

Основные определения.

Опр. Пусть A и B - множества любой природы. Если каждому элементу $\forall a \in A$, ставится в соответствие один элемент $b \in B$ по некоторому закону f , то говорят, что задано отображение мн-ва A в мн-во B .

$$f: A \rightarrow B$$

$$f: (E \subset A) \rightarrow B$$

подмножество A .

Опр. Множество R^n , элементами которого являются векторы $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и в котором оп-ся следующие операции:

1) Сложение: $\vec{x} + \vec{y} = \{x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n\}$

2) Умножение на действительное число,

$$\forall \alpha \in R: \alpha \vec{x} = \{\alpha x_1, \dots, \alpha x_n\}$$

3) Скалярное произведение векторов:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

4) Норма вектора

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

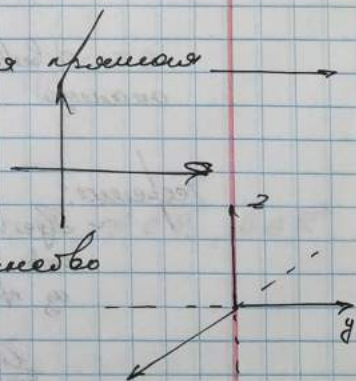
5) Расстояние между $\vec{x}$ и $\vec{y}$

$$\Delta(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \sim \text{то } R^n - \text{конечно-мерное евклидово пространство}$$

Замечание 1: В силу определения $R^3 = R \sim$ мн-во вещественных чисел.

Замечание 2: Геометрические образы: R^1 - числовая прямая
 R^2 - плоскость

R^3 - трехмерное пространство



Замечание 3: В пространстве R^3 вводится операция векторного произведения:

$$[\vec{x}; \vec{y}] = \vec{x} \times \vec{y}$$

1. Векторная функция.

1.1. Предел векторной функции.

Опр.: отображение $\vec{f}: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ наз-ся векторной функцией скалярного аргумента.

$$\vec{f} = \vec{f}(t), \quad t \in (a, b)$$

$$\vec{f}(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\}$$

Опр.: отображение $\vec{F}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ наз-ся векторной функцией многих переменных, опр-ых на мн-ве E пр-ва $\mathbb{R}^k$ и обозначается

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}) = \{f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k)\}$$

Опр.: (предела векторной функции по Коши)

~ Пусть $\vec{F}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ векторная ф-я, опр. мн-во E пр-ва $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$, а $\vec{x}_0$ - предельная точка мн-ва E .

Вектор $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ называется пределом функции $\vec{F}(\vec{x})$ при $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall \vec{x}: \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_{\mathbb{R}^k} < \delta: \|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{A}\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$.



$$\left\{ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{A} \right\}$$

Опр.: (предела векторной ф-ии по Гейне)

~ Пусть $\vec{F}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ векторная ф-я, опр. мн-во E пр-ва $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$, а $\vec{x}_0$ - предельная точка мн-ва E .

Вектор $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ наз-ся пределом ф-ии $\vec{F}(\vec{x})$ при $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$, если $\forall \{ \vec{x}_n \} \in E, \vec{x}_n \neq \vec{x}_0, \text{ к-е } \vec{x}_n \rightarrow \vec{x}_0: \vec{F}(\vec{x}_n) \rightarrow \vec{A}$

Эквивалентность двух опр-ий док-ана в курсе мат. анализа.

Теорема.

~ Пусть $\vec{F}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ векторная ф-я многих переменных, опр. на мн-ве E пр-ва $\mathbb{R}^k$, а $\vec{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ - вектор из пространства $\mathbb{R}^n$, тогда для существования предела

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{A} \iff \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = A_i, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

~ без док-ва.

Теорема (о свойствах пределов)

~ Пусть $\vec{F}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\vec{g}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^m$ и задана скалярная ф-я $h: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\vec{x}_0$ - предельная точка мн-ва E .

~ Пусть существует: $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{A}$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{B}$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) = c$$

Тогда выполняются соотношения:

$$1) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})] = \vec{A} + \vec{B}$$

$$2) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) \vec{f}(\vec{x}) = c \cdot \vec{A}$$

$$3) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})) = (\vec{A}, \vec{B})$$

Док-во: 1) $\vec{f}(\vec{x}) = \{f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})\}$

$$\vec{g}(\vec{x}) = \{g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x})\}$$

$$\vec{A} = (A_1, \dots, A_n), \quad \vec{B} = (B_1, \dots, B_n)$$

$$\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x}) = \{f_1(\vec{x}) + g_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}) + g_n(\vec{x})\}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \{A_1 + B_1, \dots, A_n + B_n\}$$

$$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})] \rightarrow \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f_i(\vec{x}) + g_i(\vec{x})] \stackrel{11.1}{=} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g_i(\vec{x}) =$$

$$= A_i + B_i$$

~ док-м пункт 1.

$$2) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) \vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) \cdot f_i(\vec{x}) \stackrel{11.1}{=} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = c A_i$$

~ док-м пункт 2

$$3) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \sum_{i=1}^n f_i(\vec{x}) g_i(\vec{x}) \stackrel{11.1}{=} \sum_{i=1}^n \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) g_i(\vec{x}) \stackrel{11.1}{=} \\ = \sum_{i=1}^n \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g_i(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n A_i B_i = (\vec{A}, \vec{B})$$

~ док-м пункт 3

Теорема (о пределе векторного произведения)

~ Пусть задана $\vec{f}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{g}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$

Пусть $\vec{x}_0$ - предельная точка мн-ва E и

$$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{B}$$

$$\text{Тогда, } \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})] = [\vec{A}, \vec{B}]$$

Док-во: Выберем ориентированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в $\mathbb{R}^3$

$$\text{Тогда } [\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(\vec{x}) & f_2(\vec{x}) & f_3(\vec{x}) \\ g_1(\vec{x}) & g_2(\vec{x}) & g_3(\vec{x}) \end{vmatrix} = \vec{i} [f_2(\vec{x}) g_3(\vec{x}) - g_2(\vec{x}) f_3(\vec{x})] +$$

$$+ \vec{j} [f_3(\vec{x}) g_1(\vec{x}) - f_1(\vec{x}) g_3(\vec{x})] + \vec{k} [f_1(\vec{x}) g_2(\vec{x}) - g_1(\vec{x}) f_2(\vec{x})]$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [\vec{f}(\vec{x}); \vec{g}(\vec{x})] = \vec{i}[A_2 B_3 - A_3 B_2] + \vec{j}[A_3 B_1 - A_1 B_3] + \vec{k}[A_1 B_2 - B_1 A_2] =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = [\vec{A}, \vec{B}]$$

14.09.21

1.2. Непрерывность и дифференцируемость векторной функции.

Опр непрерывности:

~ Векторная ф-я $\vec{f}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется непрерывной

в т. $\vec{x}_0 \in E$, если

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0)$$

$$(\text{если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall \vec{x}: |\vec{x} - \vec{x}_0|_{\mathbb{R}^k} < \delta(\varepsilon): \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon)$$

Векторная ф-я непрерывна на всем мн-ве E , если она
непр. в каждой точке этого мн-ва.

Свойства непрерывности функции.

1. Пусть $\vec{f}(\vec{x}): (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\vec{g}(\vec{x}): (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\text{т. } \vec{x}_0 \in E$$

$$h(\vec{x}): (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$$

Тогда непрерывны в т. $\vec{x}_0$ функции:

① $\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})$

② $h(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{x})$

③ $(\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x}))$

④ при $n=3$ $[\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})]$

Определение дифференц. для векторной функции от скалярного аргумента.

Векторная ф-я $\vec{f}: (a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ наз-ет дифф-ой в
т. $t_0 \in (a, b)$, если ей приращение в т. t_0 представляется как

$$\Delta \vec{f}(t_0) = \vec{f}(t) - \vec{f}(t_0) = \vec{A}(t-t_0) + \vec{o}(t-t_0)$$

$$\Delta t = t - t_0 \Rightarrow t = t_0 + \Delta t$$

$$\Delta \vec{f}(t_0) = \vec{A} \Delta t + \vec{o}(\Delta t)$$

дифференциал $d\vec{f}(t)$ в т. t_0 $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{o}(\Delta t) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta t \rightarrow 0$$

$$d\vec{f}(t_0) = \vec{A} \Delta t$$

Handwritten signature

Определение дифференциала для $\vec{f}(\vec{x})$.

~ Векторная функция $\vec{f}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ наз-ая дифференцируемой в т. $\vec{x}_0 \in E$, если ее приращение в т. $\vec{x}_0$ представимо в виде:

$$\Delta \vec{f}(\vec{x}_0) = \underbrace{A \Delta \vec{x}_0}_{\text{линейная}} + o(\Delta \vec{x}_0) \cdot \vec{\Delta x}_0$$

$$\text{где } \Delta \vec{x}_0 = \vec{x} - \vec{x}_0$$

A - $n \times k$ матрица левых коэффициентов

$o(\Delta \vec{x}_0)$ - $n \times k$ матрица такая, что $o_{ij}(\Delta \vec{x}_0) \rightarrow 0$ при $\Delta \vec{x}_0 \rightarrow 0$

$$\Rightarrow d\vec{f}(\vec{x}_0) = A \Delta \vec{x}_0 \text{ - дифференциал функции } \vec{f}(\vec{x}) \text{ в т. } \vec{x}_0$$

Функция наз-ая дифференцируемой на области E , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Определение производной векторной ф-ии скалярного аргумента.
 $\vec{f}(t)$.

Производной $\vec{f}(t_0)$ вект. ф-ии $\vec{f}: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ в т. $t_0 \in (a, b)$ наз-ают предел

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t_0 + \Delta t) - \vec{f}(t_0)}{\Delta t}$$

Теорема: ~ Если векторная ф-ия скалярного аргумента $\vec{f}: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируема в т. $t_0 \in (a, b)$, то она имеет производную $\vec{f}'(t_0)$ и

$$d\vec{f}(t_0) = \vec{f}'(t_0) \Delta t$$

Доказ-во: В силу дифференцируемости $\vec{f}(t)$ в т. t_0

$$\Delta \vec{f}(t_0) = \vec{A} \Delta t + \vec{\alpha}(\Delta t) \Delta t$$

Тогда,

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A} \Delta t + \vec{\alpha}(\Delta t) \Delta t}{\Delta t} = \vec{A} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underbrace{\vec{\alpha}(\Delta t)}_{=0} = \vec{A}$$

$$d\vec{f}(t_0) = \vec{A} \Delta t = \vec{f}'(t_0) \Delta t$$

Теорема ~ Пусть векторная ф-ия скалярного аргумента $\vec{f}: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируема в т. $t_0 \in (a, b)$ и $\vec{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$

Тогда:

$$\vec{f}'(t_0) = \{f_1'(t_0), f_2'(t_0), \dots, f_n'(t_0)\}$$

Док-во: Из существования

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}(t_0)}{\Delta t} \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_i(t_0 + \Delta t) - f_i(t_0)}{\Delta t} \quad \text{для } i = \overline{1, n}.$$

$$\Rightarrow \vec{f}'(t_0)$$

Правило дифференцирования векторных функций.

Теорема: Если $\vec{f}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\vec{g}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируемы в т. $t_0 \in (a, b)$ то:

$h: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$1) (\vec{f}(t) + \vec{g}(t))'_{t=t_0} = \vec{f}'(t_0) + \vec{g}'(t_0)$$

$$2) (h(t) \vec{f}(t))'_{t=t_0} = h'(t_0) \vec{f}(t_0) + h(t_0) \vec{f}'(t_0)$$

$$3) [(\vec{f}(t), \vec{g}(t))]_{t=t_0}' = (\vec{f}'(t_0), \vec{g}'(t_0)) + (\vec{f}(t_0), \vec{g}'(t_0))$$

$$4) [\vec{f}(h(t))]_{t=t_0}' = \vec{f}'_{h(t_0)} \cdot h'(t_0)$$

$\frac{\vec{f}(t)}{g(t)}$ не определено

$$5) \vec{f}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{g}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ то } [\vec{f}(t), \vec{g}(t)]'_{t=t_0} \quad \text{и} \quad [\vec{f}'(t_0), \vec{g}'(t_0)] + [\vec{f}(t_0), \vec{g}'(t_0)]$$

~ док-во основ. на свойствах пределов

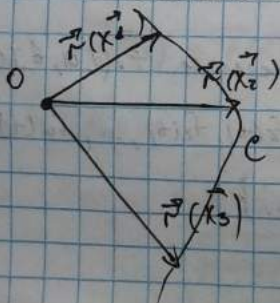
1.3. Векторный смысл векторной функции скалярного аргумента.

Опр. векторная:

Пусть $\vec{f}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^3$ или $\vec{r} = \vec{r}(\vec{x})$

Положим начало вектора $\vec{r}(\vec{x})$ в начало координат пр-ва $\mathbb{R}^3$.

Множество концов вектора $\vec{r}(\vec{x})$, $\vec{x} \in E$ наз-ся изображением векторной функции



Опр. пространственной кривой:

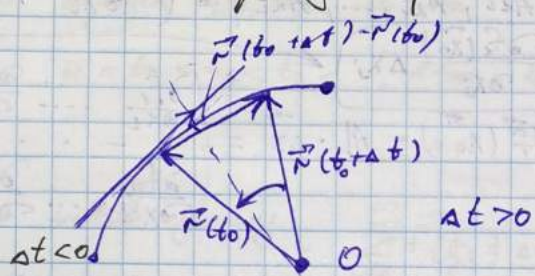
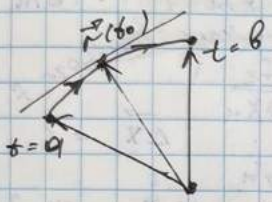
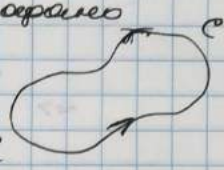
Содержащий непрерывной векторной ф-ии $\vec{r} = \vec{r}(t)$: $\vec{r}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется пространственной кривой C , а ф-я $\vec{r} = \vec{r}(t)$ - векторное задание пространственной кривой C

Опр.: Пространственная кривая C , на которой задано направление, наз-ет ориентированной.

Теорема:

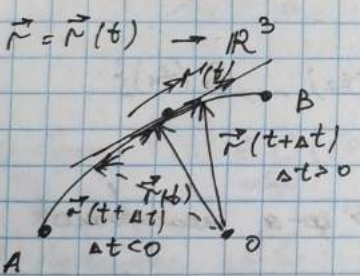
Пусть ориентированная пространственная кривая C задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ и ф-я $\vec{r}(t)$ дифф-на в т. $t_0 \in (a, b)$

Тогда $\vec{r}'(t_0)$ касается кривой C в точке, соотв. параметру t_0 и направлена в сторону возрастания параметра t .



Доказ-во:

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$



$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

21.09.22

1.4. Дифференцирование векторной функции многих переменных.

Опр. Пусть $\vec{f}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial x_i}$ касательной производной $\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial x_i}$ понимается:

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{t}$$

$\vec{e}_i$ - единичный вектор базиса в пространстве $\mathbb{R}^k$
 $|\vec{e}_i| = 1$

$$\vec{e}_i = \{0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0\}, \quad i = \overline{1, k}$$

$$\vec{f} = \vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Теорема: Если векторная функция $\vec{f}: (E \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируема в т. $\vec{x}_0 \in E$, то существуют все ее частные производные в т. $\vec{x}_0$ и справедливо соотношение:

$$d\vec{f}(\vec{x}_0) = \{df_1(\vec{x}_0), df_2(\vec{x}_0), \dots, df_n(\vec{x}_0)\}$$

Док-во: Из дифференцируемости $\vec{f}(\vec{x})$ в т. $\vec{x}_0$ следует.

$$\Delta \vec{f}(\vec{x}_0) = A \Delta \vec{x} + o(\Delta \vec{x}), \text{ где } \alpha_{ij}(\Delta \vec{x}) \xrightarrow{\Delta \vec{x} \rightarrow 0} 0 \text{ при } \Delta \vec{x} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t \cdot \vec{e}_i) + o(t \cdot \vec{e}_i)}{t \cdot \vec{e}_i} =$$

$$= A \vec{e}_i = \begin{pmatrix} A_{i1} & \dots & A_{ik} \\ A_{i1} & \dots & A_{ik} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{ik} \end{pmatrix} (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots) =$$

$$= (A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}) = \left(\frac{\partial f_1(\vec{x}_0)}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2(\vec{x}_0)}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_n(\vec{x}_0)}{\partial x_i} \right)$$

$$\boxed{df_i(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j} \Delta x_j}$$

$$\vec{df}(\vec{x}_0) = A \cdot \vec{\Delta x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_k \end{pmatrix} =$$

~ век-матр.

1.5. Ф-ла Тейлора для векторной функции.

Пусть $\vec{f}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Введем обозначение: $\vec{f}_{t_0, t_1, \dots, t_n} = \{f_1(t_0), f_2(t_1), \dots, f_n(t_n)\}$

Теорема (Тейлора)

Пусть $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ - векторная ф-я скалярного аргумента.

Пусть $\vec{f} \in C^m([a, b])$, где $m \in \mathbb{N}$ и $\exists \vec{f}^{(m+1)}$ в т. интервала (a, b) .

Тогда справедлива формула:

$$\vec{f}(t) = \sum_{j=0}^m \frac{\vec{f}^{(j)}(t_0)}{j!} (t-t_0)^j + \frac{(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!} \vec{f}^{(m+1)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

сост. член в форме ~~какой~~ разложения.

и $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ входят в интервал (t_0, t)

Док-во: Для каждой компоненты $f_i(t)$ справедлива ф-ла Тейлора.

$$f_i(t) = \sum_{j=0}^m \frac{f_i^{(j)}(t_0)}{j!} (t-t_0)^j + \frac{f_i^{(m+1)}(\xi_i)}{(m+1)!} (t-t_0)^{m+1},$$

где $\xi_i \in (t_0, t)$

$i = \overline{1, n}$

задание

$$\sum_{i=1}^n f_i \vec{e}_i = \vec{f}$$

Следствие: если $n=0$ $\vec{f}(t) = \vec{f}(t_0) + \frac{(t-t_0)}{1!} \vec{f}'_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}$

Формула приращений: $\Delta \vec{f}(t_0) = \vec{f}(t) - \vec{f}(t_0) = \vec{f}'_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n} (t-t_0)$

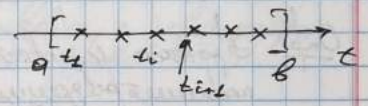
1.6. Интегрирование векторной функции.

