

6.02.2015.

Лекция

Хотим теперь узнать какие в системе есть бифуркации?
Регулярного анализа изучается нет, но для некоторого класса
есть спец. разработанные методы.

Динамика быстро-медленных систем на плоскости

Например одна из переменных по сравнению с другими меняется
медленно. Как это описать? Через диф-ур.

Рассмотрим систему на м-ю вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x, y, \mu, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{y} = \varepsilon \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \mu, \varepsilon) \end{cases} \quad (1)$$

где P, Q - диф-ые ф-ции по
своим переменным.

$0 < \varepsilon \ll 1, \mu \in \mathbb{R}^p$

Введем новое время $z = \frac{t}{\varepsilon}$

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dz} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = \varepsilon P(x, y, \mu, \varepsilon) \\ y' = \frac{dy}{dz} = Q(x, y, \mu, \varepsilon) \end{cases}$$

Видно, т.к. ε мало, то
 x - медленно меняющаяся,
 y - быстро.

Медленные и быстрые движения

Рассмотрим сист (1) с предположением, что y - переменная, а
 $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y, \mu, 0) \\ Q(x, y, \mu, 0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

т.е. сист 1-го ур-а (1 переменная),
которая задана на кривой Q

Система (2) назыв. системой медленных движений. А
 Q - критическое многообразие.

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x, y, \mu, \varepsilon) = 0\}$$

Каждое усл-е, когда y - переменная. Из 2-го ф-та системы (1)

$$\frac{dy}{dz} = \frac{Q(x, y, \mu, \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (4)$$

Если ε будет порядка ε , значит в
спр-е одно кривой $Q=0$, y
ограниченная величина

Пусть $(\tilde{x}, \tilde{y})$ лежит на кривой т.е. $Q(\tilde{x}, \tilde{y}, \mu, 0) = 0$
Пусть (x, y) - вне этой кривой. Зададим отклонения:

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + \xi \\ y = \tilde{y} + \eta \end{cases}$$

подставим в сист. и разложим по степеням
 ξ и η некоторые члены

$$\Rightarrow \frac{dy}{dz} = \frac{Q_x(\tilde{x}, \tilde{y}, \mu, \varepsilon) \xi + Q_y(\tilde{x}, \tilde{y}, \mu, \varepsilon) \eta}{\varepsilon} \quad \text{т.е. } \xi \text{ и } \eta \text{ должны быть порядка } \varepsilon$$

Это означает, что можно исследовать динамику в этой
точке с помощью ф-лы (3). Т.е. фактически говорим, что

ε не влияет на систему.
Но что будет вне этого слоя? Продолжим гр-я из системы (2):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y, \mu, \varepsilon)}{Q(x, y, \mu, \varepsilon)} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{P}{Q} \quad (5) \quad \text{Вне этого слоя } Q \neq 0$$

Тогда вне слоя справедливо соотношение $\frac{dx}{dy} \approx 0$, т.е. полученный график $x = x^0 = \text{const}$.

Рассмотрим систему (2) на границах:

$$\begin{cases} y' = Q(x, y, \mu, 0) \\ x' = 0 \end{cases}$$

(6) ~ система функций движений.

- 1) одна окружность
- 2) траектории прямые.

Заметим, что к-ть движущихся по этим траекториям [из сист. (4) следует], что сл-ть будет $\rightarrow \infty$ $|y| \rightarrow \infty$

Таким образом переходную сист. разделим на 2, которые можно исследовать.

Система с фиксированной переменной.

Рассмотрим систему (6):

$$x' = 0 \rightarrow x = x^0 = \text{const}$$

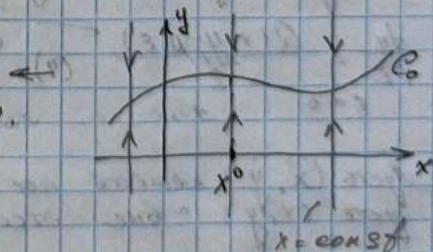
Найдем ср. этой системы: $Q(x^0, y, \mu, 0) = 0$
Отсюда вытекает, что ср. сист. (6) лежит на критическом многообразии.

$Q_y'(x^0, y^0, \mu, 0) < 0$, тогда ср. устойчиво

$Q_y' > 0$ ~ неустойчиво. Это ср. сист. (6)! Но не переходной системы! Они могут появляться, но не обязательно.

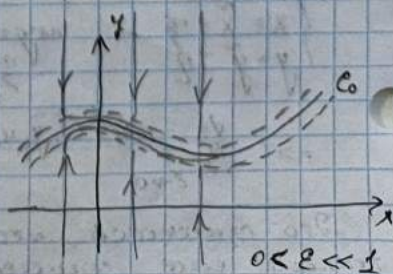
Предположим, что при всех x^0 выполняется неравенство $Q_y' < 0$. Это означает, что ср. гр-я (6) устойчива по абсолютному и быстрому движению.

Это фазовый портрет нарисован при $\varepsilon = 0$. Это векторное поле гр-я.



Теперь нарисовать при малом ε . Должен нарисоваться слой переходных движений.

Система (3) описывает движение на C_0 и внутри этого слоя. А вне слоя описывается сист. (6), но x не меняет значения, а движется по ней.



Это теперь фазовый портрет. А если $Q_y' > 0$, то стрелки будут отходить

Однообразная релаксация - т.е. быстро бегут и крива
и медленно движутся по ней (релаксифируют).

Пример: $\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \lambda \frac{d\varphi}{dz} + \sin\varphi = \varepsilon$ (7)

Приведём к виду системы (8), задавая: $z\lambda = z_0$

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{d\varphi}{dz} + \sin\varphi = \varepsilon \\ \frac{d\varphi}{dz} = y \end{cases} \quad (8)$$

$\varepsilon = \frac{1}{\lambda^2}$, $\lambda \gg 1$ - т.е. очень
большое время

Для исследования системы составл. 2 системы:

1) $\frac{d\varphi}{dz} = y$

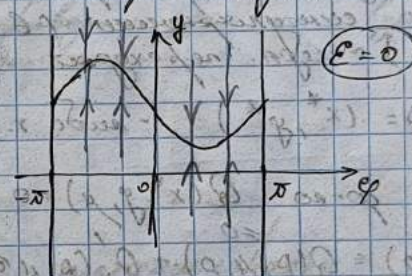
$\varepsilon - \sin\varphi - y = 0$ ← задаёт крив. многообразия. Пусть пока $\varepsilon > 1$.

$y = \varepsilon - \sin\varphi$

φ -указ. - скорость на
замкнутой.

В данном примере y можно
представить:

$\frac{d\varphi}{dz} = \varepsilon - \sin\varphi \rightarrow \varphi$ увелич.



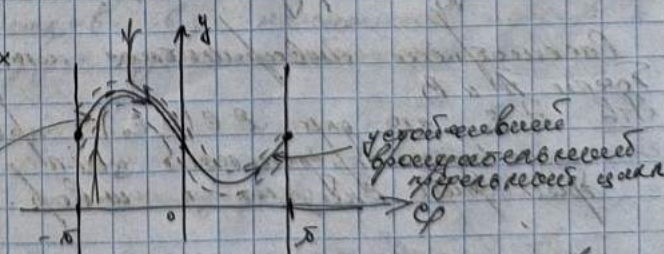
2) $\varphi = \varphi^0 = \text{const}$

$y' = \varepsilon - \sin\varphi^0 - y \leftarrow (\varepsilon - \sin\varphi^0 - y)y' = -y$ - т.е. е.р. на кривой выше.

Теперь рассмотрим случай малого $\varepsilon \neq 0$

Описываем способ изгибания
движения.

асимптотическое
стремление.

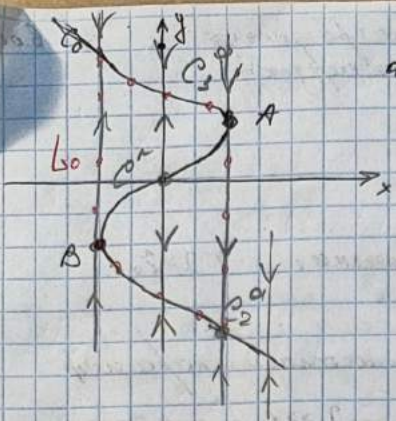


многообразия, но движение по нему
равномерно.

Релаксационные колебания

Пусть для части точек вып-ся $\partial y' / \partial \varphi > 0$, а для других $\partial y' / \partial \varphi < 0$

Пусть некоторое многообразие является средним



Пусть y имеет. б.т. на C_1^a и C_2^a $Q'_y < 0$,
а на C_3^a $Q'_y > 0$

Тогда C_0 можно записать следующим образом:

$$C_0 = \{C_1^a \cup A \cup C_3^a \cup B \cup C_2^a\}$$

C_1^a, C_2^a — циклы вращ. по стр. к
бассейну движения.
 C_3^a — кривая вращ. — //

Введем обозначения: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$:

$$C_1^a = C_0 \cap \{Q'_y(x, y, \mu, 0) < 0, x < x_1\}$$

$$C_2^a = C_0 \cap \{Q'_y < 0, x > x_2\} \quad | \quad Q'_y(A, \mu, 0) = 0$$

$$C_3^a = C_0 \cap \{Q'_y > 0, x_2 < x < x_1\} \quad | \quad Q'_y(B, \mu, 0) = 0$$

Бассейны фазовых движений здесь являются
инвариантными множествами стр.-ся контр. системы. т. А, В и
называются седловыми точками (в них местр. и басср. движения
сосредоточены) — местр. переход в басср.

Пусть $P = (x^*, y^*)$ — либо т. А, либо т. В.

Разложим ф-ию $Q(x^*, y, \mu) = 0$ в ряд Тейлора в окр-ти т. Р.

$$Q(x^*, y, \mu, 0) = Q(P, \mu, 0) + Q'_x(P, \mu, 0) \cdot (x^* - x) + Q'_y(P, \mu, 0) \cdot (y - y^*) + \\ + \frac{1}{2} Q''_{yy}(P, \mu, 0) \cdot (y - y^*)^2 + \dots$$

$$y' = Q'_x(P, \mu, 0)(x^* - x^*) + \frac{1}{2} Q''_{xx}(P, \mu, 0)(x - x^*)^2 + \dots$$

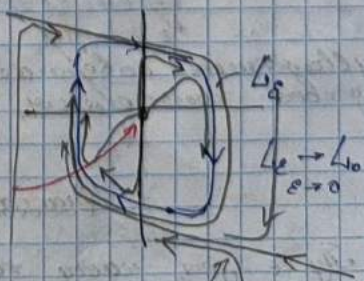
~ получим каноническую форму для
двухмерного равновесия в бассейне движения

Дал-но будем предполагать, что $Q''_{yy}(P, \mu, 0) \neq 0$.

Рассмотрим инвариантное мн-во при $\varepsilon = 0$. — L_0 замкн. фазов.

З.б. $\exists L_0$, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, при $\varepsilon_0 \ll 1$, на фазовой м-те
существует предельный цикл, состоящий из
фрагментов близких к инвар. фаз. L_0 .

Так же можно допустить
инвариантных движений
нигде ничего не пересекают
— это теперь предельный
фазовый порог.



осциллятор
функции

Дипломная работа по физике по теме: "Сверхпроводимость"

Сверхпроводимость - это состояние вещества, у которого при $T = T_c$ сопротивление $R \rightarrow 0$.

Рассмотрим сверхпроводник, разделенный тонким слоем изолятора. Толщина слоя $d = 10^{-9}$ м.

1962 г. - Б. Джозефсон опубликовал статью (опер. по эксперименту) о том, что через такой контакт может течь сверхпроводящий ток. - Джозефсоновский контакт.

В состоянии может течь постоянный ток, даже в отсутствие разности потенциалов между проводниками.

Сверхпроводящий ток возникает, если в цепи есть источник ЭДС. При этом ток течет в направлении, противоположном направлению ЭДС. Сверхпроводящий ток не зависит от температуры.

Взаимодействие таких пар приводит к их взаимной индуктивности.

При этом возникает ток.

Стационарный и нестационарный эффекты Джозефсона.

Считаем, что ток течет по проводнику и зависит от разности фаз φ в проводниках.

$$I_j = I_c \sin \varphi_j, \quad j = 1, 2$$

I_j - ток для всех частей фазы в j -ом проводнике.

При дост. прил. сверхпроводящих в.р. возникает эффект в изоляционном слое (барьер), формирующ. туннельный контакт.

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = E_1 \varphi_1 + K \varphi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = E_2 \varphi_2 + K \varphi_1 \end{cases} \quad (1)$$

E_1, E_2 - энергия х. св. каждого из пр. в.

K - амплитуда взаимодействия св. контактов, зав. от параметров системы.

Примем, к контакту прил. в.р. приводит к увелич. энергии системы из пр. в. на величину $E_1 - E_2 = 2eV$.

Будем считать, что E_1 и E_2 зависят от внешнего поля V и т.д.

$$E_1 + E_2 = 0 \quad (2)$$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad - \text{разность фаз.}$$

Тогда система (1) переписывается:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = eV\varphi_1 + K\varphi_2$$

$$i\hbar \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -eV\varphi_2 + K\varphi_1$$

(3)

Подставляя в систему (3) выражения для φ_1 и φ_2 в виде действ. и мним. частей, получаем систему:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{2\hbar \sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\hbar} \sin \varphi, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = -\frac{2\hbar \sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\hbar} \sin \varphi \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\frac{eV}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{eV}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \varphi \quad (5)$$

Введём так называемый сверхток: $I_s = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t} \quad (6)$

Из (4) при учёте (6) получаем следующее соотношение:

$$I_s = \frac{2\hbar}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \varphi \quad (7) \quad \text{здесь для сверхтока.}$$

Если в цепи с R контактом выключить источник тока I , представив в (7) считаем для простоты $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Тогда (8) $I = I_{\max} \sin \varphi$, где $I_{\max} = \frac{2K}{\hbar} \rho$

(8) описывает эффект Джозефсона. Когда $I < I_{\max}$ через контакт протекает ток при отсутствии напряжения.

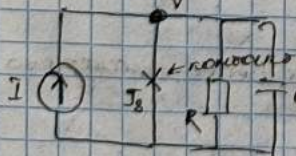
Из системы (5):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (9) \quad \text{если } V \text{ поддерживать постоянным, то } \varphi \text{ - меняется со временем.}$$

Т.е. через него протекает высокочастот. ток - эффект Джозефсона. При этом при увелич. $V \rightarrow$ частота растёт.

Наконец при $V \sim 2 \text{ мВ} \rightarrow \sim 2 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$.

Зависимость тока от напряжения:



Прелесть изобретения очень тонкий, между которыми барьер приложенное V , т.е. есть сопр-е. В цепи "бутербродный" контакт обладает и ёмкостными свойствами.

Получим уравнение для тока:

$$e \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + I_{\max} \sin \varphi = I \quad (10)$$

Выразим из (9) V и подставим в (10):

$$\frac{\hbar e}{2e} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_{\max} \sin \varphi = I \quad / : I_{\max} \quad \text{и введём новое время.}$$

$$\frac{\hbar C \sin \varphi}{2e I_{max} \hbar^2} + \frac{\hbar}{I_{max} 2e R \hbar} \sin \varphi = \frac{I}{I_{max}}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2e I_{max}}{\hbar C}}, \text{ и введем параметры: } \delta = \frac{I}{I_{max}}; \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{C 2e I_{max}}} \cdot \frac{1}{R}$$

Получим:

$$\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} + \sin \varphi = \delta \quad (11) \quad \text{— ур-е кинематики с поств. вращением массового \(\varphi\).}$$

Динамическое уравнение

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \gamma \\ \dot{\varphi} = \gamma \sin \varphi - \lambda \gamma \end{cases} \quad (12)$$

$G = S^1 \times R$ — фазовое \(\varphi\)-во — цилиндр

Рассмотрим м-ть \((\delta, \lambda)\) на области с \(\varphi\)-мн. повернувшись, т.е. карты области диффеоморфизма.

1. Консервативный случай: \(\lambda = 0\) (т.е. нет диссипации)

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \gamma \\ \dot{\varphi} = \gamma \sin \varphi \end{cases} \quad \text{— консервативный осциллятор}$$

$$E = E_k + E_p = \text{const}$$

$$\text{где } E_k = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2$$

$$E_p = \int_0^{\varphi} (\sin \varphi - \delta) d\varphi$$

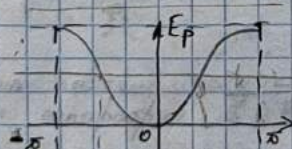
Сост. равновесия:

$$\delta - \sin \varphi = 0 \rightarrow \sin \varphi = \delta$$

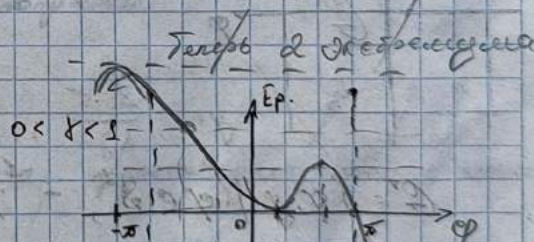
Вычисляем всевозможные экстремумы от функции \(\varphi\):

$$\varphi_0 = \begin{cases} \arcsin \delta, & 0 \leq \delta < 1 \\ \pi/2, & \delta = 1 \end{cases}$$

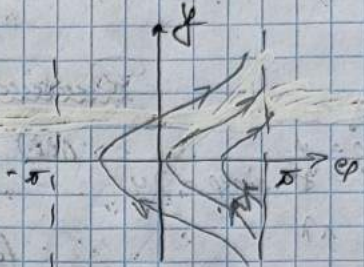
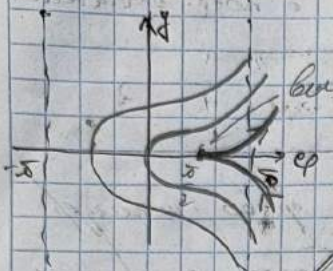
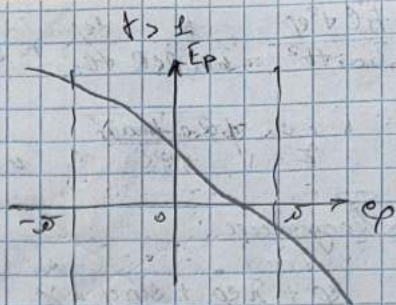
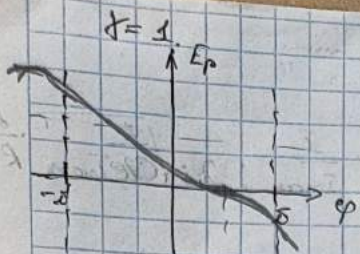
При \(\delta = 0\):



критическая точка



Рассмотрим случай, фазовый портрет, внутри которого фазовый портрет, фазовый портрет, фазовый портрет.



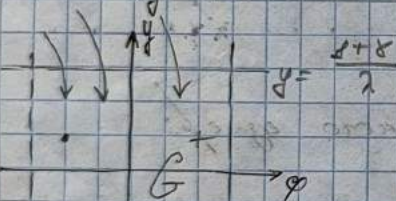
Метод интегрирования
по фазовому портрету.

2. Динамический эффект. $\lambda > 0$

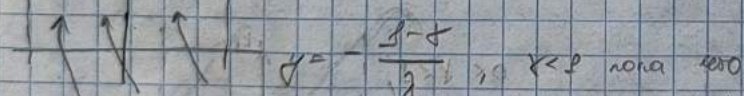
Найдём условия, при которых $y > 0$; $y < 0$ $\varphi \in \mathcal{D}^+$, т.е.

$$y > 0, \varphi > 0, \varphi \in \mathcal{D}^+:$$

$$-\lambda y - 1 + \varphi > 0 \rightarrow y < \frac{\varphi - 1}{\lambda}$$



$\Rightarrow G^+$ - положительная область.

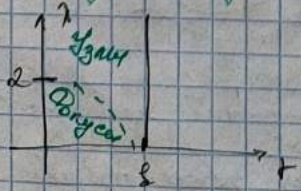


$$G^- = \{ \varphi, y \mid \varphi \in \mathcal{D}^-, -\frac{1-\varphi}{\lambda} < y < \frac{1+\varphi}{\lambda} \}$$

Согласно уравнению (1): (при $\varphi < \pi/2$)

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dot{\varphi} = \sin \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow O_1(\varphi = \varphi_1, y = 0) \text{ и } O_2(\varphi = \varphi_2, y = 0)$$

Пол-тв. един. ко. ко. т. О₂ - седло, а О₁ - либо узел, либо седло. Найдём фазовую...



+ Замечание: Найдём фазовый портрет системы т.е. коэф-ты K₁ и K₂ (интегралы и секор.)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - \sin \varphi - \lambda' y \end{cases} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \varphi & -\lambda' \end{pmatrix} \quad \cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2}$$

1) б. з. $O_2(\arcsin t, 0)$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\arcsin t) & -\lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{1-t^2} & -\lambda' \end{pmatrix}$$

$$|D_1 - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\sqrt{1-t^2} & -\lambda' - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda \lambda' + \sqrt{1-t^2}$$

$$\Delta = \sqrt{1-t^2} > 0 \quad (\text{т.к. } t < 1)$$

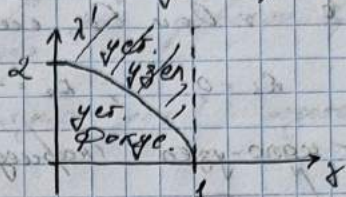
$$D = \lambda'^2 - 4\sqrt{1-t^2}, \quad \text{по условию } \lambda' = \sqrt{\frac{h}{c^2 E^2 I_{\text{max}}}} \cdot \frac{1}{R} > 0$$

~ уст. с.р.

$$D > 0: \lambda'^2 > 4\sqrt{1-t^2}$$

$$\lambda'^2 = 4\sqrt{1-t^2}$$

$$\lambda' = 2(1-t^2)^{\frac{1}{4}}$$



2) б. з. $O_2(\pi - \arcsin t, 0)$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(\pi - \arcsin t) & -\lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\arcsin t) & -\lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{1-t^2} & -\lambda' \end{pmatrix}$$

$$|D_2 - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \sqrt{1-t^2} & -\lambda' - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda \lambda' - \sqrt{1-t^2} = 0$$

$$\Delta = -\sqrt{1-t^2} < 0 \quad (\text{т.к. } t < 1) \Rightarrow \text{т. } O_2 - \text{усто}$$

$$D = \lambda'^2 + 4\sqrt{1-t^2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\lambda' \pm \sqrt{\lambda'^2 + 4\sqrt{1-t^2}}}{2}$$

Вернёмся к исходной системе и напомним её в канонизованном виде (для т. O_2): $\varphi = \xi_1, \quad \dot{\varphi} = \xi_2$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \sqrt{1-t^2} \xi_1 - \lambda \xi_2 \end{cases} \quad \text{или поразно попуки:}$$

$$\frac{\dot{\xi}_2}{\dot{\xi}_1} = \frac{\sqrt{1-t^2} \xi_1 - \lambda \xi_2}{\xi_2}$$

4 линейных систем, сепаратрисы седла представляются собой функции. Ищем гр-ы сепаратрис в виде:

$$\xi_2 = \kappa \cdot \xi_1$$

$$\left. \frac{d\xi_2}{d\xi_1} \right|_{\xi_2 = \kappa \cdot \xi_1} = \frac{\sqrt{1-t^2} \xi_1 - \lambda \kappa \xi_1}{\kappa \xi_1} = \frac{\sqrt{1-t^2} - \lambda \kappa}{\kappa} = \kappa$$

$$\kappa^2 + \lambda \kappa - \sqrt{1-t^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \kappa_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4\sqrt{1-t^2}}}{2}$$

κ_1 - уст. сепар.
 κ_2 - уст. сепар.

