольку $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = H_i$, имеем

$$\vec{i}_k = \frac{\vec{e}_k}{H_k} \ (k=1,2,3) \Rightarrow (\vec{i}_k, \vec{i}_l) = \delta_{kl}.$$

Пусть в криволинейных координатах заданы скалярное поле $u(q_1, q_2, q_3)$ и векторное поле

$$\vec{A}(q_1,q_2,q_3) = A_1(q_1,q_2,q_3)\vec{i}_1 + A_2(q_1,q_2,q_3)\vec{i}_2 + A_3(q_1,q_2,q_3)\vec{i}_3,$$

разложенное по ортонормированному базису.

Подсчитаем выражение для $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\vec{A}$, $\operatorname{rot}\vec{A}$ и Δu.

1. Поскольку grad u – вектор, его можно разложить по ортонормированному базису

$$\operatorname{grad} u = u_1\vec{i}_1 + u_2\vec{i}_2 + u_3\vec{i}_3,$$

где координаты вычисляются по формулам

$$\boxed{u_k = (\operatorname{grad} u, \vec{i}_k)}.$$

Раскроем это соотношение.

$$u_k = \frac{1}{H_k}(\operatorname{grad} u, \vec{e}_k) = \frac{1}{H_k}\left(\operatorname{grad} u, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right) =$$

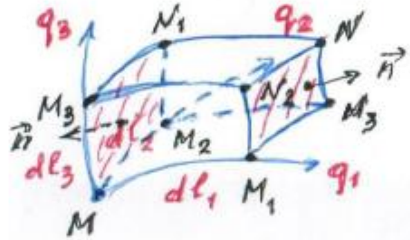
$$= \frac{1}{H_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_k}\right) = \frac{1}{H_k}\cdot\frac{\partial u}{\partial q_k}.$$

Таким образом, в ортонормированных криволинейных координатах

$$\boxed{\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\vec{i}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\vec{i}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\vec{i}_3.}$$

(2) Для расчета дивергенции по определению возьмем точку $M(q_1, q_2, q_3)$, в которой определен ортонормированный базис $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$, и рассмотрим бесконечно малый параллелепипед, о котором мы говорили. Обозначим через T – область, ограниченную этим параллелепипедом, а через S – его поверхность. Объем параллелепипеда, как отмечалось, приблизительно равен

$$\boxed{V(T) \approx H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3.}$$



Вычислим теперь поток векторного поля $\vec{A}$ через полную поверхность параллелепипеда

$$\oiint_S (\vec{A}, \vec{n})\, ds.$$

Найдем сначала поток через две противоположные грани $q_1 = const.$ и $q_1 + dq_1 = const.$, которые показаны штриховкой на рисунке. С точностью до бесконечно малой более высокого порядка по отношению к $V(T)$ (при T, стягиваемом в т. M) имеем

$$\Pi_{q_1} \approx (\vec{A}, \vec{i}_1)\, d\sigma_1\Big|_{q_1+dq_1} - (\vec{A}, \vec{i}_1)\, d\sigma_1\Big|_{q_1},$$

поскольку внешняя нормаль к грани $q_1 + dq_1 = const.$ равна $\vec{i}_1$, а внешняя нормаль к грани $q_1 = const.$ равна $-\vec{i}_1$. Подставляя площади граней как

$$\boxed{d\sigma_1 = H_2 H_3\, dq_2\, dq_3,}$$

приходим к

$$\Pi_{q_1} \simeq \left(A_1 H_2 H_3\big|_{q_1+dq_1} - A_1 H_2 H_3\big|_{q_1}\right) dq_2 dq_3 \simeq$$

$$\simeq \frac{\partial (A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

Здесь использована формула приращений. Аналогичным образом находим поток через грани $q_2 = const.$ и $q_2 + dq_2 = const.$ (переднюю и заднюю)

$$\Pi_{q_2} \simeq \frac{\partial (A_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} dq_1\, dq_2\, dq_3,$$

и поток через грани $q_3 = const.$ и $q_3 + dq_3 = const.$ (верхнюю и нижнюю)

$$\Pi_{q_3} \simeq \frac{\partial (A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

Таким образом, полный поток через поверхность параллелепипеда равен

$$\oiint_S (\vec{A}, \vec{n})\, ds = \Pi_{q_1} + \Pi_{q_2} + \Pi_{q_3} =$$

$$= \left[\frac{\partial (A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (A_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right] \times$$

$$\times\, dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

Подставим этот результат в определение дивергенции

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{T \to M} \frac{1}{V(T)} \oiint_S (\vec{A}, \vec{n})\, ds,}$$

приходим к окончательному выражению для дивергенции векторного поля $\vec{A} = A_1 \vec{i}_1 + A_2 \vec{i}_2 + A_3 \vec{i}_3$ в произвольной ортогональной системе координат

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial (A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (A_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right\}.}$$

(3) Полученное соотношение позволяет записать формулу для лапласиана в ортогональных криволинейных координатах, пользуясь тем, что

$$\boxed{\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u).}$$

Действительно,

$$\Delta u = \operatorname{div}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\vec{i}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\vec{i}_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\vec{i}_3\right) = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right\}.$$

(4) Для вычисления ротора векторного поля нам необходимо рассчитать вращение поля

$$\boxed{\oiint_S [\vec{n}, \vec{A}]\, ds,}$$

а затем воспользоваться инвариантным определением ротора.

Будем предполагать, что ортонормированный базис i_1, i_2, i_3 правый, и рассчитаем вращение по левой боковой грани $q_1 = const$. параллелепипеда, приняв во внимание, что внешняя нормаль $\vec{n} = -\vec{i}_1$.

Тогда приближенно находим:

$$[\vec{n}, \vec{A}]\, d\sigma_1\big|_{q_1} = -[\vec{i}_1, \vec{A}]\, d\sigma_1\big|_{q_1} =$$

$$= [\vec{A}, \vec{i}_1]\, d\sigma_1\big|_{q_1} = [\underset{a}{\vec{A}}, [\underset{b}{\vec{i}_2}, \underset{c}{\vec{i}_3}]]\, d\sigma_1\big|_{q_1} =$$

$$= \{\underset{b}{\vec{i}_2}(\underset{a}{\vec{A}}, \underset{c}{\vec{i}_3}) - \underset{c}{\vec{i}_3}(\underset{a}{\vec{A}}, \underset{b}{\vec{i}_2})\}\, d\sigma_1\big|_{q_1} \approx$$

$$\approx (A_3\vec{i}_2 - A_2\vec{i}_3)H_2H_3\big|_{q_1} dq_2 dq_3.$$

Для противоположной (правой боковой) грани $q_1 + dq_1 = const.$ с учетом $\vec{n} = \vec{i}_1$ имеем:

$$[\vec{n}, \vec{A}]\, d\sigma_1\big|_{q_1+dq_1} \approx (A_2\vec{i}_3 - A_3\vec{i}_2)H_2H_3\, dq_2 dq_3\big|_{q_1+dq_1}$$

Складывая полученные соотношения и применяя формулу конечных приращений, с точностью до членов более высокого порядка малости относительно $V(\tau)$ находим