Опр. Пусть задана векторная ф-я скалярного аргумента:

$$\vec{f}: ([a, b] \subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на "m" частей произвольными образцами:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b.$$



Составим интегр. сумму: $\sum_{i=1}^m \vec{f}(\xi_i) \Delta t_i$ ($\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$)

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \vec{f}(\xi_i) \Delta t_i = \int_a^b \vec{f}(t) dt$$

$$\int_a^b \vec{f}(t) dt = \left\{ \int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right\}$$

Св-ва интегралов.

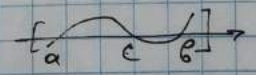
1) Если $\vec{f}(t) \in C([0; b])$, то она интегрируема на к.м.

2) Линейное св-во: Если $\int_a^b \vec{f}(t) dt$ и $\int_a^b \vec{g}(t) dt$, а $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, то справедливо:

$$\int_a^b [c_1 \vec{f}(t) + c_2 \vec{g}(t)] dt = c_1 \int_a^b \vec{f}(t) dt + c_2 \int_a^b \vec{g}(t) dt$$

3) Аддитивность: Если $\vec{f}(t)$ интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$, то

$$\int_a^b \vec{f}(t) dt = \int_a^c \vec{f}(t) dt + \int_c^b \vec{f}(t) dt.$$



4) Если $\vec{f}(t)$ инт. на $[a, b]$ и $\vec{F}(t) = \vec{f}(t)$ для $\forall t \in [a, b]$, то

$$\int_a^b \vec{f}(t) dt = \vec{F}(t) \Big|_a^b = \vec{F}(b) - \vec{F}(a)$$

5) Лемма о среднем:

Если вект. ф-я $\vec{f}(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b \vec{f}(t) dt = \vec{F}_{\xi_1, \dots, \xi_n} (b-a), \text{ где } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in [a, b]$$

док-во основано на теореме
о среднем, только для
каждого слагаемого отдельно.

2. Криволинейный интеграл

2.1. Типы пространственных кривых. Длина кривой.

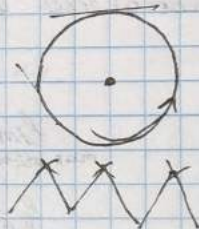
Опр. Пространственная кривая с параметризацией $\vec{r}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется простой, если её взаимнооднозначное отображение $[a, b]$ в $\mathbb{R}^3$

неоднозн.

$\vec{r}: \mathbb{R}^3$ является биекц.

Опр. Простая кривая с параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется гладкой, если её параметризующая ф-я на $[a, b]$

$$\vec{r}(t) \in C^1([a, b])$$



Опр. Простая кривая с параметризацией $\vec{r}(t) \in C^1([a, b])$ называется кусочно-гладкой, если для некоторого конечного числа точек $t_1, \dots, t_k$, где $\vec{r}(t)$ не существует.

Длина кривой

Пусть C — пространственная кривая, соединяющая A и B .

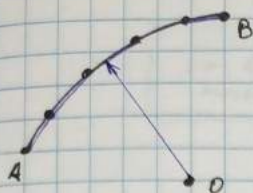
Разобьём кривую точками на " n " элементарных дуг. Соединим соседние точки отрезками.

$$P = \sum_{i=1}^n |\vec{A}_i - \vec{A}_{i-1}| \text{ — периметр ломанной}$$

Опр. Длиной кривой C называется полная верхняя грань периметров вписанных ломанных.

$$L(C) = \sup \{P\}$$

Кривая, у которой существует длина назыв. спрямляемой.

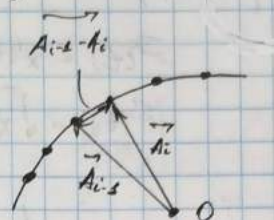


$L_{AB} = \sup \{ p \}$ ~ спрямляемая кривая.

Лемма: Если C - спрямляемая кривая, соединяющая т. А и т. В, то её длина равна пределу:

$$L_{AB} = \lim_{\max \{ |A_{i-1} - A_i| \} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N |A_{i-1} - A_i|$$

длина дуги.



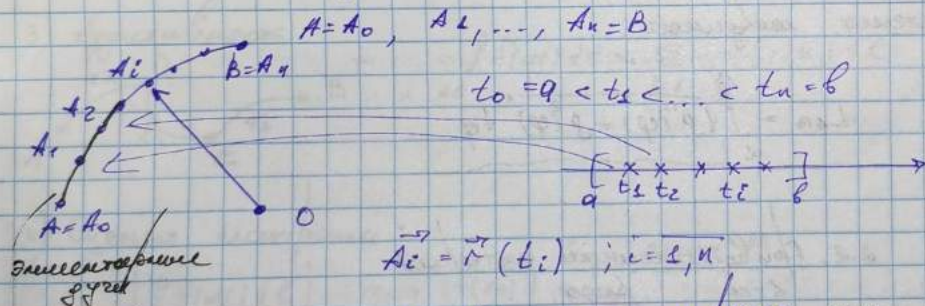
~ без дуг-ва

Теорема (о вычислении длины кривой)

~ Если C - гладкая пространственная кривая, с параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, то длина кривой Γ вычисляется по формуле:

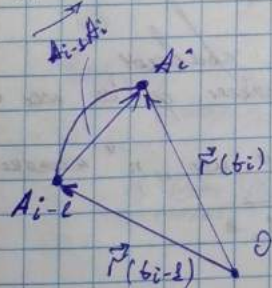
$$L_{AB} = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

Доказательство: разобьём кривую C произв. образом на n частей.



$$\vec{A}_i = \vec{r}(t_i); i = 1, n$$

$A_{i-1}A_i$ - элементарные дуги.



$$\sum_{i=1}^n |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$$

используем формулу дифференцирования

$$\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) = \vec{r}'(\xi_i) (t_i - t_{i-1})$$

$$\vec{r}'_{\xi_i} = \{x'(\xi_i), y'(\xi_i), z'(\xi_i)\}$$

$$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (t_{i-1}, t_i)\}$$

$$L_{AB} = \lim_{\max \{ \Delta t_i \} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\vec{r}'(\xi_i)| \Delta t_i = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

и т.д.

Угловое смещение.

1) Параметрическое задание кривой:

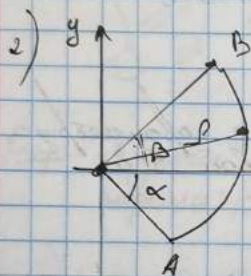
$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \rightarrow \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$



$$\vee AB: \varphi = \varphi(t), \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

$$x = r \cos \varphi = r(\varphi) \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$(x')^2 = (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2$$

$$(y')^2 = (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2$$

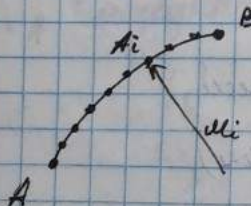
$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)$$

Полная система координат:

$$L_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$$

2.2. Криволинейный интеграл 1-го рода.

Опр: Пусть C - спрямляемая преобразуемая кривая, соединяющая A и B , $\varphi \in (a, b)$ - образ φ -а на C .



Разобьем кривую C произв. образом на n частей

$$A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n = B; i = \overline{1, n}$$

$\vee A_{i-1} A_i$ - элемент дуги.

Выбираем произвольные образы $\tau_i \in \vee A_{i-1} A_i$

Построим интегр. сумму:

$$\sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta l_i$$

Δl_i - длина дуги $\vee A_{i-1} A_i$

$$\lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta l_i$$

$$\left\{ \Rightarrow \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\mu_i) \Delta l_i = \int_C f(\mu) dl = \int_{AB} f(\mu) dl \right\} \sim \text{криволинейный интеграл 1-го рода}$$

интеграл по длине

В декартовой системе $\mu(x, y, z)$

$$\rightarrow \int_C f(x, y, z) dl$$

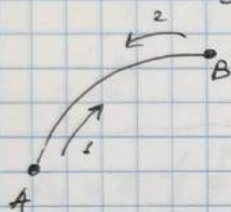
Может быть замкнутая кривая:

$$\oint_C f(\mu) dl$$



Основные свойства введенного интеграла 1-го рода.

1)



$$\int_{AB} f(\mu) dl = \int_{BA} f(\mu) dl$$

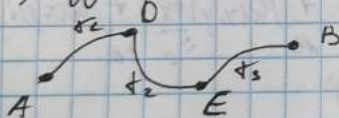
Значение интеграла не зависит от пути.
→ вытекает из конт.-я.

2)

Линейность: Для ограниченной на C ф-ий $f(\mu)$ и $g(\mu)$ и $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, выполняется равенство

$$\int_{AB} [c_1 f(\mu) + c_2 g(\mu)] dl = c_1 \int_{AB} f(\mu) dl + c_2 \int_{AB} g(\mu) dl$$

3) Аддитивность



$$\int_{AB} f(\mu) dl = \sum_{k=1}^m \int_{A_k} f(\mu) dl$$

4) Оценка интеграла:

$$\left| \int_{AB} f(\mu) dl \right| \leq \max_{\mu \in AB} |f(\mu)| \cdot L_{AB}$$

длина AB.

Доказ.: $\lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^n f(\mu_i) \Delta l_i \right| = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^n f(\mu_i) \Delta l_i \right| \leq \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |f(\mu_i)| \Delta l_i \leq \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \max_{\mu \in AB} |f(\mu)| \Delta l_i = \max_{\mu \in AB} |f(\mu)| \cdot L_{AB}$

$$\leq \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \left[\max_{\mu \in AB} |f(\mu)| \cdot \sum_{i=1}^n \Delta l_i \right] = \max_{\mu \in AB} |f(\mu)| \cdot L_{AB}$$

" L_{AB}

с.т.р.

5) $f(\mu) \equiv 1$

$$\Rightarrow \int_{AB} 1 dl = L_{AB}$$

Теорема (о вычислении криволинейного интеграла 1-го рода.)

~ Пусть гладкая вектор. кривая C задана в векторном виде $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, а ф-я $f(\mu)$ - интегрируема на кривой C

Тогда:

$$\int_{AB} f(\vec{r}) d\vec{r} = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| dt$$

Доказ-во: Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей произв. образом:
 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

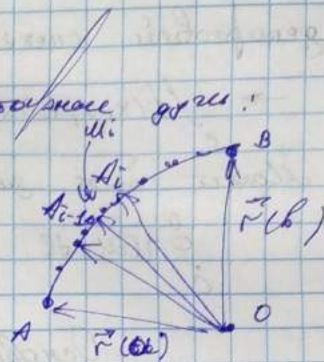
Тогда кривая C разобьется на элементарные дуги:
 $\vec{r}_i = \vec{r}(t_i), i = \overline{1, n}$

На каждой из них выберем произв. точку $M_i \in A_i \dots A_i$ и сформируем сумму:

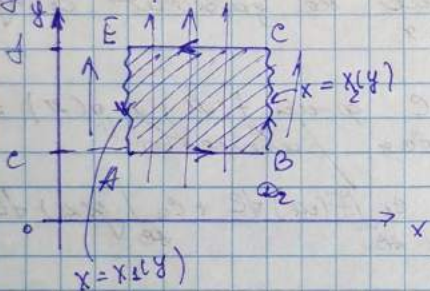
$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i$$

$$\text{где } \Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r}'(t)| dt$$

и преобразовываем.



12.10.21 продолжение:



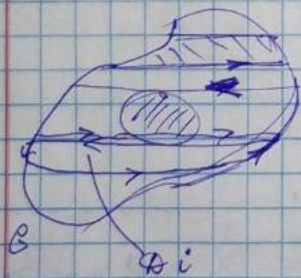
$$\iint_{D_i} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy =$$

$$= \int_C dy [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)] =$$

$$= \int_C Q(x_2(y), y) dy - \int_C Q(x_1(y), y) dy =$$

$$= \int_{BC} Q(x, y) dy + \int_{EA} Q(x, y) dy + \int_{AB} Q(x, y) dy + \int_{CE} Q(x, y) dy =$$

$$= \int_{ABCEA} Q(x, y) dy$$



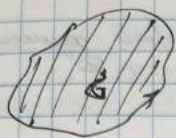
$$\iint_{D_i} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{L_i} Q(x, y) dy$$

$i = \overline{1, m}$

$$\left[\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \oint_L Q dy \\ \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \oint_L P dx \end{aligned} \right]$$

$$\Rightarrow \oint_L P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \text{ что и треб. доказ-ва.}$$

Выведены теоремы Грина (через формулы Стокса)



$$S_D = \oint_G dx dy = \frac{1}{2} \oint_G x dy - y dx$$

Рассуждение
аналогично

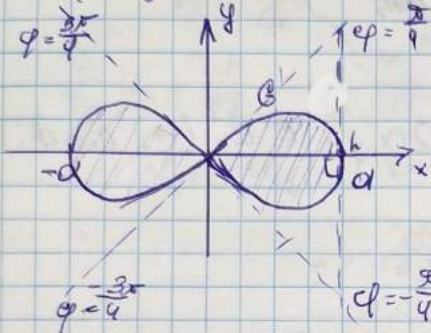
Если $Q = \frac{x}{2}$; $P = -\frac{y}{2} \Rightarrow Q'_x = \frac{1}{2}$
 $P'_y = -\frac{1}{2}$

Пример: лемниската Бернулли: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho^4 = a^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = a^2 \cos 2\varphi$$

$$\Rightarrow \rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$$



$$S_D = \frac{1}{2} \oint_G x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \\ y = a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \end{cases} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} S_D &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos^2 \varphi \cos 2\varphi \cdot d(\tan \varphi) = \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cos 2\varphi (d\varphi) = a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{a^2 \sin 2\varphi}{2} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2 \end{aligned}$$

$2(x,y)dy =$

2.5. Условие независимости криволинейного интеграла от пути (2-го рода) интегрирование по плоским дугам

Опр. Плоская область D называется односвязной, если, каков бы ни был замкнутый контур C , лежащий в области D , а также этот контуром область целиком принадлежит D .



Теорема: Пусть ф-ии $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены и непрерывны с произв. Q'_x и P'_y в замкнутой ограниченной односвязной области D , тогда следующие 4 утверждения эквивалентны:

1) $\oint_C P dx + Q dy = 0$, для $\forall C \in D$.

2) $\int_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от выбора пути интегрирования от т.А до т.В.

3) Выражение $Pdx + Qdy$ - полный диф-л некоторой функции $U(x, y)$, которая однозначна в области D .

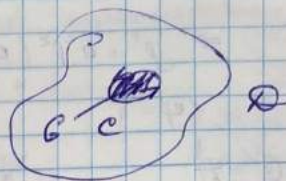
$$dU = Pdx + Qdy$$

4) Велору в области D выполняется равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Док-во: (4 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 4)

(4 $\rightarrow$ 1) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$



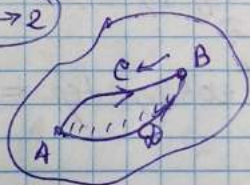
На C и окр-ти - $P(x, y)$ и $Q(x, y) \in C^1$ (с вых-ми).

Тогда справедлива ф-ла Грина:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$\Rightarrow$ док-ли (1)

(1 $\rightarrow$ 2)



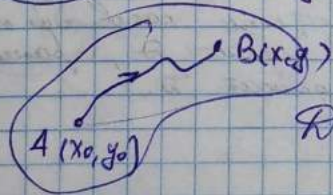
$$\oint_C Pdx + Qdy = 0$$

$$\int_{A \rightarrow B} Pdx + Qdy + \int_{B \rightarrow A} Pdx + Qdy = \oint_C Pdx + Qdy = 0$$

$$\int_{A \rightarrow B} Pdx + Qdy - \int_{A \rightarrow B} Pdx + Qdy = 0$$

$$\int_{A \rightarrow B} Pdx + Qdy = \int_{A \rightarrow B} Pdx + Qdy, \Rightarrow \text{док-ли (2)}$$

(2 $\rightarrow$ 3) $Pdx + Qdy = dU(x, y)$?



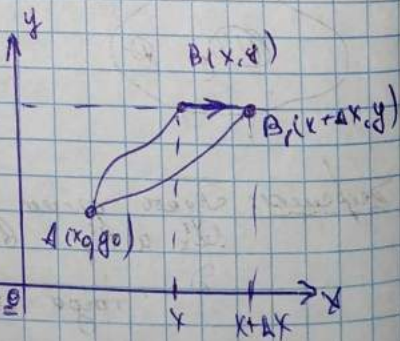
$$\int_{AB} Pdx + Qdy = U(x, y)$$

$$dU = U'_x dx + U'_y dy$$

$$U'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \int_{AB_1} Pdx + Qdy - \int_{AB} Pdx + Qdy \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{BB_1} Pdx + Qdy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(x, y) dx =$$



т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot P(\xi, y) \cdot \Delta x = P(x, y)$
 $\xi \in (x, x + \Delta x)$ - по-а P непрерывна

$$\Rightarrow u'_x = P$$

Аналогичным образом докажем: $u'_y = Q$

$$\Rightarrow Pdx + Qdy = du, \Rightarrow \text{док-м (3)}$$

(8 $\rightarrow$ 4) $du = Pdx + Qdy \Rightarrow u'_x = P, u'_y = Q$
 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} ?$

$$\frac{\partial}{\partial y} u'_x = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial x} u'_y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

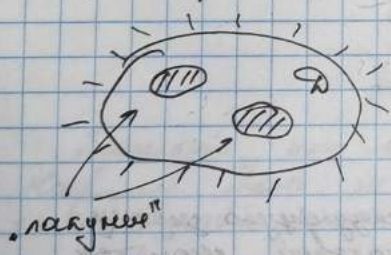
$$u''_{yx} = u''_{xy} \quad (\text{если производ. непрерыв.})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{док-м (4)}$$

Замечание 1: В ходе доказательства требовалось было установить, что из условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ вытекает справедливость равенства 19.10.21.

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0, \quad \text{для любого замкнутого контура } \Gamma, \text{ целиком лежащего в односвязной области } D.$$

Покажем, что в односвязной области с "лакунами" это равенство, вообще говоря, не выполняется.