Сепаратрисы равновесия.
Положения равновесия.

$$0 \leq t < 1 \Rightarrow O_1(\varphi = \varphi_1, \varphi = 0), \quad O_2(\varphi = \varphi_2, \varphi = 0)$$

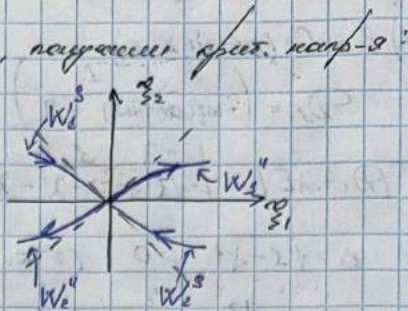
$$\varphi_1 = \arcsin t; \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin t$$

O_2 - д.в. узел (мелк. уст. форма) ; O_2 - седло.

Для неавтономных: $\varphi = \varphi_2 + \xi_1$,
 $y = 0 + \xi_2$

$$\kappa_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2 - \delta^2}$$

Согласим в м-ту (ξ_1, ξ_2) и строим касательные к векторным (это всё локальный анализ около точки)



Если возвращаемся к (φ, y) , то видно следующее.

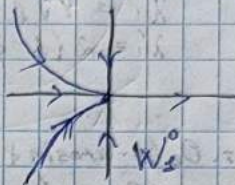
Когда $\delta = 1$ т. O_1 и O_2 сливаются в $O_0(\varphi = \frac{\pi}{2}, y=0)$ тогда:

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = -\lambda$$

$\Rightarrow O_0$ - седло-узел (картезиан локально)

Д.в. на прямой $\delta = 1$ - бифуркация (показатель 1)

При $\delta > 1$ - е.р. кет.



Функция Ляпунова

Второй в рассмотрении ф-ию:

$$V(\varphi, y) = \frac{y^2}{2} + \int_{\varphi_1}^{\varphi} (\sin \varphi - \delta) \sqrt{\varphi} \, d\varphi, \quad \text{дифференцируем}$$

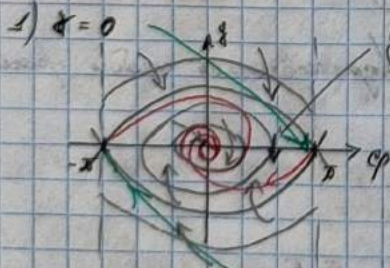
$$\dot{V} = y \cdot \dot{y} + (\sin \varphi - \delta) \cdot \dot{\varphi} = y(\delta - \sin \varphi - \lambda y) + (\sin \varphi - \delta) \cdot y = -\lambda y^2 \leq 0$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y \\ \dot{y} = \delta - \sin \varphi - \lambda y \end{cases} \quad (2)$$

Получили меньше функции этой инвариант.

$$V(\varphi, y) = \text{const.}$$

~ по сути полная энергия для консервативной системы



$y=0$ - фаз. линия

это просто векторное поле

$V < 0 \rightarrow$ консервативная система (мелк. поля, т.е. траектории, друг от друг. внутри.)

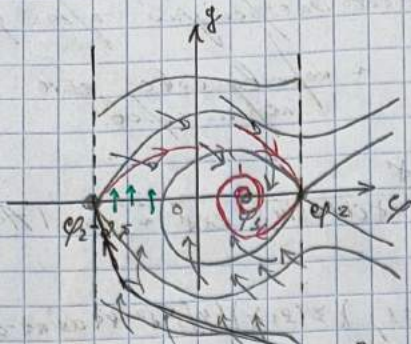
В единичной периодической функции Ляпунова (согласим локально у седла кет. векторов траекторий)

Д.в. $W_1^u, W_2^u \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow \infty$
 W_1^s, W_2^s

При любых н.у. все траектории, кроме на мелк. уст. аттрактивны в е.р. равновесия.

Такое е.р. ф.о. $y=0$ - модально асимптотически устойчиво.

2) $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$.



$$V(\varphi, y) = \frac{y^2}{2} + \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\sin \varphi - \varphi) d\varphi$$

$$V(\varphi, j_2) = C$$

$$C_e = \int_{\varphi_e} \rho (\sin \varphi - \frac{1}{\varphi}) d\varphi$$

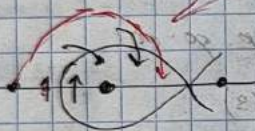
Для всех $C < C_*$ нет индекса массового
функции Лавуа. д.е. рассуждения
аналогичны $\epsilon \neq 0$

Несомненно показан, N_2^3 факт к сепар. при $y=0$ и более. привод.
А анализом полученных результатов при $y=0$ показано, что не
из-за отсутствия дисперсии это не следует.

как графически переписать уравно $y=0$? подставим в (1)

$$\frac{dy}{dx} = 5 - \sin x \quad \rightarrow \quad \text{wavy line}$$

Покажем, что предельных циклов нет. (циклы, которые охватываются охватывающим цилиндром, т.е. φ -периодич.) т.е. они дополняют охватывающий φ -р. (по φ орбитам.) , а т.к. по φ -орб. пересечения не было при обходе т.е. существует все в толду $\Rightarrow$ пред. циклов нет.



$$\left[\frac{x^2}{2} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\sin \varphi - t) d\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 0$$

2) Все сферические в обл. $y < 0$ имеют дно α то все равножеские

2) Сидоров - по состоянию на июль 1989 г. удерживался

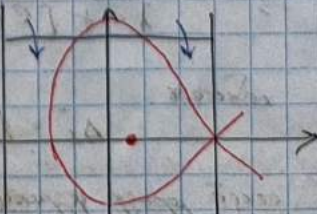
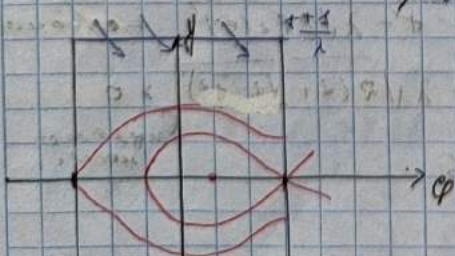
3) Сило. (1) и имеет кассов. фр. уклад

Проб $0 < r < l$

(Кривые без касательной - кривые переска.
транскрипции транслитерированного).

Бесселева корр. волнов $\rho = \frac{f+1}{2}$

Поскольку знак параметра, может
не быть.



$$V(\varphi, y) = \frac{y^2}{2} + \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\sin \varphi - 1) d\varphi$$

$$\frac{\gamma}{2} = C_s - \int_{\varphi_s}^{\varphi} (\sin \varphi - 1) d\varphi$$

$$y = \sqrt{2[C_3 - \int_0^{\varphi} (\sin \eta - 1) d\eta]} \rightarrow \text{допускается отрицательная или же}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2C_3} \Rightarrow \sqrt{2C_3} \geq \frac{1+\delta}{1} \sim \text{корень из 2,5, т.е.}$$

выражен от него λ :

$$\lambda \geq \frac{1+\delta}{\sqrt{4\sqrt{1-\delta^2} + 4\delta + \cos \delta - 2\delta^2}} \sim y_{\text{огр. ГНУ}} \quad (2)$$

Область параметров:

$$\Delta_1 = \{ \lambda, \delta \mid 0 \leq \delta < 1, \lambda \geq (1+\delta) [\sqrt{1-\delta^2} + \sqrt{1-\delta^2} + \cos \delta - 2\delta^2]^{-1/2} \}$$

В м-м параметров (λ, δ) построена эта область.

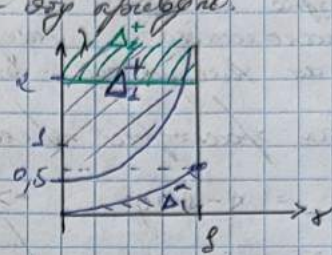
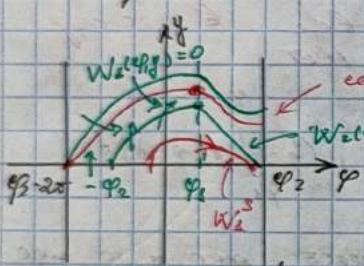


График функции "пути" для

Рассматривается система (2). Как видно корни W_1, W_2



Вверёны при $0 < \delta < 1$ если $\varphi = \varphi_0$:

$$W_2(\varphi_0, \delta) = y - \sqrt{2F_2(\varphi)} \quad (3)$$

$$F_2(\varphi) = \cos \varphi - \cos(\varphi_2 - 2\delta) + \delta(\varphi - \varphi_2 + 2\delta), \quad \varphi \geq \varphi_2 - 2\delta, \quad F_2(\varphi) > 0$$

Воспользуемся производной от $W_2(\varphi, y) = 0$

$$\dot{W}_2|_{W_2=0} = \delta - \sin \varphi - \lambda y = \frac{\frac{dF_2}{d\varphi} \cdot \varphi}{\sqrt{2F_2(\varphi)}}|_{W_2=0} = \{ \text{из (3)} \} = -\lambda \sqrt{2F_2(\varphi)} < 0,$$

Найдем эту функцию: // вверёны $\varphi > \varphi_2 - 2\delta$

$$W_2 = y - \sqrt{2F_2(\varphi)}, \quad \text{где } F_2(\varphi) = \cos \varphi - \cos \varphi_2$$

и представим аналогично

$$\dot{W}_2|_{W_2=0} = \delta - \lambda \sqrt{2F_2(\varphi)}$$

$$W_2|_{W_2=0}(\varphi, \delta) = \delta - \lambda \sqrt{2F_2(\varphi)} \geq \delta - \lambda \sqrt{2F_2(0)} = \delta - \lambda \sqrt{2(1 + \sqrt{1-\delta^2})} > 0$$

$$\Rightarrow \lambda < \delta [1 + \sqrt{1-\delta^2}]^{-1/2}$$

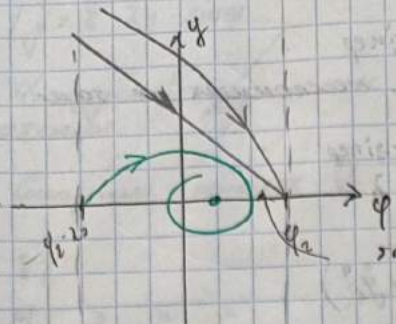
Рассмотрим область:

$$\Delta_2 = \{ \lambda, \delta \mid 0 < \delta < 1, \lambda < \delta [2(1 + \sqrt{1-\delta^2})]^{-1/2} \}$$

Рассмотрим еще одну функцию W_3 :

$$W_3(\varphi, y) = y + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_2) \sim \text{прямая}$$

$$\dot{W}_3|_{W_3=0} = -(2 \sin \varphi - 1) + \frac{\lambda^2}{4} (\varphi - \varphi_2) \sim \text{ока всегда } < 0 \quad \forall \varphi < \varphi_2$$



Но для малых значений W_3 движение по фазе с малой скоростью.
 $\rightarrow$ ГЛЧ. W_3 убывает до нуля.
 парашют при падении это всё фазовый.
 такой малек только при движении.

$$K_1 < -\frac{\lambda}{2}$$

$$\rightarrow \Delta_2^+ = \{ \lambda, \delta \mid \lambda \geq 2, 0 < \delta < 1 \} \quad \Delta_2^+ \text{ и } \Delta_1^+ \text{ непрерывносятся.}$$

Нарезывающее поле для сепарации
 седло-узла.

Рассеивающий случай $\delta = 1$. На фазе $\delta = 1$, явл. седло-узлом.
 т.е. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0 \rightarrow$ седловый сол. устойчив.
 Аналогично при нуле можно ввести фазу без контакта.

Можно ввести ф-ии. (выкладки сам-ко):

$$\tilde{W}_2(\varphi, y) = y - \sqrt{2F_2(\varphi)} - h$$

$$h > 0: F_2(\varphi) = \cos \varphi + \varphi + \frac{3\pi}{2}, \quad \varphi \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Если взять фазовую:

$$\dot{W}_2|_{W_2=h} = -\lambda(\sqrt{2F_2(\varphi)} + h) - \frac{h(2 - \sin \varphi)}{\sqrt{2F_2(\varphi)}} < 0, \quad \varphi > -\frac{3\pi}{2}$$

$$\tilde{W}_2 = y - \sqrt{2 \cos \varphi}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\dot{W}_2|_{W_2=0} = 1 - \lambda \sqrt{2 \cos \varphi} \geq 1 - \lambda$$

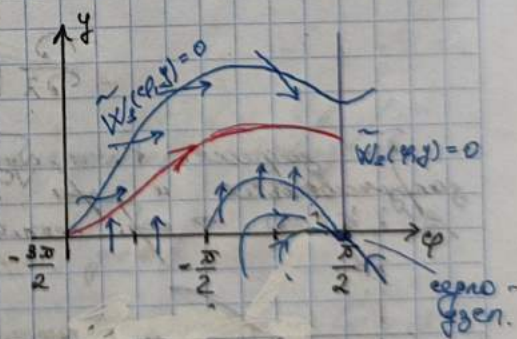
еще фазу

Рассеивающий (выделенный) объект без контакта:

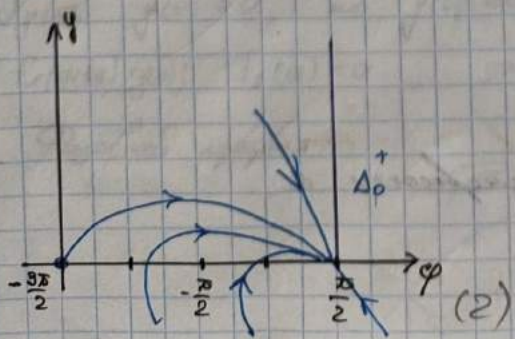
$$\tilde{W}_0 = 1 - \sin \varphi + \frac{\lambda^2}{4} (\varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$\tilde{W}_0 < 0, \quad \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$\Delta_0^+ = \{ \delta = 1, \lambda \geq 2 \}$$

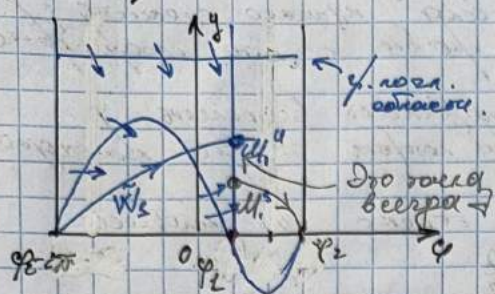


$$\Delta_0^+ = \{ \delta = 1, \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}} \}$$



Геометрические траектории и их дифференциалы.

1) Рассмотрим $0 < \xi < 1$



$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= y \\ \dot{y} &= \xi - \lambda y - \sin \phi \end{aligned}$$

Исследуем ветр. наклонных $\rightarrow$ там где $\dot{\phi} = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{\xi - \sin \phi}{\lambda}$$

$$M_2'' = (\phi = \phi_2, y = y_2'')$$

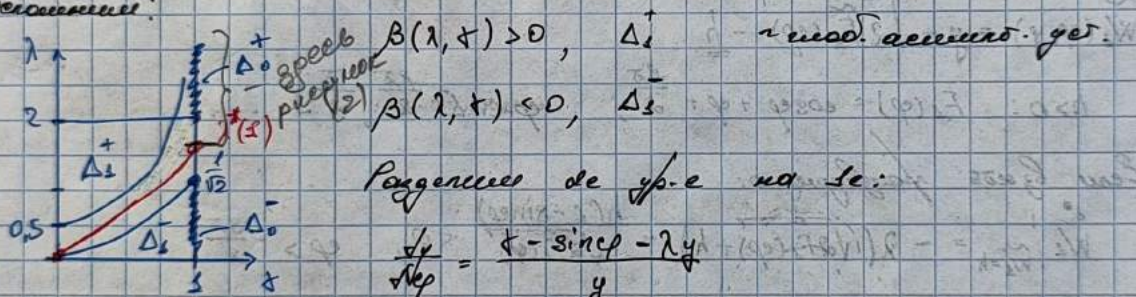
$\Rightarrow$ Селф. след. пересек. фазовой траектории Γ ветвра и ф. точка: $M_2^s(\phi = \phi_2, y = y_2^s)$

Заметим, что $y_2^s, y_2^s \geq 0$. Это точки ветвра вертикальных.

Удобн. охр-ть взаимное расл. сепаратрисе нулем ввечи ф-ю расселения:

$$\beta(\lambda, \xi) = y_2^s - y_2^u \quad \text{— это ф-я нулевых! но не горизонтальных.}$$

Вспомогат.



Разделение се ф-е на ξ :

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{\xi - \sin \phi - \lambda y}{y}$$

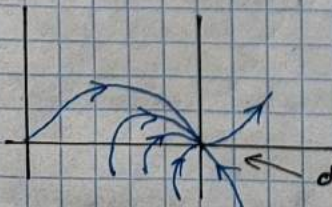
$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{dy}{d\phi} \right) = 3. \quad \sim \text{св-во поворота векторного поля.}$$

т.е. заданное ξ и будем увелич. $\lambda \rightarrow$ сепаратриса начинает закручиваться и при некоем λ^* они соприкасаются, т.е. $\beta(\lambda, \xi) = 0 \rightarrow$ сф. линия сепаратрисы.



но это м.б. при больших $\xi \rightarrow$ т.е. задается кривая (бифуркация) —

2) Для $\xi = 1$



бифуркация коразмерности 2.

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = x \\ \dot{y} = x - \lambda y - \sin \varphi \end{cases}$$

Рассмотреть, в
какой мере при
переходе к абст.
гр. д. или

$$a = \frac{1+x}{2}, \quad b = \frac{x-1}{2}$$

$\gamma(\tau)$
где $\gamma(\tau)$ - обобщ. обр. $\gamma(\tau)$

7. Любая точка на отрезке I_0 за
конечное время преобраз в точку $y(x)$,
где x - время движения.

Т.е. существует такое отображение $\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$,
Отображение непрерывное (нельзя взять любую точку).
Поэтому диаграмму коммутативна.

四

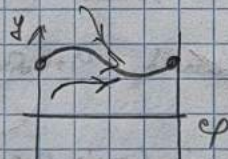
$$f(a) < a \quad ; \quad f(b) > b$$

г.е. сеть киндервудская доско. (применяется для обшивки)

$\Rightarrow$ Соотв. предельному закону при α $\rightarrow 1$ $\Rightarrow$ распределению.

Воспользуемся критерием Вилкоксона - Дунса (?) (выбери),
450 он применяется.

Разовный порез.



а) Для области $\frac{1}{2}$ уст. вращающее равнодействующее сил



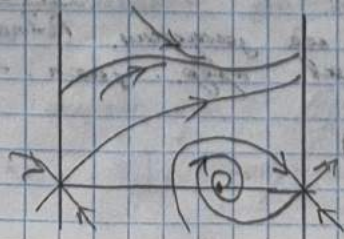
$$I_1 = \int \varphi_1 \varphi_2 ds, y \geq 0, y \leq \alpha$$

Рассуждения аналогичные. Суд-г
отблескивание $I_1 \rightarrow I_1$. Зеркало извб.
р-но.

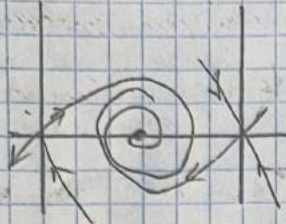
$$\bar{y} = f_1(y)$$

Пусть $y(0) > 0$, но $y(0) < 1$. (т.е. оно стабилизируется), тогда $f_1(y(0)) > y(0)$; $f_1(a) < a \Rightarrow$ снова есть неподв. точка

Разовый пролет.



3) В 1/2 токовая асимптотическая устойчивость. → там либо уст. узел, либо уст. фокус.



ВНХ контакты

По опр. по из диссипативного соотношения можно написать:

$$\langle V \rangle = \frac{R}{2e} \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle = \sqrt{\frac{R I_{max}}{2e}} \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle$$

T - период переменного тока. И уст.-е ведется по аттрактору системы. (по фаз. кругу или с.р.)

$$\langle V \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\varphi}{dt} dt$$

Если уст. по с.р. → $\langle V \rangle = 0$

Если по фаз. кругу: $\left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle = \frac{2\pi}{T}$

ВНХ: $\chi = \frac{I}{I_{max}}$, нормированная.

$$\frac{\langle V \rangle}{R I_{max}} = \lambda \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle = \lambda \cdot \frac{2\pi}{T} \sim \text{зависит от } \lambda!$$

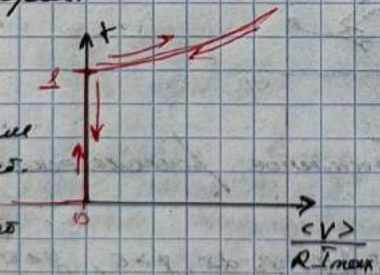
Расчетный график.

1) $\lambda \geq \lambda^*(\lambda)$

Зафиксируем λ и будем изменять квазиэталонный ф.

Этот переход от $\phi_0 \rightarrow \phi_1$

когда рогами до $\phi = 1$ $T \rightarrow$ очень большое и $\langle V \rangle$ мало измен. вблизи $\phi = 1$, а затем будет расти.



2) $\lambda < \lambda^*(\lambda)$

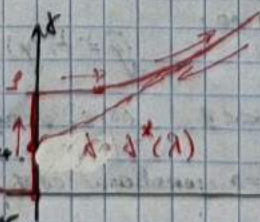
Опять движемся

из уст. области и увелич. χ , приведем ϕ_2 или

не замечаем, т.е. или

были в уст. с.р., его не замечаем.

А когда в обл. $\phi_1 \rightarrow$ начал. фаз. цикл. → эффект снака.



$$\lambda = \lambda^*(\chi) \rightarrow \chi = \chi^*(\lambda)$$

Метод Ван-дер-Поля.

Применим к ДС положение на осциллятор (электронический).

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}), \text{ где } 0 < \mu \ll 1. \quad \sim \text{малый параметр.}$$

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x + \mu f(x, y) \end{cases} \text{ при } \mu=0 \text{ перейдет в линейный осциллятор.}$$

Запишем решение системы для $\mu=0$:

$$\begin{cases} x = p \cos(\omega_0 t + \theta) \\ y = -p \omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta) \end{cases}$$

Рассмотрим теперь ситуацию $0 < \mu \ll 1$. Т.е. немного увеличим параметр. Это малый параметр, решение не должно сильно измениться. Но здесь имеется, что

$$p = p(t), \quad \theta = \theta(t) \quad \text{и представим в явную систему}$$

$$\begin{cases} x = p(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)) \\ y = -p(t) \omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta(t)) \end{cases} \rightarrow \text{представим в 3е др-е системы (1) и во 2е.}$$

$$\begin{cases} \dot{p} \cos(\omega_0 t + \theta) - p \sin(\omega_0 t + \theta) \dot{\theta} = 0 \\ -\dot{p} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta) - p \omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta) (\omega_0 + \dot{\theta}) = -\omega_0^2 p \cos(\omega_0 t + \theta) + \mu f(x, y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{p} \cos(\omega_0 t + \theta) - p \sin(\omega_0 t + \theta) \dot{\theta} = 0 \\ -\dot{p} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta) - p \omega_0 \cos(\omega_0 t + \theta) \dot{\theta} = \mu f(p \cos(\omega_0 t + \theta), -p \omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta)) \end{cases}$$

Введём обозначение $\varphi = \omega_0 t + \theta$, решаем систему отн. $\dot{p}$ и $\dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{1}{\omega_0} \mu f(p \cos \varphi, -p \omega_0 \sin \varphi) \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{1}{p} \mu f(p \cos \varphi, -p \omega_0 \sin \varphi) \cos \varphi \end{cases} \quad \text{т.е. } \dot{p} \sim \mu.$$

Т.е. за один период 2π p изменится незначительно. Поэтому заменим приближённо φ средним по фазе (2 π), считая, что p не меняется.

$$(2) \begin{cases} \dot{p} = -\frac{\mu}{\omega_0} F_1(p) \\ \dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{\mu}{p} F_2(p) \end{cases}, \text{ где } F_1(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p \cos \varphi, -p \omega_0 \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

$$F_2(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p \cos \varphi, -p \omega_0 \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Система (2) эквив. ускоренной или замедленной системы. Опис. движение с амплитудой p и частотой ω_0 . При этом правые члены зависят только от p .

$$\dot{p} = -\frac{\mu}{\omega_0} F_1(p) \quad \text{имеет ср.: } F_1(p) = 0$$

Пусть есть f_n ($n = 1, \dots, \infty$), которые равны этим др-м.