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2 H_2 H_3)\vec{i}_3 - \frac{\partial}{\partial q_1}(A_3 H_2 H_3)\vec{i}_2\right] dq_1 dq_2 dq_3$$

Аналогично для передней и задней граней параллелепипеда: $q_2 = const.$ и $q_2 + dq_2 = const.$ получаем

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 H_3 H_1)\vec{i}_1 - \frac{\partial}{\partial q_2}(A_1 H_3 H_1)\vec{i}_3\right] dq_1 dq_2 dq_3$$

и для верхней $q_3 + dq_3 = const.$ и нижней $q_3 = const.$ граней имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1 H_1 H_2)\vec{i}_2 - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2 H_1 H_2)\vec{i}_1\right] dq_1 dq_2 dq_3.$$

Складывая три соотношения и подставляя их в определение ротора

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{A} = \lim_{\tau \to M} \frac{1}{V(\tau)} \oiint_S [\vec{n}, \vec{A}]\, ds,}$$

приходим к

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 H_3 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2 H_1 H_2)\right] \times\right.$$

$$\times \vec{i}_1 + \left[\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1 H_1 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_1}(A_3 H_2 H_3)\right]\vec{i}_2 +$$

$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2 H_2 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_2}(A_1 H_3 H_1)\right]\vec{i}_3\right\}.$$

Преобразуем полученное громоздкое выражение, вводя вектора базиса: $\vec{e}_1 = H_1 \vec{i}_1$, $\vec{e}_2 = H_2 \vec{i}_2$, $\vec{e}_3 = H_3 \vec{i}_3$.

Дифференцируя скобки как произведение функций, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 H_3 H_1)\vec{i}_1 = \frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 H_3) H_1 \vec{i}_1 +$$

$$+ A_3 H_3 \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2};$$

$$\frac{\partial}{\partial q_3}(A_2 H_1 H_2)\vec{i}_1 = \frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_3} H_1 \vec{i}_1 + A_2 H_2 \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3}.$$

В итоге приходим к

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{\left[\frac{\partial(A_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_3}\right]\cdot H_1\vec{i}_1 + \left[\frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_3 H_3)}{\partial q_1}\right] H_2 \vec{i}_2 + \left[\frac{\partial(A_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1 H_1)}{\partial q_2}\right] H_3 \vec{i}_3\right\} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{A_1 H_1\left(\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} - \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2}\right) + A_2 H_2\left(\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} - \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3}\right) + A_3 H_3\left(\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} - \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1}\right)\right\}.$$

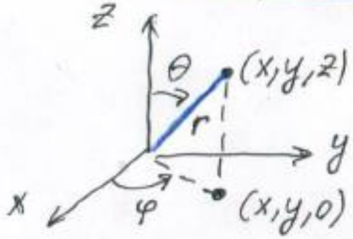
Учитывая непрерывность вторых производных вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$, находим

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q_i}.$$

В итоге последнее слагаемое в формуле для ротора зануляется, и мы можем записать ее в компактном виде в форме определителя

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\begin{vmatrix} H_1\vec{i}_1 & H_2\vec{i}_2 & H_3\vec{i}_3 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ H_1 A_1 & H_2 A_2 & H_3 A_3 \end{vmatrix}}.$$

5.5. Сферические координаты.



Криволинейные сферические координаты $q_1=r,\ q_2=\theta,\ q_3=\varphi$

вводятся с помощью соотношений:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le r < \infty, \\ 0 \le \theta \le \pi, \\ 0 \le \varphi < 2\pi. \end{array}$$

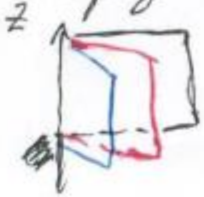
Параметр r имеет смысл расстояния точки до начала координат, угол θ носит название азимутального угла, угол φ – полярного.

Опишем вид координатных поверхностей:

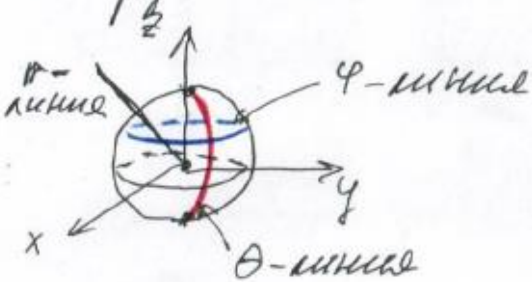
1) r=const. – концентрические сферы с общим центром в начале координат;

2) θ=const. – концентрические поверхности прямых круговых конусов с осью симметрии z и вершинами в начале координат;

3) φ=const. – полуплоскости, проходящие через ось z.



Теперь поговорим о форме координатных линий.



1) r-линии – лучи, выходящие из начала координат;

2) θ-линии – полуокружности на сфере $r = const$, лежащие в полуплоскости, проходящей через ось z. На земном шаре – меридианы;

3) φ-линии – окружности на сфере, параллельные плоскости XOY. На земном шаре – параллели.

Из формулы для радиуса-вектора в сферических координатах ~~[illegible]~~

$$\vec r(r,\theta,\varphi) = r\cos\varphi\sin\theta\,\vec i + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec j + r\cos\theta\,\vec k$$

определяем локальный базис:

$$\vec e_r = \frac{\partial \vec r}{\partial r} = \cos\varphi\sin\theta\,\vec i + \sin\varphi\sin\theta\,\vec j + \cos\theta\,\vec k,$$

$$\vec e_\theta = \frac{\partial \vec r}{\partial \theta} = r\cos\varphi\cos\theta\,\vec i + r\sin\varphi\cos\theta\,\vec j - r\sin\theta\,\vec k,$$

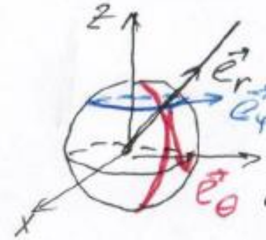
$$\vec e_\varphi = \frac{\partial \vec r}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\sin\theta\,\vec i + r\cos\varphi\sin\theta\,\vec j.$$

Докажем ортогональность сферической системы координат.

$$(\vec e_r, \vec e_\theta) = r\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta + r\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - r\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$(\vec e_r, \vec e_\varphi) = -r\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta + r\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta = 0,$$

$$(\vec e_\theta, \vec e_\varphi) = -r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta = 0.$$



Из рисунка также видно, что локальный базис ортогонален, а вектора $\vec e_r, \vec e_\theta, \vec e_\varphi$ образуют правую тройку. Вычислим теперь коэффициенты Ламе.

$$H_r = |\vec e_r| = \sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1,$$

$$H_\theta = |\vec e_\theta| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r,$$

$$H_\varphi = |\vec{e}_\varphi| = \sqrt{r^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + r^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta} =$$

$$= \sqrt{r^2 \sin^2\theta} = r\sin\theta,$$

поскольку $0 \le \theta \le \pi$.