Расс-м пример: $\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

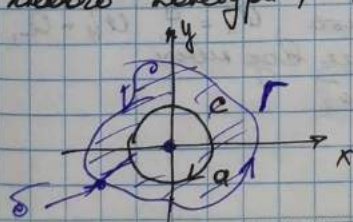
Циркуляционное выражение не имеет смысла в т. 0 (0,0). Выберем в качестве замкнутого контура с окружность радиуса "a" с центром в начале координат:

$$C: x^2 + y^2 = a^2$$

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ и наоборот, поэтому для любого контура, не охватывающего начало координат, результат равен 0.

Однако, $\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{a^2} \oint_C xdy - ydx = \frac{1}{a^2} 2S_{\text{кр.}} = \frac{1}{a^2} \cdot 2\pi a^2 = 2\pi.$

Изобретено, что полученный циркуляционный результат не зависит от радиуса окружности. Этот результат будет справедливым для любого контура, охватывающего начало координат.



В самом деле. Рассмотрим произвольный замкнутый контур Γ , внутри которого находится окружность C . Сделаем разрез σ , соединяющий контур Γ с внутренней C . В результате получим односвязную

область, охватывающую границу Г и С. Вдоль
обойдем контур Г в положительном направлении
с учетом увеличения по разрезу 5 тура 4
обойдем вместе имеем:

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{x+y-y+x}{x^2+y^2} + \oint_{C^-} \frac{x+y-y+x}{x^2+y^2} = 0$$

Отсюда получаем:

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{x+y-y+x}{x^2+y^2} = \oint_{C^+} \frac{x+y-y+x}{x^2+y^2} = 2\pi$$

В данном случае лентой является векторная зона.
Универсальное кольцо, является замкнутым кривым интеграл
охватывающую ленту, называется циклической лентой
линии.

Замечание 2. Доказанную теорему можно распространить на
случай пространственной кривой.

Так, если ф-ии $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ -
непрерывные дифф-ы в односвязной области $G \in \mathbb{R}^3$ и одновременно
выполняются равенства:

$$\left[\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \right],$$

то, для + замкнутого контура Γ , лежащего в G ,
справедливо равенство:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

Интегрирование по линиям
дифференциалов

Полученные результаты позволяют решить следующую задачу:
найти ф-ю $U(x, y, z)$, называемую потенциалом диф-л
выражения: которой задается

$$\{ dU = Pdx + Qdy + Rdz \}$$

Отметим, что, когда ф-ии P, Q, R непрерывно-дифференци-
руемы в односвязной области G . Выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ связано
потенциалом диф-ал которой ф-ия в том и только том
случае, когда одновременно

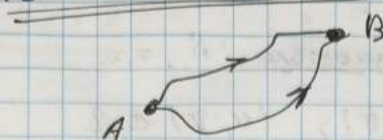
$$\left\{ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \right\}$$

Эти условия вытекают из того факта, что $U'_x = P$, $U'_y = Q$,
 $U'_z = R$, и равенства смешанных производных.
В этой ситуации как мы отметили.

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

по подобии замкнутой контуры Γ , а именно не зависит от формы криволинейного участка

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$$



не зависит от формы пути, соединяющего точки A и B , а определяется только началом и концом движения.

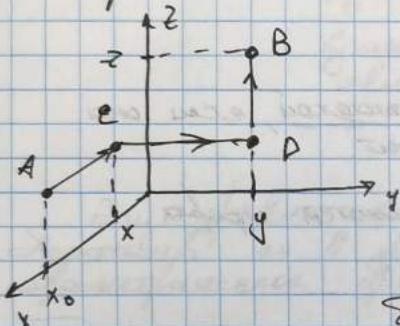
Представив возвращение для U под интеграл, имеем:

$$\left\{ \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} dU = U(B) - U(A) \right\}$$

Зафиксируем точку $A(x_0, y_0, z_0)$, а точку $B(x, y, z)$ будем считать текущей. Тогда,

$$U(x, y, z) = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz + U(x_0, y_0, z_0)$$

Выберем в качестве пути AB ломаную, изображенную на рисунке.



Тогда,

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + U(x_0, y_0, z_0)$$

Таким образом, отыскали ф-ию по ее наименьшему дифференциалу сводим к вычислению 3-х интегралов Римана. Эта ф-ия определяется с точностью до произвольной постоянной, роль которой играет $U(x_0, y_0, z_0)$

Заметим, что начальную точку можно выбирать как угодно. Напримир. брать за нее начало координат $O(0, 0, 0)$, если в этой точке ф-ии P, Q и R не имеют особенностей.

3. Поверхностные интегралы.

В различных физических задачах встречаются ф-ии, заданные на той или иной поверхности. Примерами могут служить плотность распределенной зарядов на поверхности проводника, скорость движения, протекающей через некоторую пов-ть и т.д. Эта глава посвящена изучению интегралов от функций, заданных на поверхности, и их приложениям.

3.1. Опре поверхности способом ее задания.

Опр. Пусть Ω - односвязная замкнутая область на плоскости $\mathbb{R}^2$
задана непрерывной векторной ф-ой

$$\vec{r}: (\Omega \subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

называется поверхностью S , т.е.

$$S: \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega$$

Определение:

Поверхность S называется простой, если её параметризация

$$\vec{r}: (\Omega \subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

существует в взаимно-однозначное отображение между областью Ω в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$.

Простая пов-ть называется шаркой, если её параметризация $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ - непрерывно-диф-ая ф-я в Ω или в её замыкании

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \in C^1(\Omega).$$

Простая пов-ть S называется кусочно-шаркой, если она состоит из конечного числа шарких частей.

Примерами шарких поверхностей являются сфера, пов-ть куба:



- кусочно-шаркой - куб

4 вида задания пов-ей.

① Векторное задание поверхности:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

② Параметрическое задание:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned}, (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

③ Явное задание:

$$z = z(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

④ ИмPLICIT задание:

$$F(x, y, z) = 0$$

Из параметрического или явного задания пов-ти S можно перейти к векторному заданию:

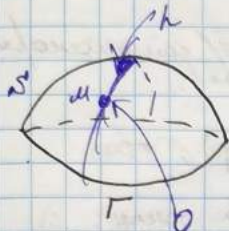
$\mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

или:

$$\left\{ \vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k} \right\}, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

3.2. Кривая и касательная плоскость к поверхности.



Проверим на шарной поверхности S , заданной векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega,$$

касательную плоскость, приравняв k . Если на этой кривой выберем некоторый параметр, то касательную заменим t будет соответствующая точка пов-ти M , которая определяется параметрами " u " и " v " или вектор $\vec{r}$. Тогда считаем, вдоль кривой k параметр " u " и " v " изменяется q -ами t :

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

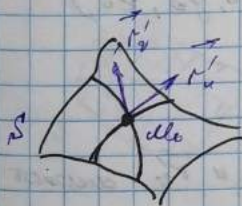
Эти уравнения называются ф-лами кривой на пов-ти. Подставив их в уравнение поверхности получаем параметрическое ф-е кривой поверхности S .

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$$

Расс-м касательную к кривой k . Её направление определяется вектором производной

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{r}'_u \cdot \frac{du}{dt} + \vec{r}'_v \cdot \frac{dv}{dt},$$

который представляет собой линейную комбинацию векторов $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$ - координатных векторов. Эти вектора являются соответственно касательными к u -линии: $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ и v -линии: $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$, проходящими через т. $M_0(u_0, v_0)$ поверхности S .



Касательная плоскость.

Расс-м все возможные кривые на поверхности S , проходящие через заданную т. M_0 и касательные вектора к ним в этой точке.

Каждый из этих векторов представляет собой линейную комбинацию векторов $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$, т.е. лежит в определяемой этими векторами плоскости. Эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности S в т. M_0 . Показав векторы $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$ лежат в касательной плоскости, вектор $[\vec{r}'_u; \vec{r}'_v]$ перпендикулярен к ней.

Тогда, уравнение касательной плоскости можно записать в виде:

$$[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]$$

$$\{(\vec{r} - \vec{r}_0, [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]) = 0\},$$



где $\vec{r}$ - радиус-вектор текущей точки касательной плоскости,
 $\vec{r}_0$ - радиус-вектор точки касания M_0 .

Уравнение касательной плоскости можно переписать в виде:

$$\{(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v) = 0\},$$

что означает коллинеарность трех векторов.

Если поверхность S задана в явном виде $z = z(x, y)$, то

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}$ - радиус-вектор точки, лежащей на поверхности.

Тогда, $\vec{r}'_x = \vec{i} + z'_x \vec{k}$; $\vec{r}'_y = \vec{j} + z'_y \vec{k}$ и

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}'_x, \vec{r}'_y) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = z - z_0 - z'_x(x - x_0) - z'_y(y - y_0) = 0$$

В результате, уравнение касательной плоскости принимает вид

$$\{z - z_0 = z'_x(x - x_0) + z'_y(y - y_0)\}.$$

где значения производных вычисляются в точке касания (x_0, y_0) .

Если поверхность S задана неявным у-ем:

$$F(x, y, z) = 0, \text{ то}$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \text{ и у-е касательной плоскости переходит в}$$

$$\{(x - x_0)F'_x + (y - y_0)F'_y + (z - z_0)F'_z = 0\}$$

Значения производных берутся в точке (x_0, y_0, z_0)

Нормаль к поверхности

В декартовой системе координат векторы $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$ имеют

$$\vec{r}'_u = \{x'_u, y'_u, z'_u\}, \quad \vec{r}'_v = \{x'_v, y'_v, z'_v\}.$$

Тогда вектор, перпендикулярный касательной плоскости, таков:

$$[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

и имеет координаты:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

Нормируя этот вектор, находим направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ к поверхности S :

$$\cos(\vec{n}, \vec{i}) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{j}) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{k}) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]}{|\vec{r}'_u, \vec{r}'_v|}$$

В частности, если поверхность задана явным уравнением,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & z'_x \\ 1 & z'_y \end{vmatrix} = -z'_x; \quad B = \begin{vmatrix} z'_x & 1 \\ z'_y & 0 \end{vmatrix} = -z'_y$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Тогда,

$$\cos(\vec{n}, \vec{i}) = \frac{-z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$$

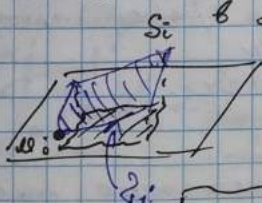
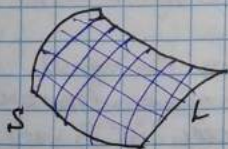
$$\cos(\vec{n}, \vec{j}) = \frac{-z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$$

3.3. Площадь поверхности.

Введём по аналогии с длиной пространственной кривой определение площади поверхности.

Опр. Пусть S — малая пов-ть, ограниченная кусочно-гладким.

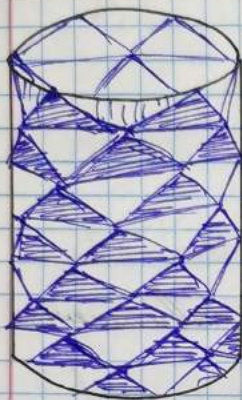


Разобьём эту поверхность кусочно-гладким n частями S_i ($i=1, n$). Введём в каждой из частей произвольную точку, или построим касательную плоскость к поверхности в этой точке. Спроецируем элемент S_i на эту плоскость и получим на этой касательной плоскости квадратурную плоскую фигуру Δ_i с площадью dS_i . Площадь поверхности S представляется пределом

$$S_{\text{пов.}} = \lim_{\max d(S_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n dS_i$$

которой предполагается независимым от способа разбиения поверхности на части и способа выбора точек на этих элементах. Здесь $\delta(S_i)$ - диаметр элемента S_i . Если предел существует, то поверхность называется квасдрруемой

Замечание: Подмется, что естественно всего было бы определить площадь поверхности как предел площади граней, вписанных в поверхность, интегрируемых. По аналогии с данной кривой, определенной как предел периметров вписанных в кривую ломаных. Однако, в показанном выше случае обнаружена несостоятельность такого опр-я.



Шварц показал, что если в цилиндре радиуса R и высоты H вписаны n ступенчатых образцов, вписанных многогранник, то предел площади граней, вообще говоря, не будет стремиться к площади боковой поверхности цилиндра $2\pi R H$.

На вид этот многогранник похож на гребенку сапога, сформированную в гармониче. Поэтому его иногда называют сапогом Шварца

Докажем теорему, позволяющую вычислять площадь гладкой поверхности через двойной интеграл.

Теорема

~ Если гладкая ограниченная поверхность S задана параметр. $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, то площадь поверхности S существует и равна двойному интегралу

$$S_{\text{пов}} = \iint_D |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv$$

Док-во: поскольку поверхность гладкая, её параметризация $\vec{r}(u, v)$ $\in C^1(D)$ следовательно производная $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$ непрерывны и поэтому функции $|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| \in C(D)$. Тогда двойной интеграл от неё существует.

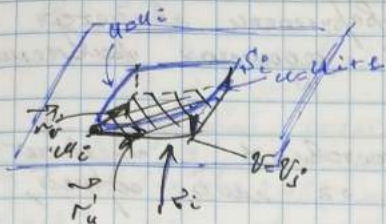
Разобьём поверхность S "u" и "v" линиями на n частей S_i . Тогда плоская область D разобьётся также на n частей горизонтальными и вертикальными $u = u_i$, $v = v_i$



Для этой прямоугольнику $\Delta u_i \Delta v_i$ в область D будет отобразиться кривой некоторой S_i , крайней

$$\delta(S_i) \rightarrow 0 \text{ при } \delta(D_i) \rightarrow 0$$

Выберем точку $M_i \in S_i$ и проведём касательного плоскости к поверхности S в этой точке.



← касательная плоскость

Спроектируем элемент S_i на касательную плоскость и найдем приблизительно площадь проекции $S_i^{\text{пр}}$, показавшего чертёжков. Эта проекция может приблизительно рассматриваться как параллелограмм, по сторонам которого направлены векторы $\vec{r}_u(u_i)$ и $\vec{r}_v(u_i)$, лежащие в касательной плоскости.

Вычисляем приблизительно длины сторон параллелограмма. Одна из них может быть найдена как

$$a = |\vec{r}(u_i, v_j) - \vec{r}(u_i, v_{j-1})| \approx |\vec{r}_u'(u_i, v_j)| \Delta u_i$$

по формуле конечных приращений, где $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$. Аналогичным образом находим вторую сторону.

$$b \approx |\vec{r}(u_i, v_{j+1}) - \vec{r}(u_i, v_j)| \approx |\vec{r}_v'(u_i, v_j)| \Delta v_j$$

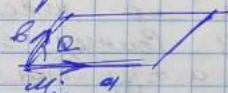
$$\text{где } \Delta v_j = v_{j+1} - v_j$$

Тогда площадь проекции S_i может быть вычислена как

$$S_i^{\text{пр}} \approx ab \sin \theta$$

где θ - угол между сторонами параллелограмма. Представим выражения для a и b :

$$S_i^{\text{пр}} \approx |\vec{r}_u'(u_i, v_j)| \Delta u_i \cdot |\vec{r}_v'(u_i, v_j)| \Delta v_j \cdot \sin \theta = |\vec{r}_u'(u_i, v_j), \vec{r}_v'(u_i, v_j)| \Delta u_i \cdot \Delta v_j$$

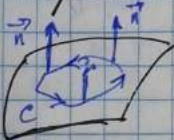


Из определения площади поверхности получаем

$$S_{\text{пов}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S_i^{\text{пр}} = \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\vec{r}_u'(u_i, v_j), \vec{r}_v'(u_i, v_j)| \Delta u_i \Delta v_j = \iint_D |\vec{r}_u', \vec{r}_v'| du dv \quad \text{в силу, что двойного интеграла.} \quad 4.5.9.$$

Все гладкие поверхности разбиваются на 2 класса.

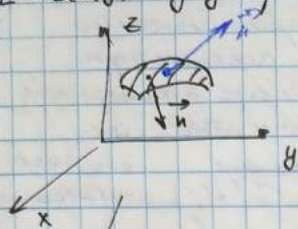
Опр Гладкая поверхность S называется двусторонней, если, обходя по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не имеющему общих точек с её границей, не меняется направления нормали к поверхности.



Если же на поверхности существует хотя бы один замкнутый контур, при обходе по которому направление нормали меняется на противоположное, то поверхность называется односторонней.

Двусторонние поверхности называются также ориентированными, а односторонние - неориентированными.

Естественным примером двусторонней поверхности является плоскость. Любая гладкая поверхность S , заданная уравнением $z = z(x, y)$ - двусторонняя.

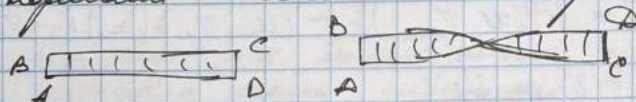


Нормаль может составлять с касательными осн. из либо острый, либо тупой угол.

Естественным примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса.



Его можно получить, взяв полосу бумаги ABCD и склеить так, чтобы точка A совп. с точкой C, а точка B с D, т.е. повернуть на 180° один край перед склеиванием. При обходе листа Мёбиуса по периметру, направление вращения меняется на противоположное.



3.4. Поверхностные интегралы первого рода.

В физических приложениях часто встречаются ф-ии, заданные на некоторой пов-ти. Например, температура на поверхности Солнца, освещенность поверхности, плотность распределения зарядов и т.д. Для таких ф-ий по аналогии с криволинейным интегралом можно ввести понятие поверхностного интеграла.

Опр. Пусть в точках ограниченной кусочно-гладкой поверхности S задана некоторая действительная ф-я $f(u)$, $u \in S$.

Разобьем поверхность S кусочно-гладкими кривыми произвольными образом на n частей, $S_1, S_2, \dots, S_n$. Площадь каждой из частей S_i обозначим ΔS_i .

Выберем на каждой из частей S_i произвольную точку M_i , $M_i \in S_i$ ($i = 1, n$). Составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$$

и рассмотрим ее предел, когда $\max \Delta S_i \rightarrow 0$, где ΔS_i - диаметр части поверхности S_i .