Если $F_2'(r_k) < 0$ — неуст. с.р.
 $F_2'(r_k) > 0$ — ^{уст.} ~~уст.~~ с.р.



В зав-ти от нач. условий система ^{приходит к орбите} из с.р. т.е. ^{появится} $r = r_k$ и ^{расширится} все др-е системы.

$$\begin{cases} r = r_k \\ \dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{\mu F_2(r_k)}{\omega_0 r_k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = r_k \\ \varphi = \left(\omega_0 - \frac{\mu F_2(r_k)}{\omega_0 r_k} \right) t + \varphi_0 \end{cases}$$

частота колебаний.

Если представить x и y как гармонические колебания x и y :

$$x = r_k \cos \left(\left(\omega_0 - \frac{\mu F_2(r_k)}{\omega_0 r_k} \right) t + \varphi_0 \right) + \dots$$

$$y = -r_k \sin \left(\left(\omega_0 - \frac{\mu F_2(r_k)}{\omega_0 r_k} \right) t + \varphi_0 \right) + \dots$$

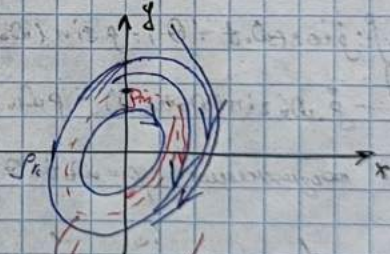
т.е. колеб. системы всегда ^{приходит к орб.} амплитуде и фазе, т.е. ^{колебаний} r_k от начальных условий. Если у нас осциллятора амплитуда м.б. произвольной, но в кач-ве системы лишь конкретное устойчивое значение, с которым ^{зависит} частота колебаний.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu(-x)$$

сезь ^{зависит} ω_0^2 ^{Амплитуда} ^{будет} ^{убав.} ^{по} ^{от} ^{напряжен.}

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}) \sim \text{здесь м.б. что-то другое (здесь-то другая, здесь-то другая, здесь-то другая)}$$

Напряженность



т.е. если $r > r_k \rightarrow$ энергия ^{увеличивается}, если $r < r_k \rightarrow$ ^{наоборот} ^{уменьш.}

Далее ^{мы} ^{будем} ^{рассматривать} ^{колебательные} ^{процессы} (физ. анал., ^{квант.} ^{об.} ^и ^{др.} в ^{малом} ^{разложении} ^{баланс} ^{энергий} (потери и ^{поступ.} ^{энергии}) — ^{таким} ^{образом} ^{соотв.} ^{зав.} ^{зависит} ^{от} ^{амплитуды} ^{колебаний}.

Автоколебательная ^{система} ^{представляет} ^{собой} ^{незатух.} ^{колебания} ^в ^{автоколеб.} ^{системе}, ^{форма} ^и ^{ампл.} ^{соотв.} ^{на} ^{зависит} ^{от} ^{нач.} ^{условий} ^и ^{др.} ^{параметров} ^{системы}.

Рассм-м ΦR ^и ^у ^{зель} (34) ^{Автоколебательная} ^{зель} ^с ^{автоколеб.} ^{элементом}



Баланс ^{по} ^{уравн.} ^{Кирхгофа}

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{L} + \frac{1}{L} \int \dots + \varphi(t) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{L}$$

$$\ddot{u} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L} + \varphi(t) \right) \dot{u} + \frac{1}{L} u = 0$$

$$1) \text{ Пусть } \varphi(t) = \frac{1}{3} u^3 - 9.11 \text{ для } 0 < u < 1$$

$$\Rightarrow \varphi'(u) = s_0 u^2 - s_1 \quad \text{и подставим в исходное ДР-е}$$

и введем безразмерные величины:

$$z = \omega_0 t; \quad \lambda = \sqrt{\frac{s_0}{c \omega_0}} u; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{4c}; \quad \gamma = \frac{1}{c \omega_0} (s_1 - \frac{f}{2})$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = f \\ \dot{y} = -x + (\gamma - \lambda^2)y \end{cases}$$

Не совсем полностью как если бы не было
Ван-дер-Поля:

Введем еще одну замену:

$$x = \sqrt{\lambda} v; \quad y = \sqrt{\lambda} w$$

$$\begin{cases} \dot{v} = w \\ \dot{w} = -v + \gamma(1 - v^2)w \end{cases}$$

т.е. если γ и параметр нелинейности
показ Ван-дер-Поля

Только теперь в комплексном виде:

$$v = z e^{i\tau} + z^* e^{-i\tau} = \operatorname{Re}(2z e^{i\tau}) = 2 \operatorname{Re}(z e^{i(\tau - \theta)})$$

$$\text{где } \rho = |z|, \quad \theta = \arg z$$

$$w = i z e^{i\tau} - i z^* e^{-i\tau}, \quad \text{подставив прямо в уравнение}$$

$$i z e^{i\tau} + z^* e^{-i\tau} = 0$$

$$\dot{w} = i \dot{z} e^{i\tau} - i \dot{z}^* e^{-i\tau} - z e^{i\tau} - z^* e^{-i\tau} = \{ \text{представим во де ДР-е} \} =$$

$$= -z e^{i\tau} - z^* e^{-i\tau} + \gamma(1 - z^2 e^{2i\tau} - 2z z^* - z^2 e^{-2i\tau}) (i z e^{i\tau} - i z^* e^{-i\tau})$$

$$2i \dot{z} e^{i\tau} = \gamma(i z e^{i\tau} - i z^* e^{-i\tau} - i z^3 e^{3i\tau} + i z^2 z^* e^{i\tau} - 2i z^2 z^* e^{i\tau} +$$

$$+ 2i z z^* e^{-i\tau} - i z z^2 e^{-i\tau} - i z z^2 e^{-2i\tau} + i z^3 e^{-3i\tau}) / e^{i\tau}$$

и сгруппировав по времени (оставляя те, которые от τ не зависят)

$$2i \dot{z} = \gamma(i z + i z^2 z^* - 2i z^2 z^*) = \gamma i z (1 - |z|^2)$$

Используем:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = + \frac{\gamma}{2} \rho (1 - \rho^2) \Rightarrow \rho(1 - \rho^2) = 0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad \rho = 0, \quad \rho = 1$$

$$F_1(\rho) = + \frac{\gamma}{2} \rho (1 - \rho^2)$$

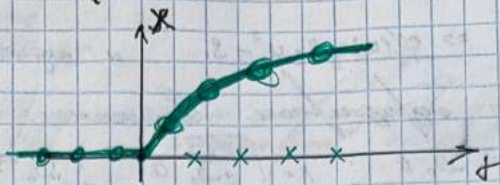
$$F_1'(\rho) = \frac{\gamma}{2} - \frac{3\gamma}{2} \rho^2$$

$$\text{Тогда: } F_1'(\rho=0) = \frac{\gamma}{2} > 0 \Rightarrow \rho=0 - \text{устойч.}$$

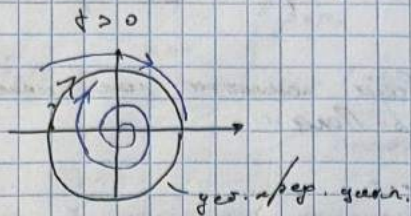
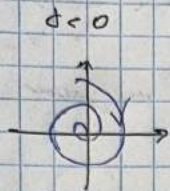
$$F_1'(\rho=1) = -\frac{\gamma}{2} < 0 \Rightarrow \rho=1 - \text{уст.}$$

Запишем решение, когда $\rho=1$:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{r} \cos(\tau + \theta_0) \\ y = -2\sqrt{r} \sin(\tau + \theta_0) \end{cases}$$



Можно считать,



2) Пусть $\varphi(u) = -S_1 u + S_2 \frac{u^3}{3} - S_3 \frac{u^5}{5}$

Продифференцировав соответствующее уравнение получим следующее:

$$\begin{cases} \dot{u} = y \\ \dot{y} = -u + \mu(\lambda + \beta u^2 - u^4)y \end{cases}$$

где $\lambda = 2 - \omega_0^2$, $\lambda = \frac{1}{S_3} \left(\frac{1}{R} - S_1 \right)$

$\beta = \frac{S_2}{S_3}$; $\mu = \frac{S_3}{c\omega_0}$

Если μ - малый параметр, то можно использовать метод возмущений.

$$u = z e^{it} + z^* e^{-it}$$

$$y = i(z e^{it} - z^* e^{-it}), \text{ где } z e^{it} + z^* e^{-it} = 0$$

В этом случае соответствующее уравнение

$$2\dot{z} = \mu(\lambda + \beta z z^* - 2z^2 (z^*)^2)$$

$$z = r e^{i\theta}$$

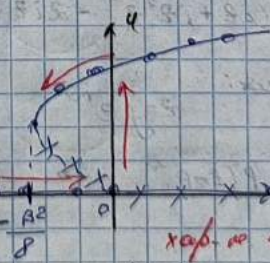
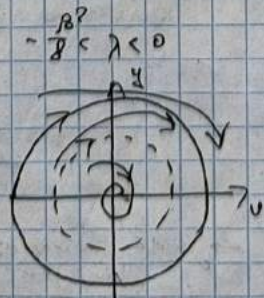
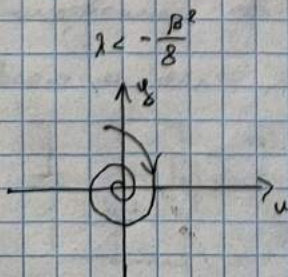
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\dot{r} = \mu r(\lambda + \beta r^2 - 2r^4) \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$r(\lambda + \beta r^2 - 2r^4) = 0$ - решение, получаем

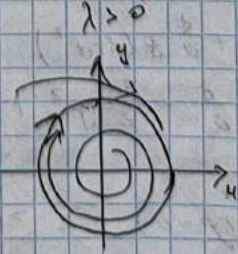
$$r = 0; \quad r_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 8\lambda}}$$

Решение будет иметь вид:

$$\begin{cases} u = 2r_1 \cos(\tau + \theta_0) \\ y = -2r_1 \sin(\tau + \theta_0) \end{cases}$$



хар. и неуст. режим



Устойчивый режим

13.03.23.

Неавтономное уравнение
линейного вида $\dot{x} = F(x, t)$ в 3-мерном пр-ве.

Рассм-м систему:

$$\dot{x} = F(x) \quad (1), \text{ где } x \in \mathbb{R}^3$$

предположим, что эта система имеет изолированную точку L_0 .

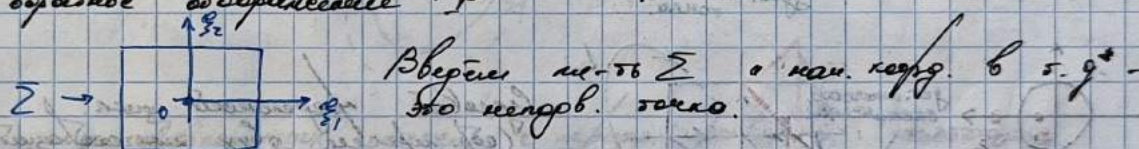
Какие пред. точки могут существовать в 3-мерном пр-ве? В 2-мерном пр-ве мы видели ситуацию с точками и говорили об устойчивости.

Здесь аналогично введем м-т-во. Подр. в N точке L_0 сев. (2) от-т векторное поле F по крайней мере одна из компонент $\neq 0$, проверим м-т-во, отбрасывая этот вектор.

В данной точке пересечения в т. q^* .

Возьмем фазовую в окр-ти пред. точки. По теореме о непр. разрывности $q \rightarrow$ времени в эту м-т-во, в т. q^* . При этом время движения зависит от движения точки $t(q)$. Т.е. в окрестности существует отображение P .

Если обратить время обратно, то q перейдет в др. точку. Т.е. обратное отображение P^{-1} .



Введем систему для отображ. P :
$$\begin{cases} \xi_2 = g_1(\xi_1, \xi_2) \\ \xi_1 = g_2(\xi_1, \xi_2) \end{cases} \quad (2)$$

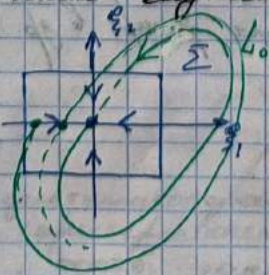
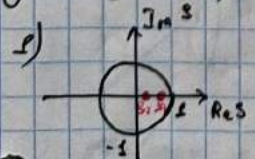
Для q^* сев. пред. точки. А само отображ. диффеоморфизм. (т.е. сюр-т обратное отображение.)

Убедимся, что м-т-во инд-в. точки. Для сев. (2) м-т-во инд-в. точки. $g_2(0,0) = 0$

В результате получили нечетное отображ. Т.е. отображ. двумерное $\rightarrow$ 2 цикла/итерации.

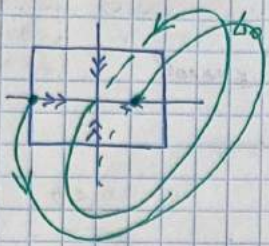
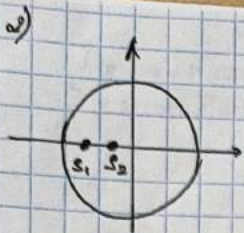
$\Rightarrow S_1, S_2$ мы считаем, что $|S_{1,2}| \neq 1$.

В рассмотрении только случаев $S_1 \cdot S_2 > 0$ (т.е. они должны быть одного знака)

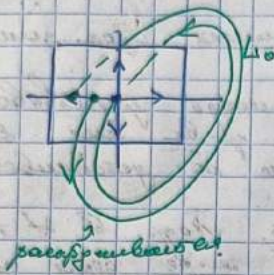


~ уед. пред. точка в дейст. нулевой фазовой из окр-ти выделяется м-т-во.

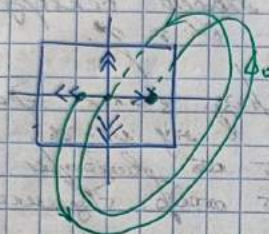
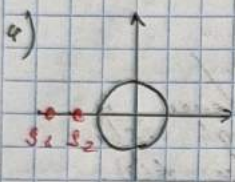
$$S_1 < 1, S_2 < 1$$



Уст. /уст. цикл, но
 $S_1 < 0$ и $S_2 < 0$

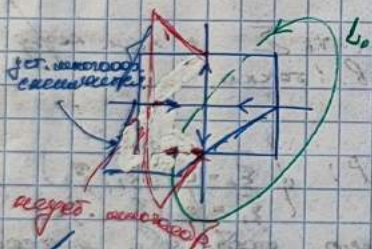
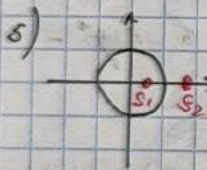


Куст.



Куст.

разрешившись



Средней /переходной цикл
 (ср. пресек. двух инерционных -
 устойчивого и неустойчивого)
 Они гомоморфически эквивалентны
 в инверсии.

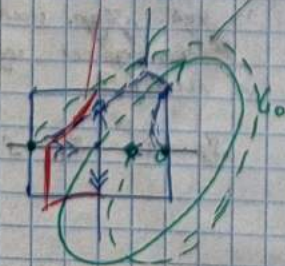
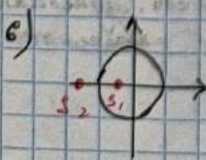


составитель в
 составе

по классу системы



для фазы в др. сторону

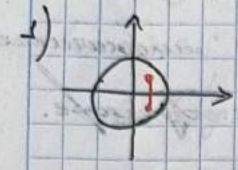


То что собой представляет из себя эта преобразование.

т.е. они представл. из себя некое метабол.



Комплексно-сопряженное отображение

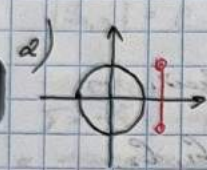


на секун. Пуанкаре перерв. точки — уел. фазы
т.е. фазов. координат
иногда может показаться.

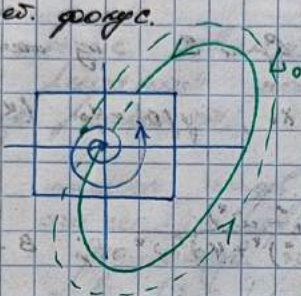


Рез. пер. уел. а комплекс. соф.
мультипл. $|S| < 1$.

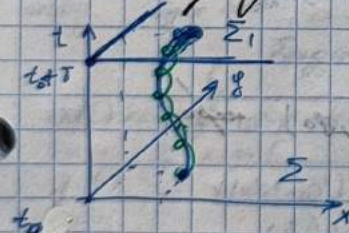
имет вид спирали, которая постепенно закручивается



→ перерв. фазы.



Для неавтономных систем с период. возмущ. можно ввести м-тб $t = \text{const}$ явл. модальность секунд. Пуанкаре. и рассмотреть периодических движений превращается совершенно аналогично



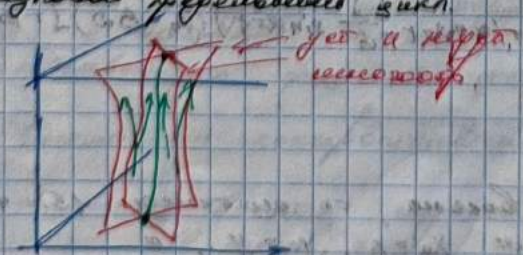
$$\Sigma = \{t = t_0, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\Sigma_1 = \{t = t_0 + \tau, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

В силу периодичности $\Sigma_1 = \Sigma$. т.е. сдвиг-т отображение.

$$P: \Sigma \rightarrow \Sigma$$

Средний периодический цикл



Наряду с мультипликативным преобразованием данно в 3х измерениях пр-ве хар-кт характеристический м-тб-матрица. Как в, для равновесия, соотв. замкнутости, а другие.

$$\lambda_j = \frac{1}{T_0} [L_n |S_j| + i(\arg S_j + \alpha \pi)] ; j=1, 2$$

Если же $\text{Re } \lambda_j < 0$.

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Вынужденные колебания линейного осциллятора.

Описывается уравнением движения:

$$\begin{cases} \ddot{x} = y \\ \ddot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x + F_0 \cos \omega t \end{cases} \quad (3)$$

Примером может быть LC-контур с АЧХ или механические системы. Но простейший пример — маятник под внешним воздействием.

Система порождает автоф. Фазовый портрет: $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $G = S^1 \times \mathbb{R}^2$

Вектор с/р. в этом случае действительный.

$\delta^2 < \omega_0^2$ — система диссипативна (дефакто, фазовый портрет).

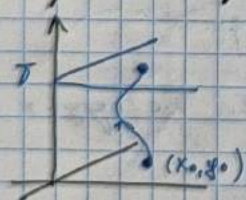
Ищем $\begin{cases} x(t, C_1, C_2) \\ y(t, C_1, C_2) \end{cases}$, где C_1 и C_2 — нач. условия.
 $x(0) = x_0, y(0) = y_0 \quad (x) \rightarrow C_1, C_2$

Сформулируем решение:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \quad A = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}; \quad B = \frac{2\delta F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\delta t} \left[(x_0 - A) \cos \Omega t + \frac{[y_0 + \delta(x_0 - A) - B\omega]}{\Omega} \sin \Omega t \right] + A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ y(t) &= e^{-\delta t} \left[(y_0 - B\omega) \cos \Omega t + \frac{[(x_0 - A)\omega_0^2 + \delta(y_0 - B\omega)]}{\Omega} \sin \Omega t \right] - A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

Смотрим на фазовый портрет:



В какую сторону переходит (x_0, y_0) — фазовый портрет? Подставляем $t = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned} x(t = \frac{2\pi}{\omega}) &= e^{-\frac{2\pi\delta}{\omega}} \left[(\cos 2\pi + \frac{\delta}{\Omega} \sin 2\pi)(x_0 - A) + \frac{\sin 2\pi}{\Omega} (y_0 - B\omega) \right] + A \\ y(t = \frac{2\pi}{\omega}) &= e^{-\frac{2\pi\delta}{\omega}} \left[-\frac{\omega_0^2 \sin 2\pi}{\Omega} (x_0 - A) + (\cos 2\pi - \frac{\delta}{\Omega} \sin 2\pi)(y_0 - B\omega) \right] + B\omega \end{aligned}$$

$$\text{где } t = \frac{2\pi}{\omega}$$

Положим x_0 и y_0 равными нулю, тогда система (5) упрощается. Фазовый портрет. Положим $x_0 = x, y_0 = y$, и

$$x(t = \frac{2\pi}{\omega}) = \bar{x}, \quad y(t = \frac{2\pi}{\omega}) = \bar{y}, \quad \text{где } \bar{x}, \bar{y} \text{ — новые нач. условия.}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = a_0 x + b_0 y + p \\ \bar{y} = c_0 x + d_0 y + q \end{cases}$$

a_0, b_0, c_0, d_0 — можно написать из ур-ий (сам-по)

$$p = A(a_0 - 1) + Bb_0 \omega \quad ; \quad q = \omega^2 b_0 A + B\omega(1 - b_0)$$

Система (6) линейное двумерное точечное урав.
Рассм-м диссипативный случай.

Каждому периодическому тону $\bar{x} = x$; $\bar{y} = y$:

$$\text{т.е. } \delta > 0: \quad O(x = A, y = B\omega)$$

Согл. прер. системы: можем умножить на $\tilde{C}$:

$$x = (\tilde{S})^n \cdot \tilde{C}_1 \quad ; \quad y = (\tilde{S})^n \cdot \tilde{C}_2 \quad \text{" через опр-ль. будем иметь систему.}$$

В итоге получим формулы:

$$S_{1,2} = e^{-\frac{\delta \pm i\omega}{2}} (\cos 2\pi t \pm i \sin 2\pi t)$$

$$|S_{1,2}| = e^{-\frac{\delta t}{2}} < 1 \quad \Rightarrow \text{т. О. - уб. ф-ция.}$$

Эти период. тоны являются периодич. решением уравн. $\delta = \frac{\delta \omega}{\omega}$. В эту систему можно записать в (4) x_0 и y_0 - начальные прер. решения.

На сл. графике имеется период. точка

это сл. график.

Это период. точка в 3х мерном пространстве

нужно рассмотреть период. точки перейти в решение системы. Тогда рассмотрим ур-е периодич. трансформ.

Тогда получим:

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y(t) = \frac{\omega F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = -\arctg\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Видно, если внеш. сила $F_0 \rightarrow 0$ то периодич. распад нет; 2) Это периодич. трансформ. возникает при малых δ и ω с малой внешней возмущением; 3) Показ. разн. разность фаз.

Рассмотрим колебательный случай:

а) $\omega \neq \omega_0$. В этом случае решение системы удовлетворяет уравн. $O(x, y = 0)$

Для этой системы $\delta = \frac{\omega_0}{\omega}$

$$S_{1,2} = \cos 2\pi t \pm i \sin 2\pi t \quad \Rightarrow |S_{1,2}| = 1$$

т.е. период. колебания, это означает, что период. точка ста.