В результате ортонормированный базис таков:

$$\vec{i}_r = \cos\varphi \sin\theta\, \vec{i} + \sin\varphi \sin\theta\, \vec{j} + \cos\theta\, \vec{k},$$

$$\vec{i}_\theta = \cos\varphi \cos\theta\, \vec{i} + \sin\varphi \cos\theta\, \vec{j} - \sin\theta\, \vec{k},$$

$$\vec{i}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j}.$$

Пусть $u(r,\theta,\varphi)$ – скалярное поле, а $\vec{A}(r,\theta,\varphi) = A_r(r,\theta,\varphi)\vec{i}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{i}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{i}_\varphi$ – векторное поле. Подставляя их в ранее найденные выражения для градиента, дивергенции, ротора и лапласиана, находим их вид в сферических координатах:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi,$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\varphi)\right],$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{i}_r & r\vec{i}_\theta & r\sin\theta\,\vec{i}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

Заменяя в формуле для дивергенции координаты вектора $\vec{A}$ на координаты градиента, ~~[illegible]~~ получаем формулу для лапласиана

$$\Delta u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Первая часть лапласиана называется радиальной, вторая — угловой, поскольку в нее входят углы и производные по ним.

Для скалярного поля с центральной симметрией: $u=u(r)$ формула для лапласиана упрощается и переходит в

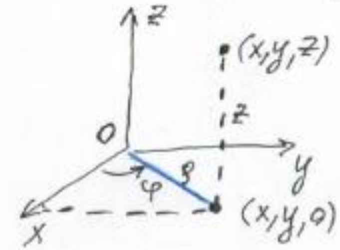
$$\boxed{\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right).}$$

Отсюда можно найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, которое называется гармонической функцией. В самом деле,

$$r^2\frac{du}{dr} = C_1 \Rightarrow \boxed{u = -\frac{C_1}{r} + C_2.}$$

Найденное решение можно рассматривать также как потенциал лапласова поля.

5.6. Цилиндрические координаты.

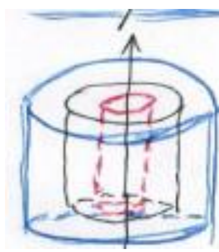


Криволинейные цилиндрические координаты $q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$ вводятся как

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \le \rho < \infty, \\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ -\infty < z < \infty. \end{array}$$

Параметр ρ имеет смысл расстояния точки до оси OZ, а φ — полярного угла.

Каков вид координатных поверхностей?

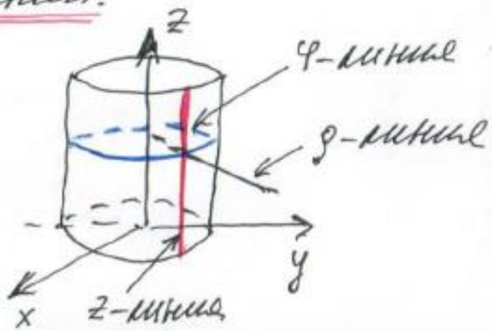


1) $\rho = const.$ — семейство концентрических круговых цилиндров с общей осью OZ;

2) $\varphi = const.$ – семейство полуплоскостей, выходящих из оси OZ;

3) $z = const.$ – семейство плоскостей, параллельных плоскости XOY.

Опишем теперь вид координатных линий.



1) ρ-линии – лучи, выходящие из точки на оси OZ и лежащие в плоскости, параллельной плоскости XOY;

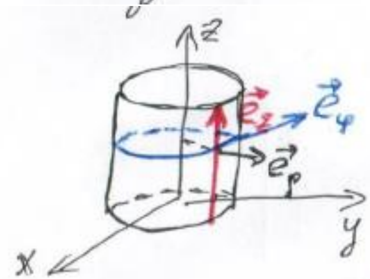
2) φ-линии – концентрические окружности с центром на оси OZ и лежащие в плоскостях, параллельных плоскости XOY;

3) z-линии – образующие на концентрических круговых цилиндрах с общей осью OZ, параллельные оси.

Из выражения для радиус-вектора в цилиндрических координатах

$$\boxed{\vec{r}(\rho,\varphi,z) = \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{j} + z\vec{k}}$$

находим локальный базис



$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j};$$

$$\vec{e}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\vec{i} + \rho\cos\varphi\,\vec{j};$$

$$\vec{e}_z = \vec{k}.$$

Проверим ортогональность цилиндрической системы координат.

$$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi) = -\rho\sin\varphi\cos\varphi + \rho\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

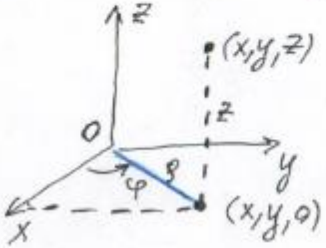
$$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z) = 0, \quad (\vec{e}_\varphi, \vec{e}_z) = 0.$$

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Векторный и тензорный анализ

Лекция 14

5.6. Цилиндрические координаты.

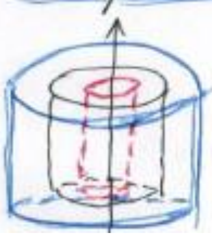


Криволинейные цилиндрические координаты $q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$ вводятся как

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \quad \begin{aligned} &0\le\rho<\infty, \\ &0\le\varphi<2\pi, \\ &-\infty<z<\infty. \end{aligned}$$

Параметр ρ имеет смысл расстояния точки до оси OZ, а φ – полярного угла.

Каков вид координатных поверхностей?

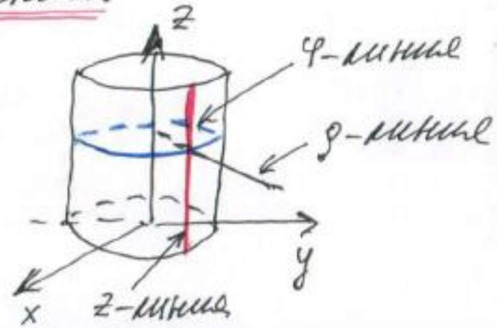


1) $\rho=const.$ – семейство концентрических круговых цилиндров с общей осью OZ;

2) $\varphi=const.$ – семейство полуплоскостей, выходящих из оси OZ;

3) $z=const.$ – семейство плоскостей, параллельных плоскости XOY.

Опишем теперь вид координатных линий.



1) ρ-линии – лучи, выходящие из точки на оси OZ и лежащие в плоскости, параллельной плоскости XOY;

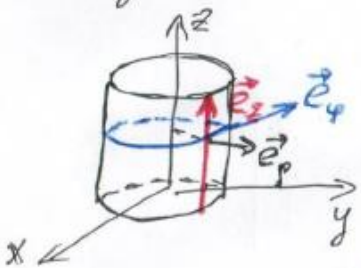
2) φ-линии – концентрические окружности с центром на оси OZ и лежащие в плоскостях, параллельных плоскости XOY;

3) z-линии – образующие на концентрических круговых цилиндрах с общей осью OZ, параллельные оси.