Если существует конечный предел:

$$\lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i,$$

не зависящий от способа разбиения поверхности S на части и от выбора точек M_i на частях S_i , то этот предел называется поверхностным интегралом первого рода от

функции $f(M)$ по поверхности S и обозначается как

$$\iint_S f(M) dS.$$

В декартовой системе координат интеграл записывается в виде $\iint_S f(x, y, z) dS$, но надо иметь в виду, что переменные x, y, z не являются независимыми, а связаны через уравнение поверхности S .

Возникает вопрос об условиях существования и способе вычисления введенного интеграла.

Теорема о вычислении поверхностного интеграла первого рода.

Пусть S - гладкая поверхность, заданная параметрическими уравнениями $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, где D - область ограниченной плоскости, а $f(M)$ - некоторая ограниченная ф-я, опр. на пов-ти S . Тогда справедливо рав-во:

$$\iint_S f(M) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}'_u; \vec{r}'_v| du dv$$

где $\vec{r}(u, v)$ - радиус вектор т.м. пов-ти S .

Таким образом, поверхностный интеграл первого рода вычисляется через двойной.

Док-во: Разобьем пов-ть S "u" и "v" линиями: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ на n частей, выберем на каждой из частей точку M_i и проведем элемент

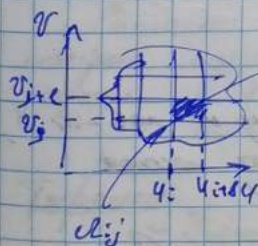
$$\Delta S = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i \quad \text{где } \Delta S_i - \text{площадь части } S_i$$

Используем доказ-ой ранее теорему о площади поверхности.

$$\Delta S = \sum_{i=1}^n f(M_i) \iint_{\Delta S_i} |\vec{r}'_u; \vec{r}'_v| du dv$$

Применяя теорему о ф-ции в двойном интеграле, получаем

$$\Delta S = \sum_{i=1}^n f(M_i) |\vec{r}'_u; \vec{r}'_v| (N_i^*) \Delta u_i \Delta v_i,$$



применяя в интеграле непрерывности векторного произведения т. $N_i^* \in \Delta S_i$.

Замечая, что $\Delta u_i \rightarrow 0$ при $\Delta S_i \rightarrow 0$, и переходя к пределу, имеем

$$\lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \Delta S = \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i^*) \cdot |\vec{r}'_u; \vec{r}'_v| (N_i^*) \Delta u_i \Delta v_i$$

где N_i^* - произв. точки $M_i \in S_i$ в области ΔS_i . Вычисление в правой части сводится к двойному интегралу.

$$\int_{\Sigma} f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}'_u, \vec{r}'_v| du dv$$

и в указанном порядке, ч.б.д.

В случае явного задания точки пов-ти S ур-н $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$:

$$\vec{r}'_x = \vec{i} + z'_x \vec{k}; \quad \vec{r}'_y = \vec{j} + z'_y \vec{k}, \text{ и формула}$$

вычисления определено в.

$$\int_{\Sigma} f(|u|) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy$$

$$\text{о.к. } [\vec{r}'_x, \vec{r}'_y] = \vec{k} - z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j}$$

Замечания:

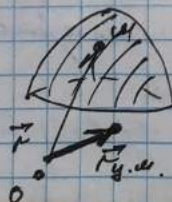
1. Поверхностный интеграл 1-ого рода интерпретируется как для односторонней, так, и для двусторонней п-ти.
2. Поверхностный интеграл 1-ого рода по кусочно-гладкой поверхности сводится к сумме интегралов по гладким частям и непосредственно применимы формулы свертки к двойному.

Поверхностные интегралы 1-го рода часто встречаются в физ-их задачах. Пусть по пов-ти S распределена некоторая масса с поверхностной плотностью $\rho(u)$, $u \in S$.

Такая пов-ть носит название материальной оболочки.

Разбивая эту пов-ть кусочно-гладкими кривыми на n частей S_i и учитывая, что масса каждой S_i может быть приближенно вычислена как $\Delta m_i \approx \rho(u_i) \Delta S_i$, где u_i - некоторая точка, принадлежащая S_i . Тогда можно координаты центра масс материальной оболочки через поверхностный интеграл 1-го рода

$$\vec{r}_{z.m.} = \frac{\int_S \vec{r}(u) \rho(u) dS}{\int_S \rho(u) dS},$$



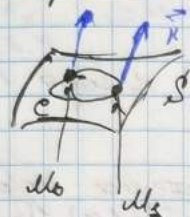
где $\vec{r}(u)$ - радиус-вектор точки u пов-ти S , $\vec{r}_{z.m.}$ - радиус-вектор центра масс.

Здесь были применены формулы вычисления центра масс элементов м.д.

3.5. Поверхностный интеграл второго рода.

В отличие от пов-ых инт. 1-го рода пов-ые интегралы 2-го рода определены только для двусторонних пов-ей. Для этого введем аналогично понятие сторона поверхности.

Пусть S - такая двусторонняя пов-ть. Возьмем на S некоторую точку M , проведем через неё нормаль $\vec{n}$ и выберем одно из двух возможных её направлений. Проверим теперь через т. M на S какую-либо замкнутую контур C , не имеющую общих точек с границей поверхности.



Будем перемещать единичный вектор нормали $\vec{n}$ из точки M вдоль контура C так, чтобы этот вектор всё время оставался перпенд. к S и чтобы, если контр.-е направление при движении непрерывно.

В силу оп-я двуст. пов-ти вектор $\vec{n}$ при поспом. выборе должен занимать первоначальное положение.

При этом при передвижении из т. M в другую т. M' на кривой C нормаль $\vec{n}$ займёт в т. M' некоторое, не совпадающее с первоначальным, положение, таким образом, на двусторонней пов-ти вектор нормали в каждой точке оп-т её положение во всех соответствующих точках.

Оп-е совокупности точек двусторонней поверхности S с приписанным в них направлением нормали называется сторона пов-ти и обозначается $(M, \vec{n}(M))$, $M \in S$.

В других обозначениях $(M, -\vec{n}(M))$ - другая сторона пов-ти.

Пусть S - такая двусторонняя пов-ть: выберем одну из сторон пов-ти $(M, \vec{n}(M))$ и рассмотрим векторную функцию $\vec{A}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, определенную на пов-ти S . Тогда интеграл

$$\int_S (\vec{A}(M), \vec{n}(M)) dS$$

называется поверхностным интегралом второго рода от вектор. функции $\vec{A}$ по поверхности S . Формально этот интеграл внешне похож на поверхностный интеграл первого рода, но подынтегр. ф-я зависит от св-в пов-ти - её нормали $\vec{n}$.

Согласно оп-ю при переходе к другой стороне пов-ти интеграл меняет знак на противоположный. Вероятно, в термине о вычислении поверхностного интеграла второго рода.

Теорема

Пусть S - такая двусторонняя поверхность с выбранной стороной $(M, \vec{n}(M))$, заданная параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$.

Тогда справедлива ф-ла:

$$\int_S (\vec{A}, \vec{n}) dS = \int_D (\vec{A}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) du dv$$

Доказ.: воспользуемся ранее доказанной теоремой о вычислении пов.-ого интеграла 2-го рода.

$$\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) + S = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) [\vec{r}_u; \vec{r}_v] du dv$$

и выразим для нормали к пов-ти S :

$$\vec{n} = \pm \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$$

Если векторы $(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n})$ составляют правую тройку с выбранной направлением нормали, то в ф-ле для $\vec{n}$ можно взять знак "+". Подставляя это выражение в интеграл, приходим к доказываемой теореме, ч.т.д.

Замечание: Представление пов.-ого интеграла 2-го рода в декартовой системе координат.

Если в $\mathbb{R}^3$ введена декартова система координат, то векторную ф-лу $\vec{A}(M)$ и нормаль $\vec{n}(M)$ можно разложить по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. В результате имеем:

$$\vec{A}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

$$\vec{n}(M) = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — косинусы направляющих углов нормали, которые она составляет с осями координат. При этом:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Подставляя выражения для $\vec{A}(M)$ и $\vec{n}(M)$ в пов.-ый интеграл 2-го рода, получаем:

$$\iint_S (\vec{A}(M), \vec{n}(M)) dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

Заметив, что: $dy dz = dS \cos \alpha$, $dz dx = dS \cos \beta$,
 $dx dy = dS \cos \gamma$

~ проекции элемента dS пов.-ти соотв. на координатные пл-ти YOZ , XOZ , XOY .

Имеем окончательно:

$$\iint_S (\vec{A}(M), \vec{n}(M)) dS = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Из приведенного ранее соотношения с косинусами направляющих углов нормали вытекает рав-во:

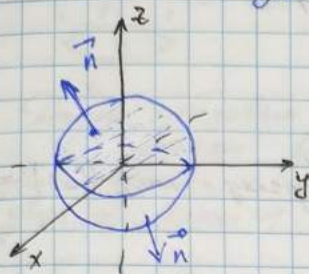
$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S P dy dz + \iint_S Q dz dx + \iint_S R dx dy$$

Каждый из интегралов в правой части похож на двойной, но это — поверхностные интегралы! Служат для охарактеристики при переходе от них к двойным. Приведем на примере:

Пример: Поверхностный интеграл 2-го рода:

$$J = \iint_S R(x, y, z) dx dy$$

по внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ записать в виде двойного интеграла.



Решение: Из ур-я сферы найдем z :

$$z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

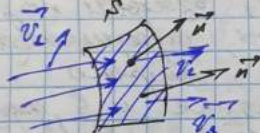
При этом в равенстве "+" берется верхняя половина сферы, у которой нормаль направлена в сторону угла с осью Oz, а "-" - нижняя половина, у которой нормаль направлена в сторону угла с осью Oz. Учитывая знаки косинусов этих углов окончательно имеем:

$$J = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} R(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dx dy - \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} R(x, y, -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dx dy$$

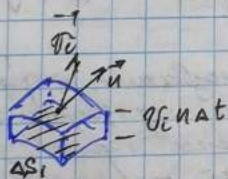
Здесь учтено, что обе половины сферы проектируются в круг $x^2 + y^2 \leq a^2$ на плоскости xy .

Физический смысл:

Пусть в пространстве R^3 движется жидкость, частицы которой в каждой точке $M \in R^3$ имеют к-ть $\vec{v}(M)$

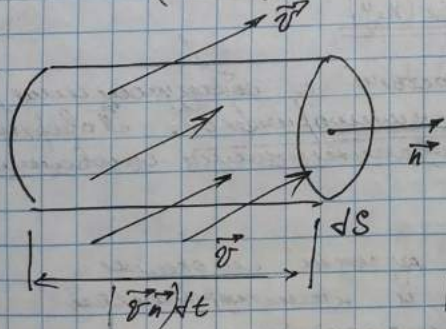


Внешнему количеству жидкости Q протекающей через двустороннюю пов-ть S в заданную сторону за единицу времени. Направление протекания укажем с помощью нормали к пов-ти $\vec{n}(M)$. Разобьем пов-ть S кусочно-гладкими кривыми на n элементов S_i , $i = \overline{1, n}$. Будем считать, что скорость частиц, протекающих через элемент S_i постоянна и равна $\vec{v}(M_i)$, где M_i - какая-нибудь выбранная точка области S_i .



Тогда объем жидкости, протекающий через элементарную dS_i за время dt приблизительно может быть рассчитан как

$$(\vec{v}(M_i))_n dt dS_i = (\vec{v}(M_i), \vec{n}(M_i)) \cdot dt dS_i$$



$$|\vec{v}_\perp| = |\vec{v} \cdot \vec{n}|$$

через площадку ΔS_i равно

$$(\vec{v}(M_i), \vec{n}(M_i)) \Delta S_i$$

Полное кол-во энергии, протекающей через пов-ть S является суммой

$$\sum_{i=1}^N (\vec{v}(M_i), \vec{n}(M_i)) \Delta S_i$$

Если перейти в этой сумме к пределу $\max \Delta S_i \rightarrow 0$, то приходим к

$$Q = \iint_S (\vec{v}(\vec{M}), \vec{n}(\vec{M})) dS$$

В физике полученных поверхностный интеграл 2-го рода принято называть поток поля скоростей.

3.6. Формула Гаусса - Остроградского

Ранее мы вывели формулу, связывающую двойной интеграл по плоской области с криволинейным интегралом 2-го рода по границе этой области (формула Грина).

В этом разделе будет рассмотрена формула, связывающая тройной интеграл по пространственной области с поверхностным интегралом, взятый по внешней стороне поверхности, ограничивающей эту область. Эта формула, широко применяемая и в электростатике и в физике, носит название формулы Гаусса - Остроградского.

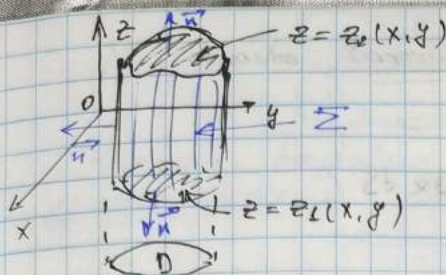
Замечание. По имени первого из двух авторов в названии формулы исторически Остроградский выделял эту формулу в 1828 г. в работе "Замечания о теории тела". Однако на Западе её часто называют формулой Гаусса, хотя последний получил её в 1841 г.

Введём несколько понятий важных для дальнейшего анализа пространственной области V_3 , ограниченную кусочно-гладкими поверхностями.

$$z = z_1(x, y) \quad \text{и} \quad z = z_2(x, y)$$

и боковой цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ , назовём Σ z-цилиндрической. Поверхности $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ назовём её криволинейными основаниями (нижним и верхним).

Аналогично, область, ограниченную кусочно-гладкими пов-стями $x = x_1(y, z)$, $x = x_2(y, z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Ox , назовём x-цилиндрической.



Аналогично определяется и y-цилиндрическая область.

Заметим, что боковая поверхность может и отсутствовать, примером служат шар, у которого есть только верхняя и нижняя полушары.

Далее, назовём пространственную область V простой, если её можно разбить на конечное число z-цилиндрических областей, так и на конечное число областей каждого из двух оставшихся видов.

Рассмотрим некоторую z-цилиндрическую область V_z с основаниями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ и боковой поверхностью Σ . Вся граница области V_z , состоящая из указанных трёх поверхностей обозн. через S . Выберем внешнюю сторону поверхности S и рассмотрим φ -ю $R(x, y, z)$, определённую и непрерывную в области V_z с границей S .

Запишем очевидное равенство:

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))$$

Принтегрируем это равенство по области D на плоскости xOy , в которую проектируется z-цилиндрическая область V_z . Тогда имеем:

$$\iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iiint_{V_z} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy$$

Первый интеграл справа представляет собой поверхностный по верхней основе, а второй по нижней с учётом направления внешних нормалей. Таким образом

$$\iiint_{V_z} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy$$

Прибавив к правой части равенства интеграл по боковой поверхности

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy, \text{ равный } 0, \text{ приходим к равенству}$$

$$\iiint_{V_z} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S_z} R dx dy = \iint_{S_z} R \cos \gamma dS$$

Аналогичные образы для x-цилиндрической области V_x можно установить равенство:

$$\iiint_{V_x} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{S_x} P dy dz = \iint_{S_x} P \cos \alpha dS$$

Для y-цилиндрической области V_y имеем:

$$\iiint_{V_y} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{S_y} Q dz dx = \iint_{S_y} Q \cos \beta dS$$

Теперь у нас есть всё для док-ва следующей теоремы.

Теорема

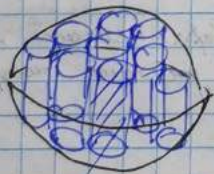
Пусть V - некоторая простая область трехмерного пространства, в которой заданы ф-ии $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C^1(V \cup S)$, где S - кусочно-шаровая двусторонняя пов-ть, ограничивающая область V .

Тогда справедлива ф-ла Гаусса - Остроградского:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \\ &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \end{aligned}$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - проекции внешней нормали к S .

Док-во: разобьем простую область V на конечное число z-цилиндрических областей (см. рис.): $V_i (i = \overline{1, n})$



Для каждой такой области V_i справедливо ранее доказанное рав-во (S_i - граница V_i),

$$\iiint_{V_i} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S_i} R dx dy, \quad i = \overline{1, n}$$

Суммируя это равенство, получаем слева тройной интеграл по всей области V , а справа - сумму поверхностных интегралов, которые без учета интегралов по боковым поверхностям, равных 0, даёт интеграл по всей поверхности S , ограничивающей область V . В итоге,

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R dx dy$$

Теперь разбивая простую область V на конечное число x-цилиндрических областей, приходим к

$$\left\{ \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oint_S P dy dz \right\}$$

Наконец, разбивая простую область V на конечное число y -цилиндрических областей, находим

$$\left\{ \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oint_S Q dz dx \right\}$$

Складывая три полученных рав-ва, приходим к формуле, т.е.д.

Применение формулы Гаусса - Остроградского.

Покажем на примере, что не всегда вычисление пов-ых интегралов удобно сводить к вычислению объёмных.

Возьмём интеграл:

$$I = \oint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$$

по внешней стороне сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Применяя ф-лу Гаусса - Остроградского, находим

$$I = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \text{ переходя к сферическим координатам, получаем скалярно:}$$

$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \Theta d\Theta \int_0^a r^4 dr = \frac{12\pi}{5} a^5$$

Из формулы Гаусса - Остроградского можно вывести формулу вычисления объёма тела через поверхностный интеграл.

Положим $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, имеем

$$V_\tau = \oint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

В частности, при $P = \frac{x}{3}$, $Q = \frac{y}{3}$, $R = \frac{z}{3}$, эта формула даёт

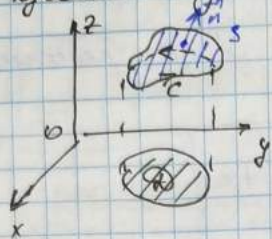
$$V_\tau = \frac{1}{3} \oint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

3.7. Формула Стокса.

В этом разделе будет получена формула, связывающая поверхностный интеграл с криволинейным. Она является обобщением формулы Грина.

Теорема

Пусть C - простой кусочно-гладкий контур, а S - поверхность, натянутая на контур C . Пусть функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ непрерывны на $S \cup C$ и дифференцируемы на S .



Тогда, имеет место формула Стокса

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы нормали к поверхности S , составленной с направлением обхода по контуру C правилом "буравтика" (сторона поверхности остается слева при обходе по контуру C)

Док-во: рассмотрим случаи, когда пов-сть задается явно:

$$z = z(x, y), (x, y) \in D$$

При этом D является проекцией S на плоскость xy и ограничена контуром L .