$\Rightarrow$ Рассмотрим абн. приращения $\epsilon T = \frac{2\pi}{\omega}$. Тогда для констант. фазовый по фазовой ф-ве. А в 3х мерном фазовом пр-ве это будет константа повор.

Посмотрим фазовые координ. Рассмотрим точки. отср. (6) в единицах Δ или же между Δ и Δ .

$$x = r \cos \theta, \quad y = -r \sin \theta \quad (9) \rightarrow \text{представим в (6)}$$

представим н.к. в поляр. коорд.

$$\bar{r} \cos \bar{\theta} + A = a_0 (r \cos \theta + A) = b_0 \omega r \sin \theta - r$$

представим a_0, b_0, r и ω полярными.

$$\bar{r} \cos \bar{\theta} = \cos 2\pi t \cdot r \cos \theta - \sin 2\pi t \cdot r \sin \theta, \quad \text{аналогично де ф-е:}$$

$$\bar{r} \sin \bar{\theta} = \sin 2\pi t \cdot r \cos \theta + \cos 2\pi t \cdot r \sin \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{r} \cos \bar{\theta} = r \cos (\theta + 2\pi t) \\ \bar{r} \sin \bar{\theta} = r \sin (\theta + 2\pi t) \end{cases} \quad \text{представим де ко де}$$

$$\tan \bar{\theta} = \tan (\theta + 2\pi t) \Rightarrow \bar{\theta} = \theta + 2\pi t \quad (10)$$

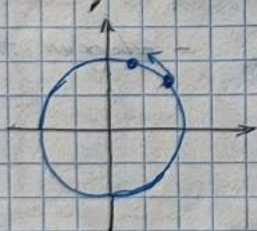
представим в поляр. коорд.

$$\begin{cases} \bar{\theta} = \theta + 2\pi t \\ \bar{r} = r \end{cases} \quad \text{преобр. поворота угла по константе.}$$

$\Rightarrow$ любая константа удовл. этому уравнению.

$$\Rightarrow r = r_0 = \text{const} > 0 \quad (0 - \text{исходн. точка, к-е ей не равна})$$

В полярных коорд. Если t -рациональное.



$$t = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{k_1}{k_2} \quad \text{Если } k_1 \text{ и } k_2 \text{ взаимно простые целые числа, то } t \text{ как есть константа угла поворота } k_2$$

Если t -иррациональное число, то фазов. коорд. точки при действии отср. (10) сдвигаются в бесконечность (или же не возвращается в исходн.)

След-но в случае рац-ого t фазов. коорд. выйдут за пределы координатной сетки, находясь в фазовом пр-ве.

t -иррац., тогда фазов. коорд. выйдут за пределы координатной сетки, находясь в фазовом пр-ве.

$$\text{Простой пример: } t = 2 \text{ и } t = \sqrt{2}$$

предполагая, что $x(0) = 0, y(0) = 0$ в нуле.

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

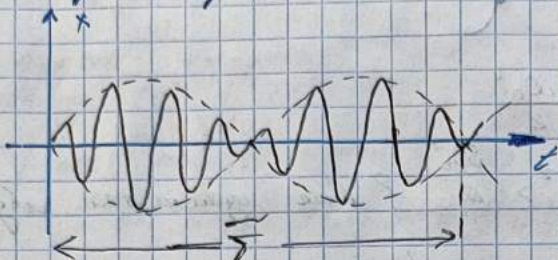
$$1) \delta = 2 = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{8} (\cos t - 2 \cos^3 t + 1) \leftarrow \text{нужно } 2\delta$$

$$2) \delta = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\Rightarrow x(t) = 2F_0 \sin\left[\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}t\right] \cdot \sin\left[\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}t\right]$$

Поиск формул:



Частота таких колебаний приближительно:

$$\tilde{\omega} \approx \frac{\omega + \omega_0}{2}$$

$$\tilde{T} \approx \frac{4\pi}{\omega_0 - \omega} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}-1}$$

$$3) \omega = \omega_0$$

То есть, которые не могут быть даны не проверяемо. Решения не существуют при усл-вии: $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.
" решение примет вид:

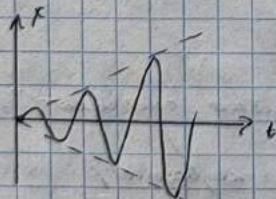
$$(12) \int x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + t \frac{F_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$y(t) = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + y_0 \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{2\omega_0} (\sin \omega_0 t + t \omega_0 \cos \omega_0 t)$$

Из этих решений следует, что при $\omega = \omega_0$ описанных решений нет. (если t определено). При любых нач. условиях при $t \rightarrow \infty$ и x и $y \rightarrow \infty$.

Например: $x_0 = y_0 = 0 \Rightarrow x(t) = t \cdot \frac{F_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$

Это лишь частный пример. Это не-решение для системы интегрируемых систем, следовательно, не существует.



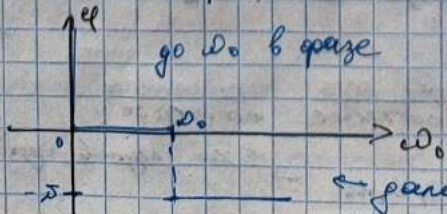
Резонансные кривые:

1) конкурентивный случай:

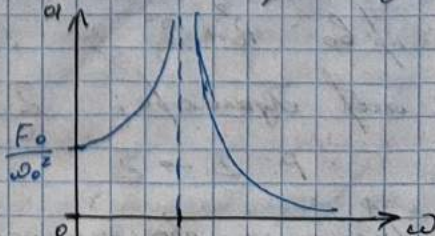
$$x_0 = y_0 = 0$$

$$\alpha = \frac{F_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|}, \quad \omega \neq \omega_0$$

до ω_0 в фазе



будет максимум для нач.

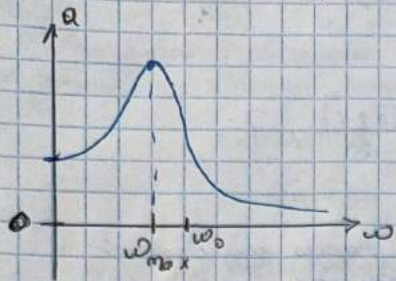


после ω_0 в противофазе

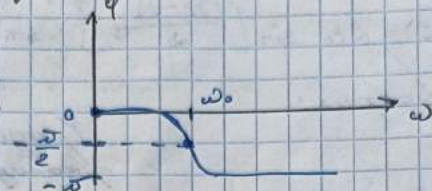
2) Диссипативный элемент.

$$Q = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

→ амплитуда колебаний



$$\text{где } \omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$



Это всё для случая $\delta < \frac{\omega_0}{2}$

След-но: что будет если $\delta^2 > \frac{\omega_0^2}{2}$? Как изменится поведение системы?

Обычно вводят величину Q - добротность:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}, \text{ где } \delta = \delta\omega = \delta \frac{dx}{dt} - \text{логарифм. демпфирование}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

если δ будет очень мало, тогда пик в $Q(\omega)$ будет очень высоким и узким.

Работоспособность хар-т селективность в-ва резонатора. Система будет лучше откликаться на внешн. силу с частотой близкой к ω_0 .

Выводы резонанса в механических системах

Рассмотрим систему:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}, t), \text{ где } \mu \text{ - малый параметр}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x + \mu f(x, y, t) \end{cases} \quad (3) \rightarrow \text{система неавтономная}$$

f - нек-н. ф-ция с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Первое пр-во: $R^2 \times S^1$; $t = t_0 + \omega \tau$

Сущ-т экв. Пуанкаре: $\Sigma = \{t = t_0; (x, y) \in R^2\}$

$$P: \Sigma \rightarrow \Sigma$$

примем рассм-е в качестве проекции на Σ

$\omega < m\omega_0$, $m = 1, 2, 3, \dots$ → тем экв. резонансы

З.е. α, β — угловые скорости по часовой стрелке.

В будем считать, что $\omega_0 = m\omega$ и $\omega_0 \neq m\omega$.

Приведем систему к виду, который представляется лучше.

Вектор-функция $\vec{r}$ — координаты центра масс:

$$(2) \quad \begin{cases} x = a \cos\left(\frac{\omega t}{m}\right) + b \sin\left(\frac{\omega t}{m}\right) \\ y = -\frac{a\omega}{m} \sin\left(\frac{\omega t}{m}\right) + \frac{b\omega}{m} \cos\left(\frac{\omega t}{m}\right) \end{cases} \quad (2'')$$

Будем считать, что $a = a(t)$ и $b = b(t)$ и подставим систему (2) в (2):

$$(3) \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\omega t}{m}\right) \frac{da}{dt} + \sin\left(\frac{\omega t}{m}\right) \frac{db}{dt} = 0 \\ -\frac{\omega}{m} \sin\left(\frac{\omega t}{m}\right) \frac{da}{dt} + \frac{\omega}{m} \cos\left(\frac{\omega t}{m}\right) \frac{db}{dt} = \left(\frac{\omega^2}{m^2} - \omega_0^2\right) \left[a \cos\left(\frac{\omega t}{m}\right) + b \sin\left(\frac{\omega t}{m}\right)\right] + \mu f(t) \end{cases}$$

Система (3) — две линейные уравнения с переменными $\frac{da}{dt}$ и $\frac{db}{dt}$. Решая систему уравнений способом, получим:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{da}{dt} = -\frac{m}{\omega} \left[\left(\frac{\omega^2}{m^2} - \omega_0^2 \right) \left(a \cos\left(\frac{\omega t}{m}\right) + b \sin\left(\frac{\omega t}{m}\right) \right) + \mu f \right] \sin\left(\frac{\omega t}{m}\right) \\ \frac{db}{dt} = \frac{m}{\omega} \left[\left(\frac{\omega^2}{m^2} - \omega_0^2 \right) \left(a \cos\left(\frac{\omega t}{m}\right) + b \sin\left(\frac{\omega t}{m}\right) \right) + \mu f \right] \cos\left(\frac{\omega t}{m}\right) \end{cases}$$

$$\omega^2 - m^2 \omega_0^2 = 0(\mu)$$

Применяем упрощение, з.е. пренебрежимо малость.

Тогда упрощения:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \mu P(a, b) \\ \frac{db}{dt} = \mu Q(a, b) \end{cases} \quad (5) \quad \Rightarrow \text{найдем систему автономных уравнений.} \\ P, Q - \text{от-ся будут нек. сист. авт.}$$

Система авто. $\xrightarrow{\text{З.е.}}$ Авт. с. от a, b . $\rightarrow$ с.р. периодич. траект. $\rightarrow$ с.с. авто.

В авто. сист. с.р. это значит $(a^*, b^*) \rightarrow a$ и b в некоторой это периодич. траектории. Важно, что их год-ть в фазе авто. совпадают.

$(a^*, b^*) \rightarrow$ периодич. траект. $\rightarrow$ периодич. точка на фазовой плоскости. Траект. близка к инвариантной кривой — значит, инвариантная кривая близка к некоторой $y(a^*, b^*)$.

З.е. у точек с.с. есть "соседи", в которых есть.

Как представить эту фазовую в координатах фазы?

Решение (2) запишем в следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{x} = z e^{i\frac{\omega}{m}t} + z^* e^{-i\frac{\omega}{m}t} \\ \dot{y} = \frac{i\omega}{m} (z e^{i\frac{\omega}{m}t} - z^* e^{-i\frac{\omega}{m}t}) \end{cases} \quad (6)$$

где $i^2 = -1$, z и z^* - комплекс. сопр. велич. изр. вект.

$$z = \frac{(a-ib)}{2}; \quad z^* = \frac{(a+ib)}{2} \quad (7)$$

$$z e^{i\frac{\omega}{m}t} + z^* e^{-i\frac{\omega}{m}t} = 0$$

$$i2\dot{z} = \frac{m}{\omega} [(\frac{\omega^2}{m^2} - \omega_0^2)(z e^{i\frac{\omega}{m}t} + z^* e^{-i\frac{\omega}{m}t}) + \mu t] \cdot e^{-i\frac{\omega}{m}t} \quad (8)$$

→ преобразов. по преф. $\tau = \frac{2t}{m}$

27.03.23.

Решение в комплексном
символе.

Рассматриваем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x + \mu [-\lambda_0 y - \beta_0 x^3 + A_0 \cos \omega t] \end{cases} \quad (1)$$

$0 < \mu < 1$ - малый параметр, $\lambda_0 > 0$ - отвечает за демпфирование,
 $\beta_0 > 0$ - отвечает за нелинейность, A_0 - амплитуда, ω - частота
вынуждающей силы.

Будем рассуждать так: $\omega \approx \omega_0$ ($m=1$)

Введем рассуждая: $\tilde{\omega}^2 = 1 - \mu \varepsilon$

Введя комплексное переменное (6), (пределах ед.-м.),
тогда система (1) перейдет в (2):

$$2i\dot{z} = \mu \left[\varepsilon (z + z^* e^{-2i\tau}) - \frac{i\lambda_0}{\omega} (z - z^* e^{-2i\tau}) + 3\beta_0 z^2 z^* + 3\varepsilon (z^*)^2 e^{-2i\tau} + \right. \\ \left. + (z^*)^3 e^{-4i\tau} \right] + \frac{A_0}{2\omega^2} (1 + e^{-2i\tau}) \quad (2)$$

Преобразуем по преф.:

$$2i\dot{z} = \mu \left[\varepsilon z - \frac{i\lambda_0}{\omega} z - \frac{3\beta_0}{\omega^2} z^2 z^* + \frac{A_0}{2\omega^2} \right] \quad (3)$$

Вспомогательн. как ввели z и z^* (2'):

$$\begin{cases} \dot{a} = -\varepsilon b + \beta(a^2 + b^2) - \lambda a = f_1 \\ \dot{b} = \varepsilon a - \beta a(a^2 + b^2) - \lambda b + A = f_2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{где } A = \frac{A_0}{2}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\omega}, \quad \beta = \frac{3\beta_0}{4\omega^2}, \quad \varepsilon = \frac{\mu \varepsilon}{2}$$

Хотим проверить эту систему на наличие кр.-в. Покажем,
что в этой системе нет предельных циклов. Воспользуемся
критерием Бендиксона-Дюпона.

Д.е. если Γ область D и Γ ф.-я $B(a,b)$ (возм. $B(a,b)=1$)
и если:

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial b} = -\lambda + 2\beta ab + -\lambda - 2\beta ab = -2\lambda \neq 0$$

$\rightarrow$ критерий вып-ся. $\rightarrow$ неск. экстр. значений.

т.е. нужно искать экстр. в.р., оп-ся в.и. или:

$$\begin{cases} -\xi b + \beta b(a^2 + b^2) - \lambda a = 0 & / \cdot a & / + a \\ \xi a - \beta a(a^2 + b^2) - \lambda b + A = 0 & / \cdot b & / - b \end{cases}$$

Введем новую переменную $r = a^2 + b^2$ и выразим переменные a и b через r .

$$-\lambda(a^2 + b^2) + Ab = 0 \rightarrow b = \frac{\lambda r}{A}$$

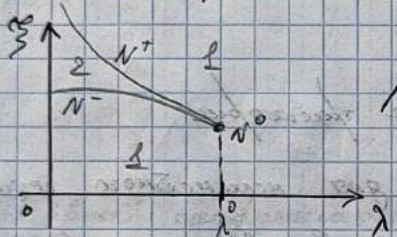
аналогично $\Rightarrow a = \frac{\beta r^2 - \xi r}{A} \quad (?)$

Подставим a и b в выражения для r :

$$(8) \quad \Phi(r) = 0, \text{ где } \Phi(r) = r^3 - \frac{2\xi}{\beta} r^2 + \frac{(\xi^2 + \lambda^2)}{\beta^2} r - \frac{A^2}{\beta^2}$$

Графика дифференциальной задачи относится к действит-х и вещным корням.

$$N^+ = \{ \lambda, \xi \mid \lambda > 0, 2\xi(9\lambda^2 + \xi^2) - 27\beta A^2 + 2(\xi^2 - 3\lambda^2)^{3/2} = 0 \}$$

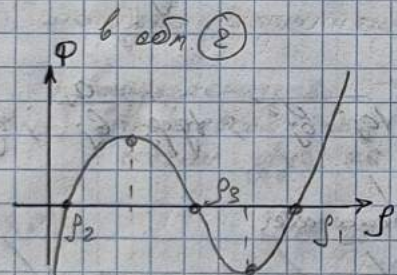


В области 2 есть (5) точек, 3 есть равновесия, а в 1 - 1 есть r .

Из анализа график:

$$N^0: \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \beta^{1/3} A^{2/3}, \quad \xi = \frac{3}{2} \beta^{1/3} A^{2/3}$$

$$\frac{\xi}{\lambda} = \sqrt{3}$$



Можно построить $\Phi(r)$

$$0 < r_2 < r_{\max} < r_3 < r_{\min} < r_1$$

Линейризуя систему получим кар-ое др-е:

$$r^2 + 2\lambda r + \beta^2 \Phi(r_1) = 0$$

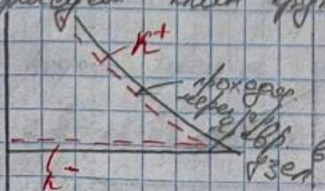
(5 - кар-кое лок-ли, этого корня не нужно с л-й частью)

$$\Phi(r_1) > 0, \quad \Phi(r_3) < 0, \quad \Phi(r_2) > 0$$

β и A заданы сировали.

Итак, введем условия: P_1 - уел. с.р.
 $\exists P_1$ и P_2 оп-ся λ , но P_2 - уел. с.р.
 $\lambda > 0 \Rightarrow$ это уел. P_3 - сирло

Важно установить где есть экстр. максимум, а где минимум. Нарисуем эти функции:



Означ. функции K^+ и K^- они получаются из дифференциальной кар-ого др-а. Как значения функций K^+ и K^- в сир-мо.

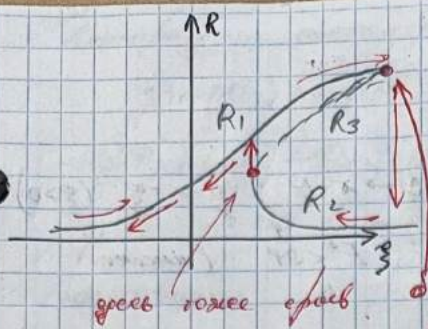
$$K^+ = \{ \lambda, \xi \mid \lambda > 0, \xi = A^2 \beta \lambda^{-2/3} \}$$

$$K^* = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > 0, \quad 4 \sum_{i=1}^3 \lambda^3 + 9 \sum_{i=1}^3 \lambda^2 - 27 \lambda^2 \rho = 0 \}$$

Видишь пункт. касаний с.р. P_1 и P_2 уст. формул. Заменяем
это касанием касаний не явл. Бидефуркация касания.
На касание N^- и N^+ дес. узлы сов. с точкой $z \rightarrow$
показалось седло-узел.

$\Rightarrow N^*$ - сов. дифференциал размер. 2, а N^0 - сов. дифференциал трехгранное равновесие - размерности 2.

Т.к. K^+ сильно притягивает к N^+ → продукт сильно вступает
в реакцию → основно катионное взаимодействие (?)



R_1, R_2, R_3 — особ. $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$
 Фронт — кривая, отделяющая область, где решение существует, от области, где оно не существует. (находясь на границе)
 → Бифуркационный режим.

здесь тоже есть фронт
 это тоже фронт
 бифуркация, периодических траекторий (при увеличении λ производят фронт.)

⇒ в системе наблюдается неустойчивость

Внешнее воздействие
автоматическая синхронизация
системы с внешним периодическим воздействием

т.е. она имеет генерирующую периодическую колебательность.

Синхронизация — функциональное явление, возникающее в системе, когда в ней возникают колебания, согласованные с колебаниями внешнего воздействия.

Впервые синхронизацию описал Гюйгенс. (он изучал маятниковые часы).

Различают два типа синхронизации:

- 1) Внешнее воздействие — при действии внешней силы (возмущения) на систему.
- 2) Внутреннее — синхронизация, возникающая в процессе взаимодействия систем друг на друга.

3.03.23.

Основы теории внешнего воздействия

Рассмотрим фронт (систему Ван-дер-Поля):

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \mu [z x + (1-x^2)y + E_0 \cos t] \end{cases} \quad (1)$$

$G = R^2 \times S^1$ — фазовое пространство

$0 < \mu \ll 1$ — малый параметр.

$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 + \mu z \rightarrow z$ — расстройка; ω_0 — частота свободных колебаний.

Система порождает отображение Пуанкаре: $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$
 Числовая мера Вана-дер-Поля порождает инвариантную меру.

Нормальные: 2π , $\omega_0 \approx 1$.

Будем искать систему отображения Ван-дер-Поля (в канонической форме):

$$2\tilde{z} = \mu \left(-i z^2 + z - z^2 z^* - \frac{i E_0}{2} \right) \quad (2)$$

переходим к действительным переменным иерархии:

$$r, \theta: z = re^{-i\theta}, z^* = re^{i\theta} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2) получаем:

$$\begin{cases} 2r\dot{\theta} = \mu(\xi r + E \cos \theta) \\ 2\dot{r} = \mu(r - \mu^2 + E \sin \theta) \end{cases} \quad \text{где } E = \frac{E_0}{2}; \quad \theta \rightarrow \pi - \theta; \quad \xi \rightarrow -\xi \quad (\xi > 0)$$

Рассматривая ещё предп. такого движения $E^2 < \frac{4}{27}$ (иначе будет фрего вращатель. движение.)

$$\text{Ищем сов. равновесия: } \begin{cases} \xi r + E \cos \theta = 0 \\ r - \mu^2 + E \sin \theta = 0 \end{cases}$$

выразим $\cos \theta$ и $\sin \theta$ и пер. в основн. тригоном. тождество; получим:

$$(5) \quad F(\theta) = 0, \quad \text{где } T = r^2$$

$$F(\theta) = \theta^3 - 2\theta^2 + (1 + \xi^2)\theta - E^2 = 0 \quad \text{методом Корнюса.}$$

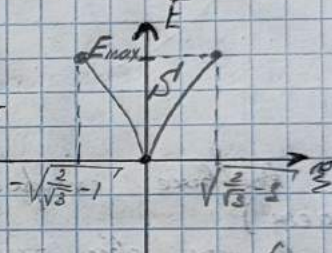
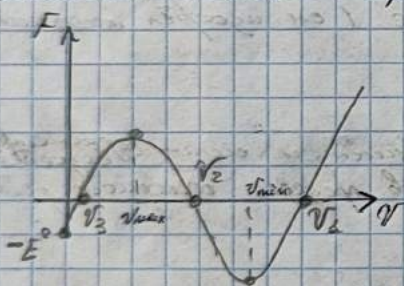
дискриминант: $\Delta = \frac{(\xi^2 - \frac{1}{3})^3}{27} + \frac{[\frac{2\xi^2}{3} - E^2]^2}{4} \rightarrow \text{может быть отрицател.}$

Ищем значения параметров $E, \xi: \Delta = 0$

$$\rightarrow E = \sqrt{E^2} = \sqrt{\frac{2}{27} [1 + 9\xi^2 - (1 - 3\xi^2)^{3/2}]}, \quad 1 - 3\xi^2 > 0$$

построим кривую на ко-ор. (E, ξ) :

В области S равновесия. Как видно из (5) имеет 3 кор.



$$\begin{aligned} \theta_{\min} &= \frac{2 - \sqrt{1 - 3\xi^2}}{3} \\ \theta_{\max} &= \frac{2 + \sqrt{1 - 3\xi^2}}{3} \end{aligned}$$

касаясь кривой в т. $\xi = 0$ $= \frac{1}{3}$ и $= -\frac{1}{3}$ совб.