Из выражения для радиус-вектора в цилиндрических координатах

$$\boxed{\vec r(\rho,\varphi,z)=\rho\cos\varphi\,\vec i+\rho\sin\varphi\,\vec j+z\vec k}$$

находим локальный базис



$$\vec e_\rho=\frac{\partial\vec r}{\partial\rho}=\cos\varphi\,\vec i+\sin\varphi\,\vec j;$$
$$\vec e_\varphi=-\rho\sin\varphi\,\vec i+\rho\cos\varphi\,\vec j;$$
$$\vec e_z=\vec k.$$

Проверим ортогональность цилиндрической системы координат.

$$(\vec e_\rho,\vec e_\varphi)=-\rho\sin\varphi\cos\varphi+\rho\sin\varphi\cos\varphi=0,$$
$$(\vec e_\rho,\vec e_z)=0,\quad(\vec e_\varphi,\vec e_z)=0.$$

Последние два равенства очевидны, поскольку, как видно из рисунка, вектора базиса $\vec e_\rho$ и e_φ лежат в плоскости, перпендикулярной оси Oz. Заметим также, что тройка векторов $(\vec e_\rho,\vec e_\varphi,\vec e_z)$ является правой.

Вычислим коэффициенты Ламе.

$$H_\rho=|\vec e_\rho|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1,$$
$$H_\varphi=|\vec e_\varphi|=\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi}=\rho,$$
$$H_z=|\vec e_z|=1.$$

Ортонормированный локальный базис цилиндрической системы имеет вид

$$\vec i_\rho=\frac{\vec e_\rho}{H_\rho}=\cos\varphi\,\vec i+\sin\varphi\,\vec j,$$
$$\vec i_\varphi=\frac{\vec e_\varphi}{H_\varphi}=-\sin\varphi\,\vec i+\cos\varphi\,\vec j,$$
$$\vec i_z=\frac{\vec e_z}{H_z}=\vec k.$$

Если $u(\rho,\varphi,z)$ – скалярное поле, а $\vec{A}(\rho,\varphi,z)$ – векторное поле, разложенное по ортонормированному базису:

$$\vec{A}(\rho,\varphi,z)=A_\rho(\rho,\varphi,z)\vec{i}_\rho+A_\varphi(\rho,\varphi,z)\vec{i}_\varphi+ +A_z(\rho,\varphi,z)\vec{i}_z,$$

то выражение для градиента, дивергенции, ротора и лапласиана в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial\rho}\vec{i}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{i}_z,$$

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\rho\frac{\partial A_z}{\partial z}\right],$$

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{i}_\rho & \rho\vec{i}_\varphi & \vec{i}_z\\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix},$$

$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Найдем потенциал осесимметрического лапласова поля $u=u(\rho)$ из уравнения

$$\Delta u=0.$$

В результате находим

$$\rho\frac{du}{d\rho}=c_1\Rightarrow\boxed{u=c_1\ln\rho+c_2.}$$

Это опять одна из семейства гармонических функций.

Задание для самостоятельной работы

Получить выражение для градиента скалярного поля в ортогональной криволинейной системе координат из инвариантного определения.

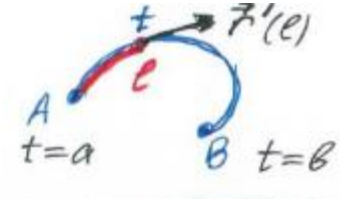
6. Основы дифференциальной геометрии

Дифференциальная геометрия изучает геометрические объекты дифференциальными методами.

6.1. Элементы дифференциальной геометрии кривых.

Рассматривая ту или иную пространственную кривую, мы можем выбирать для нее различные параметризации. Если кривая C задана векторным уравнением $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in[a,b]$, то, положив $t=t(\tau)$, $\tau\in[\alpha,\beta]$, где $t(\tau)$ – монотонная функция, такая что $t'(\tau)>0$, $t(\alpha)=a$, $t(\beta)=b$, можно принять τ за новый параметр и записать уравнение кривой в виде $\boxed{\vec{r}=\vec{r}(t(\tau)).}$

Во многих случаях удобна так называемая естественная параметризация кривой, когда за параметр берется длина ℓ дуги кривой, отсчитываемая от начальной точки $t=a$.



В соответствии с доказанной как формулой:

$$\boxed{\ell=\int_a^t|\vec{r}'(t)|dt,}$$

что показывает $\ell=\ell(t)$ – однозначной, монотонной и непрерывной функцией параметра t. Если ни в одной из точек $\vec{r}'(t)\neq 0$, то $\ell'(t)>0$, и обратная функция $t=t(\ell)$ непрерывна и однозначна. В результате приходим к естественной параметризации кривой

$$\vec{r}=\vec{r}(t(\ell))=\vec{r}(\ell),\quad 0\le\ell\le L,$$

где L – длина кривой AB.

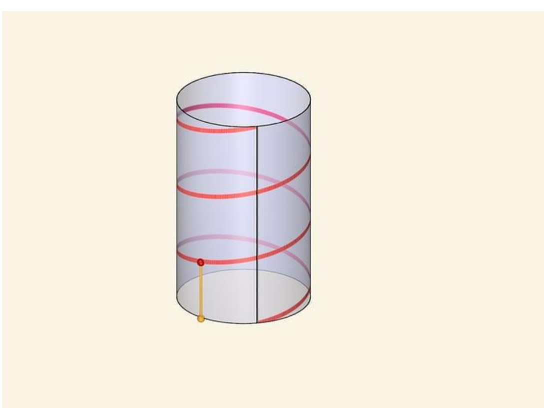
Заметим, что согласно правилам дифференцирования сложной и обратной функций

$$\vec r\,'(l)=\vec r\,'(t)\cdot t'(l)=\vec r\,'(t)\frac{1}{l'(t)}=\frac{\vec r\,'(t)}{|\vec r\,'(t)|}.$$

Таким образом, $\vec r\,'(l)$ представляет собой единичный вектор, направленный по касательной к кривой в сторону увеличения ее длины.

Рассмотрим в качестве примера пространственную кривую, задаваемую параметризацией

$$\boxed{\vec r(t)=\vec i\,a\cos t+\vec j\,a\sin t+\vec k\,bt.}$$



Это уравнение определяет кривую, называемую винтовой линией – линией, "намотанной" на круговой цилиндр радиуса "a".

Поскольку

$$dl=l'(t)\,dt=$$

$$=|\vec r\,'(t)|\,dt=$$

$$=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\,dt,\ \text{ то } l=\sqrt{a^2+b^2}\,t,$$

если отсчет идет от $t=0$ (т. A).

Подставляя соотношение в уравнение винтовой линии, имеем:

$$\boxed{\vec r(l)=\vec i\,a\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}+\vec j\,a\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}+\vec k\,\frac{bl}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Пришли к естественной параметризации винтовой линии.

Основной трехгранник.

Рассмотрим кривую C, заданную через естественную параметризацию

$$\vec{r} = \vec{r}(l).$$

Как мы уже отмечали, в каждой ее точке M единичный вектор

$$\vec{\tau} = \vec{r}\,'(l)$$

определяет направление касательной к этой кривой.