Преобразим криволинейный интеграл

$$I = \oint_C P dx$$

Заметим, прежде всего, что поскольку контур C лежит на поверхности S , то

$$I = \oint_C P(x, y, z) dx = \oint_L P(x, y, z(x, y)) dx$$

Применяя далее формулу Грина, имеем

$$I = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy$$

Из выражений для направляющих косинусов нормали к поверхности

$$\cos \alpha = \frac{-z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}, \quad \cos \beta = \frac{-z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$$

получаем произвольно:

$$z'_y = - \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$$

Подставляя в двойной интеграл, приходим к

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy =$$

Менее из формулы связи двойного и поверхностного интегралов

$$\Leftrightarrow \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \alpha dS = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \alpha \right) dS.$$

Итак, окончательно

$$\left\{ \oint_C P dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \alpha \right) dS \right\}$$

Аналогичное равенство будет справедливо и для поверхности S , лежащей из конечного числа рассматриваемых частей. Если какая-то из частей перпендикулярна плоскости XOY , то равенство становится тривиальным, поскольку слева и справа будет ноль.

Аналогично получаются два других равенства:

$$\left\{ \begin{aligned} \oint_C Q dy &= \iint_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha + \frac{\partial Q}{\partial x} \cos \beta \right) dS, \\ \oint_C R dz &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) dS. \end{aligned} \right\}$$

Складывая три равенства, приходим к формуле Стокса.

4. Теория поля

Понятие поля имеет в основе многих представлений современной физики, причем выделяются два типа полей - скалярные и векторные. В этом разделе рассмотрим элементарный математический аппарат, применяемый для изучения физических полей.

4.1. Скалярные поля.

Опр. Говорят, что в области $D \subset R^3$ задано скалярное поле, если $\forall M \in D$ поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$.

Примерами скал. полей явл. поле температур внутри некоторого тела, поле освещенности, созд. каким-либо источником света, поле плотности массы $\rho(M)$, поле плотности эл-ого заряда.

Частными случаями пространственного скалярного поля являются поверх. скалярное поле, заданное в области $D \subset R^2$.

Достаточно ясно представляется о поведении скалярного поля могут дать дифференциальное его хар-ки. Одним из них является поверхность уровня.

Опр Поверхностью уровня скалярности поля $u(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле $u(M)$ имеет фиксированное значение " C ".

$$\{ u(x, y, z) = C \}$$

Очевидно, что пов-ти уровня, отвечающие разным значениям, занимают всего область V и имеют две поверхности не имеют общих точек:

$$u(x, y, z) = C_1 ; u(x, y, z) = C_2 \\ C_1 \neq C_2$$

В случае плоского скалярного поля пов-ти уровня переходят в линии уровня: $u(x, y) = C$



С помощью линий уровня можно изображается рельеф местности на топографических картах. Каждая из таких линий состоит из точек, имеющих одну и ту же высоту над уровнем моря. Линии уровня поля температур называются изотермами, поля давления - изобарами.

В физике встречаются поля, обладающие специфическими св-вами симметрии. Аксиосимметричными называются поле $u(M)$, если в пространстве существует направление L , при сдвиге вдоль которого поле переходит само в себя.

Поверхности уровня аксиосимметричного поля - семейство цилиндрических поверхностей.



Если для скалярного поля $u(M)$ можно подобрать такую цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , в которой оно является функцией переменных r и z : $u = u(r, z)$, то поле называется аксиосимметричным. Пов-ти уровня такого поля - пов-ти вращения вокруг оси.

Если значения скалярного поля $u(M)$ зависят лишь от расстояния r до некоторой точки O , то такое поле называется сферическим. Поверхности уровня сферического поля - семейство концентрических сфер с центром в O .

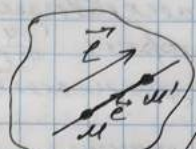




При изучении скалярного поля можно описать его локальные св-ва, т.е. его изменение при переходе от данной т.м к близким точкам.

Опр Производной по направлению скалярного поля $u(M)$ в т.м M называется значение предела

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(M') - u(M)}{h}$$



где $h = |\vec{MM'}|$, а $\vec{e}$ - единичный вектор в направлении $\vec{MM'}$. Эта производная хар-т скорость изменения поля $u(M)$ в направлении $\vec{e}$.

Для вычисления $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$ введём декартову систему координат, в которой скалярное поле является функцией трёх переменных $u(x, y, z)$. Если вектор $\vec{e}$ образует с осями координат углы α, β и γ , то вектор $\vec{MM'}$ можно записать в виде:

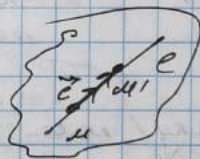
$$\vec{MM'} = h(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma)$$

а поле

$$u(M') = u(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta, z + h \cos \gamma)$$

является сложной функцией аргумента h . Тогда из опр-я производной по направлению получим:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{e}} = \left. \frac{du}{dh} \right|_{h=0}$$



Применяя правило дифференцирования сложной ф-ии, находим

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

Полученное выражение можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов - единичный вектор $\vec{e}$, определяющий направление, по которому берётся производная $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$ и вектора с компонентами $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

Этот вектор называется градиентом скалярного поля $u(M)$ и обозначается

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

Из выражения для производной по направлению:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = (\vec{e}, \text{grad } u) \right\}$$

Отсюда можно указать физический смысл введенного понятия. Перепишем соотношение как

$$\frac{\partial u}{\partial e} = |\text{grad } u| \cdot \cos \theta$$

где θ угол между $\text{grad } u$ и единичным вектором $\vec{e}$. Из формулы видно, что в каждой точке, где $\text{grad } u \neq 0$, существует единственное направление, в котором $\frac{\partial u}{\partial e}$ имеет наибольшее значение.

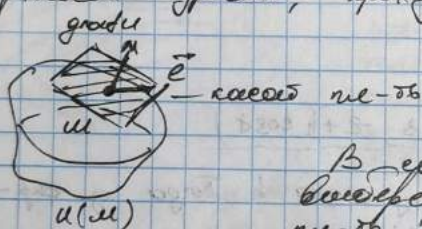


Это значение достигается при $\theta = 0$, т.е. направление $\text{grad } u$ указывает напр-е наиб. роста скалярного поля, а скорость этого возрастания задается модулем вектора $\text{grad } u$.

$$\frac{\partial u}{\partial e} = |\text{grad } u|$$

Наши выводы о смысле градиента не зависят от выбора системы координат.

Замечая, что градиент поля направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.



В ермином деле. Для пов-ти $u(x,y,z)=c$, выберем точку M и построим в ней кас. пл-ть к пов-ти. Для любого вектора $\vec{e}$, лежащего в касат. пл-ти $\frac{\partial u}{\partial e} = 0$.

поскольку поле не меняется вдоль пов-ти уровня. С другой стороны,

$$\frac{\partial u}{\partial e} = (\vec{e}, \text{grad } u) = 0,$$

т.е. $\text{grad } u$ перпенд. любому вектору $\vec{e}$ из кас. пл-ти. Знаком, он совп. по нормали к касат. пл-ти, т.е. к пов-ти уровня.

4.2. Векторное поле.

Спр. Говорят, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ определено векторное поле, если $\forall \vec{r} \in \Omega$ поставлен в соответствие вектор $\vec{A}(\vec{r})$.

Физическими примерами век. полей служат поле эк-тей стационарного потока жидкости, поле магнитных и т.д.

Если в пространстве введен декартова система координат, то векторное поле можно представить в виде (через проекции)

Спр. Пусть

Если известны спр-е век

В д

Спр.



$$\vec{A}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

т.е. совокупн. трёх скал. ф-ий $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

Опр. Пусть в области $M \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{A}(M)$. Кривая L , лежащая в области M , называется векторной линией, если в каждой точке этой кривой направление поля $\vec{A}(M)$ совпадает с направлением векторного поля $\vec{A}$.



Важно помнить, что в исследовании векторных полей играет важную роль понятие векторной линии поля $\vec{A}$, проходящей через заданную т.м.

Если кривая L задана векторной функцией $\vec{r} = \vec{r}(t)$ с начальной точкой $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, то вектор $\vec{r}'(t)$, как известно, направлен по касательной к кривой. Тогда из опр-я имеем следующую систему ф-ий для опр-ия векторной линии.

$$\begin{cases} \vec{r}'(t) = \lambda \vec{A} \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

В декартовой с.к.:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k} \\ \vec{A} &= P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k} \end{aligned}$$

и систему ф-ий переходим в

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda P, & x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = \lambda Q, & y(t_0) = y_0 \\ z'(t) = \lambda R, & z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Используя константу λ , приходим:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

Опр. Опр-ую некоторой пов-ти S часть пространства в которой задано векторное поле $\vec{A}$ называется векторной трубкой, если в каждой точке пов-ти S нормаль к S ортогональна вектору $\vec{A}$ в этой же точке.



Таким образом, пов-ть векторной трубки как бы "собирает" из векторных линий поле $\vec{A}$.

Заметим, что для векторных полей различают те же виды симметрии, что и для скалярных полей.

Опр Если в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{A}$, а S — ориентированная поверхность с выбранным направлением нормали $\vec{n}$, то поверхностный интеграл

$$\oint_S (\vec{A}, \vec{n}) dS$$

называется поток векторного поля $\vec{A}$ через пов-ть S .

Если $\vec{A} = \vec{V}$ — поле скоростей стационарного потока жидкости, то, как мы ранее видели, этот величина определяет кол-во жидкости, протекающее в единицу времени через пов-ть S в направлении нормали $\vec{n}$.

Опр По аналогии поверхностный интеграл 2-го рода

$$\oint_S [\vec{n}, \vec{A}] dS$$

называется вращением векторного поля $\vec{A}$ по выбранной стороне пов-ти.



4.3. Понятие аддитивной ф-ции области и проверки пр-ва аддитивности

Мы уже ввели понятие градиента скалярного поля, используя декартову систему координат:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

Хотелось бы ввести оп-е, не зависящее от системы координат. Это можно сделать, введя понятие аддитивной ф-ции области.

Опр Пусть Ω — произвольная область в трёхмерном пространстве. Скалярная (или векторная) ф-ция $F(\Omega)$ называется аддитивной ф-цией области, если выполнены следующие два условия:

① Если ф-ция оп-на для областей Ω_1 и Ω_2 , то она определена и для их объединения $\Omega_1 \cup \Omega_2$: $F(\Omega_1 \cup \Omega_2)$

② Если области не имеют общих точек: $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, то

$$F(\Omega_1 \cup \Omega_2) = F(\Omega_1) + F(\Omega_2)$$

Опр Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ — область трёхмерного пространства, в которой оп-на скалярная (или векторная) аддитивная функция области $F(\Omega)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$). Пределом ф-ции $F(\Omega)$ при "сжатии" области Ω в точку $M \in \Omega$ называется число (или вектор) A .

$$\lim_{T \rightarrow M_0} F(T) = A$$

таким, что:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall T \in O_\delta(M_0): \|F(T) - A\|_{R^n} < \varepsilon,$$

где $O_\delta(M_0)$ - δ -окрестность т. M_0 , $\|\cdot\|_{R^n}$ - норма в пространстве R^n .

Производная по объёму

~ Производной по объёму от аддитивной ф-ии области $F(T)$ в точке M_0 , где $T \in R^3$ и имеет конечный объём $V(T) > 0$, а $M_0 \in T$, называется предел:

$$\lim_{T \rightarrow M_0} \frac{F(T)}{V(T)}$$

Пример:

Пусть в области $\Omega \subset R^3$ непрерывно распределена масса некоторого вещества. В этом случае каждой точке $T \in \Omega$ отвечает масса вещества $m(T)$.

Производная по объёму:

$$\lim_{T \rightarrow M_0} \frac{m(T)}{V(T)} = \rho(M_0)$$

определяет плотность массы в т. M_0 .

Инвариантное определение градиента

Пусть в области $\Omega \subset R^3$ задано скалярное поле $u(M)$. Выберем любую точку $M_0 \in \Omega$, ограниченную кусочно-гладкой двусторонней поверхностью S . Градиентом скалярного поля в точке M_0 области Ω называется производная по объёму.

$$\text{grad } u(M_0) = \lim_{T \rightarrow M_0} \frac{1}{V(T)} \int_S \vec{n}(M) \cdot u(M) dS$$

где $\vec{n}(M)$ - внешняя нормаль к поверхности S .

Теорема

(о вычислении градиента в декартовых координатах)
~ Если введена декартова система координат, то градиент скалярного поля $u(x, y, z) \in C^1(\Omega)$ в любой т. $M(x, y, z) \in \Omega$ существует и вычисляется по формуле

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

Док-во:

рассмотрим область $T \subset \Omega$, ограниченную кусочно-гладкой поверхностью S . Представим внешнюю нормаль $\vec{n}$ к S в декартовой координате

$$\vec{n} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma.$$

Подставим это выражение в поверхностный интеграл, входящий в определение градиента:

$$\oint_S \vec{n}(\vec{u}) u(\vec{u}) dS = \oint_S \vec{i} u(\vec{u}) \cos \alpha dS + \oint_S \vec{j} u(\vec{u}) \cos \beta dS + \oint_S \vec{k} u(\vec{u}) \cos \gamma dS$$

Применим ф-лу Г.-О.

$$\oint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

и трех попарно взятых интегралов.

$$\oint_S \vec{n}(\vec{u}) u(\vec{u}) dS = \vec{i} \iiint_V \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz + \vec{j} \iiint_V \frac{\partial u}{\partial y} dx dy dz + \vec{k} \iiint_V \frac{\partial u}{\partial z} dx dy dz$$

Применим теперь теорему о среднем для трехкратных интегралов, действующую на каждой из частей производных скалярного поля $u(\vec{u})$. В результате приходим к

$$\oint_S \vec{n}(\vec{u}) u(\vec{u}) dS = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_1} \cdot V(V) + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_2} \cdot V(V) + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_3} \cdot V(V),$$

где $M_1, M_2, M_3 \in V$. Подставим это выражение под предел итеем

$$\text{grad } u(M_0) = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\vec{i} \frac{\partial u(M_1)}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u(M_2)}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u(M_3)}{\partial z} \right).$$

Поясню при составлении подбласти V в т. M_0 : $M_1 \rightarrow M_0$ ($i=1, 2, 3 \dots$) получаем доказываемое соотношение.

Следствия: ① В ходе док-вои получили соотношение:

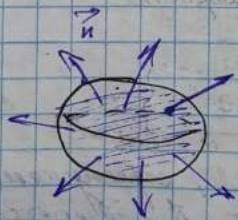
$$\oint_S \vec{n}(\vec{u}) u(\vec{u}) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) dx dy dz,$$

которое можно записать в альтернативном виде

$$\left\{ \oint_S \vec{n}(\vec{u}) u(\vec{u}) dS = \iiint_V \text{grad } u dV \right\} \sim \text{одна из формул Г.-О.}$$

② Понимая в полученной ф-ле $u(\vec{u}) = 1$, приходим к равенству

$$\oint_S \vec{n}(\vec{u}) dS = \vec{0}$$



Сумма всех векторов "беленка" равна 0!

След

4.4. Инвариантное определение дивергенции векторного поля, ее вычисления и физ. смысл.

Введем теперь инвариантные образы две дифференциальных операций, примененных к векторным полям

Опр. Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{A}$, а $\tau \in \Omega$ - точка подобия, ограниченной кусочно-гладкой лоб-ю S . Дифференциал векторного поля $\vec{A}$ в т. $M_0 \in \Omega$ называется производной по объему от потока векторного поля $\vec{A}$, т.е.

$$\left\{ \operatorname{div} \vec{A}(M_0) = \lim_{\tau \rightarrow M_0} \frac{1}{V(\tau)} \oint_S (\vec{n}(\tau), \vec{A}(\tau)) dS \right\}$$

Теорема (о вычислении дивергенции)

Если введем декартова система координат, то дивергенция векторного поля $\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, где $\vec{A} \in C^1(\Omega)$ в т. $M_0(x, y, z) \in \Omega$ существует и вычисляется по ф-ле:

$$\left\{ \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right\}$$

Док-во: пусть $\tau \in \Omega$ - подобия, ограниченная кусочно-гладкой двусторонней поверхностью S . Разная внешнего нормали $\vec{n}$ к поверхности S по базису

$$\vec{n} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$$

и подставляя в выражение для потока, находим

$$\left\{ \oint_S (\vec{n}, \vec{A}) dS = \oint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \right\}$$

Из формулы Гаусса-Остроградского следует, что

$$\oint_S (\vec{n}, \vec{A}) dS = \iiint_{\tau} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Применяя теорему о среднем в тройке изотерм с учетом непрерывности производных векторного поля, имеем:

$$\oint_S (\vec{n}, \vec{A}) dS = V(\tau) \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) M^*$$

где $M^* \in \tau$. Подставляя это выражение в определение дивергенции и учитывая, что при $\tau \rightarrow M_0$, $M^* \rightarrow M_0$, приходим к доказываемой формуле.

4.5.9.

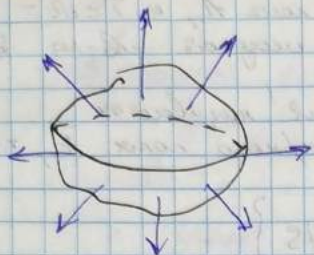
Следствие. Из доказанной ф-лы для дивергенции вытекает инвариантная форма записи формулы Г.-О.

$$\left\{ \oint_S (\vec{n}, \vec{A}) dS = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV \right\}$$

Физический смысл дивергенции

Пусть $\vec{A}(M) = \vec{V}(M)$ - поле α -той частицы нестационарной жидкости, движущейся стационарно, тогда

$\oint_S (\vec{n}, \vec{V}) dS$ - количество жидкости, протекающей через пов-ть S в направлении нормали $\vec{n}$ в единицу времени, а $\oint_S (\vec{n}, \vec{V}) dS$ -



количество жидкости, вытекающей из области τ через пов-ть S в единицу времени (т.к. $\vec{n}$ - внешняя нормаль к S). Если эта внешняя положительна, то отношение

$$\frac{1}{V(\tau)} \oint_S (\vec{n}, \vec{V}) dS \text{ представится собой}$$

среднего значение потока, т.е. количество жидкости, выходящей за единицу времени в единице объема области τ . Если данная величина положительна, то отношение является средней плотностью стоков, т.е. количеством жидкости, исходящего за единицу времени в единице объема области τ .