Для дальнейшего анализа потребуем:

$$F(\frac{1}{3}) = \frac{4}{27} - E^2 + \frac{\xi^2}{3} > 0; \quad \theta_{\max} > \frac{1}{3}; \quad \theta_{\min} > \frac{1}{3};$$

$$(6) \quad F(-1) = \xi^2 - E^2 \leftarrow \text{здесь зависит от } \xi.$$

Из (6) вытекают нестр. утверждения сов. кривой:

$$\theta_1(\xi, E) < \frac{1}{3} < \theta_2(\xi, E); \quad \theta_2(\xi, E) > \frac{1}{3}$$

$$\theta_1(\xi, E) < 1, \quad E < \xi$$

$$\theta_2(\xi, E) = 1, \quad \text{если } E = \xi$$

$$\theta_1(\xi, E) > 1, \quad E > \xi$$

Но мы должны найти ещё и θ в ср.!

$$\theta = \theta_j, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\text{то } \theta_1 = \frac{\mu_1(1 - \mu_1)}{\xi}; \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\xi, E)$$

Линеаризуем систему и найдём х-ар-ое уравнение:

$$\lambda^2 + p(\theta_j)\lambda + q(\theta_j) = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

$$p(\theta_j) = \frac{E}{r_j} \sin \theta_j - (1 - 3r_j^2)$$

$$q(\theta_j) = \frac{E}{r_j^3} \cos^2 \theta_j - \frac{E}{r_j} \sin \theta_j (1 - 3r_j^2)$$

подставим

$$p(\theta_j) = 2(2\theta_j - 1)$$

$$q(\theta_j) = \frac{2}{3} - (1 - 3r_j^2)(r_j^2 - 1) = F'_j(\theta_j)$$

Чем-то это можно и св-ва корней:

$$q(\theta_1, \theta_2) < 0 \Rightarrow \theta_2 - \text{одно}$$

$$p(\theta_3) < 0, q(\theta_3) > 0 \Rightarrow \theta_3 - \text{перех. с.р.}$$

$$p(\theta_2) > 0, q(\theta_2) > 0 \Rightarrow \theta_2 - \text{уст. с.р. (узел)}$$

Это показывает св-ва с.р. Дрейфует к неустойчивому - непереходному состоянию системы. Показали, что по фазовой картинке имеется аттрак-торная область.

$$2\dot{r} = \mu(r - r^3 + E \sin \theta) \leq \mu(r - r^3 + E) \quad (7)$$

Найдём условие на r , когда $r - r^3 + E < 0$. Тогда r убав. в эту область.

Покажем, что неравенство (7) будет выполнено для

$$r > r_1(0, E)$$

В этом случае ф-я $F(r)$ принимает вид: $E = 0$

$$F(r) = r(r-1)^2 - E^2$$

$$F'(r) = (r-1)^2 + 2r(r-1) = (r-1)(r-1+2r) = (r-1)(3r-1)$$

$$\Rightarrow r_1(0, E) > 1$$

тогда $F(r) > 0, r > r_1(0, E)$

$$F(r) = [r(r-1) - E] \times [\sqrt{r}(r-1) + E]$$

$$F(r) > 0 \Rightarrow \sqrt{r}(r-1) - E > 0$$

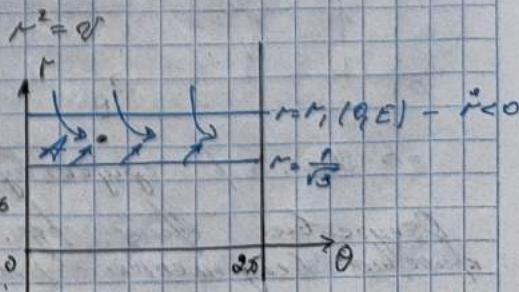
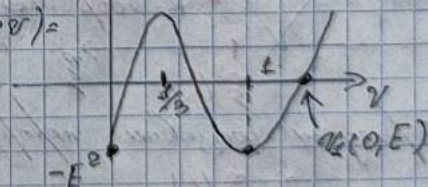
$$r(r^2-1) - E > 0$$

Нарисуем фазовую картину.

В r_1 в которую будут уходить, захватить область. С другой стороны.

$$2\dot{r} \Big|_{r=\frac{1}{\sqrt{3}}} = \mu \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + E \sin \theta \right) > 0 \Rightarrow E < \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

но тут только, что по этой ф-ле. (но не менее, если

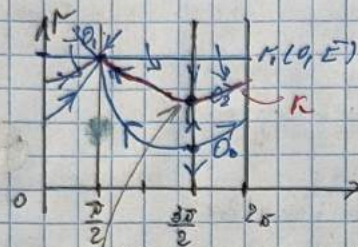


=> обл. Λ - квадрианта отн. начал движения. (т.е. любая траектория с н.у. в Λ будет в Λ .)
но это и что является шеф. (+50)

В частности из этих условий видно, что с.р. O_1 и O_2 лежат в этой области, а O_3 - вне.

Динамика системы при вертикальном рассеянии ($\varphi=0$)

=> $\dot{\theta} \sim E \cos \theta$ => $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ равновесия. $\dot{\theta} = 0$



представлено на во де ур-е системы

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu(r^2 - E \cos \theta) \\ \dot{\theta} = \mu(r - r^3 + E \sin \theta) \end{cases}$$

Анализировать фаз. пространство.

=> $\dot{r} = \mu(r - r^3 + E)$

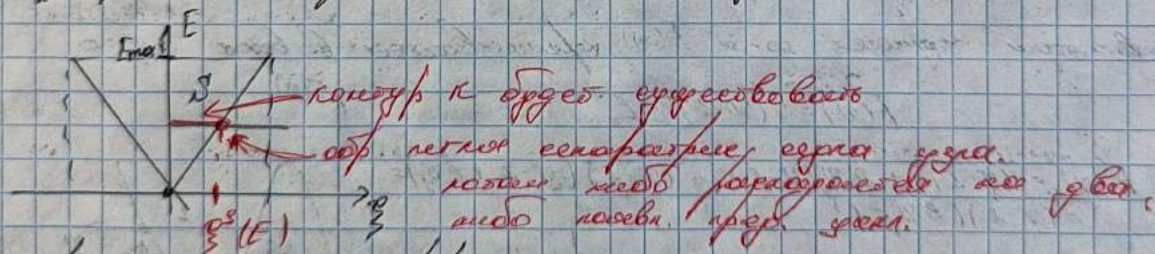
какой r может быть? В этом случае: $r - r^3 + E < 0 \Rightarrow r > r_1(0, E)$
 $r - r^3 + E = 0$

=> r_2 лежит на границе, но она также не может.

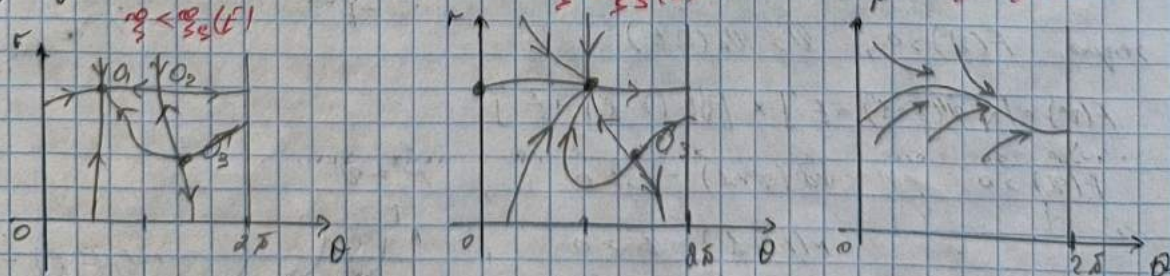
Когда $\theta = \frac{3\pi}{2}$ => $\dot{r} = \mu(r - r^3 - E) \rightarrow$ 2 экв. равн. O_1 и O_2
как ведет себя θ ?

$\dot{\theta} \sim E \cos \theta$ всё определяется $\cos$. Если $\cos > 0$ то θ увеличивается, если $\cos < 0$ то θ уменьшается.

Существование контур из траекторий K след. из 2х с.р. в сепаратрисе - гомоклинической контур.



Найдем фазовые портреты:



=> Фаз. с.р. существовать только в области S .

Важнейшие фаз. портреты, фазовый портрет можно найти с помощью критерия Бейлиса - Дюлома:
 $B(\theta, r) = r$, но не для всех r .

Образование Франко
и их романы

Есть. Везде есть. И, где-то, в лесу.

$$x_j = 2r_j \cos \varphi_j = \left\{ \cos \varphi_j \right\} = - \frac{2r_j v_j(z, E)}{E}$$

$$y_j = r_j \sin \theta_j = \frac{r_j(\xi, t) (1 - \psi_j(\xi, t))}{F} \quad (1 - \psi_j(\xi, t))$$

$$Q_j = \sigma + \arctan\left(\frac{1 - v_j(\xi, t)}{\tan \alpha}\right)$$

Нетрудно видеть, что с/р-во:

$$x_j(\frac{1}{s}, \varepsilon) < 0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$y_k(\frac{2}{3}, E) < 0, \quad k = 2, 3,$$

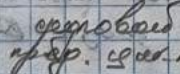
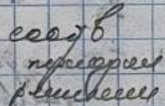
$$\begin{aligned} y_1(x, E) &> 0, & E > 0 \\ y_1(x, E) &= 0, & E = 0 \\ y_1(x, E) &< 0, & E < 0 \end{aligned}$$

Нормируем, что будет на матрице Грама-Кронекера. Получили разбитие 10.04.23.
в m -то параметров: $0 \leq \beta < \beta_5$. Есть

0.5 0.5 0.5

$$\frac{E = \text{const}}{I}$$

для которого Гессе и слово "Земля" стало
которым-то внутри "любви".



Есть и обратная
функция f^{-1} , т.е. если
из x перейти к P_1 , то
снова к P_2 и снова
также P_3 .

С увеличением ε в посылке $\varphi = \varphi_1$ бросок становится: P_1 - остается, а φ_2, P_2 и P_3 сливаются, образуя одно-дзеп, в котором нет адр. квант. зонирования



P_0 $\uparrow$ φ P_0

φ - обн.



የሆኑ ዓይነቶች ምስል $\mathbb{R}^n$ ጋር ሲገናኙ ለሆኑ ስራዎች



Зная поверение на епископство Жуанке, можно восстановить дискуссию нехорошо шестилет.

$$L_1 = \{x = 2\sqrt{v_1(\xi, E)} \cos(t - \theta_1), y = -2\sqrt{v_1(\xi, E)} \sin(t - \theta_1)\}$$

$P_1 \rightarrow$ соотв. период. вращения на торе. $\rightarrow$ год, а P_2 лежит вне тора.

На торе происходит бифуркация период. вращения и все период. вращения исчезают и соотв. траектории, которые по этому тору бифуркация.

$\Rightarrow$ исчезло соотв. ~~все~~ $\Rightarrow$ все состояния, в зав-ти от их близости к траектории бифуркации.

Бифуркация происходит жестко.

Обсудим $\mathcal{H}_1$: фиксируем E и смотрим зав-ть амплитуды от ξ .

$$a = 2\sqrt{v_1(\xi, E)}$$

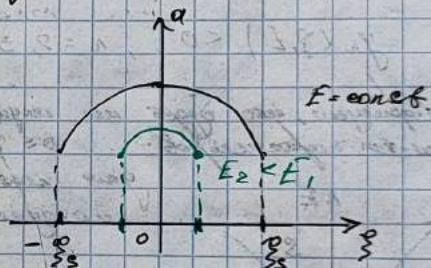
$$\frac{\partial a}{\partial \xi} = \frac{\frac{\partial v_1}{\partial \xi}}{\sqrt{v_1(\xi, E)}}$$

но решение v_1 знаем, можем проинтегрировать и параметризовать.

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = \frac{-2\xi v_2(\xi, E)}{2v_1} \rightarrow \text{есть экстремум в } \xi = 0$$

$\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = \frac{dF(v)}{dv} \Big|_{v=v_1} = 0$

Наибольшая амплитуда при $\xi = 0$.
Этот дисперсионный расщепление возбуждений синхронизации светом.
(обл. синхронизации светом)



Полоса расщепления - где синхронизация (взаимод. синхронизация) наблюдается.

судит из параметрич. диаграммы

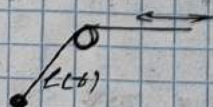
Внешняя среда "захватывает" световую волну: была автоколеб. световая со своей соотв. частотой $\rightarrow$ но частота выстраивается под внешней силой, но появилась дол. фаза θ .

Иск-ся для формирования собственных модных параметров, но дисп. ~~разрешения~~ $\rightarrow$ дисперсия. Решено в световых волнах. регулирование?

Параметрические колебания

Соб. световые, подв. "внешней" силе ср. скорости. Скорост. находится в своем световом.

Пример - качели или маятник (у которых есть своя частота).



Все параметр. световые можно разделить на 2 класса:

- 1) Резонансные пар. световые.
- 2) Нерезонансные пар. световые.

Если извне. параметр. световые имеют чуждую частоту или совпадают $\rightarrow$ резонансные световые. Т.е. излучают в том же

каноническим можно считать левую часть.
 Через канонические → базисные функции.

Будем искать - то линейное сочетание, в основе которых лежит теория Флоке. (решение по методу 2х гр-ных, но ср-ва для произвольной).
 Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 \\ \dot{x}_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 \end{cases} \quad (1) \quad \text{где } p_{jk}(t+T) = p_{jk}(t)$$

Запишем общее решение системы (1) в виде вектора:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

↑ все зависит от t.

$$\vec{x}(t) = X(t) \vec{c}$$

φ, ψ - обр. фундамент. системы решений, т.е.

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 1, \varphi_2(0) = 0 \\ \varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = 1 \end{cases} \quad (3) \quad \text{покажем, что, т.е. вектора должны быть линейно независимыми.}$$

Запишем определитель Вронского:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \psi_1(t) & \psi_2(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Для определителя Вронского справедлива ф-ла Ливилля:

$$W(t) = \underbrace{W(0)}_1 \cdot \exp \left\{ \int_0^t [p_{11}(t) + p_{22}(t)] dt \right\} \quad (4)$$

$\Rightarrow W(0) = 1 \Rightarrow W(t) \neq 0$ и вектора $\vec{\varphi}$ и $\vec{\psi}$ линейно независимы.

$p_{jk}, \vec{\varphi}(t+T), \vec{\psi}(t+T)$ так же будут являться решениями этой системы.

Здесь можно написать:

$$(5) \quad \begin{cases} \vec{\varphi}(t+T) = a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t) \\ \vec{\psi}(t+T) = c\vec{\varphi}(t) + d\vec{\psi}(t) \end{cases} \quad \text{где } a, b, c, d - \text{произвольные константы.}$$

Если в шед. (5) подставить $t=0$, получим:

$$\begin{aligned} a &= \varphi_1(T), \quad b = \varphi_2(T) \\ c &= \psi_1(T), \quad d = \psi_2(T) \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) означается, что мы знаем константы, если знаем фундамент. систему решений.

Покажем, что шед. решение шед. (1), которое воевр. с точн. до констант.

$$(7) \quad \vec{x}(t+T) = S\vec{x}(t), \quad \text{где } S - \text{ нек-ое число.}$$

Поскольку любое решение шед. (1) можно получить заменой аргумента, то запишем:

$$\vec{x}(t) = A\vec{\varphi}(t) + B\vec{\psi}(t) \quad (8) \quad A, B - \text{константы}$$

$$\vec{x}(t+\delta) = A\vec{\varphi}(t+\delta) + B\vec{\psi}(t+\delta) \quad (9)$$

представляя (8) и (9) в (7) получим след. соотношение:

$$A\vec{\varphi}(t+\delta) + B\vec{\psi}(t+\delta) = S[A\vec{\varphi}(t) + B\vec{\psi}(t)] \quad (10)$$

Извлекая (5) получим:

$$[A(\alpha - S) + Bc]\vec{\varphi}(t) + [bA + B(\beta - S)]\vec{\psi}(t) = 0$$

это должно выполняться при $\forall t$, тогда получим систему:

$$\begin{cases} A(\alpha - S) + Bc = 0 \\ Ab + B(\beta - S) = 0 \end{cases} \quad (11) \rightarrow \text{необв. решение, когда } \Delta = 0$$

$$\Rightarrow S^2 - (\alpha + \beta)S + (\alpha\beta - bc) = 0 \quad (12)$$

Запомним, что $\alpha\beta - bc$ и.д. вычислено из коэф-в $p_{11}(t)$ и $p_{22}(t)$. Почему?

Вспомним о-е-а Вронского, когда $t = \delta$:

$$W(\delta) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\delta) & \varphi_2(\delta) \\ \psi_1(\delta) & \psi_2(\delta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \alpha\delta - b\epsilon$$

• график строится; по формуле Лувилля: о-е-а p_{11} и p_{22}
 $W(\tau) = W(0) \exp \left\{ \int_0^\tau [p_{11} + p_{22}] dt \right\}$

Пусть S_1 и S_2 — решения ф-ы (12). Будем предполагать, что они не кратные.

Значит есть такие константы:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{c}{S_1 - \alpha} = \frac{S_1 - \beta}{b}; \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{c}{S_2 - \alpha} = \frac{S_2 - \beta}{b} \quad (13)$$

$\Rightarrow$ 2 решения:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t+\delta) &= S_1 \vec{x}_1(t) \\ \vec{x}_2(t+\delta) &= S_2 \vec{x}_2(t) \end{aligned}$$

Решение ф-ы решение через несколько периодов:

$$\vec{x}_j(t+n\delta) = (S_j)^n \vec{x}_j(t)$$

$j=1, 2, \vec{x}_1(t) = \vec{x}_2(t)$ лем. нулевое, ах можно выбрать? какое-то ненулевое. выб. решение.

Их можно выбрать так:

$$(14) \quad \vec{x}_j(t) = e^{\lambda_j t} \vec{\Phi}_j(t), \text{ где } \vec{\Phi} - \text{вектор ф-ы с периодом } \delta.$$

$$\vec{\Phi}_1(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) \\ \Phi_{21}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Phi}_2(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{22}(t) \end{pmatrix}$$

при этом форма λ_j :

$$(14) \quad \lambda_j = \frac{1}{T} [\ln |S_j| \pm i(\arg S_j + 2\pi k)] \quad , \text{ где } j=1, 2; \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

S_j - произв. комплексного значения; λ_j - хар-ки показателя; } могут быть R и $\mathbb{C}$

Пол-м, что Φ периодическая и периодом T . Из соотношения (14) можно записать:

$$\Phi_j(t) = x_j(t) e^{-\lambda_j t}$$

$$\vec{x}_j(t+T) = S_j \vec{x}_j(t) = e^{\lambda_j T} \vec{x}_j(t)$$

$$\vec{\Phi}_j(t+T) = \vec{x}_j(t+T) e^{-\lambda_j(t+T)} = e^{\lambda_j T} \vec{x}_j(t) e^{-\lambda_j(t+T)} = e^{\lambda_j T} \vec{x}_j(t) e^{-\lambda_j T} = \vec{x}_j(t)$$

$$\Rightarrow \vec{\Phi}_j(t+T) = \vec{\Phi}_j(t) \rightarrow \text{гор. пер. периодичность.}$$

Эта гр-ма произв. функции Фурье.

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \sum_{j=1}^2 c_j e^{\lambda_j t} \vec{\Phi}_j(t) \quad (15) \quad \text{общее решение системы (1)}$$

Преобразование Лапласа

Система (2) явл. неоднородной и её функцию преобраз.

$$g^T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

это преобразование превр-т: $\vec{x}(0) \in \mathbb{R}^2$
 $\vec{v}(t), t$

$$g^t \vec{x}(0) = \vec{v}(t)$$

$$\text{функция генер. сист.} \quad g^t(\vec{x}(0)) = \vec{x}(t)$$

Запишем решение системы:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_{11}(t) + c_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_{12}(t) \\ x_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_{21}(t) + c_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_{22}(t) \end{cases} \quad (17)$$

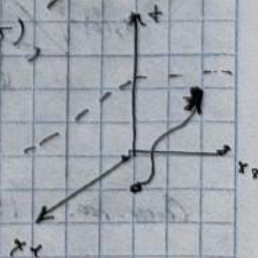
Вот здесь можно прояснить процедуру.

Возьмём какую-нибудь точку на линии $x_1(0), x_2(0)$ и можем найти c_1 и c_2 , и подставить в (17). Т.е. получим решение, прогн. через эту точку.

Затем возьмём точку через период $x_1(T), x_2(T)$, тогда в результате получим:

$$\begin{cases} x_1(T) = a x_1(0) + c x_2(0) \\ x_2(T) = b x_1(0) + d x_2(0) \end{cases}$$

$$\text{или векторно: } \vec{x}(T) = G \vec{x}(0), \quad G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$



Если знаем функ. сист. решение + начальные условия, то можем найти любое движение сист. Можно. $\rightarrow$ здесь с.р. любого периода. В век. сист. (если она линейная) всегда есть только 1 с.р. Волное состояние обобщается на решение.

17.04.2022

Устойчивость Оо равновесия.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a x_1(0) + c x_2(0) \\ \dot{x}_2(t) = b x_1(0) + d x_2(0) \end{cases} \quad (1)$$

длина времени = T

Оо равновесия: $x_1 = x_2 = 0$

Диск. спектр построен на фазов. динам. системе для характеристических вел. λ :

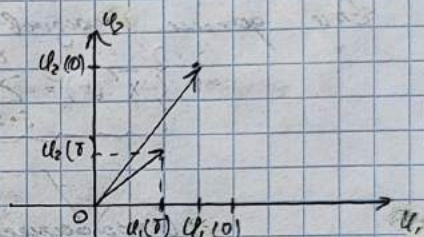
$$S_1 \cdot S_2 > 0$$

Если $|S_j| < 1$, $j=1,2$, то с.р. будет асимптотически устойчиво.

Если $|S_j| > 1$, $j=1,2$, то с.р. будет неустойчиво.

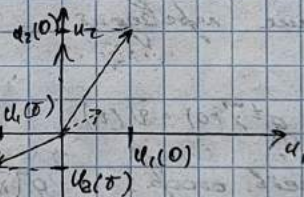
Если $S_1 > 1$, а $S_2 < 1$. $\rightarrow$ то условная точка $\rightarrow$ тоже неустойчива.

- 1) Рассмотрим точку (u_1, u_2) , и
случай, когда $|S_j| < 1$ и $S_1 \cdot S_2 > 0$
(проб. площадь)
и найдем вектор
через итерации.
 $0 < S_1 < 1$
 $0 < S_2 < 1$



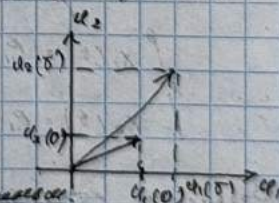
Нужно заметить, что можно лев. систему можно привести к канон. виду.

- (2) $\begin{cases} \dot{u}_1 = S_1 u_1 \\ \dot{u}_2 = S_2 u_2 \end{cases}$ За счет итераций, длина вектора уменьшается $\rightarrow$ и т.д. будет сближаться к 0.
 $\Rightarrow u_1 = u_2 = 0$ уст. с.р.



Проб. S_1 и S_2 отриц.
В этом случае с.р. неуст. $\rightarrow$ т.е. т.е. уст., но убывает.
применяется $\rightarrow$ итерация применяется.

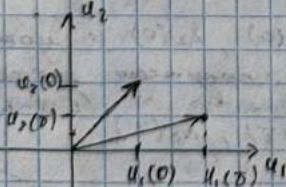
- 2) Полагая, что $|S_j| > 1$ все будет асимптотически, но длина вектора будет только расти (проб. площадь).