Предполагая векторную функцию $\vec{r}(l)$ дважды дифференцируемой, рассмотрим вектор

$$\vec{r}\,''(l) = \vec{\tau}\,'(l).$$

Покажем, что он ортогонален $\vec{\tau}$. Для скалярного произведения имеем

$$(\vec{\tau}, \vec{\tau}\,') = \frac{1}{2}\frac{d}{dl}(\vec{\tau}, \vec{\tau}) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dl}\underbrace{|\vec{\tau}|}_{1}{}^2 = 0.$$

Построим единичный вектор в направлении $\vec{r}\,''(l)$:

$$\vec{\nu}(l) = \frac{\vec{r}\,''(l)}{|\vec{r}\,''(l)|}.$$

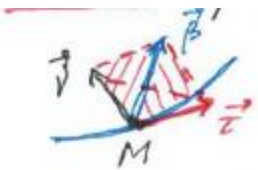
Присоединим к $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$ дополнительный вектор

$$\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}].$$

По смыслу векторного произведения вектор $\vec{\beta}$ ортогонален $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$ и имеет единичную длину

$$|\vec{\beta}| = \big|\underbrace{|\vec{\tau}|}_{1}\underbrace{|\vec{\nu}|}_{1}\sin\underbrace{\theta}_{\pi/2}\big| = \left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 1.$$

Таким образом, вектора $\vec{\tau}, \vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$ образуют тройку взаимно ортогональных единичных векторов, которая называется основным репером или основным трехгранником кривой в данной точке M.



Этот трехгранник жестко привязан к точке кривой и поворачивается при движении по ней.

Заметим, что вектора $\vec\tau, \vec\nu$ и $\vec\beta$ удовлетворяют еще двум соотношениям

$$[\vec\nu,\vec\beta]=\vec\tau, \quad [\vec\beta,\vec\tau]=\vec\nu$$

и тем-то аналогичны декартовой правой тройке $\vec i, \vec j, \vec k$. Их называют соответственно касательная, нормаль и бинормаль.

Формулы Френе.

Движение основного трехгранника по кривой C задается скоростями изменения векторов $\vec\tau, \vec\nu$ и $\vec\beta$, т.е. их производными по параметру l. Вычислим их.

Производную вектора $\vec\tau(l)$ мы уже рассматривали. Вводя обозначение

$$k=|\vec r''(l)|,$$

имеем

$$\vec\tau'=k\vec\nu,$$

где k – неотрицательное число.

Рассмотрим теперь производную вектора $\vec\beta$, предполагая, что $\vec r(l)$ трижды дифференцируема. Поскольку $\vec\beta$ – единичный вектор, то $\vec\beta'\perp\vec\beta$ (как было показано ранее для $\vec\tau$). Более того, покажем, что $\vec\beta'\perp\vec\tau$. В самом деле, $\vec\beta=[\vec\tau,\vec\nu]$ и, следовательно,

$$\vec\beta'=[\vec\tau',\vec\nu]+[\vec\tau,\vec\nu']=\underbrace{[k\vec\nu,\vec\nu]}_{=0}+[\vec\tau,\vec\nu']=$$
$$=[\vec\tau,\vec\nu'].$$

Поскольку вектор $\vec{\beta}'$ перпендикулярен $\vec{\beta}$ и $\vec{\tau}$, то он коллинеарен $\vec{\nu}$, т.е. можно положить

$$\vec{\beta}' = -\varkappa\vec{\nu},$$

где $\varkappa$ – числовой коэффициент.

Вычислим $\vec{\nu}'$.

$$\vec{\nu}' = [\vec{\beta}, \vec{\tau}]' = [\vec{\beta}', \vec{\tau}] + [\vec{\beta}, \vec{\tau}'] =$$
$$= [-\varkappa\vec{\nu}, \vec{\tau}] + [\vec{\beta}, k\vec{\nu}] = +\varkappa\vec{\beta} - k\vec{\tau}.$$

Итак, для производных касательной, нормали и бинормали мы получили следующие формулы:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\tau}' &= k\vec{\nu}, \\ \vec{\nu}' &= -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta}, \\ \vec{\beta}' &= -\varkappa\vec{\nu}. \end{aligned}}$$

Они называются формулами Френе по имени французского математика Жана Френе (1801-1880). Иногда Френе-Серре.

Эти формулы содержат две скалярные величины k и $\varkappa$, которые называют соответственно кривизной и кручением. По определению $k = |\vec{r}''|$. Таким образом, для вычисления кривизны кривой $\vec{r} = \vec{r}(l)$ в данной точке достаточно найти вектор $\vec{r}''(l)$ и вычислить его длину.

В частности, для винтовой линии

$$\vec{r}''(l) = -\frac{a}{a^2+b^2}\left[\vec{i}\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} + \vec{j}\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

и кривизна в каждой точке одинакова

$$\boxed{k = \frac{a}{a^2+b^2}}.$$

Для вычисления кручения возьмем равенства

$$\vec{r}' = \vec{\tau}, \quad \vec{r}'' = k\vec{\nu}$$

и продифференцируем последнее по l.

Тогда согласно формулам Френе

$$\vec{r}\,''' = k'\vec{\nu} + k\vec{\nu}\,' = k'\vec{\nu} + k(-k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta}) =$$
$$= k'\vec{\nu} - k^2\vec{\tau} + k\varkappa\vec{\beta}.$$

Подставляя это соотношение в смешанное произведение, находим:

$$(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''') = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -k^2 & k' & k\varkappa \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \;\vec{\tau} & \;\;\vec{\nu} & \;\;\vec{\beta} \end{matrix} \end{array} = k^2\varkappa.$$

В результате мы приходим к следующей формуле для кручения

$$\boxed{\varkappa = \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')}{k^2} = \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')}{|\vec{r}\,''|^2}.}$$

Для отыскания кручения винтовой линии вычислим смешанное произведение

$$(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''') =$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \\ \frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{vmatrix} =$$

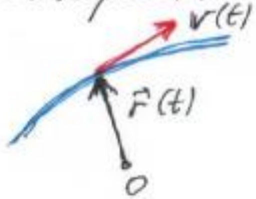
$$= ba^2/(a^2+b^2)^3.$$

Таким образом, и кручение в каждой точке винтовой линии постоянно и равно

$$\varkappa = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Приложения к механике.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся по некоторой траектории. Если $\vec r(t)$ — радиус-вектор точки в момент времени t, то уравнение траектории запишется



в виде $\vec r = \vec r(t)$.

Производная $\boxed{\dfrac{d\vec r}{dt} = \vec v(t)}$ представляет собой скорость движения точки по траектории.

Вводя естественный параметр l, имеем

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dl}\cdot\frac{dl}{dt} = \vec\tau\,\frac{dl}{dt}.$$

А поскольку $\vec\tau$ — единичный вектор, то

$$\boxed{|\vec v| = \frac{dl}{dt}},$$

т.е. производная является абсолютной величиной скорости.

Ускорение материальной точки $\vec a$ равно

$$\vec a = \frac{d^2\vec r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec\tau\,\frac{dl}{dt}\right) =$$

$$= \vec\tau\,\frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{d\vec\tau}{dl}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2.$$

Учитывая формулы Френе, приходим к

$$\vec a = \vec\tau\,\frac{d^2 l}{dt^2} + \vec\nu\, k\,|\vec v|^2.$$

Таким образом, ускорение $\vec a$ раскладывается на сумму двух составляющих, одна из которых $\vec\tau\,\frac{d^2 l}{dt^2}$ направлена по касательной к траектории и называется тангенциальным ускорением, а другая $\vec{\nu} k v^2$ – по главной нормали и называется нормальным ускорением. Тангенциальное ускорение можно записать в виде $\vec{a}_\tau = \vec{\tau}\frac{dv}{dt}$, где v – абсолютная величина скорости. Таким образом, тангенциальное ускорение – это скорость изменения абсолютного значения скорости.