Поскольку α отношение берется предел, то дивергенция поля скорости жидкости представится плотностью источников (стоков) в т.м. Другими словами, дивергенция указывает на наличие источников (стоков) в векторном поле $\vec{A}$.

4.5. Инвариантное определение ротора векторного поля, по вычислению и другим путем

Опр. Пусть $\vec{A}$ - векторное поле, заданное в области $\Omega \subset R^3$, а $\tau \in \Omega$ - любая подобласть, ограниченная двусторонней кусочно-гладкой поверхностью S . Ротором (вихрем) вект. поля $\vec{A}$ в т.м. $M \in \Omega$ называется производная по объему от вращения векторного поля $\vec{A}(M)$

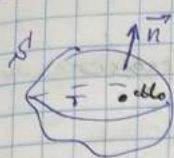
$$\text{rot } \vec{A}(M_0) = \lim_{\tau \rightarrow M_0} \frac{1}{V(\tau)} \oint_S (\vec{n}, \vec{A}(M)) dS,$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к S .

Теорема (о вычислении ротора). Если введена декартова система координат, то ротор векторного поля $\vec{A}(x, y, z) = A(x, y, z)\vec{i} + B(x, y, z)\vec{j} + C(x, y, z)\vec{k}$, $\vec{A} \in C^1(\Omega)$ в т.м. $(x, y, z) \in \Omega$ существует и вычисляется по ф-ле:

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Док-во:



Выберем т. М₀ области V и рассмотрим малую область T с R, которая её содержит. Преподложим выражение для вращающего векторного поля

$$\oint_S [\vec{A}, \vec{A}] dS = \oint_S \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = 0$$

$$\vec{n} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k} \quad \text{— нормаль}$$

$$= \vec{i} \oint_S (R \cos \beta - Q \cos \gamma) dS + \vec{j} \oint_S (P \cos \gamma - R \cos \alpha) dS + \vec{k} \oint_S (Q \cos \alpha - P \cos \beta) dS = 0 \quad \text{применяя тригонометрические формулы Г.-О.}$$

$$= \vec{i} \oint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dV + \vec{j} \oint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dV + \vec{k} \oint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dV = 0$$

данной тригонометрии используем теорему о среднем в тройном интеграле

$$= \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)_{M_1} V(T) + \vec{j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)_{M_2} V(T) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{M_3} V(T),$$

где $M_1, M_2, M_3 \in T$.

Подставляя полученное соотношение в определение ротора и переходя к пределу $T \rightarrow M_0$, находим

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Физический смысл ротора.

Будем, как прежде, рассматривать поле $\vec{A}$ как поле скоростей стационарного потока жидкости. Мысленно в жидкость помещаем маленькое колёсико с центром в т. М₀ и позволяем ему вращаться по окружности колеса. Это позволяет колёсик вращаться вокруг своей оси под действием потока жидкости. Пусть единичный вектор $\vec{e}$ направлен вдоль оси вращения. Представим приблизительно угловую скорость вращения колёсика, которую будем считать показывающей, когда колёсико вращается против хода часовой стрелки, или наоборот с концы вектора $\vec{e}$.



Линейную скорость V_n каждой точки обода колёсика считаем средне-арифметическим значением по всем направлениям обода тангенциальной проекции скорости жидкости $V_n(M) = (\vec{V}(M), \vec{e}(M))$, где $\vec{e}(M)$ — единичный вектор, касательный к ободу и направленный в сторону вращения колёсика. Таким образом, если ввести радиус колёсика R и тангенциальную скорость V_n , то

$$\omega_k = \frac{1}{2\pi R M} \iint_{S_{об}} (\vec{v}(M), \vec{z}(M)) dS$$

где $S_{об}$ - поверхность обода. Величина угловой скорости может быть вычислена как

$$\omega_k = \frac{V_c}{R} = \frac{1}{2V_0} \iint_{S_{об}} (\vec{v}, \vec{z}) dS$$

где $V_0 = \pi R^2 M$ - объем колесика.

Введем $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности обода колесика. Тогда векторы $(\vec{n}, \vec{e}, \vec{z})$ образуют правую тройку и поэтому:

$$\vec{z} = [\vec{e}, \vec{n}]$$

Тогда, в силу св-ва смешанного произведения векторов

$$(\vec{v}, \vec{z}) = (\vec{v}, [\vec{e}, \vec{n}]) = (\vec{v}, \vec{z}, \vec{n}) = (\vec{e}, \vec{n}, \vec{v}) = (\vec{e}, [\vec{n}, \vec{v}])$$

Поэтому,

$$\omega_k = \frac{1}{2V} \iint_{S_{об}} (\vec{e}, [\vec{n}, \vec{v}]) dS = \frac{1}{2} (\vec{e}, \frac{1}{V} \iint_{S_{об}} [\vec{n}, \vec{v}] dS)$$

Поверхностный интеграл в последнем выражении можно распространить на полную поверхность колесика S , т.к. на верхней и нижней основаниях колесика $\vec{n} \parallel \vec{e}$ и поэтому $(\vec{e}, [\vec{n}, \vec{v}]) = (\vec{v}, [\vec{e}, \vec{n}]) = 0$. В результате имеем

$$\omega_k = \frac{1}{2} (\vec{e}, \frac{1}{V} \oint_S [\vec{n}, \vec{v}])$$

Переходя в этом выражении к пределу "сжатия" колесика в т.м. и пользуясь определением ротора векторного поля, приходим к

$$\omega(\vec{e}) = \frac{1}{2} (\vec{e}, \text{rot } \vec{v})$$

Как следует из полученного соотношения, величина $\omega(\vec{e})$ принимает наибольшее значение $\frac{1}{2} |\text{rot } \vec{v}|$, когда $\vec{e} \uparrow \uparrow \text{rot } \vec{v}$.

Таким образом, ротор векторного поля $\vec{v}(M)$ - это вектор, лежащий в данной точке M направлении вектора наибольшей угловой скорости бесконечно малого колесика с центром в т.м. вращающегося поля $\vec{v}$, ч.т.о модуль равен угловой скорости вращения этого колесика.

4.6. Оператор Гамильтона (вектор "градиента"). Дифференциальные операции второго порядка

Для выполнения сложных расчетов со скалярными и векторными полями удобно ввести векторный дифференциальный оператор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

называемый оператором Гамильтона или вектором "набла".

С помощью "набла" удобно записываются все ранее введенные дифференциальные операции над скалярными $u(x, y, z)$ и векторными $\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ полями. В самом деле,

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \nabla u$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\nabla, \vec{A})$$

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\nabla, \vec{A}]$$

т.е. это умножение на скалярное поле, скалярное и векторное произведения с векторным полем.

При выполнении действий с вектором "набла" необходимо учитывать его дифференциальную связь наряду с применяемыми правилами векторной алгебры.

Название "набла" ввел английский математик и механик Гамильтон (1805 - 1865) - так прозывается сферический тригонометрический инструмент, имеющий треугольную форму.

Продемонстрируем на примере правила действий с векторами "набла". Вычислим дифференциальное векторное произведение двух векторных полей:

$$\text{div} [\vec{A} \times \vec{B}]$$

Запишем дифференциал на вектор "набла":

$$\text{div} [\vec{A}, \vec{B}] = (\nabla, [\vec{A}, \vec{B}]) = (\nabla, [\vec{A}, \vec{B}]) + (\nabla, [\vec{A}, \vec{B}]) =$$

теперь наша задача посчитать на "скалярное" поле ∇ , пользуясь правилами векторной алгебры,

$$= (\nabla, [\vec{A}, \vec{B}]) - (\nabla, [\vec{B}, \vec{A}]) = \text{применяя циклическое правило для смешанного произведения векторов} =$$

$$= (\vec{B}, [\nabla, \vec{A}]) - (\vec{A}, [\nabla, \vec{B}]) = (\vec{B}, \text{rot } \vec{A}) - (\vec{A}, \text{rot } \vec{B})$$

Наряду с "набла" можно ввести два новых оператора:

$(\vec{A}, \nabla)$ - обобщенный дифференциальный оператор.

$[\vec{A}, \nabla]$ - оператор-вектор.

Найдём, например, действие первого слагаемого на радиус-вектор

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Раскроем покомпонентное произведение:

$$(\vec{A}, \nabla) \vec{r} = (P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \vec{A}$$

Это справедливо для любого векторного поля:

$$(\vec{A}, \nabla) \vec{r} = \vec{A}$$

Аналогично найдём результат действия $[\vec{A}, \nabla]$ скалярно, векторно на $\vec{r}$.

$$[\vec{A}, \nabla] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{i} (Q \frac{\partial}{\partial z} - R \frac{\partial}{\partial y}) + \vec{j} (R \frac{\partial}{\partial x} - P \frac{\partial}{\partial z}) + \vec{k} (P \frac{\partial}{\partial y} - Q \frac{\partial}{\partial x})$$

Тогда,

$$([\vec{A}, \nabla], \vec{r}) = (Q \frac{\partial}{\partial z} - R \frac{\partial}{\partial y})x + (R \frac{\partial}{\partial x} - P \frac{\partial}{\partial z})y + (P \frac{\partial}{\partial y} - Q \frac{\partial}{\partial x})z = 0$$

$$[\vec{A}, \nabla], \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Q \frac{\partial}{\partial z} - R \frac{\partial}{\partial y} & R \frac{\partial}{\partial x} - P \frac{\partial}{\partial z} & P \frac{\partial}{\partial y} - Q \frac{\partial}{\partial x} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(-P-P) + \vec{j}(-Q-Q) + \vec{k}(-R-R) = -2\vec{A}$$

Для направленного использования "набла" возьмёмся за пример:

$$(\vec{A}, \text{rot} \vec{A}) = (\vec{A}, \nabla, \vec{A}) = 0 ???$$

~ Два градиентных вектора в смешанном произв., но набла действует только на одно поле!

Замечание: Для формул в теории р-векторов в декартовых координатах мы получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{n} \cdot d\vec{S} &= \int_V \text{grad} u \cdot dV \\ \oint_S (\vec{n}, \vec{A}) dS &= \int_V \text{div} \vec{A} \cdot dV \\ \oint_S [\vec{n}, \vec{A}] dS &= \int_V \text{rot} \vec{A} \cdot dV \end{aligned}$$

Эти формулы в совокупности составляют соотношение Гаусса - Остроградского. Их легко запомнить, если заметить, что

кабля". Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{n} \cdot d\vec{S} &= \iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV \\ \oint_S (\vec{n}, \vec{A}) dS &= \iiint_V (\nabla, \vec{A}) dV \\ \oint_S [\vec{n}, \vec{A}] dS &= \iiint_V [\nabla, \vec{A}] dV \end{aligned}$$

В этих соотношениях формулы в поверхностной интеграле заменяются на "кабля" в тройном (числовом) интеграле

В приложениях векторного анализа приходится обращаться не только с рассматриваемыми дифференциальными операторами первого порядка, но и с их комбинациями. Особое место в физике занимают комбинации операторов второго порядка, т.е. комбинации комбинации градиента, ротора и дивергенции.

Мы можем составить $3 \times 3 = 9$ таких комбинаций, но не все из них имеют смысл, поскольку градиент применяется к скалярным полям, а див и рот - к векторным.

Запишем комбинации в таблицу:

	grad u	div $\vec{A}$	rot $\vec{A}$
grad	∇u	$\nabla(\nabla \cdot \vec{A})$	$\nabla(\nabla \times \vec{A})$
div	Δu	$\nabla(\nabla \cdot \vec{A})$	0
rot	0	$\nabla(\nabla \times \vec{A})$	$\nabla(\nabla \times \vec{A})$

Криволинейные - запрещенные операции.

$$\text{div rot } \vec{A} = (\nabla, \nabla \times \vec{A}) = (\nabla, \nabla) \cdot \vec{A} = 0$$

$$\text{rot grad } u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = 0$$

Остались только три непротиворечивых операции.

$$\text{div grad } u = (\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla) u = \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u$$

Оператор $(\nabla, \nabla) \equiv \Delta$, являющийся дифференциальным оператором 2-го порядка, называемый оператором Лапласа и комбинацией двух других операций. Рассматриваем:

$$\text{rot rot } \vec{A} = [\nabla, [\nabla \times \vec{A}]] = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla, \nabla) \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

Здесь мы применили такое правило векторной алгебры.

4.7. Потенциальное и соленоидальное поля. Основная теорема векторного анализа.

Опр. Векторное поле $\vec{A}(M)$, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называется потенциалом, если его можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля $u(M)$, т.е.

$$\vec{A} = \text{grad } u$$

Если скалярное поле $u(x)$ в этом случае называется потенциальным векторного поля $\vec{A}(x)$.

Из определения потенциального поля вытекает, что его векторные линии представляют собой линии градиента его потенциала, т.е. линии наибольшего изменения потенциала.

Теорема (о потенциале)

Если векторное поле $\vec{A}(x)$ имеет потенциал, то он определяется с точностью до постоянного скалярного.

Док-во: предположим, что скалярные поля $u(x)$ и $v(x)$ являются потенциалами векторного поля $\vec{A}(x)$, т.е.

$$\vec{A} = \text{grad } u, \quad \vec{A} = \text{grad } v.$$

Тогда верно, $\text{grad } u = \text{grad } v$ или $\text{grad } (u - v) = 0$.

Из формулы связи градиента с производной по направлению имеем

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (u - v) = 0 \right\} \text{ по } \forall \text{ направлению } \varepsilon.$$

Но тогда, $u - v = \text{const}$, ч.т.д.

Теорема (о необходимых и дост. условиях потенциальности поля)

Для того, чтобы векторное поле $\vec{A}(x) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ было потенциальным и достаточно, чтобы

$$\text{rot } \vec{A} = 0$$

Док-во: необх-ть $\Rightarrow$

Пусть векторное поле $\vec{A}(x)$ - потенциальное. Тогда по определению: $\vec{A} = \text{grad } u$, и $\text{rot } \vec{A} = \text{rot grad } u = 0$.

дост-ть $\Leftarrow$

Пусть $\text{rot } \vec{A} = 0$ во всех точках области $D \subset \mathbb{R}^3$.

Тогда,

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

и имеем три рав-ва:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$$

Как мы ранее показали, эти условия предоставляют необходимые и достаточные условия того, что

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

является полным диф-ом некоторой ф-ии, т.е.

$$Pdx + Qdy + Rdz = du.$$

$$\Rightarrow P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}, R = \frac{\partial u}{\partial z},$$

Тогда,

$$\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \text{grad } u$$

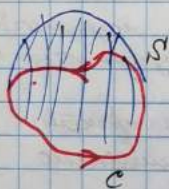
т.е. векторное поле $\vec{A}$ является потенциальным.

Опр. Пусть $\vec{A}$ - векторное поле, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, а C - замкнутая кусочно-гладкая кривая, лежащая в области Ω . Криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r})$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{A}$ вдоль кривой C .

Если $\vec{A}$ представлял собой векторное поле, то его циркуляция вдоль кривой C имеет смысл работы этого поля вдоль пути C .



Если контур C ограничивает некоторую кусочно-гладкую двустороннюю пов-сть S то циркуляцию векторного поля $\vec{A}$ вдоль кривой C можно выразить по формуле Стокса. через поверхностный интеграл 2-го рода.

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы нормали к поверхности S , а P, Q, R - проекции векторного поля $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ на оси координат. Формула Стокса имеет вид

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \iint_S (\vec{n}, \nabla \vec{A}) dS = \iint_S (\vec{n}, [\nabla, \vec{A}]) dS$$

и, приняв во внимание определение ротора, приходим к инвариантной форме записи формулы Стокса

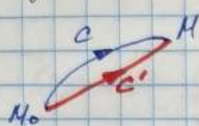
$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \iint_S (\text{rot } \vec{A}, \vec{n}) dS$$

Эта формула показывает, что циркуляция векторного поля по контуру, ограничивающему поверхность S , равна потоку вихря этого поля через пов-сть S .

Поскольку для потенциального поля $\text{rot } \vec{A} = 0$, то циркуляция по любой криволинейно-замкнутой контуре, лежащей в области определения поля, равна 0

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = 0$$

Отсюда в частности следует что работа потенциального поля вдоль любой соединяющей точки M_0 и M не зависит от формы пути интегрирования.



$$\int_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_{C'} (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_{M_0}^M (\vec{A}, d\vec{r})$$

Это обстоятельство позволяет найти потенциал векторного поля через криволинейный интеграл.

Поскольку $\vec{A} = \text{grad } u$ по определению, то

$$\int_{M_0}^M (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_{M_0}^M (\text{grad } u, d\vec{r}) = \int_{M_0}^M \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = \int_{M_0}^M du = u(M) - u(M_0)$$

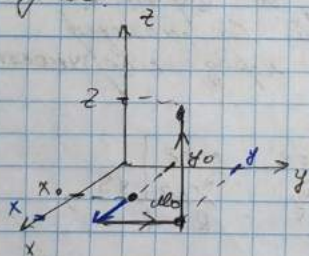
Отсюда следует выражение для потенциала потенциального поля $\vec{A}$

$$u(M) = \int_{M_0}^M (\vec{A}, d\vec{r}) + C \quad \text{где } C - \text{произвольная постоянная}$$

Из предыдущей формулы видно, что работа потенциального поля по любому пути, соединяющему точки M_0 и M , определяется разностью потенциалов

$$\int_{M_0}^M (\vec{A}, d\vec{r}) = u(M) - u(M_0)$$

Для определения потенциала $u(x, y, z)$ удобно выбрать начальный путь, соединяющий точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$, как изображено на рисунке.



Путь состоит из трёх отрезков, примем каждый раз axis движимся параллельно одной из координатных осей.

Подставим в интеграл векторное поле в виде

$$\vec{A} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

получим три интеграла Римана:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C$$

На формуле начальной точки M_0 обычно берут начало координат $O(0, 0, 0)$, если она не является особой.