- 3) Пусть $S_1 > 1$, а $0 < S_2 < 1$.

$\rightarrow$ по итерациям, по u_1 коэф. увелич., а по u_2 уменьш.

Далее так и будет возрастать u_1 , а по $u_2 \rightarrow 0$. $\Rightarrow$ условная.



Сам. по: $|S_1| > 1$, $|S_2| < 1$ но они будут отрицательными. (будет / разбеж.)

Комплексно-сопряжённые нуль-полюсы. $S_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
 $\Rightarrow$ тогда u и v должны быть тем же комплексными.

$$\begin{cases} u(0) = u(0) + i v(0) \\ u(\tau) = u(\tau) + i v(\tau) \end{cases} \quad \text{представляя в (2) получим следующую систему}$$

$$\begin{cases} u(\tau) = \alpha u(0) - \beta v(0) \\ v(\tau) = \beta u(0) + \alpha v(0) \end{cases} \quad (3)$$

Запишем нуль-полюсы в тригонометрической форме:

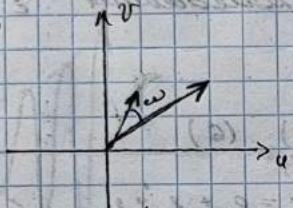
$$S_{1,2} = |S| (\cos \omega \pm i \sin \omega), \quad \alpha = |S| \cos \omega; \quad \beta = |S| \sin \omega.$$

$$\text{где } |S| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

В частности, как представлять решение, получим:

$$\begin{cases} \varphi(\tau) = \varphi(0) + \omega \tau \\ \rho(\tau) = |S| \rho(0) \end{cases} \quad (4)$$

$$1) |S| < 1$$



При поворачиваемся на ω , а длина уменьшается $\Rightarrow$ уб. фокус

2) Очевидно при $|S| > 1$ фокус увелич. и также поворачив.

3) $|S| = 1 \rightarrow$ получили центр.

Основные свойства нелинейных параметр. систем

1) Параметр. сист. (ПР) нехор. в кач. и в с.р. считается в этом случае при любых $t > 0$.

Поскольку при всех значениях параметров имеет реш. $x_1 = x_2 = 0$. Поэтому ПР, имеют качор. в которых невозн. выйти из этого сов. равн., а именно её параметры.

2) с.р. ПР ш.б. как увеличиваем, так и уменьш.

Если с.р. неуст. и ПР возникает из этого с.р. то в ней возникнут колеб. которые будут хр. возмущения. Этот процесс размытия колебаний при перемещ. параметр. имеет параметр. неуст. - нелинейно-резонансный.

Параметрические колебания и резонансы

Рассмотрим произв. параметр. систему, при:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 \\ \dot{x}_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= 0, & p_{12}(t) &= 1 \\ p_{21}(t) &= 0, & p_{22}(t) &= 0 \end{aligned}$$

а это выполн. для ур. и имеет $x_{линей}$.

Запишем ур-е для гармонических:

$$s^2 - (a+d)s + (ad-bc) = 0$$

$ad-bc$ можно найти из определителя Вронского, получим $ad-bc=1$.

Для удобства введем 1 параметр вместо двух:

$$2P = a+d$$

$$s^2 - 2Ps + 1 = 0 \quad (6)$$

1) $|P| < 1$: $s_{1,2} = P \pm i\sqrt{1-P^2}$ $\rightarrow |s| = 1$ $\rightarrow$ т.е. решение вектора не меняется.

$g^T \rightarrow$ фазовое повращив. на угол ω .

Такое решение периодично в себе. $\rightarrow$ будет тем периодич. решением.

Может быть периодич. - возмущ. колебания с нулевыми частотами.

$$x_k(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_{11}(t) + C_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_{12}(t) \quad (6)$$

$$\lambda_k = \frac{1}{T} [\ln |s_k| \pm i(\arg s_k + 2\pi k)] \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$\downarrow$
 $= 0$, т.е. $|s|=1$. тогда λ чисто мнимый.

$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{q}{T} i, \quad \lambda_2 = -\frac{q}{T} i \quad ; \quad q = |\arg s_k + 2\pi k|$$

Покажем, что $x(t)$ действ. то есть C_1 должно быть комплексно сопр.

$$C_1 = A e^{i\varphi}, \quad C_2 = A e^{-i\varphi}$$

$$\Phi_{11}(t) = h(t) e^{i\omega t}, \quad \Phi_{12}(t) = h(t) e^{-i\omega t}; \quad h(t), \varphi(t) \rightarrow T$$

представим получим:

$$x_1(t) = A h(t) \cos\left(\frac{q}{T} t + \varphi + \varphi(t)\right)$$

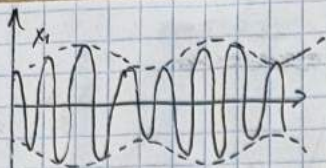
$$x_2(t) = H(t) \cos\left(\frac{q}{T} t + \varphi\right) + F(t) \sin\left(\frac{q}{T} t + \varphi\right) \quad (7)$$

где $H(t) = A h(t) \cos(\varphi(t))$ $\rightarrow$ $x(t)$ представ. решение g^T
 $F(t) = -A h(t) \sin(\varphi(t))$ $\rightarrow$ период $T_1 = T$; $T_2 = \frac{2\pi}{q}$

Все будет зависеть от отношения $\frac{q}{T}$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{q}{T}$$

$\rightarrow$ если иррац. $\rightarrow$ квазипериодич. функция
 $\rightarrow$ если рац. $\rightarrow$ периодич. ф-я.



В этом случае ЛС содержит
ограниченный колебатель.
(при $|P| < 1$)

2) $|P| > 1 \Rightarrow S_1 \cdot S_2 = 1 \Rightarrow$ значит, из них $|S_1| > 1$, а др. $|S_2| < 1$

Пусть выберем. Будет пополам. $P > 1$, в этом случае:

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \ln(S_1) > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{T} \ln(S_2) = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{1}{S_1}\right) = -\frac{1}{T} \ln(S_1) < 0$$

$\Rightarrow$ В асимптотике только расхождение (exp. $\rightarrow 0$)

$$x_1(t) \approx C_2 \exp\left[\frac{1}{T} \ln(S_1) t\right] \Phi_1(t)$$

$x_1(t)$ растет по закону эксп. пропорционально со знаком S_1 .



В лине. осцилл. колеб. выростали
линейно $\rightarrow$ здесь быстрее.

3) Совершенно аналогично рассужд. выше, когда $P < -1$ (будет
пересечение), но фазы: ничего не изменил и во всех случаях
точно просто сделать замену.

$$S_2 \rightarrow 1/S_1$$

$$|P| > 1$$

В этом случае реализуется ларинтер. режим; при $|P| < 1$ -
огранич. колебания.

4) $|P| = 1 \Rightarrow P = \pm 1$

В этом случае нультепникабры будут кратными.

$$S_1 = S_2 = S = 1; P = 1$$

$$S_1 = S_2 = S = -1; P = -1$$

В теории Фокс рассматриваются а.б. не кратных корней. В
данном случае:

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_1(t) + C_2 t e^{\lambda_2 t} \Phi_2(t)$$

$$\lambda = \frac{1}{T} \ln(S)$$

В этом случае $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будут нулевыми.

В конкретной задаче выразить P для конкретной
задачи. Но как?

для которого: Периодическое колебательное движение

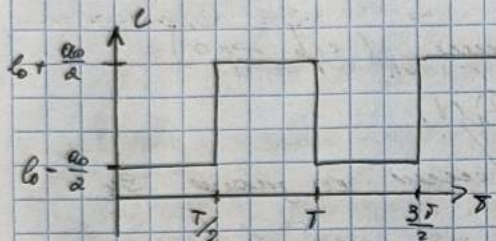
$$L(t+T) = L(t)$$

В случае периодических колебаний (мех. движение маятника);

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \frac{g}{L(t)}\varphi = 0 \quad (7)$$

Придумано ^{математическое} приближенно аппроксимировано.

$$L(t) = \begin{cases} L_0 - \frac{a_0}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ L_0 + \frac{a_0}{2}, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad L_0 > \frac{a_0}{2}$$



→ она по каждому промежутку периода →
 задается по тем же параметрам →
 просто с сменой знака → равномерно
изменяется и производные

Введем две частоты:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L_0 - \frac{a_0}{2}}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{L_0 + \frac{a_0}{2}}$$

1) пусть $\delta = 0$ — бездиссипативный случай.

$$(8) \begin{cases} \ddot{\varphi} = \varphi, \\ \ddot{\varphi} = -\omega^2(t)\varphi(t) \end{cases} \quad \text{где} \quad \omega^2(t) = \begin{cases} \omega_1^2, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \omega_2^2, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

Это ур-е абс. частного случая ур-я (8), в котором:
 $p_1(t) = \omega^2(t)$

т.е. нужно найти P -? и найти функции $P = \pm 1$.

Составление задается матрицей:

$$G^T: G = G_2 \cdot G_1$$

Матрица G_1 (подробнее). Найдено 2 независ. решения
 системы (8) в случае $\omega^2(t) = \omega_1^2$

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)$$

"

$$x_2(t) = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t)$$

Воспользуемся и.у.: $\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_2(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 1, B_1 = 0$

$$\varphi_1(t) = \cos(\omega_1 t), \quad \varphi_2(t) = -\omega_1 \sin(\omega_1 t)$$

Второе решение найдем аналогично.

$$\varphi_1(t) = \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1}, \quad \varphi_2(t) = \cos(\omega_1 t)$$

Подставим $t = \frac{T}{2}$ найдет значения коэф-тов матрицы G_2 :

$$a_1 = \cos\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right)$$

$$b_1 = -\omega_1 \sin\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right)$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\omega_1 \frac{\delta}{2})}{\omega_1} & \cos(\frac{\omega_1 \delta}{2}) \\ \frac{\omega_1 \delta}{2} & \frac{\sin \alpha}{\omega_1} \end{pmatrix}$$

По аналогии аналогично строится матрица G_2 :

$$G_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sin \beta}{\omega_2} & \cos \beta \\ -\omega_2 \sin \beta & \frac{\sin \alpha}{\omega_2} \end{pmatrix}; \quad \beta = \frac{\omega_2 \delta}{2}$$

перемножив эти матрицы: $G = G_1 \cdot G_2$ получим следующие:

$$a = \cos \alpha \cos \beta - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \alpha \cdot \sin \beta; \quad b = -\omega_2 \cos \alpha \cos \beta - \omega_1 \sin \alpha \cos \beta$$

$$c = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\omega_1} + \frac{\omega_2 \sin \alpha \sin \beta}{\omega_2}; \quad d = \cos \alpha \cos \beta - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\Rightarrow 2P = a + d = 2 \cos \alpha \cos \beta - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1 \omega_2} \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

Удобнее переписать в др. параметрах, более привычных. Можно записать:

$$\alpha = \frac{\delta \sqrt{1-\epsilon^2}}{\sqrt{1-\epsilon^2}}; \quad \beta = \frac{\delta \sqrt{1+\epsilon^2}}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$$

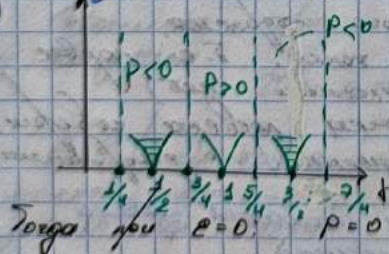
$$a = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1 \omega_2} = \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad T_0 = \frac{c}{\omega_0}; \quad \epsilon = \frac{q}{2\epsilon_0}; \quad \delta = \frac{T}{T_0}$$

ϵ - глубина модуляции; δ - относительное преобразование.

По м-ту параметров (δ, ϵ) , представим в (1) $\epsilon = 0$:

24.04.23



$$P = \cos^2(\pi \delta) - \sin^2(\pi \delta) = \cos(2\pi \delta)$$

Нужно выделить области, где $P > 0$ и $P < 0$ и где $P = 0$.

$$\delta = \frac{1}{4} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$P = 1 \rightarrow \delta = k$$

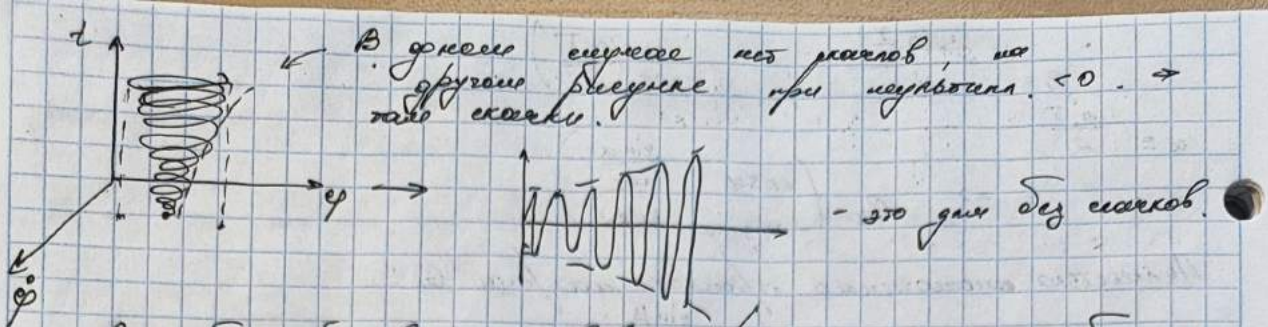
$$P = -1 \rightarrow \delta = k + \frac{1}{2}$$

Беск. много точек на осей.

Можно показать, что из этих точек выйдут 2 периодические точки ($\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$) и т.д.

Численно в т. $\frac{1}{2}$ выходящий пиклов, далее в обл $P > 0$ в т. $\frac{1}{4}$ находится еще один пиклов. - пиклов, набор пиклов.

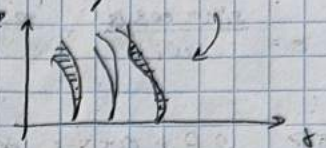
Внутри пиклова развивается нелинейный резонанс ~ резонанс по сф. координатам. Случайный вид пиклов в $P < 0$ - отриц., а в $P > 0$ - положительный.



Все области (вне маятника) ограничены колебаниями - возможны бегущие. На рисунке - нулевая скорость там, где $\gamma = 0$. - параб. инертно.

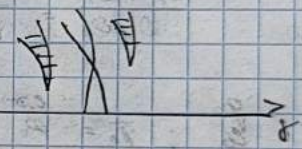
Для увеличения γ зона сжатия (или бег. маятника), а с другой стороны маятника может быть и другая.

Это может быть в силе притяжения. Но можно увидеть.



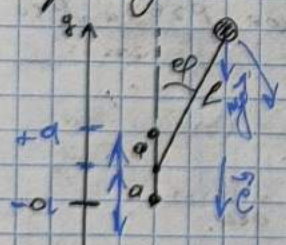
Внешнее воздействие по этой диаграмме.

Формально мы делаем все так же, - есть маятник и т.п. Но маятник эквивалентен без потерь зонам притяжения сразу при $E=0$. Но теперь нужно рассмотреть потерю, т.е. зона сжимается вверх.



Нерегулярные пер. системы
Динамика маятника с бабблером.
точкой подвида.

Рассмотрим маятник в виде упругого стержня. Рассм. и колебания в разных точках. Т.е. теперь рассматривается. (Предположим, что затухание нет)



Будем считать, что точка подвеса совершает равноускоренное движение.

$\epsilon > a, 2\pi$ a - амплитуда колебаний подвеса
 $\epsilon < a$ 2π ϵ - период колебаний
 $\epsilon < a$ $\pm \epsilon$ ускорение точки подвеса
 $\epsilon = \frac{a}{\epsilon^2}$; $\omega_p^2 = \frac{c}{\epsilon} + \frac{ga}{\epsilon^2}$
 парабол.

(1) $\begin{cases} \ddot{\varphi} = y \\ \ddot{y} = (\omega_0^2 \pm \omega_p^2) \varphi \end{cases}$ $\omega_0^2 = \frac{g}{\epsilon}$ и $\omega_p^2 > \omega_0^2$

Здесь применили только только все метрику.

(2) $\begin{cases} \ddot{\varphi} = y \\ \ddot{y} = p^2 \varphi \end{cases}$

Получим фундаментальную систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \text{ch}(pt), & \varphi_2(t) = \frac{1}{p} \text{sh}(pt) \\ \varphi_3(t) = p \text{sh}(pz), & \varphi_4(t) = \text{ch}(pz) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_1 = \text{ch}(pz), & c_1 = \frac{1}{p} \text{sh}(pz) \\ b_2 = p \text{sh}(pz), & d_2 = \text{ch}(pz) \end{cases} \quad (4)$$

Для $\begin{cases} \ddot{\varphi} = g \\ \dot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \end{cases} \quad \omega^2 = \omega_p^2 - \omega_0^2, \quad (5)$

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \cos(\omega t) \\ \varphi_2(t) = -\omega \sin(\omega t) \end{cases}; \quad \varphi_3(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \quad (6)$$

$$\begin{cases} \varphi_4(t) = -\omega \sin(\omega t) \\ \varphi_5(t) = \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = \cos(\omega z) \\ c_2 = \frac{1}{\omega} \sin(\omega z) \end{cases}, \quad b_2 = -\omega \sin(\omega z) \quad (7)$$

Далее нужно переписать условие фазы вращений для P:

$$2P = a + b = a_1 a_2 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + d_1 d_2 = \dots \quad (8)$$

$$= 2 \text{ch}(pz) \cos(\omega z) + \left(\frac{p}{\omega} - \frac{\omega}{p} \right) \text{sh}(pz) \cdot \sin(\omega z)$$

Запишем из (8) условие асимптотичности функции:

$$| \text{ch}(pz) \cos(\omega z) + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\omega} - \frac{\omega}{p} \right) \text{sh}(pz) \cdot \sin(\omega z) | > 1. \quad (*)$$

Если $P < 1$ → устойчивое решение
парциальный резонанс.

Это условие (*) реализуемо фаз. для значений $a = 2 \text{cm}$, $L = 100 \text{ мк}$ и построим $P(z)$.

Для $z < z^*$ в сист. наблюд. пар. резонанс.

Вращение фаз $z < \sqrt{\frac{8g}{g}}$ и $\omega p^2 > \omega_0^2$,
и получили $z^* \approx 0,00738$.



В верхней точке сист. стала устойчив. Касаясь, что он наблюд. что он стабилизируется. Касаясь, что он застил на месте. (неуд. по количеству) касается.

Касаясь или регулятор
и регулируемый система.

Рассмотрим матричный регулятор.

$$(2) \quad \ddot{x} + \omega_0^2(\mu t) x = 0 \quad \leftarrow \text{наблюд. матрицы} \text{ и } \mu \text{ во времени.}$$

$$\omega_0^2(\mu t) > 0, \quad z = \mu t, \quad 0 < \mu < 1.$$

Сделаем замену времени, получим.

$$\begin{cases} \mu \frac{dx}{dz} = y, \\ \mu \frac{dy}{dz} = -\omega_0^2(z)x \end{cases} \quad (10)$$

Будем исследовать систему методом ВКБ.

Ищем решение в виде рядов:

$$(11) \begin{cases} x = e^{\frac{S(z)}{\mu}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j u_j(z) \\ y = e^{\frac{S(z)}{\mu}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j v_j(z) \end{cases} \quad \text{Нужно найти } S(z), u_j(z) \text{ и } v_j(z)$$

Ограничим наше рассмотрение поведением главного (линейного по μ) слагаемого. - с точностью до μ^1 .
т.е. ищем решение в виде:

$$\begin{cases} x = e^{\frac{S(z)}{\mu}} [\omega_0(z) + \mu u_1(z)] \\ y = e^{\frac{S(z)}{\mu}} [v_0(z) + \mu v_1(z)] \end{cases} \quad (12)$$

Подставим (12) в (10) и приравняем слагаемые с одинак. степенями μ .

$$\mu^0: \begin{cases} \frac{dS}{dz} \omega_0(z) - v_0(z) = 0 \\ \omega_0^2(z) \omega_0(z) + \frac{dS}{dz} v_0(z) = 0 \end{cases} \quad (13) \rightarrow \begin{matrix} \text{есть. нек. дораб.} \\ \text{уф-иет, что } -\mu^0 = 0 \\ \text{для невозв. решения} \end{matrix}$$

$$\mu^1: \begin{cases} \frac{dS}{dz} u_1(z) + \frac{d\omega_0}{dz} = v_1(z) \\ \frac{dS}{dz} v_1(z) + \frac{dv_0}{dz} = -\omega_0^2(z) u_1(z) \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{Для (13): } \left(\frac{dS}{dz} \right)^2 + \omega_0^2(z) = 0 \quad (15) \\ \Rightarrow \frac{dS}{dz} = \pm i \omega_0(z) \Rightarrow S(z) = \pm i \int \omega_0(z) dz$$

При выполнении (15) решение системы (13):

$$(16) \begin{cases} \omega_0 = \psi(z) \\ v_0 = \pm i \omega_0(z) \psi(z) \end{cases} \quad \text{где } \psi(z) \text{ - произв. ф-я}$$

Составим теперь систему (14); укаж. (18)

$$v_1(z) = \frac{dS}{dz} u_1(z) + \frac{d\omega_0}{dz} \quad (17)$$

$$2 \omega_0(z) \frac{d\psi}{dz} = -\psi \frac{d\omega_0(z)}{dz} \quad (18)$$

$$\psi(z) = \frac{A}{\sqrt{\omega_0(z)}} \quad \text{обращено обратно пропорц. для } -i$$

$$\text{В итоге получим: } x(z) = \frac{A}{\sqrt{\omega_0(z)}} e^{\pm i \int \omega_0(z) dz} + \frac{A}{\sqrt{\omega_0(z)}} e^{-\frac{1}{\mu} \int \omega_0(z) dz}$$

Переходя к истинному времени t :

$$x(t) = \frac{2A}{\sqrt{\omega_0(t)}} \cos \theta, \quad \text{где } \theta = \int_0^t \omega_0(t) dt \text{ - фаза колебаний.}$$

Амплитуда и частота синусоида не зависят (аргументы) от времени.

Циклически энергия. (она будет постоянной)

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2(x) \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\dot{x} = -\frac{\omega_0(t) A \cos \theta}{\sqrt{\omega_0(t)}} = -\frac{2\omega_0(t) A \sin \theta}{\sqrt{2}\omega_0(t)}$$

произв. по ф-ии $\rightarrow 0$

$$\Rightarrow \dot{x} \approx -2\sqrt{\omega_0(t)} A \sin \theta, \text{ подставим в } E:$$

$$E \approx 2A^2 \omega_0(t) \sim \text{энергия уже не постоянна}$$

Но $\frac{E}{\omega_0(t)} = 2A^2 = \text{const} \sim \text{адиабатический инвариант}$

Меняя частоту можно изменить энергию системы

Основные понятия линейной волны

Гармоническая волна:

$$u(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (1)$$

где $u(x, t)$ - переменная, имеющая какое-то физ. сродн. A_0 - амплитуда, φ - фаза волны, ω - круговая частота, k - волновое число.

В каждой точке среды происходят гармонич. колеб. с $T = \frac{2\pi}{\omega}$, фазы которых разн. в разных x .

Пробег волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ - длина волны.