Формула для нормального ускорения $\vec{a}_\nu = \vec{\nu} k v^2$ очень напоминает формулу для центростремительного ускорения при равномерном движении точки по окружности. В этом случае кривизна $k=\frac{1}{R}$, где R – радиус окружности и поэтому

$$\vec{a}_\nu = \vec{\nu}\frac{v^2}{R}.$$

Задача.

Материальная точка движется под действием центральной силы. Доказать, что ее траектория плоская.

Задание для самостоятельной работы

Вывести уравнение для траектории положительно заряженной точечной частицы, стартующей из начала координат с нулевой скоростью и движущейся в скрещенных статических электрическом и магнитном полях. Найти кривизну и кручение пространственной кривой.

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Векторный и тензорный анализ

Лекция 15

Общие формулы для кривизны и кручения пространственной кривой

Введем теперь общие формулы для кривизны и кручения гладкой пространственной кривой L, заданной векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Для этого запишем соотношение для кривизны в более удобной форме. Умножим первое уравнение Френе слева векторно на $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau}\,' = k\vec{\nu},$$

$$[\vec{\tau}, \vec{\tau}\,'] = [\vec{\tau}, k\vec{\nu}] = k[\vec{\tau}, \vec{\nu}] = k\vec{\beta}.$$

В результате имеем

$$\boxed{k = |[\vec{\tau}, \vec{\tau}\,']|.}$$

Из выражения для касательного вектора

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|},$$

где точкой обозначена производная по параметру t, находим

$$\vec{\tau}\,' = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{dt}{dl} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{\ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|^2} + \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}\right).$$

Составляя векторное произведение с $\vec{\tau}$, приходим к

$$[\vec{\tau}, \vec{\tau}\,'] = \frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}}|^3}.$$

Отсюда,

$$\boxed{k = \frac{|[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]|}{|\dot{\vec{r}}|^3}.}$$

В качестве примера рассчитаем кривизну плоской кривой, заданной в явном виде $y = y(x)$.

Записывая выражение для радиуса-вектора

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y(x)\vec{j}}$$

и рассматривая в качестве параметра x, находим

$$\dot{\vec r} = \vec i + y'(x)\,\vec j,$$
$$\ddot{\vec r} = y''(x)\,\vec j.$$

Отсюда

$$[\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}] = [\vec i, y''(x)\,\vec j] = $$
$$= y''(x)\,\vec k,$$

и $$\boxed{|[\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}]| = |y''(x)|}.$$

Из соотношения для $\dot{\vec r}$ получаем

$$|\dot{\vec r}| = \sqrt{1+y'^2}.$$

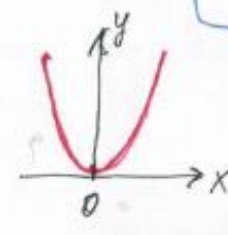
Окончательно формула для кривизны плоской кривой принимает вид

$$\boxed{k = \frac{|y''|}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3}}.$$

Для прямой $y=ax+b$ получаем очевидный результат: $k=0$.

Для параболы $y=x^2$ формула дает

$$\boxed{k = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}}.$$



Наибольшая кривизна параболы в т. $x=0$ и равна 2. С увеличением x парабола „распрямляется":

$$k \simeq \frac{1}{4|x|^3} \quad \text{при} \quad |x| \gg 1.$$

Очень много плоских кривых удобно задавать в полярной системе координат уравнением $\rho=\rho(\varphi)$. В этом случае за параметр берется полярный угол φ и радиус-вектор записывается в виде

$$\boxed{\vec r = \rho\cos\varphi\,\vec i + \rho\sin\varphi\,\vec j}.$$

Тогда,

$$\underline{\overset{\circ}{\vec r}_\varphi} = (\overset{\circ}{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\vec i + $$
$$+ (\overset{\circ}{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi)\vec j,$$

где точкой обозначена производная по углу φ. Далее.

$$\overset{\circ\circ}{\vec r}_{\varphi\varphi} = (\overset{\circ\circ}{\rho}\cos\varphi - 2\overset{\circ}{\rho}\sin\varphi - \rho\cos\varphi)\vec i +$$
$$+ (\overset{\circ\circ}{\rho}\sin\varphi + 2\overset{\circ}{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\vec j.$$

Для векторного произведения получим следующий результат:

$$[\overset{\circ}{\vec r}_\varphi, \overset{\circ\circ}{\vec r}_{\varphi\varphi}] = \Big[(\overset{\circ}{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi)(\overset{\circ\circ}{\rho}\sin\varphi +$$
$$+ 2\overset{\circ}{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi) - (\overset{\circ}{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi)\times$$
$$\times(\overset{\circ\circ}{\rho}\cos\varphi - 2\overset{\circ}{\rho}\sin\varphi - \rho\cos\varphi)\Big]\vec k.$$

Отсюда

$$\underline{\left|[\overset{\circ}{\vec r}_\varphi, \overset{\circ\circ}{\vec r}_{\varphi\varphi}]\right|} = |-\rho\overset{\circ\circ}{\rho} + 2\overset{\circ}{\rho}^2 - \rho^2|.$$

Для длины вектора $\overset{\circ}{\vec r}_\varphi$ получаем

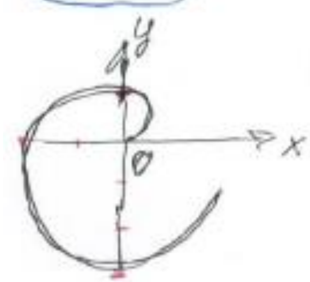
$$\underline{|\overset{\circ}{\vec r}_\varphi|} = \sqrt{(\overset{\circ}{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\overset{\circ}{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2} =$$
$$= \sqrt{\overset{\circ}{\rho}^2 + \rho^2}.$$

Окончательно, формула для кривизны плоской кривой, заданной в полярной системе координат, принимает вид:

$$\boxed{k = \frac{|2\overset{\circ}{\rho}^2 - \rho\overset{\circ\circ}{\rho} - \rho^2|}{(\overset{\circ}{\rho}^2 + \rho^2)^{3/2}}.}$$

Для окружности $\rho = R$ приходим к ранее полученному результату $k = 1/R$.