Соленоиальное поле

Опр. Векторное поле $\vec{A}(M)$, определённое в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, называется соленоиальным, если его можно представить в форме ротора некоторого другого векторного поля $\vec{B}(M)$, $M \in \Omega$, т.е.

$$\vec{A} = \text{rot } \vec{B}$$

Векторное поле $\vec{B}$ называют векторным потенциалом поля $\vec{A}$, а само поле $\vec{A}$ часто называют ещё вихревым.

Теорема (о векторном потенциале)
 Векторное потенциальное векторное поле $\vec{A}$ определено до аддитивной константы, где $\vec{A} = \text{rot } \vec{B}$, где $\vec{B}$ - произвольное векторное поле.

Док-во: пусть поле $\vec{A}$ имеет два векторных потенциала $\vec{B}$ и $\vec{C}$, т.е. $\vec{A} = \text{rot } \vec{B}$ и $\vec{A} = \text{rot } \vec{C}$. Вычитая из первого равенства второе, получаем: $\text{rot } (\vec{B} - \vec{C}) = 0$ во всех точках области определения Ω . Но тогда по критерию потенциальности поле $\vec{B} - \vec{C}$ является потенциальным. Тогда в силу $\text{rot } (\vec{B} - \vec{C}) = 0$, к.т.д.

Теорема (о необходимости и достаточности условия соленоиальности поля)
 Для того, чтобы векторное поле $\vec{A}$, непрерывно-дифференцируемое в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы $\text{div } \vec{A} = 0$ в области Ω .

$$\text{div } \vec{A} = 0$$

Док-во: проверим док-во в декартовых координатах.

$\Rightarrow$ необходимость

Пусть векторное поле соленоидально, т.е. $\vec{A} = \text{rot } \vec{B}$. Но, тогда $\text{div } \vec{A} = \text{div } \text{rot } \vec{B} = 0$.

$\Leftarrow$ достаточность

Пусть дано векторное поле

$$\vec{A} = A_1(x, y, z) \vec{i} + A_2(x, y, z) \vec{j} + A_3(x, y, z) \vec{k},$$

для которого $\text{div } \vec{A} = 0$. Нужно показать, что его можно представить в виде $\vec{A} = \text{rot } \vec{B}$, где

$$\vec{B} = B_1(x, y, z) \vec{i} + B_2(x, y, z) \vec{j} + B_3(x, y, z) \vec{k}.$$

Рассмотрим далее наши уравнения найти функции поля $\vec{B}$: B_1, B_2, B_3 . Разложим ротор поля $\vec{B}$ по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\text{rot } \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Сравнивая функции полей $\vec{A}$ и $\text{rot } \vec{B}$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} = A_1, \\ \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} = A_2, \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} = A_3. \end{cases}$$

Поискать векторный потенциал определён с точностью до аддитивной константы поля, найдём частное решение полученной системы уравнений, что оно существует при условии

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = \text{div } \vec{A} = 0$$

которое является средним значением при условии непрерывности
вторых производных функций B_1, B_2, B_3 .

В силу того, что мы ищем общее решение системы,
возьмем для простоты $B_3 \equiv 0$.

Тогда система уравнений упрощается и переходит в

$$\left\{ \frac{\partial B_2}{\partial z} = -P, \quad \frac{\partial B_1}{\partial z} = Q, \quad \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} = R \right\}.$$

Интегрируя первые два уравнения по z , получаем

$$B_2 = - \int_{z_0}^z P(x, y, z) dz + f(x, y),$$

$$B_1 = \int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz + g(x, y)$$

где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — неизвестные
ф-ии. Поделим одну из них
равной нулю:
 $g(x, y) \equiv 0$

Подставив соотношения для B_1 и B_2 в третье уравнение,
имеем

$$\left\{ - \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dz + \frac{\partial f}{\partial x} = R \right\}$$

Из уравнения равенства нулю дивергенции поля $\vec{A}$ получаем

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = - \frac{\partial R}{\partial z},$$

это даёт $\int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial x} = R$

или $\frac{\partial f}{\partial x} = R(x, y, z_0)$

Интегрируя это уравнение по x , определим неизвестную
ф-ию $f(x, y)$

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x R(x, y, z_0) dx$$

Таким образом, частное решение системы найдено и
имет вид

$$\left\{ \begin{aligned} B_1 &= \int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz; \quad B_3 = 0; \\ B_2 &= - \int_{z_0}^z P(x, y, z) dz + \int_{x_0}^x R(x, y, z_0) dx \end{aligned} \right.$$

→ полное поле построено

Перейдем к изучению элементарных свойств, присущих
сolenoidal-полю,

из формулы Гаусса — Остроградского следует, что

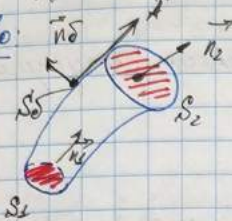
$$\oint_S (\vec{A}, \vec{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV = 0$$

Таким образом, поток соленаидального поля через любую замкнутую поверхность равен нулю. В физике такое св-во криуше магнитному полю $\vec{B}$.

Закон сохранения интенсивности векторной трубки

Термина - Поток соленаидального поля через любое сечение векторной трубки не меняется

Док-во:



Рассмотрим поле $\vec{A}$, векторную трубку замкнув между двумя её сечениями S_1 и S_2 . Как уже отмечалось, поток соленаидального поля через замкнутую пов-ть трубки равен нулю

$$\oint_S (\vec{A}, \vec{n}) dS = - \int_{S_1} (\vec{A}, \vec{n}_1) dS + \int_{S_2} (\vec{A}, \vec{n}_2) dS + \int_{S_3} (\vec{A}, \vec{n}_3) dS = 0$$

Однако, по св-ву векторной трубки, на боковой пов-ти S_3 : $(\vec{A}, \vec{n}_3) \equiv 0$, а внешняя нормаль на сечении S_1 равна $-\vec{n}_1$.

В результате получаем

$$\int_{S_1} (\vec{A}, \vec{n}_1) dS = \int_{S_2} (\vec{A}, \vec{n}_2) dS$$

Из уравнения неразрывности вытекает:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

где ρ - её плотность, а $\vec{v}$ - скорость; вытекает, что для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$.

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

т.е. поле её скорости является соленаидальным.

В этой ситуации закон сохранения интенсивности векторной трубки будет проявляться в том, что при сужении реки скорость её течения возрастает.

Потенциальное векторное поле

Свр. Векторное поле $\vec{A}$, определённое в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, называется потенциальным, если для $\forall x \in \Omega$ выполняются следующие соотношения

$$\text{rot} \vec{A}(x) = 0, \quad \text{div} \vec{A}(x) = 0$$

Таким образом, потенциальное поле является одновременно и соленаидальным и соэростным св-ва наследующих.

Так как лантесово поле является потенциальным, оно имеет скалярный потенциал $u(x)$, причем $\vec{A} = \text{grad } u$. Тогда из второго условия лантесового уравнения для потенциала скалярного поля

$$\text{div grad } u = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$$

Это уравнение есть лантесовое уравнение Лапласа, а его решение - лантесово поле. Отсюда и берется название лантесово поле.

Лантесово, векторное поле обладает одним специфическим свойством, присутствующим только ему.

Теорема.

Если лантесово векторное поле $\vec{A}(x)$, где $x \in \Omega$ на границе $\partial \Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет нулевую нормальную составляющую $(\vec{A}, \vec{n})|_{\partial \Omega} = 0$, то внутри области Ω это поле равно 0.

Док-во: пусть $u(x)$ - потенциал лантесово поля $\vec{A}(x)$, т.е. $\vec{A} = \text{grad } u$. Применяя правила действий с "набрав", вычислим.

$$\begin{aligned} \text{div}(u\vec{A}) &= (\nabla, u\vec{A}) = (\nabla, u\vec{A}) + (\nabla, u\vec{A}) = (\vec{A}, \nabla u) + u(\nabla, \vec{A}) = \\ &= (\vec{A}, \text{grad } u) + u \text{div } \vec{A} = (\vec{A}, \text{grad } u) = (\vec{A}, \vec{A}) \\ &= 0 \text{ поскольку } \text{div } \vec{A} = 0 \end{aligned}$$

Применив формулу Г.-О. для векторного поля $u\vec{A}$ по-то Ω , получим следующую область Ω :

$$\int_{\Omega} (u\vec{A}, \vec{n}) dS = \int_{\Omega} \text{div}(u\vec{A}) dV = \int_{\Omega} (\vec{A}, \vec{A}) dV$$

Поверхностный интеграл обращается в силу условий теоремы:

$$\int_{\Omega} (u\vec{A}, \vec{n}) dS = \int_{\Omega} u(\vec{A}, \vec{n}) dS = 0.$$

В результате приходим к

$$\int_{\Omega} |\vec{A}|^2 dV = 0$$

В силу непрерывности и неотрицательности ф-ии $|\vec{A}|^2$ внутри области Ω получаем $\vec{A}(x) \equiv 0$ для $\forall x \in \Omega$.

Теорема

Если лантесово векторное поле $\vec{A}(x)$, где $x \in \Omega$ на границе $\partial \Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет нулевую нормальную составляющую $(\vec{A}, \vec{n})|_{\partial \Omega} = 0$, то внутри области Ω это поле равно 0.

Выводы: Если два нильпотентных поля $\vec{A}(M)$ и $\vec{B}(M)$, где M — область определения, то внутри области M эти поля совпадают.

Основная теорема векторного анализа

Обратная задача.

Понимая структуру/свойства классов векторных полей можно сформулировать аналогично теорему о разложении произвольного непрерывно дифференцируемого векторного поля. В основном теореме векторного анализа.

Теорема

Любое непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{A} \in C^1(M)$ в $\mathbb{R}^3$ можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей.

$$\vec{A} = \vec{A}_{\text{пот}} + \vec{A}_{\text{сол}}$$

Док-во: представим векторное поле в виде суммы двух полей: $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$ и будем без ограничения общности считать поле $\vec{B}$ потенциальным.

Тогда, согласно определению,

$$\vec{B} = \text{grad } \varphi.$$

и φ — скалярное поле, которое нам нужно найти. Теперь мы докажем, что поле $\vec{C}$ является соленоидальным.

Из н.и.д. условия соленоидальности вект. поля получаем систему уравнений:

$$\text{div } \vec{C} = 0 \Rightarrow \text{div } (\vec{A} - \vec{B}) = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{A} - \text{div grad } \varphi = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = \text{div } \vec{A}$$

Или применим к уравнению Пуассона для неизвестного потенциала φ , которое всегда имеет решение. $\square$

Обратная задача В.

На основе доказанной теоремы можно сформулировать и решить обратную задачу векторного анализа, состоящую в следующем: задано поле $\vec{A}$ и его ротор и дивергенция.

Задача

Пусть даны скалярное поле $u(M)$ и векторное поле $\vec{B}(M)$. Нужно найти векторное поле $\vec{A}(M)$, удовлетворяющее соотношениям:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{A} = u \\ \text{rot } \vec{A} = \vec{B} \end{cases}$$

Поскольку $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$, то задано будет корректно поставлена, если $\{\operatorname{div} \vec{B} = 0\}$

Решение:

Сделаем замену переменной $\vec{A}$. Будем искать поле $\vec{A}$ в виде, суммы потенциального поля $\vec{A}_1$ и соленоиального поля $\vec{A}_2$. Тогда это поле должно удовлетворять системе:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{A}_1 = 0 \\ \operatorname{div} \vec{A}_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{A}_2 = \vec{B} \\ \operatorname{div} \vec{A}_2 = 0 \end{cases}$$

Найдём решение первой системы, представим $\vec{A}_1$ - градиент скалярной функции φ . Подставив это соотношение во второе уравнение, приходим к

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 4 \Rightarrow \Delta \varphi = 4$$

Это ур-е Пуассона имеет решение всегда.

Т.к. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, то первое ур-е второй системы является ур-ем для ор-я векторного потенциала поля $\vec{B}$. Оно имеет решение. Допустим, что это решение $\vec{A}_0$. Но тогда,

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_0 + \operatorname{grad} \psi$$

где ψ - неизвестное скалярное поле. Это вытекает из того, что векторный потенциал соленоиального поля определяется с точностью до градиента произвольной скалярной ф-ии.

Подставив это соотношение во второе уравнение второй системы, приходим к

$$\operatorname{div} (\vec{A}_0 + \operatorname{grad} \psi) = 0 \Rightarrow \Delta \psi = -\operatorname{div} \vec{A}_0$$

Применим опять к ур-ю Пуассона, которое всегда имеет решение.

В итоге, поле $\vec{A}$ найдено:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \operatorname{grad} (\varphi + \psi)$$

5. Дифференциальные операции теории поля в ортогональных криволинейных координатах.

В предыдущей главе были введены диф-ые операции теории поля: градиент, дивергенция и ротор и были найдены их выражения в декартовой прямоугольной системе координат.

При решении реальных задач выбирают ту систему координат, которая больше отвечает геометрии задачи. Для удобства с целью симметрии, применяют цилиндрическую систему координат, с целью симметрии - сферическую а так

Задача этой главы заключается в выборе удобных базисов для операций теории поля в произвольной ортогональной системе координат.

8.1. Базисы основного и базисного базисов

К понятию взаимного базиса приводит задача о разложении любого вектора по базису, которая решается в нахождении координат вектора в этом базисе.

Пусть $\vec{e}_i$ ($i=1, 2, 3$) — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, т.е.

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Тогда разложение n вектора $\vec{a}$ имеет вид

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$

Полная же часть этого равенства скалярно на $\vec{e}_k$, имеем

$$(\vec{a}, \vec{e}_k) = \sum_{i=1}^3 a_i (\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \sum_{i=1}^3 a_i \delta_{ik} = a_k$$

Таким образом, координаты вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе находятся по формулам.

$$a_k = (\vec{a}, \vec{e}_k)$$

Здесь теперь $\vec{e}_i$ ($i=1, 2, 3$) — произвольный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим теперь задачу разложения произвольного вектора $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ по этому базису.

Опр. Пусть векторы $\vec{e}_i$ ($i=1, 2, 3$) образуют базис в $\mathbb{R}^3$, который назовем основным. Будем считать, что векторы $\vec{e}^k$ ($k=1, 2, 3$) образуют взаимный базис для базиса $\vec{e}_i$, если

$$(\vec{e}_i, \vec{e}^k) = \delta_{ik}$$

Из опр-я вытекает, что базис $\vec{e}_i$ будет взаимным для базиса $\vec{e}^k$, т.е. понятие симметрично.

Опр. Координаты вектора $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ в основном базисе $\vec{e}_i$ называются контравариантными координатами A^i , а во взаимном базисе $\vec{e}^k$ — ковариантными и обозначаются A_k .

Разложение вектора $\vec{A}$ по базисам $\vec{e}_i$ и $\vec{e}^k$ таковы

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A^i \vec{e}_i, \quad \vec{A} = \sum_{k=1}^3 A_k \vec{e}^k$$

а) Проверим первое равенство скалярно на $\vec{e}^1$:

$$A^1 = (\vec{A}, \vec{e}^1)$$

Аналогично:

$$A^i = (\vec{A}, \vec{e}_i)$$

Таким образом, координаты вектора в основном базисе находятся с помощью взаимного базиса. Тогда встает вопрос о его построении.

Теорема

Пусть $\vec{e}_i (i=1,2,3)$ - основной базис в R^3 . Тогда вектора

$$\left\{ \vec{e}^1 = \frac{1}{V} [\vec{e}_2, \vec{e}_3], \vec{e}^2 = \frac{1}{V} [\vec{e}_3, \vec{e}_1], \vec{e}^3 = \frac{1}{V} [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \right\}$$

образуют взаимный базис для $\vec{e}_i$, где $V = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Доп-во: достаточно док-ть всё для вектора $\vec{e}^1$. Докажем всё аналогично, проверив пару равенств.

$$(\vec{e}_1, \vec{e}^1) = (\vec{e}_1, \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{V}) = \frac{1}{V} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \frac{1}{V} V = 1$$

$$(\vec{e}_2, \vec{e}^1) = (\vec{e}_2, \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{V}) = \frac{1}{V} (\vec{e}_2, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$$

Теперь остается показать, что $V' = (\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3) \neq 0$, т.е. линейная независимость векторов.

$$\begin{aligned} V' &= (\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3) = (\vec{e}^1, [\vec{e}^2, \vec{e}^3]) = (\vec{e}^1, [\frac{1}{V} [\vec{e}_2, \vec{e}_3], \frac{1}{V} [\vec{e}_3, \vec{e}_1]]) = \\ &= \frac{1}{V^2} (\vec{e}^1, [[\vec{e}_2, \vec{e}_3], [\vec{e}_3, \vec{e}_1]]) \end{aligned}$$

Используя известную формулу векторной алгебры для двойного векторного произведения

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}),$$

получим

$$[\vec{e}^1, [\vec{e}^2, \vec{e}^3]] = \vec{e}^2(\vec{e}^1, \vec{e}^3) - \vec{e}^3(\vec{e}^1, \vec{e}^2) = \vec{e}^1$$

Подставляя в выражение для V' , получим

$$V' = \frac{1}{V^2} (\vec{e}^1, \vec{e}^1) = \frac{1}{V^2} \neq 0$$

Таким образом, $V V' = 1$, что показывает обратность знака смешанных произведений базисных векторов. Это означает, что оба базиса мобильные, мобильные.

5.2. Криволинейные координаты в пространстве $\mathbb{R}^3$

Оп. Пусть x, y, z — прямоугольные декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, тройка чисел q_1, q_2, q_3 называется криволинейными координатами в $\mathbb{R}^3$, если каждой тройке q_1, q_2, q_3 ставится в соответствие точка $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ с помощью функций:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3),$$

удовлетворяющих условиям

1) функции $x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)$ — функции непрерывно дифференцируемые в $\mathbb{R}^3$,

2) Якобиан

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0$$

Необходимость второго условия связана с тем, что можно выразить переменные (q_1, q_2, q_3) через (x, y, z) и рассматривать ф-ии

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z)$$

Важными понятиями в криволинейных координатах являются понятие локального базиса. Если в декартовой системе координат в каждой точке пространства $\mathbb{R}^3$ можно задать три взаимно перпендикулярных единичных вектора, то в криволинейных координатах, это не так. Здесь в каждой точке можно задать базис, который будет меняться при переходе от одной точки к другой. Такой базис называется локальным.