$u(x, t)$ - будет наст., если $\omega t - kx + \varphi = \text{const}$ / $\frac{d}{dt}$ (2)

$$(3) \quad \omega - k \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_p \text{ - фазовая ск-ть волны}$$

В дальнейшем будем исп. в общ. форме запись

$$u(r, t) = A e^{i(\omega t - kr)}$$

Квант. и дисперсионные среды

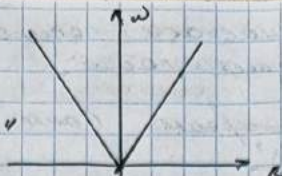
Из соотношения (3) следует, что фазовая скорость имеет разное значение $\rightarrow$ разное волн. число.
В общем случае

$\omega = \omega(k)$ - зависимость частоты от волнового числа - дисперсионное уравнение.

Если $\omega = \omega_0 k$, $\omega_0 = \text{const}$ - то фазовая скорость $v_p = \omega_0$ - постоянна.

$$u_t + cu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

т.е. u зависит от ω .



Любое лине. распр. $u(x, 0)$ распр. без учета времени.
т.е. имеет распр. без учета времени:

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad \text{где } c - \text{скорость волны}$$

f - дан-ая функц. имеет разр. ф-ю.

Если $\omega(x)$ - нелине. распр. с разными x -ами. Поэтому в таких дисп. средах только гармонич. волны распр. без искажений.

Например, для жидк. среды

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \beta u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Вз. предп. дисперс. распр. волны могут

Реш. 2.3.2.

Рассмотрим ур-е в комплексных переменных:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \beta u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

где $c, \beta > 0$ - коэффициенты ур-е (1) явл. линейно-дисперсионным "дисперсионным" ур-ем без учета (для малых частот. взаимодействий).
Представим в ур-е гармонич. волну

$$u = A e^{i(\omega t - kx)}$$

получим:

$$\omega^2 + \omega^2 \beta k^2 - c^2 k^2 = 0 \quad (2) \quad \text{дисперс. ур-е связывает } \omega \text{ и } k.$$

Выразим k через ω ; и найдем корни:

$$k = k_1(\omega) = +\alpha; \quad k = k_2(\omega) = -\alpha, \quad \text{где } c^2 - \omega^2 \beta > 0$$

$$k = k_3(\omega) = i\alpha; \quad k = k_4(\omega) = -i\alpha, \quad \text{где } c^2 - \omega^2 \beta < 0$$

где

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{c^2 - \omega^2 \beta}}, \quad \alpha = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \beta - c^2}}$$

Запишем решение, удовлетворяющее условиям ω и k :

$$u(x, t) = \begin{cases} A \exp[i(\omega t - kx)] & (3.1) \\ A \exp[i(\omega t + kx)] & (3.2) \\ A \exp(i\omega t) \exp(\alpha x) & (3.3) \\ A \exp(i\omega t) \exp(-\alpha x) & (3.4) \end{cases}$$

→ решение не физическое

по формуле локализовано

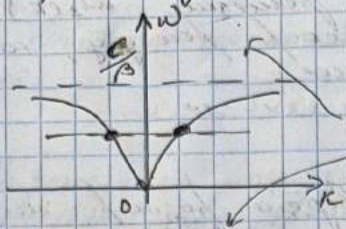
→ сносимая (конвертируемая) мощность в основе дисперсии.

то же самое по др. стороне.

Судя по другим примерам: абсолютное

Нам, возмущения остаются локализованными по x и t по времени координатам.

Построим дисперсионные хар-ки.



$0 < \omega < \frac{c}{v} \rightarrow$ поств. з.к. $\rightarrow$ в этом диспер. соотнош. две волны (полюсы дисперсионной функции)

В этих абл. решаются (3.3) и (3.4), возмущения излучаются.

Построим диспер. соотношение для одномерной однородной изотропной среды.

Решения многомерного уравнения, где u - вектор функции u .
Составим ур-е.

(4) $Au_t + Bux + Cu = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A, B, C$ - матрицы $n \times n$

Будем искать решение в виде векторного вектора:

$u = \vec{u} \exp[i(\omega t - kx)] \quad (5) \quad \vec{u} - \text{вектор столбец } n, \text{ } \omega - \text{частота, } k - \text{волновое число}$

Подставим, получим:

$(A\omega - Bk - iC)\vec{u} = 0 \quad (6)$

Матричное ур-е (6), если записать в координатной форме, составим линей. сист. для u_j абл. составляющих $\vec{u}$.
Для не тривиального решения

$\det(A\omega - Bk - iC) = 0 \quad (7) \Rightarrow$ для каждого ω найдем k

$D(\omega, k) = 0$ - диспер. соотнош. (связь ω и k)
оно не абл. хар-ки ур-я. т.к. ω и k связаны друг с другом

можно разложить как $\omega = \omega(k)$, так и $k = k(\omega)$

$\omega = \omega_s(k), \quad k = k_s(\omega), \quad \text{где } s = 1, 2, 3, \dots, n$

В зав-ти от k и ω выражения, зависящие от k и ω можно записать:

$u_j(x, t) = \sum_{s=1}^n u_{js} \exp[i(\omega_s(k) t - kx)] + \text{к.с.}$

Будем искать:

$u_j(x, t) = \sum_{s=1}^n u_{js} \exp[i(\omega_s t - k_s(\omega) x)] + \text{к.с.}$

Получим еще n независимых, то общее решение есть суперпозиция n независимых решений.

Заметим, что число незав. переменных равно $n-3$, где n - размер множества элементов.
 Т.е. если $n=3$...

След. по некоторым квант. величинам и фазе свобод. 1-го уровня $\Omega_1(k)$ решение, которое в зав. от типа решения $\Omega_2(k)$ либо $k_2(\omega)$, либо гармоник, либо неогр. расходящ., либо затух. во времени и др. величин.

Это наш вариант - неогр. фреон.

(8) $u(x, t) = u(x+v, t)$, $x \in [0, l]$ и ввернем размер системы?

Представим (8) в вид гармонич. величин.

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)} \quad u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\Rightarrow e^{-ikv} = 1 \quad \Rightarrow k = \frac{2\pi m}{v} \equiv k_m, m \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

~ появ. дискретный спектр.

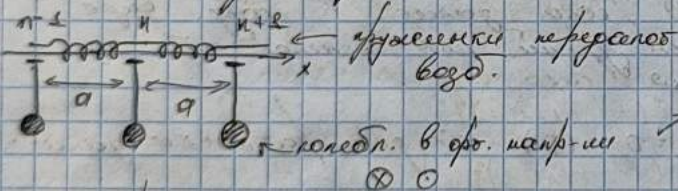
$$\Rightarrow D(\omega, k_m) = 0 \quad \text{и уже можно выразить } \omega$$

$$\omega = \omega_m$$

$\Rightarrow$ под спектр фреон квантов и волн тепла спектр-ных $\omega = \omega_m$, $k = k_m$ ~ авт. аналогич. кр-по ур-я.

Замечу в фазе сист. пер-ой x не в. Но её можно ввести. Рассеим в спектр, соот. из неогр. числа молекул.

Дискретизация преобразования.



в идею это - то колеблется фазовая координата.

x - как расстояние между молекулами.

С фазовой функцией для дискретных систем:

$$\varphi_n(t), \quad \frac{d\varphi_n}{dt} = \sum_j \mathcal{M}_{nj}$$

минимум энергии, фазов.

$$\varphi_n = \omega_n; \quad J = m l^2; \quad \mathcal{M}_1 = -m g l \sin \varphi_n; \quad \mathcal{M}_2 = K(\varphi_{n+1} - \varphi_n)$$

$$\mathcal{M}_3 = K(\varphi_{n+1} - \varphi_n)$$

Здесь l - длина, связанная с функцией положения. Если всё представить, получим:

$$m l \ddot{\varphi}_n + m g l \sin \varphi_n = K(\varphi_{n+1} - \varphi_n + \varphi_{n-1})$$

Малые колеб. $\sin \varphi_n \approx \varphi_n$, введём $\Omega_0^2 = \frac{g}{l}$ и $\mu = \frac{K}{m l}$

однородное, однородное.

$$\ddot{\varphi}_n + \omega_0^2 \varphi_n = \frac{\hbar}{m} (\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1}) \quad (10)$$

Области прозрачности; будем искать решение в виде:

$$\varphi_n = A \exp \{ i(\omega t - \kappa a n) \} \quad (11)$$

Положим фазу от точки до точки изменим. по 0.
где $\kappa = \kappa_1 + i\kappa_2$, $\kappa_2 > 0$ ищем в области буре.

Разрешим эту систему отн. κ_1 и κ_2 , подставляя (11) в (10), получим пару уравн:

$$-\omega^2 + \omega_0^2 = \frac{\hbar}{m} [\cos(a\kappa_1) (e^{-\kappa_2} + e^{+\kappa_2}) - 2] \quad (12)$$

$$0 = \frac{\hbar}{m} \sin(a\kappa_1) (e^{-\kappa_2} - e^{+\kappa_2}) \quad (13)$$

Периодичность по κ_1 с периодом $\frac{2\pi}{a}$. Будем рассуждать отрезок $\kappa_1 \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ в силу периодичности.

Фигуре заменим, что

$$e^{-\kappa_2} - e^{+\kappa_2} = 0 \text{ имеет единств. решение } \kappa_2 = 0$$

Из (12) получим соотношение:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \frac{4\hbar}{m} \sin^2\left(\frac{a\kappa_1}{2}\right) \quad (14) \quad \omega \in [\omega_0, \omega_{max}]$$

$$\text{где } \omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4\hbar}{m}}$$

(14) имеет корни: $\kappa = \kappa_1 = \pm \kappa_0$

$$\text{где } \kappa_0 = \frac{2}{a} \arcsin q, \quad q = \sqrt{\frac{m(\omega^2 - \omega_0^2)}{4\hbar}}$$

Получим решение в явн. виде:

$$\varphi_n = \begin{cases} A \exp \{ i(\omega t - \kappa_0 a n) \} \\ A \exp \{ i(\omega t + \kappa_0 a n) \} \end{cases} \quad (15)$$

Означает, что будем в каждой ячейке иметь гармон. колебл. в разные стороны. В правой ячейке имеет прозрачность.

$$\omega \in (\omega_0, \omega_{max}), \quad \kappa \in (-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a})$$

Нарисуем дисперсионную характеристику:

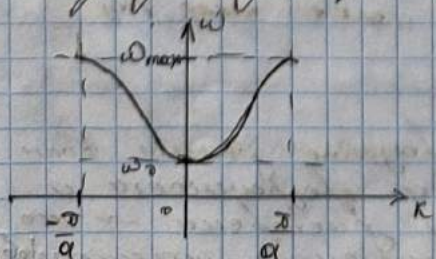


Рис. 1

Но! для существования еще есть решение $\sin(a\kappa_1) = 0$, и аналогично подставляя:

$$\alpha \kappa_1 = 0 \Rightarrow \Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = \frac{4\hbar}{m} \sinh^2\left(\frac{a\kappa_2}{2}\right) \quad (16)$$

$$\Rightarrow \kappa_2 = \frac{2}{a} \ln(q + \sqrt{q^2 + 1}) = \sqrt{}$$

В общем случае суцесовного расщепления:

$$y_n = \begin{cases} A \exp(i\omega t - \alpha \delta n) \\ A \exp(i\omega t + \alpha \delta n) \end{cases} \quad (17)$$

Рекомендую рассмотреть и то, другая записка в
другую сторону. Отр. по времени записки в пр-ве →
— основная тенденция, кустовидность. Эти и к
приморск. обл. — по кустообразности штемпель.
Э.б. было для Д-В.

здесь $\kappa, \alpha = \pm \pi$, тогда получ. ур-е.

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \frac{\pi}{m c h^2} \left(\frac{\hbar \omega_0}{a} \right)$$

при $\omega > \omega_{\text{точ}}$ ~ ур-е имеет действительный корень

$$x_2 = \frac{1}{a} \ln(q + \sqrt{q^2 - 1}) \equiv \odot$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\sigma}{a} \pm i\delta$$

аналогично для $\kappa, \alpha = -\delta \Rightarrow \kappa = -\frac{\delta}{a} \pm i\sqrt{\dots}$

Решение:

$$\varphi_2 = \frac{\int A \exp\{i(\omega t - \omega u) - \delta a\}}{A \exp\{i(\omega t - \omega u) + \delta a\}}$$

Для случая $\omega > \omega_0$ нужно начать в резонансе $\omega \rightarrow -\omega$.

В делопроизводство возможности возр. или убав. по мере убав.
адреса п.

Полное число целых пятисов

Земля для себя и лесоводов в лесу. Брус для
постройки лесоводов

Фазовое условие: $\varphi_{n+N}(t) = \varphi_n(t)$

Компьютеризация это условие для полного образования
научного условия:

$$\exp[i\hbar\kappa_0 Na] = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa_0 = \frac{2\pi\delta}{Na}, \quad \delta \neq 0$$

Расс-ия винны, которое уклад. целое число h_2

$$\omega_s^2 = \omega_0^2 + \frac{4d}{m} \sin^2\left(\frac{\pi s}{N}\right)$$

Берём шнуровые эшелоны по разному размеру встан
вдоль себя по-разному. Лавки, ленточка прозрачного и
плотная прозрачная. = 7 Это 3-го размера → око
явл. средством прозрачно-блескующих материалов

$\Rightarrow$ Величина $\frac{a}{b}$ распределена в сфере.

Найдём ур. по лорам. энергии, что можем
привести к диспер. энергии.

Длиноволновое уравн.

Введём переменную $x = \kappa \omega$ и сделаем приближение:
 $\varphi_n(t) \approx \varphi(x, t)$ предположим, что диспер. зависимость κ непрерывна.

Делаем следующие преобразования:

$$\varphi_{in}(t) = \varphi(x \pm a, t) \approx \varphi(x, t) \pm a \varphi_x(x, t) + \frac{a^2}{2} \varphi_{xx}(x, t) + \dots$$

Подставим всё в ур-е, получим ур-е в высших производных.

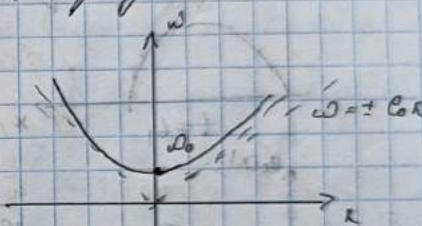
$$(18) \quad \varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx} + \omega_0^2 \varphi = 0; \quad x \in \mathbb{R}, \quad c^2 = \frac{\kappa a^2}{m}$$

~ сев. линеаризации ур-я Синус-Гордона (возникает при искривлении дисперсионного соотношения)

Решим-ли условие, что (18) даёт изгиб как диспер. энергию.
Решим-ли в первом приближении:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \frac{\kappa(\kappa a)^2}{m} \quad \text{раскроем дисп. кривую}$$

Сопоставим рис. 1. Но лор. масштабирован ω !
Без дисперсии $\omega \propto \kappa$ (линейно).
Но лор. всё равно дисп. - это связано с кривизной дисперсионного соотношения.



Если $\kappa a \ll 1$, т.е. $\lambda \gg a$, то можно перейти от дисп. соотношения к крив.

рис. 2.

15.05.23.

Нелинейное волновое уравнение

Решим-ли простое ур-е:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c = \text{const.} \quad \text{— верно, что дисп. без дисперсии.}$$

Изменим это ур-е:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (1) \quad c(u) = \text{н-е крив. зависит от лор. ур-я}$$

(1) — ур-е плоской волны

1) Пусть $c(u) = u$. Посмотрим, как можно записать это уравнение.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (2) \quad \text{Посмотрим, как можно записать}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0(x) \geq 0$$

Посмотрим, что такое значение $u_0 = \text{const}$ дисперсия волны.
Посмотрим, как можно записать — характеристический метод.
Решим-ли кривую $u_0 = \text{const}$ в лор. виде.
 $x = x(t), \quad t = t(t), \quad t \geq 0$

Общая форма решения в виде:

$u = u(x(t), t(t))$ - возмущения попарно произвольны.

$$\frac{du}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_t \frac{dt}{dt} = \{ \text{по правому } u_0 = \cos t \} = 0 \quad (4)$$

Сравниваем со (2):

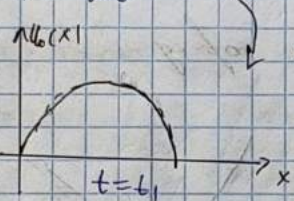
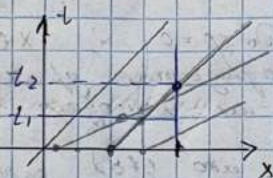
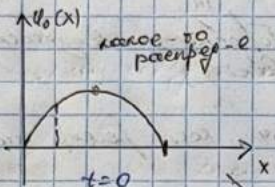
$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dt}{dt} = 1; \quad u = u_0(x) \rightarrow \text{интегрируем}$$

$$t = 0; \quad x = u_0(x) \cdot 0$$

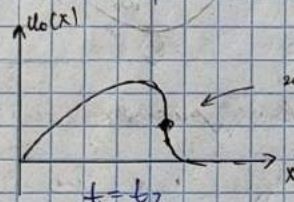
взяли все полев. интегр-я

$$\Rightarrow x = u_0(x)t + h \quad (5)$$

прямые на $u_0(x, t)$



со временем фронт деформируется.



поворот, что на графике вполне произойдет разрыв. В этот момент $u, u_x, u_{xx}, u_{tt} \rightarrow \infty$

После разрыва ур-е расходится в бесконечность.

Для ур-я (1) возможность аналогичного повторения.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$c(u)$ - произвольная функ-ия u .

$$u = c(u) (x - c(u)t)$$

$\xi = x - c(u)t$ - безразмерная координата.

Найдём производную:

$$u_x = \left[1 + \frac{dc(u)}{du} \frac{dc(u)}{du} t \right]^{-1} \frac{dc(u)}{du} \quad (6)$$

$$u_t = - \left[1 + \frac{dc(u)}{du} \frac{dc(u)}{du} t \right]^{-1} c(u) \frac{dc(u)}{du}$$

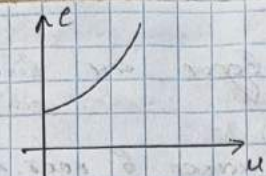
Подставляя (6) в (1) можно убедиться, что получили тождество.

$$\Rightarrow x = c(u_0(x))t + h \sim \text{характеристики}$$

$$u(0, t) = u_0(x - c(u)t)$$

Делать пометки, когда фронт разрыв $\rightarrow u, u_x \rightarrow \infty$

$$1 + \frac{dc(u)}{du} \frac{dc(u)}{du} t = 0$$

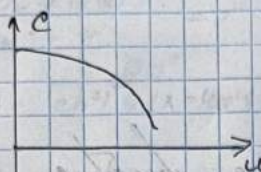


картинка.

Где $\frac{dE}{du} < 0$

→ разрыв на переднем фронте

Если $c(u)$ убывает.



$\Rightarrow \frac{dE}{du} > 0$

→ разрыв на заднем фронте.

Это связано с тем, что волны бегут с разрывом, а так же естественно описываемые процессами. → переход разрыва.

С точки зрения физики $u_1, u_2 \rightarrow \infty$ обдув. Но мы знаем только 2 механизма - нелинейность (или просто период гармоник).

Обр. разрыва на языке гармоник → это бег. волны.

Если в среду добавится дисперсия, тогда хвост обрезается. (или диссипация) → сглаживание.

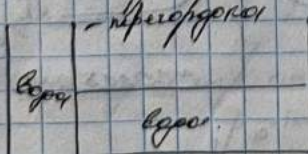
Расчеты в теории Кортевега - Девриэ

Классическая волна состоит из волн, движущихся со скоростью, или релаксация. Был введен Кортевега - Девриэ в 1950-х годах. Для описания волн в океане, атмосфере, жидкостях и т.д., локализованных в пространстве и времени.

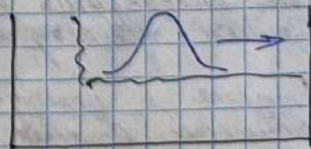
В результате исследования было установлено, что роль дисперсии - она стабилизирует волны, возмущения. В результате взаимодействия волн происходит перенос энергии. (важна роль не только геометрических волн).

Первое наблюдение ударных волн - 1834г. - Стоун Россел.

Есть таб. работы - классическая волна.



Если приложить резкое возмущение, возникает волна.



Если добавить больше энергии, возникает два волчка.

Только в 1895г. - Кортевега и Девриэ получили уравнение волн по лав. го. уравнению.

$$\frac{1}{\sqrt{g h}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2 h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

u - верс. существование в м. по-во верс. или выходы

h - глубина поиска в м., когда верс. найд. в сел. пок.

Получено в предл. $u \ll h$, верс. невозможна, $h(u) \ll u$.

Можно переписать в норм. форме:

$$(7) \quad u_t - 6u u_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

или в другом виде, сделав масштабные преобр-е $u \rightarrow -\frac{u}{6}$

$$\Rightarrow \underbrace{u_t + u u_x}_{\text{гр-е фронтальной волны}} + \underbrace{u_{xxx}}_{\text{дисперсия}} = 0 \quad (8)$$

К эквиваленту построит дисп. кар-ту

Гамма-квантовая факторизация
и селекция

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - vt) = \tilde{u}(\xi), \quad \text{где } \xi = x - vt, \quad v = \text{const} - \text{м-та волны}$$

Подстановка в ур-е (8):

$$\frac{d^3 u}{d\xi^3} + u \frac{du}{d\xi} - v \frac{du}{d\xi} = 0 \quad \text{проинтегрируем и const} = 0$$

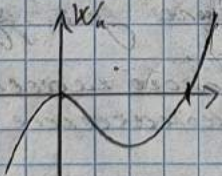
const зависит от уровня отс. первогох: сел. (не выхлос?)

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{u^2}{2} - v u = 0 \quad (9) \rightarrow \text{классический осциллятор}$$

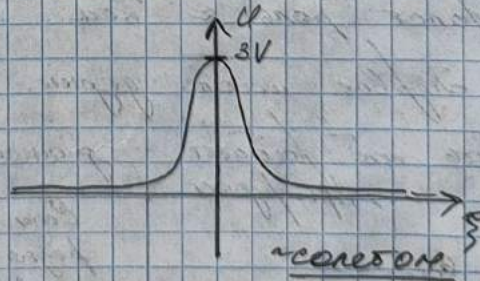
$$\Rightarrow W_u = \int \left(\frac{u^2}{2} - v u \right) d\xi = \frac{u^3}{6} - \frac{v u^2}{2}$$

$$\int \frac{du}{d\xi} = u$$

$$\int \frac{du}{d\xi} = v u - \frac{u^2}{2}$$



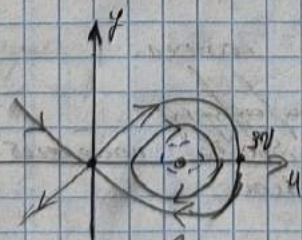
Нарисуем, что собой представляет:



Как интерпретировать
замкнул. фазовый портрет

Близкие к центру -
квадратич. волны.

Ближе к краю -
растягиваются.



путь сел. центра
(гиперболическая)

Можно казать ур-е солитона в явном виде (просто).
Будем искать решение в виде:

$$u(\xi) = \frac{U_m}{\cosh^2(\alpha \xi)}, \quad \text{где } U_m \text{ и } \alpha \text{ неизв. конст. параметры}$$

Представим в виде др-е:

$$ch^2 z - sh^2 z = 1$$

$$\frac{(u_m - 12\alpha^2) + sh^2(\alpha z) (4\alpha^2 - 2)}{2ch^2(\alpha z)} = 0$$

Чтобы безразмерно вын-ся: дадим $z = 1$.

$$u_m = 12\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{V}{4}; u_m = 8V$$

$$u(x, t) = \frac{12\alpha^2}{ch^2[\alpha(1 - 4\alpha^2 t)]}; u(x, t) = \frac{2\alpha^2}{ch^2[\alpha(1 - 4\alpha^2 t)]}$$

Основные физические вопросы об излучении рассеяния света

В распр-х световых волнах об изл-ти светового излучения по др-м. Какие распр-я дают световое? или т.п.
Распр-я световых волн об изл-ти светового излучения

Излуч $u(x, 0)$ - квант начальных распр-ий.