Для спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ формула дает



$$\boxed{k = \frac{1}{a}\frac{|2 - \varphi^2|}{(1+\varphi^2)^{3/2}}.}$$

Для отыскания кручения, вычислим вторую производную $\vec{\tau}''$.

$$\vec{\tau}'' = \frac{d\vec{\tau}'}{dt}\cdot\frac{dt}{dl} = \frac{d\vec{\tau}'}{dt}\cdot\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}.$$

$$\frac{d\vec{\tau}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|^2} + \dot{\vec{r}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}\right)\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}\right] =$$

$$= \frac{\dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|^2} + \ddot{\vec{r}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|^2}\right) + \ddot{\vec{r}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}\right)\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|} +$$

$$+ \dot{\vec{r}}\,\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}\right)\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|} + \dot{\vec{r}}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}\right)^2$$

или

$$\boxed{\vec{\tau}'' = \frac{\dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|^3} + A(t)\,\ddot{\vec{r}} + B(t)\,\dot{\vec{r}},}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – некоторые скалярные функции.

Далее исходим из полученной ранее формулы для кручения

$$\varkappa = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{k^2}.$$

Найдем выражение для числителя

$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = (\vec{\tau}, \vec{\tau}', \vec{\tau}'') = (\vec{\tau}'', \vec{\tau}, \vec{\tau}').$$

Расчет векторного произведения $[\vec{\tau}, \vec{\tau}']$ дает

$$[\vec{\tau}, \vec{\tau}'] = \left[\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}, \frac{\ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|^2} + \dot{\vec{r}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}\right)\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}\right] =$$

$$= \frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}}|^3}.$$

Составляя смешанное произведение с вектором $\vec{\tau}''$, имеем

$$(\vec{\tau}'', \vec{\tau}, \vec{\tau}') = \frac{(\dddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}}|^6} =$$

$$= \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}}|^6}.$$

Учитывая ранее полученное выражение для кручения, окончательно приходим к

$$\varkappa = \frac{(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}, \dddot{\vec r})}{|\dot{\vec r}|^6} \cdot \frac{|\dot{\vec r}|^6}{|[\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}]|^2} = \frac{(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}, \dddot{\vec r})}{|[\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}]|^2}.$$

Отметим еще некоторые определения, связанные с основным трехгранником пространственной кривой L.

Плоскость, образуемая векторами $\vec\nu$ и $\vec\beta$, называется нормальной.

Плоскость, образуемая векторами $\vec\tau$ и $\vec\beta$, называется спрямляющей.

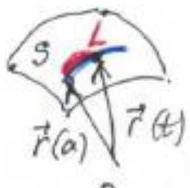
Наконец, плоскость, образуемая векторами $\vec\tau$ и $\vec\nu$, называется соприкасающейся.

Базисные вектора $\vec\tau, \vec\nu, \vec\beta$ и указанные плоскости образуют трехгранник Френе.

6.2. Первая квадратичная форма поверхности.

Перейдем к дифференциальной геометрии поверхностей в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Определение.



Пусть L — гладкая кривая, лежащая на поверхности S, $L \subset S$; а $l = l(t)$ — длина дуги кривой от точки $\vec r(a)$ до точки $\vec r(t)$. Тогда величина

$$\boxed{K_1 = dl^2}$$

называется *первой квадратичной формой* поверхности S.

Теорема.

Первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$K_1 = dl^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

где $E = (\vec r_u{}', \vec r_u{}') = |\vec r_u{}'|^2$,

$F = (\vec r_u{}', \vec r_v{}')$,

$G = (\vec r_v{}', \vec r_v{}') = |\vec r_v{}'|^2$.

Д-во:

очевидно, что $dl = |d\vec r|$, поэтому $dl^2 = (d\vec r, d\vec r)$. Поскольку кривая L лежит на поверхности S, задаваемой уравнением $\vec r = \vec r(u,v)$,

$$d\vec r = \frac{d}{dt}\vec r(u(t), v(t))\,dt =$$

$$= \vec r_u{}' \frac{du}{dt}dt + \vec r_v{}' \frac{dv}{dt}dt = \vec r_u{}' du + \vec r_v{}' dv.$$

В результате,

$$dl^2 = (\vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv, \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv) =$$

$$= (\vec{r}_u', \vec{r}_u') du^2 + 2(\vec{r}_u', \vec{r}_v') du\, dv +$$

$$+ (\vec{r}_v', \vec{r}_v') dv^2.$$

Теорема. Пусть E, F, G – коэффициенты первой квадратичной формы гладкой поверхности S. Тогда,

1°. Если Γ – гладкая кривая $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ на поверхности S, то ее длина вычисляется по формуле

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}\, dt.$$

2°. Площадь поверхности S вычисляется по формуле

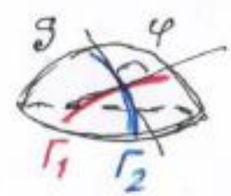
$$\boxed{\sigma(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,}$$

где $(u, v) \in \mathcal{D}$.

3°. Если две гладкие кривые $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset S$ пересекаются в т. $M \in S$, то угол φ между касательными к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке M вычисляется по формуле

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E(\delta u)^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G(\delta v)^2}},}$$

где $d\vec{r} = \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv$ – дифференциал, касательный к Γ_1, а $\delta\vec{r} = \vec{r}_u' \delta u + \vec{r}_v' \delta v$ – дифференциал к Γ_2, вычисленные в точке M.



Д-во: 1. По теореме о длине дуги кривой имеем

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt.$$

Тогда,

$$|\vec r\,'(t)|dt = dl = \sqrt{dl^2} = \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \sqrt{E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2}\,dt.$$

2°. По ранее доказанной теореме площадь поверхности вычисляется по формуле

$$\boxed{\sigma(S) = \iint\limits_{D} |[\vec r\,'_u, \vec r\,'_v]|\, du dv.}$$

Из векторной алгебры вытекает следующее тождество

$$|[\vec a, \vec b]|^2 + (\vec a, \vec b)^2 = |\vec a|^2 |\vec b|^2 \sin^2\Theta + |\vec a|^2 |\vec b|^2 \cos^2\Theta = |\vec a|^2 |\vec b|^2 = (\vec a, \vec a)(\vec b, \vec b).$$

Подставляя в это тождество $\vec a = \vec r\,'_u$, $\vec b = \vec r\,'_v$, имеем

$$|[\vec r\,'_u, \vec r\,'_v]| = \sqrt{(\vec r\,'_u, \vec r\,'_u)(\vec r\,'_v, \vec r\,'_v) - (\vec r\,'_u, \vec r\,'_v)^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

и формула доказана.

3°. Подставляя $d\vec r = \vec r\,'_u du + \vec r\,'_v dv$ и $\delta\vec r = \vec r\,'_u \delta u + \vec r\,'_v \delta v$ в формулу скалярного произведения $(d\vec r, \delta\vec r)$, находим

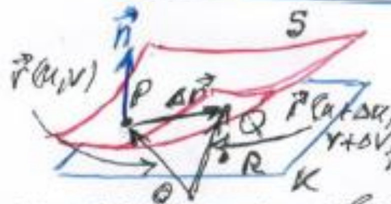
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{(d\vec r, \delta\vec r)}{|d\vec r|\,|\delta\vec r|},}$$

что дает доказываемую формулу для угла.

6.3. Вторая квадратичная форма поверхности

Рассмотрим гладкую поверхность S, заданную векторным уравнением

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(u,v), \quad (u,v) \in D.}$$



Рассмотрим на поверхности две точки P и Q, определяемые соответственно радиус-векторами $\vec{r}(u,v)$ и $\vec{r}(u+\Delta u, v+\Delta v)$. Вектор приращения $\vec{PQ} = \Delta\vec{r}(u,v)$.