Теорема (о локальном базисе в криволинейных координатах)

~ Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 . Тогда радиус-вектор точки $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\vec{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_1 + y(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_2 + z(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_3$$

При этом система векторов

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

образует базис в данной точке (локальный базис), а система векторов

$$\vec{e}^k = \nabla q_k = \text{grad } q_k$$

образует взаимный базис (локальный взаимный базис.)

Док-во: для проверки, что вектора $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ ($i=1, 2, 3$) образуют базис, необходимо проверить их линейную независимость. Вычислим скалярное произведение

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \frac{\Phi(x, y, z)}{\Phi(q_1, q_2, q_3)} \neq 0$$

Проверим теперь, что базис $\vec{e}^i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ является взаимно ортогональным к базису $\vec{e}_i$. Вычислим скалярное произведение.

$$(\vec{e}^i, \vec{e}_i) = \left(\nabla q_i, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial q_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_i} =$$

$$= \frac{\partial q_i}{\partial q_i} = \underline{\underline{\delta_{ii}}}$$

Вследствие $q_i = q_i(x, y, z)$ — сложная ф-я.

$$q_i = q_i(x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)) \quad \square$$

Другими взаимными показателями являются координатные линии и координатные поверхности.

Опр. Пов-ть

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

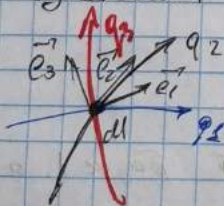
где $C_3 = \text{const.}$ называется координатной пов-ью $q_3 = C_3$. Аналогично опр-ся координатные пов-ти $q_1 = C_1, q_2 = C_2$.

Кривая

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, C_2, C_3) \\ y &= y(q_1, C_2, C_3) \\ z &= z(q_1, C_2, C_3) \end{aligned}$$

где $C_2, C_3 = \text{const.}$ называется координатной линией q_1 . Аналогично опр-ся координатные линии q_2 и q_3 .

Координатная q_1 -линия, — это кривая, вдоль которой изменяется только криволинейная координата q_1 .



С введенными координатными линиями составится локальный ортонормированный базис $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$. Вектор $\vec{e}_i$ вычисляется при фиксированных значениях q_2 и q_3 и поэтому является касательным к координатной линии q_1 . Аналогично для остальных базисных векторов.

5.3. Ортогональные криволинейные координаты

Опр. Система криволинейных координат называется ортогональной, если любой ее локальный базис $\vec{e}_i$ ($i=1, 2, 3$) — ортонормированный.

Теорема (критерий ортогональности криволинейной системы координат)
 ~ Для того, чтобы криволинейные координаты, определяемые функциями

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3),$$

были ортогональными м.с.р., должны выполняться условия.

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0, \quad i \neq j$$

Док-во: проверим ортогональность векторов локального базиса

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, 3).$$

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j}$$

Отсюда и следует необходимость "достаточность" условия ортогональности.

Используя доказанную теорему, вычислим квадрат элемента длины в ортогональных криволинейных координатах.

В теореме Пифагора:

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

установка, что x, y, z авн. ф-ции трёх криволинейных q_1, q_2, q_3 , имеем:

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q_i} \Delta q_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial q_i} \Delta q_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial z}{\partial q_i} \Delta q_i \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) \Delta q_i \Delta q_j \Leftrightarrow$$

в силу условий ортогональности остается одна сумма

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \right] (\Delta q_i)^2$$

Введя обозначение

$$H_i = |\vec{e}_i| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$$

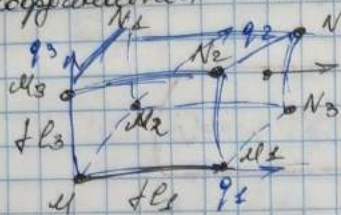
применив формулу для квадрата длины как

$$(\Delta l)^2 = H_1^2 (\Delta q_1)^2 + H_2^2 (\Delta q_2)^2 + H_3^2 (\Delta q_3)^2$$

Величины H_1, H_2, H_3 называются параметрами или коэф-тами Ламе.

Габриель Ламе (1795-1870) - фр. математик, механик и инженер

Рассмотрим бесконечно малый параллелепипед с вершиной в точке $M(q_1, q_2, q_3)$ и бесконечно малыми сторонами (координатными), $q_i = \text{const}$, $q_i + dq_i = \text{const}$, построенный по коэффициентам Ламе как на рисунке.



Имеем в виду, что длина стороны ребра измеряется только для прямоугольного параллелепипеда, который из данного состоит.

$$dV_1 = H_1 dq_1, \quad dV_2 = H_2 dq_2, \quad dV_3 = H_3 dq_3$$

Площади граней dV_1 ($q_1 = \text{const}$), dV_2 ($q_2 = \text{const}$), dV_3 ($q_3 = \text{const}$) соответственно приближенно равны

$$dV_1 \approx H_2 H_3 dq_2 dq_3, \quad dV_2 \approx H_3 H_1 dq_3 dq_1, \quad dV_3 \approx H_1 H_2 dq_1 dq_2$$

Объем параллелепипеда равен:

$$dV \approx dV_1 \cdot dV_2 \cdot dV_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

5.4. Дифференциальные операции теории поля в ортогональных криволинейных координатах.

Пусть $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ ($i=1,2,3$) ортогональный локальный базис в $\mathbb{R}^3$. Теория ортонормированного базиса Паскалю $|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}| = H_i$, можем

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{r}_k}{H_k} \quad (k=1,2,3) \Rightarrow (\vec{e}_k, \vec{e}_l) = \delta_{kl}$$

Пусть в криволинейных координатах заданы скалярное поле $u(q_1, q_2, q_3)$ и векторное поле $\vec{A}(q_1, q_2, q_3) = A_1(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_1 + A_2(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_2 + A_3(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_3$, разложимое по ортонормированному базису.

Предлагаем выразить для $\text{grad} u$, $\text{div} \vec{A}$, $\text{rot} \vec{A}$ и Δu .

① Показав, что $\text{grad} u$ - вектор, его можно разложить по ортонормированному базису

$$\text{grad} u = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3,$$

где координаты вычисляются по формулам

$$u_k = (\text{grad} u, \vec{e}_k)$$

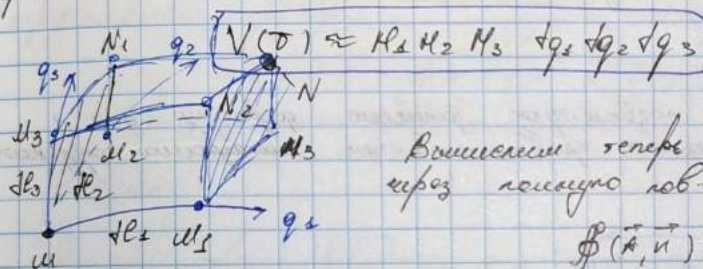
Раскроем это сокращение.

$$\vec{u} = \frac{1}{N_k} (\text{grad} u, \vec{e}_k) = \frac{1}{N_k} (\text{grad} u, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}) = \frac{1}{N_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) = \frac{1}{N_k} \frac{\partial u}{\partial q_k}$$

Таким образом, в ортонормированных криволинейных координатах

$$\text{grad} u = \frac{1}{N_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{N_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{N_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \vec{e}_3$$

- ② Для расчёта дивергенции, по определению, возьмём точку $M(q_1, q_2, q_3)$, в которой определён ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, и рассмотрим бесконечно малый параллелепипед, о котором мы говорим. Обозначим через τ -область, ограниченную этими параллелепипедами, а через S -его пов-ть. Объём параллелепипеда, как отмечалось приблизительно, равен



Выделим теперь поток векторного поля $\vec{A}$ через полную пов-ть параллелепипеда

$$\oint_S (\vec{A}, \vec{n}) dS$$

Найдём сначала поток через две противоположные грани $q_1 = \text{const}$ и $q_1 + dq_1 = \text{const}$, которые показаны штриховой линией. С точки зрения до бесконечно малой более высокого порядка по отношению к $V(\tau)$ (при τ , стремящемся к 0) можно

$$P_{q_1} = (\vec{A}, \vec{e}_1) dV_1 |_{q_1 + dq_1} - (\vec{A}, \vec{e}_1) dV_1 |_{q_1},$$

поэтому внешняя нормаль к грани $q_1 + dq_1 = \text{const}$ равна $\vec{e}_1$, а внешняя нормаль к грани $q_1 = \text{const}$ равна $-\vec{e}_1$. Представляя мощность элемента как

$$dV_1 = N_2 N_3 dq_2 dq_3$$

приходим к

$$P_{q_1} \approx (A_1 N_2 N_3 |_{q_1 + dq_1} - A_1 N_2 N_3 |_{q_1}) dq_2 dq_3 \approx \frac{\partial (A_1 N_2 N_3)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3$$

Здесь использована формула дифференциала. Аналогично можно найти поток через грани $q_2 = \text{const}$ и $q_2 + dq_2 = \text{const}$ (переносимая и заданная)

$$P_{q_2} \approx \frac{\partial (A_2 N_1 N_3)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3,$$

и поток через грани $q_3 = \text{const}$ и $q_3 + dq_3 = \text{const}$ (внутренняя и внешняя)

$$P_{q_3} \approx \frac{\partial (A_3 N_1 N_2)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3$$

Таким образом, площадь проекции на плоскость xy равна

$$\oint_S (\vec{A}, \vec{n}) dS = \Pi_{q_1} + \Pi_{q_2} + \Pi_{q_3} = \left[\frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] \times dq_1 dq_2 dq_3$$

Подставляя этот результат в определение дивергенции

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S (\vec{A}, \vec{n}) dS,$$

приходим к следующему выражению для дивергенции векторного поля $\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ в произвольной ортогональной системе координат

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right]$$

③ Полученные соотношения позволяют записать формулу для лапласиана в ортогональных координатах, пользуясь тем, что

$$\Delta u = \text{div}(\text{grad } u)$$

Действительно,

$$\Delta u = \text{div} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \vec{e}_3 \right) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(H_2 H_3 \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(H_1 H_3 \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(H_1 H_2 \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]$$

④ Для вычисления ротора векторного поля можно использовать следующее соотношение

$$\oint_S [\vec{n}, \vec{A}] dS,$$

а затем воспользоваться инвариантным определением ротора. Будем предполагать, что ориентированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ правый и рассмотрим функцию по любой области грани $q_1 = \text{const}$. Направление нормали, приняв во внимание, что внешняя нормаль $\vec{n} = -\vec{e}_1$.

Тогда необходимо найти:

$$\begin{aligned} [\vec{n}, \vec{A}] dV_1 / q_1 &= -[\vec{e}_1, \vec{A}] H_2 H_3 / q_1 = [\vec{A}, \vec{e}_1] dV_1 / q_1 = [\vec{A}, [\vec{e}_2, \vec{e}_3]] dV_1 / q_1 \\ &= \{ \vec{e}_2 (\vec{A}, \vec{e}_3) - \vec{e}_3 (\vec{A}, \vec{e}_2) \} dV_1 / q_1 \approx \\ &\approx (A_3 \vec{e}_2 - A_2 \vec{e}_3) H_2 H_3 / q_1 dq_2 dq_3 / q_1 + dq_1 \end{aligned}$$

Складывая полученные соотношения и применяя формулу векторного произведения с вектором $\vec{r}$ элементов осей

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 M_1 M_3) \vec{e}_3 - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 M_2 M_3) \vec{e}_2 \right] dq_1 dq_2 dq_3$$

Аналогично для парных и двойных связей перемещений.

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 M_3 M_1) \vec{e}_1 - \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 M_3 M_1) \vec{e}_3 \right] dq_1 dq_2 dq_3$$

и для верхней $q_3 + dq_3 = \text{const}$ и нижней $q_3 = \text{const}$ связей

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 M_1 M_2) \vec{e}_2 - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 M_1 M_2) \vec{e}_1 \right] dq_1 dq_2 dq_3$$

Складывая при соответствиях и представляя их в

$$\text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{1}{V(\tau)} \oint_{\Delta \tau} [\vec{A}, \vec{r}] dS$$

приходим к.

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{M_1 M_2 M_3} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 M_3 M_1) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 M_1 M_2) \right] \vec{e}_1 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 M_1 M_2) - \frac{\partial}{\partial q_1} (A_3 M_2 M_3) \right] \vec{e}_2 + \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 M_2 M_3) - \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 M_3 M_1) \right] \vec{e}_3 \right\}$$

Преобразуем численное произведение векторов, введя базис:

$$\vec{e}_1 = M_1 \vec{i}_1, \quad \vec{e}_2 = M_2 \vec{i}_2, \quad \vec{e}_3 = M_3 \vec{i}_3$$

Дифференцируя скобки как произведения ф-ий, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 M_3 M_1) \vec{e}_1 = \frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 M_3) M_1 \vec{i}_1 + A_3 M_3 \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2};$$

$$\frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 M_1 M_2) \vec{e}_1 = \frac{\partial (A_2 M_2)}{\partial q_3} M_1 \vec{i}_1 + A_2 M_2 \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3}$$

В итоге приходим к

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{M_1 M_2 M_3} \left\{ \left[\frac{\partial (A_3 M_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (A_2 M_2)}{\partial q_3} \right] M_1 \vec{i}_1 + \left[\frac{\partial (A_1 M_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (A_3 M_3)}{\partial q_1} \right] M_2 \vec{i}_2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial (A_2 M_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (A_1 M_1)}{\partial q_2} \right] M_3 \vec{i}_3 \right\} + \frac{1}{M_1 M_2 M_3} \left\{ A_1 M_1 \left(\frac{\partial \vec{i}_2}{\partial q_3} - \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} \right) + \right. \\ \left. + A_2 M_2 \left(\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} - \frac{\partial \vec{i}_1}{\partial q_3} \right) + A_3 M_3 \left(\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} - \frac{\partial \vec{i}_1}{\partial q_2} \right) \right\}$$

Применяя преобразования векторов производных вектор-функций

$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$, тогда

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_j}$$

В итоге последние слагаемые для которых заданы, и если можно записать её в компактной виде в форме определителя

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \begin{vmatrix} N_1 \vec{e}_1 & N_2 \vec{e}_2 & N_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ N_1 A_1 & N_2 A_2 & N_3 A_3 \end{vmatrix}$$

5.5. Сферические координаты

Криволинейные сферические координаты

$$q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$$

Возврат к каноническим соотношениям:

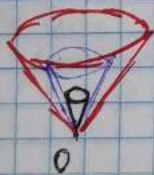
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Параметр r имеет смысл расстояния точки до начала координат, угол θ имеет название азимутального угла, угол φ - полюсного.

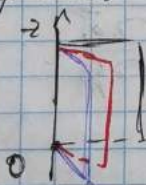
Опишем вид координатных поверхностей:

1) $r = \text{const}$ - концентрические сферы с общим центром в начале координат;

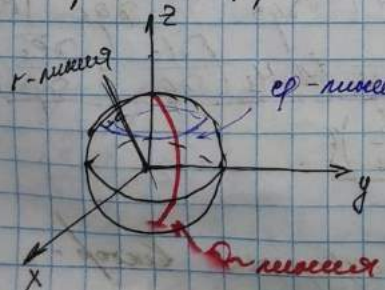
2) $\theta = \text{const}$ - концентрические пов-ти прямых круговых конусов с осью симметрии z и вершинами в начале координат;



3) $\varphi = \text{const}$ - полураспределенности, проходящие через ось z .



Рассмотрим форму координатных линий:



1) r -линии - лучи, исходящие из начала координат

2) θ -линии - полуокружности на сфере $r = \text{const}$, лежащие в плоскостях, проходящих через ось z на заданном шаге - широты;

3) сф. координаты ~ ортогональности на сфере, лорансированные плоскости хор. На заданной сфере - лорансированные.

Из формулы для радиус-вектора в сферических координатах.

$$\vec{r}(r, \theta, \varphi) = r \cos \varphi \sin \theta \vec{i} + r \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}$$

Определим локальный базис:

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \varphi \sin \theta \vec{i} + \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{k},$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos \varphi \cos \theta \vec{i} + r \sin \varphi \cos \theta \vec{j} - r \sin \theta \vec{k},$$

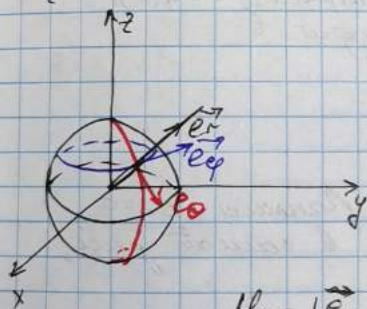
$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \sin \theta \vec{i} + r \cos \varphi \sin \theta \vec{j}$$

Докажем ортогональность сферической системы координат.

$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) = r \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + r \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - r \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi) = -r \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta + r \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta = 0$$

$$(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi) = -r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta = 0$$



Из рисунка также видно что локальный базис ортогонален, а векторы $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ образуют правую тройку. Вычислим теперь коэффициенты Ламе.

$$h_r = |\vec{e}_r| = \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1$$

$$h_\theta = |\vec{e}_\theta| = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r$$

$$h_\varphi = |\vec{e}_\varphi| = \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta} = r \sin \theta$$

полагая $0 \leq \theta \leq \pi$

В результате сформированный базис таков:

$$\vec{i}_r = \cos \varphi \sin \theta \vec{i} + \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

$$\vec{i}_\theta = \cos \varphi \cos \theta \vec{i} + \sin \varphi \cos \theta \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$$

$$\vec{i}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

Пусть $u(r, \theta, \varphi)$ - скалярное поле, а $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = A_r(r, \theta, \varphi) \vec{i}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{i}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{i}_\varphi$ - векторное поле.

Подставляя их в ранее полученные выражения для градиента, дивергенции, ротора и лапласиана, получим их вид в сферических координатах.

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\varphi) \right],$$

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

Записав в формуле для дивергенции координаты вектора $\vec{A}$, координаты градиента, получаем формулу для лапласиана

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}) \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

Первая часть лапласиана называется радиальное, вторая - угловая, поскольку в неё входят углы и производные по ним.

Для скалярного поля с сферической симметрией: $u = u(r)$ формула для лапласиана упрощается и переходит в

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right)$$

Отсюда можно найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, которое называется гармонической функцией, в самой же, реш.

$$r^2 \frac{du}{dr} = C_1 \Rightarrow u = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Найденное решение можно рассматривать также как потенциал лапласова поля

Б.В. Цилиндрические координаты