Обозначим через K – касательную плоскость к поверхности S в точке P, а через R – проекцию точки Q на плоскость K. Обозначим также через $\vec{n}$ единичный вектор нормали к поверхности S в точке P. Тогда $z = (\Delta\vec{r}, \vec{n})$ будет проекцией вектора $\Delta\vec{r}$ на нормаль $\vec{n}$.

Предположим, что вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно. Тогда справедливо следующее разложение в ряд Тейлора

$$\boxed{\Delta\vec{r} = d\vec{r} + \frac{1}{2} d^2\vec{r} + \vec{o}(\rho^2),}$$

где $\vec{o}(\rho^2)$ – бесконечно малая вектор-функция более высокого порядка, чем $\rho^2 = u^2 + v^2$ при $\rho \to 0$.

Умножая скалярно это равенство на нормаль $\vec{n}$, приходим к

$$z = \overset{0}{(d\vec{r}, \vec{n})} + \frac{1}{2}(d^2\vec{r}, \vec{n}) + (\vec{o}(\rho^2), \vec{n}) =$$

т.к. вектор $d\vec{r}$ лежит в касательной плоскости K

$$= \frac{1}{2}(d^2\vec{r}, \vec{n}) + (\vec{o}(\rho^2), \vec{n}).$$

Определение.

Второй квадратичной формой поверхности называется выражение

$$\boxed{K_2 = (d^2\vec{r}, \vec{n}).}$$

Теорема.

Если S – гладкая поверхность, заданная векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), \quad (u,v) \in D,$$

то ее вторая квадратичная форма имеет вид

$$\boxed{K_2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2},$$

где $L = \dfrac{(\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v, \vec{r}\,''_{uu})}{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|}$,

$$M = \frac{(\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v, \vec{r}\,''_{uv})}{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|},$$

$$N = \frac{(\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v, \vec{r}\,''_{vv})}{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|}.$$

Д-во: как уже ранее отмечалось вектор $[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]$ параллелен нормали:

$$[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v] \parallel \vec{n}, \text{ причем}$$

$$\boxed{\vec{n} = \frac{[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]}{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|}}$$ для правой тройки $(\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v, \vec{n})$.

Поскольку

$$d\vec{r} = \vec{r}\,'_u du + \vec{r}\,'_v dv, \text{ то}$$

$$d^2\vec{r} = d(d\vec{r}) = (d\vec{r})'_u du + (d\vec{r})'_v dv =$$

$$= \vec{r}\,''_{uu} du^2 + \vec{r}\,'_{uv} du\,dv + \vec{r}\,''_{vu} dv\,du +$$

$$+ \vec{r}\,''_{vv} dv^2 = \vec{r}\,'_{uu} du^2 + 2\vec{r}\,'_{uv} du\,dv +$$

$$+ \vec{r}\,''_{vv} dv^2.$$

Умножая это равенство скалярно на нормаль $\vec{n}$, получаем

$$K_2 = (d^2\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}\,''_{uu}, \vec{n}) + 2(\vec{r}\,''_{uv}, \vec{n}) +$$

$$+ (\vec{r}\,''_{vv}, \vec{n}).$$

Подставляя сюда выражение для нормали и пользуясь свойствами смешанного произведения векторов, приходим к доказываемой формуле. ■

Покажем, что вторую квадратичную форму поверхности можно записать в виде

$$\boxed{K_2 = -(d\vec{r}, d\vec{n}).}$$

Действительно, вектора $\vec{r}_u'$ и $\vec{r}_v'$ лежат в касательной плоскости K. Поэтому, $(d\vec{r}, \vec{n}) = 0$.
Применим дифференциал к обеим частям равенства. Тогда,

$$d(d\vec{r}, \vec{n}) = (d^2\vec{r}, \vec{n}) + (d\vec{r}, d\vec{n}) = 0.$$

Отсюда и получаем формулу для K_2.

Определения.

Пусть P – точка гладкой поверхности S, а $D(P) = M^2 - LN$ – дискриминант второй квадратичной формы, вычисленной в точке P.

1) Если $D(P) < 0$, то точка P называется эллиптической,
2) Если $D(P) > 0$, то точка P называется гиперболической,
3) Если $D(P) = 0$, то точка P называется параболической.

Теорема о кривизне кривой на поверхности.

Пусть S – гладкая поверхность, заданная параметризацией

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), \quad (u,v) \in D,$$

а Γ – гладкая кривая на поверхности S, проходящая через точку P с радиус-вектором $\vec{r}(u,v)$:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \quad t \in [a,b].$$

Тогда кривизна k кривой Γ в точке P находится по формуле

$$\boxed{k\cos\theta=\frac{K_2}{K_1}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2},}$$

где θ – угол между главной нормалью $\vec{\nu}$ кривой Γ в точке P и нормалью $\vec{n}$ к поверхности S в этой точке, а $du=u'dt$, $dv=v'dt$.

Д-во:

перейдём от параметра t к естественному параметру ℓ.

Тогда, $\vec{r}=\vec{r}(u(\ell),v(\ell))$.

Дифференцируя соотношение по ℓ, имеем

$$\frac{d\vec{r}}{d\ell}=\vec{r}\,'_u\cdot u'_\ell+\vec{r}\,'_v\cdot v'_\ell .$$

Дифференцируя равенство второй раз по ℓ, приходим к

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\ell^2}=\vec{r}\,''_{uu}(u'_\ell)^2+2\vec{r}\,''_{uv}u'_\ell v'_\ell+\vec{r}\,''_{vv}(v'_\ell)^2+\vec{r}\,'_u u''_{\ell\ell}+\vec{r}\,'_v v''_{\ell\ell}.$$

Умножим последнее равенство скалярно на $\vec{n}$ и учтем, что $(\vec{r}\,'_u,\vec{n})=0$ и $(\vec{r}\,'_v,\vec{n})=0$, а из определения кривизны

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{d\ell^2}=k\vec{\nu}.}$$

Тогда,

$$k(\vec{\nu},\vec{n})=(\vec{r}\,''_{uu},\vec{n})(u'_\ell)^2+2(\vec{r}\,''_{uv},\vec{n})u'_\ell v'_\ell+(\vec{r}\,''_{vv},\vec{n})(v'_\ell)^2.$$

Поскольку $|\vec{\nu}|=|\vec{n}|=1$, то подставив формулу для нормали, приходим к

$$k\cos\theta=\frac{(\vec{r}\,'_u,\vec{r}\,'_v,\vec{r}\,''_{uu})du^2+2(\vec{r}\,'_u,\vec{r}\,'_v,\vec{r}\,''_{uv})du\,dv+(\vec{r}\,'_u,\vec{r}\,'_v,\vec{r}\,''_{vv})dv^2}{|[\vec{r}\,'_u,\vec{r}\,'_v]|\,d\ell^2}=$$

$$=\frac{K_2}{d\ell^2}=\frac{K_2}{K_1}=$$

$$=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{d\ell^2}.\quad\blacksquare$$