Тогда распр-я по КДВ и квантовому изл-ти др-е Шредингера.

Уравнение излучения

$$u_{xx} + (\lambda - u(x))u = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (10) \quad u(x, \kappa)$$

С др-м (10) связано уравнение Шредингера

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - u(x)$$

где u - потенциал, эк-я, λ - параметр (энергия излучения).

Рассеянные волны, которые быстро сходятся: $u(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$.
Такому уровню потенциалов введем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^{-1}) |u(x)| dx < \infty.$$

$\lambda \in \mathbb{R}^2$ - спектр непрерывный - оператор L имеет непрерывный спектр

$\lambda_c = -\kappa_c^2$ ($c = 1, 2, \dots$) - дискр. спектр - конечное число др-м. собств. значений

$u(x, \kappa)$ др-м. др-м. с др-м. др-м.

$$u(x, \kappa) \sim \begin{cases} e^{-i\kappa x} + R(\kappa) e^{i\kappa x}, & \text{при } x \rightarrow -\infty \\ T(\kappa) e^{-i\kappa x}, & \text{при } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

(11) Если известна $u(x, \kappa)$ - можно решить задачу рассеяния

$$\lambda_c = -\kappa_c^2 \rightarrow \kappa_c \Rightarrow \kappa_c(x) \sim \begin{cases} c_0 e^{-\kappa_c x} \\ c_0 e^{+\kappa_c x} \end{cases}$$

с др-м. ур-н. нормировка: $c_0 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_c^2(x) dx \right)^{-1/2}$

Ковдор

Нахождение $S(0)$ - данных рассеяния по известному потенциалу $u(x)$ назыв. прямой задачей рассеяния.

$$S(0) = \{R(k), C_0, C_1\}$$

коэф-ты отражения от потенциала, собственные значения, данные рассеяния ур-я Шредингера.

Согласно теории рассеяния: $u(x) \rightarrow S(0)$

И наоборот, данные $S(0)$ по потенци. $u(x)$ назыв. прямой задачей рассеяния.

Условия совместности.

Сог-но, что в.ф. ψ удовл. двум линейным ур-ням:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (12)$$

Эти условия преобр-ны, они совместны.

$$\psi_t - 4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3u_x\psi = 0 \quad (13)$$

Найдём условия при которых можно получить ур-е, где ψ будет ψ_x .

$$u = u(x, t); \quad \kappa^2 = \lambda$$

Введём новую переменную:

$$\psi_x = i\kappa\psi + \psi_1$$

$\rightarrow$ ил-я u и ψ , исключим сг (13)

$$\psi_{1,t} = -i\kappa\psi_1 + u\psi_1$$

все преобразованные по x .

После выкладки:

$$\psi_t = 4i\kappa^3\psi + 4\kappa^2\psi_1 + 2i\kappa u\psi - u_x\psi + 2u\psi_1 \quad (14)$$

$$\psi_{1,t} = -4i\kappa^3\psi_1 + 4\kappa^2 u\psi + 2i\kappa u_1\psi - 2i\kappa u\psi_1 + (2u^2 - u_{11})\psi + u_{1,t}\psi_1 \quad (15)$$

Получили 4 ур-я, удобнее записать через матрицу.

$$\varphi_t = U(\kappa)\varphi, \quad \varphi_x = V(\kappa)\varphi, \quad (16)$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_1 \end{pmatrix} \quad U(\kappa) = i\kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix}$$

$$V(\kappa) = 4i\kappa^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\kappa^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} + 2i\kappa \begin{pmatrix} u & 0 \\ u_x & -u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_x & 2u \\ 2u^2 - u_{11} & u_x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi_{xt} = U_t(\kappa)\varphi + U(\kappa)\varphi_x \quad (17)$$

$$\varphi_{tx} = V_t(\kappa)\varphi + V(\kappa)\varphi_x$$

Приравнявая соответствующие производные получим:

$$(U_t(\kappa) - V_x(\kappa))\varphi + [U(\kappa), V(\kappa)]\varphi = 0$$

$$[U(\kappa), V(\kappa)] = U(\kappa)V(\kappa) - V(\kappa)U(\kappa)$$

Условие совместности, чтобы было не平凡的 решение $\psi \neq 0$

$$U_t(x) - V_t(x) + [U(x), V(x)] = 0$$

Определяются все выкладки. получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_t - 6U_x + U_{xx} & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow U_t - 6U_x + U_{xx} = 0$$

Можно показать, что существует свойство уравнения КДВ и др-е Шредингера в котором роль рассеивающего потенциала играет функция $u(x,t)$ - матрица, зависящая от пов-го в-ва. Это обстоятельство позволяет для нахождения решения уравнения КДВ решить задачу рассеяния для соответствующего др-я Шредингера.

Получим задачу Коши и задачу
об обратном рассеянии.

$$U(x,0) \rightarrow S(0) = \{R(k), a_e, c_e\} \rightarrow S(t) = \{R(k,t), a_e(t), c_e(t)\}$$

Рассеяние др-е Шредингера по формуле можно построить обрат.

$$\psi_{xx} + (\lambda - U(x,t))\psi = 0 \quad (1), \text{ где } t \text{ задано или произвол.}$$

(из др-я КДВ) (играет роль параметра т.к. в соотн. др-я Шредингера не входит время)

$S(t)$ назыв. данными рассеяния в момент t . Оказывается, справедливо:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = 8ik^3 R, \quad \frac{\partial a_e}{\partial t} = 0 \quad (2) \quad \leftarrow \text{интегрируется}$$

$$\frac{\partial c_e}{\partial t} = 8\lambda c_e \quad \sim \text{заданы эволюцию данных рассеяния.}$$

Др-е Шредингера и КДВ связаны, это установлено. Благодаря (2) можно найти $S(t)$

Для того чтобы восстановить потенциал КДВ из др-е Шредингера разоб. эту систему. $\rightarrow$ можно решить задачу обрат.

$$K(x,y,t) + B(x,y,t) + \int_{-\infty}^{+\infty} B(y,z,t) K(x,z,t) dz = 0$$

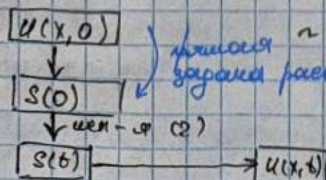
в области $y \geq x$, где y - произвольный вещественный параметр.

$$B(y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(k,t) e^{iky} dk + \sum_{e=1}^N c_e(t) e^{-\lambda_e y}$$

Формулы позволяют найти любые решения КДВ в любой момент времени.

$$U(x,t) = -2 \int_x^x K(x,x,t) \quad \leftarrow \text{получается функция}$$

Условия схемы выкладки:



функция $\sim$ матрица обрат. задачи рассеяния.

Пример. В канале ширины $2a$ распространяется волна.

$$u(x, 0) = -\frac{2a^2}{\sinh^2(ax)} \quad \leftarrow \quad u_t - \delta u u_x + u_{xxx} = 0$$

Записываем уравнение Шредингера:

$$u_{xx} + (\lambda + \frac{2a^2}{\sinh^2(ax)}) u = 0$$

Для такого потенциала существуют собственные числа:

$$\lambda = -a^2 \Rightarrow \text{собств. ф-я: } \psi_1 = \frac{2}{\sinh^2(ax)}$$

$$\rightarrow C_1 = \left(\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sinh^2(ax)} \right) = 2a, \quad \lambda = \kappa^2, \text{ получим } \kappa_1^2 = -a^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \kappa = +ia.$$

учит., что левая часть $t \rightarrow \infty$.

Будем считать, что $(K(x, t) = 0)$ есть безразмерная плотность.

$$s(0) = \{0, a, 2a\} \rightarrow s(t) = \{0, a, 2ae^{2a^2 t}\}$$

$$B(z, t) = 2ae^{2a^2 t - az}$$

Запишем интегральное уравнение:

$$K(x, y, t) + 2ae^{2a^2 t - a(x+y)} + 2ae^{2a^2 t - ay} \int_x^\infty K(x, z, t) e^{-az} dz = 0$$

предположим $K(x, y, t) = K_0(x, t) e^{2a^2 t - ax}$ — предположим

$$K_0(x, t) = -\frac{2ae^{2a^2 t - ax}}{1 + e^{2a^2 t - ax}}$$

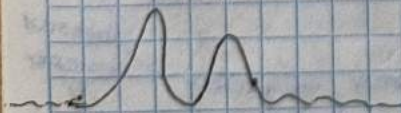
В итоге получим:

$$u(x, t) = -\frac{2a^2}{\sinh^2[a(x - 4a^2 t)]}$$

Замечая, что в уравнении (2), $\frac{du}{dt} = 0$ — это означает, что в спектре λ для канонического будет только одно решение. Но если волна не движется со временем.

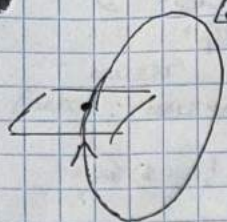
Что будет если $K \neq 0$ (ограничение есть). Тогда мы рассмотрим разложение на нек. число элементов и мультиплицируем их все $\rightarrow$ разрыв как одно целое (важно, чтобы не было разрывов).

Это только для $u=0$ имеет макс. ускорение.



Осложнение бифуркац. диаграмм

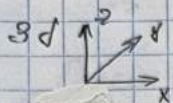
Пусть сеть / нек-ая 3×3 матрица / зависит от параметра μ . И у системы есть бифуркац. диаг.



$$|S_j(\mu)| \neq 1, \quad j=1,2 \quad \text{условие грубости.}$$

т.е. возможно, когда нарушается грубость, в т. бифуркации

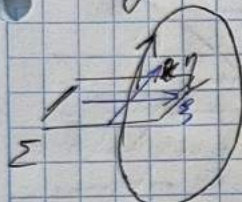
$$S_1(0)=1; \quad S_2(0)=-1; \quad \text{или} \quad S_1(0)=e^{i\omega(0)}$$



1. Сетно-узловая бифуркация пред-х циклов

Предположим: $S_1(0)=+1, \quad S_2(\mu) \neq 1, \quad |\mu| \leq \mu_0$ где $0 < \mu_0 < 1$.

Введем с.к. на не-тц.



Поправки отображения равны:

$$\bar{z} = g(0,0) + \alpha(\mu) + [1 + \beta(\mu)] z + \delta z^2 + \dots$$

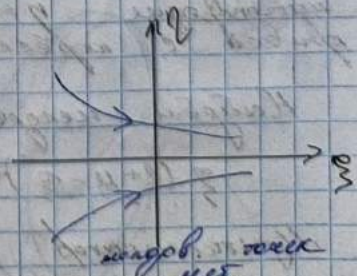
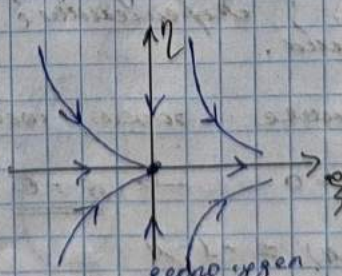
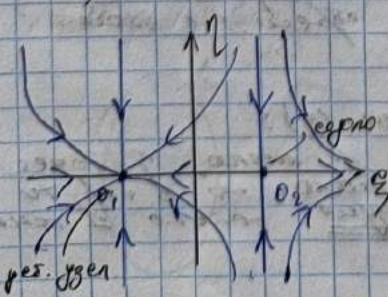
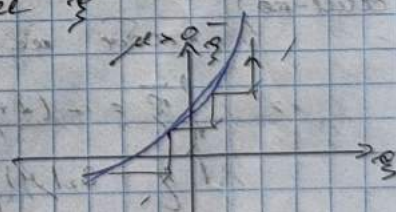
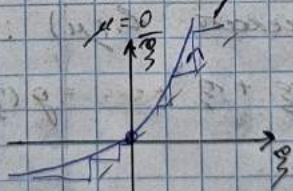
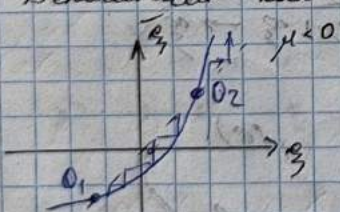
где $g(0,0)=0$; $\alpha(\mu) = \frac{\partial g}{\partial \mu}|_{(0,0)} \mu$; $\beta(\mu) = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}|_{(0,0)} \mu$; $\delta = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g}{\partial z^3}|_{(0,0)}$

$$\bar{z} = S_2(\mu) z + \dots$$

Симметрия на отображении

а) $\delta > 0, \quad S_2(\mu) < 1$

Величины μ берет себя отображение z



рез. узел

одно узел

мгнов. точка

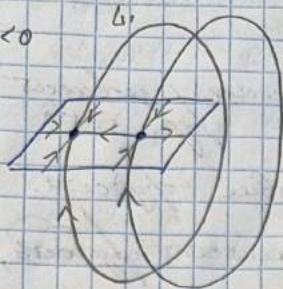
O_1 и O_2 тоже авт. поворот. вращения, $\mu=0$ ав. преломл.

Это конечно не оплошное место - цикл переключается.

Картина генер. движений протек в R^3

Тед. таскал сарбв. прер. уаклн

$\mu < 0$

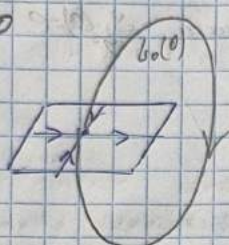


b_1 - уст. укл.

b_2 - сарбв. прер. укл. } нульовитт. > 0 -

Аналог с $2d$, где было уст. и нульовитт. прер. укл.

$\mu = 0$



b_0 - нульовитт. уст. укл.

2. Бифуркация равновесия прерывных укл.

диф-ое равновесие $S_1(0) = -1$ и уст. $S_1, S_2 > 0 \Rightarrow S_1 < 0$

Отображение Пуанкаре:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -(1+\mu)x + b_1(\mu)x^3 + \dots \\ \bar{y} &= S_2(\mu)y + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Допустим, будет выполнено условие:

$b_1(\mu) \neq 0, S_2(\mu) \neq 0$ и это условие невырожденности.

Мы рассматриваем только случаи $b_1(\mu) > 0, |S_2(\mu)| < 1$ (аналогичное рассуждение) чтобы не таскать $b_1(\mu)$: $\sqrt{b_1(\mu)}x \rightarrow \xi$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{\xi} &= -(1+\mu)\xi + \xi^3 + \dots = g(\xi, \mu) \\ \bar{\eta} &= S_2(\mu)\eta + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, что (6) имеет тривиальное преобразование $\eta = 0, \dots$ дифференциальное ξ уравнение с перескоками.

Найдем неподвижные точки системы (6):

$$\xi(1+\mu-\xi^2) = 0 \Rightarrow \xi = 0 \text{ - мало, } \xi \text{ тоже мало. } \rightarrow \text{ биф-та нульовитт. только 1 точка.}$$

Нульовитт. прер. укл. $S_1(\mu) = -1-\mu$

Можно показать, что $g(\xi, \mu)$ явл. монотонно убыв. ф-ей, сдв. выпукл. вниз ξ и выпукл. вверх ξ

Покажем, что сист. (6) имеет прерыв. решение, прерыв. 2.

Для этого найдем экстр. g . $\rightarrow$ т.е. как бы перевернуто.

$$\bar{g} = -(1+\mu) \bar{g} + (\bar{g})^2 = \{ \text{переменная } \bar{g} \} =$$

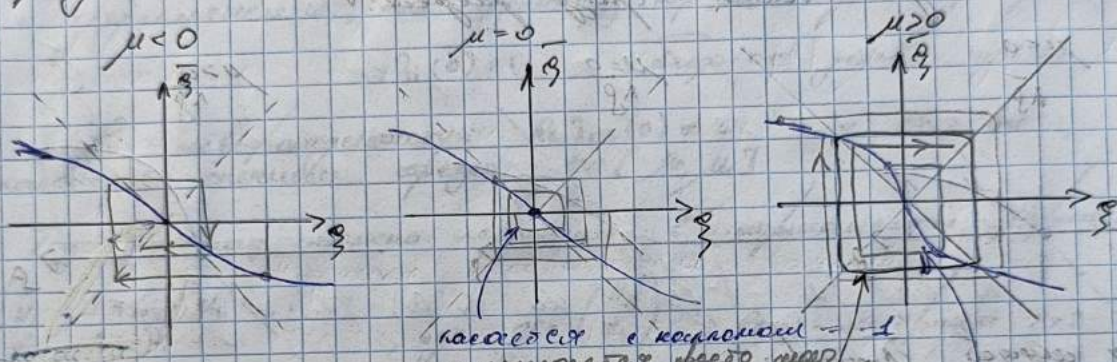
$$= (1+\mu)^2 \bar{g} - (1+\mu)(2+2\mu+\mu^2) \bar{g}^2 + \dots \quad (7)$$

имеет экстр. в н.к. и еще 2 экстр. точки (поиск экстр. решается зр. μ^2)

$$\mu(2+\mu) - (1+\mu)(2+2\mu+\mu^2) \bar{g}^2 + \dots = 0$$

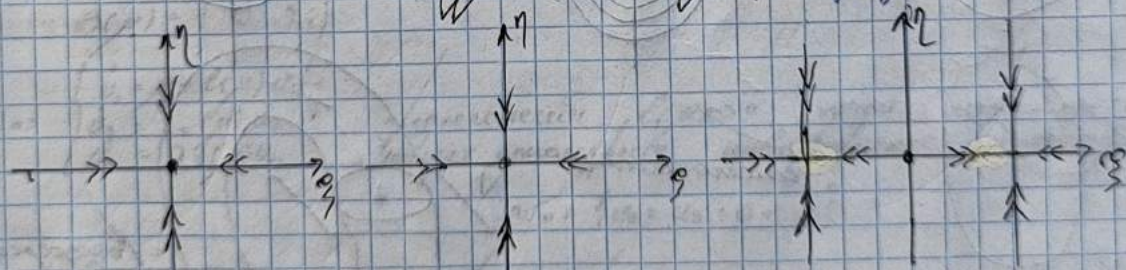
$$\Rightarrow \bar{g} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{g} = \pm \sqrt{\mu} \quad \text{существ. при } \mu > 0$$

Рассеи-м. рисующий отображения g .
В g это экстр. точка, а в отображении g - это периодическая траектория, периода 2.

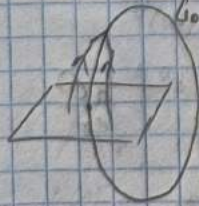


касается с координатой -1
уменьшается предельно
(бурно) уменьшится

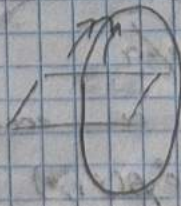
т.е. поворачивается
по часовой стрелке, траектория расширяется, а траектория
по часовой стрелке на сеп. траектории? расширяется.



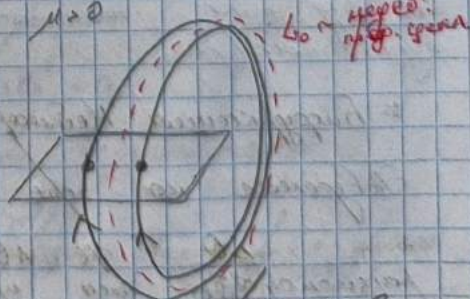
Резовое μ -во: μ_0



$\mu = 0$



$\mu > 0$



диск. периодов 2
(или устойчив.)

3. Бифуркация рождения инвариантного тора

$$g_{1,2}(0) = e^{\pm i\omega(0)}, \text{ где } 0 < \omega(0) < \delta$$

Будем рассматривать особый случай $\omega(0) \neq \frac{\delta}{2}$; $\omega(0) \neq \frac{\delta}{2}$

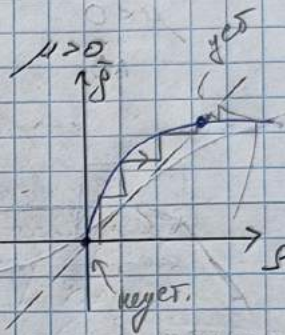
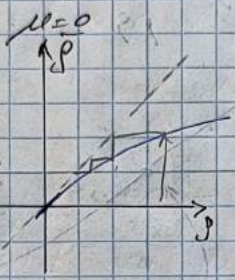
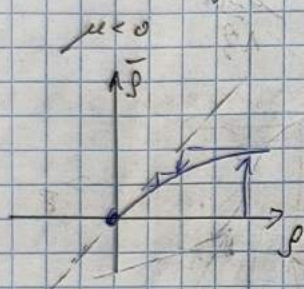
Описывается разложение сходящийся отображения

$$\begin{cases} \bar{r} = (1+\mu)r + G(\mu)r^2 + K(r,\mu)r^3 + \dots \\ \bar{\theta} = \theta + 2\pi(\mu) + B(r,\mu)r^2 + \dots \end{cases} \quad (18)$$

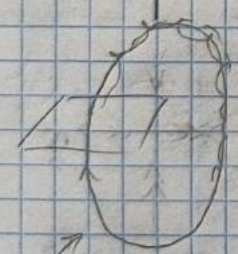
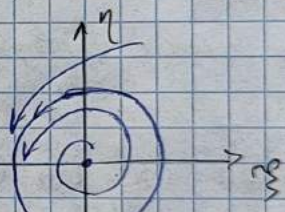
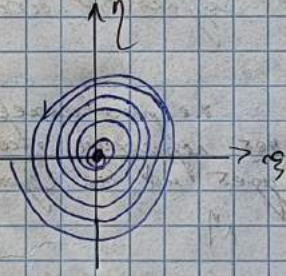
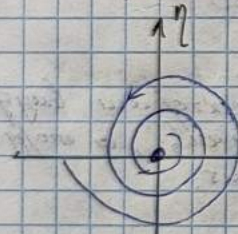
$G(\mu) \neq 0$ играет роль первой ненулевой величины

Мы ограничимся случаем $G(0) < 0 \rightarrow G(\mu) < 0$

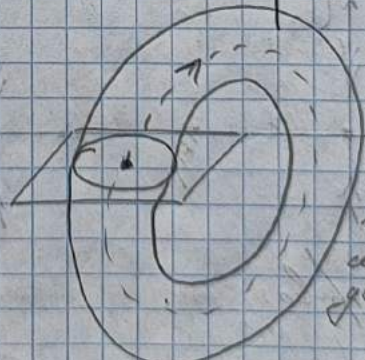
Можно качественно изобразить поведение этих фазовых кривых. Группировка:



на сдвиге Лиссажа



аналогично



Рождение инвариантного тора

на фаз. порт. будет картина

Бифуркация Нейбурга - Селлера

Поведение на торе зависит от соотношения $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$

разномногообразии где $\Delta\theta = \alpha(\mu) + r^2 B(r,\mu)$ или иррационально

22.05.23.

Климов

Рассмотрим систему уравнений - Сисседа
- сд. системы. сд., заданной сд.-то, которая состоит из
конечного числа с.р. и периодич. функций.

М.б. системы с сд. системами каноническими дифференциальными уравнениями в пространстве МС. и дифференциальными уравнениями сд. каноническими.

Рассмотрим систему канонического вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y, z, u) \\ \dot{y} = Q(x, y, z, u) \\ \dot{z} = R(x, y, z, u) \end{cases} \quad (1)$$

где u - некоторый канонический параметр.

Предположим, что $u=0$ с.р. в н.к. $(0,0,0)$ (всегда можно выбрать с.к.)

и предположим, что среди из корней уравнения $u=0$:

$$\lambda_1(0) = 0 \quad \text{и другие условия}$$

Условие невырожденности: $\operatorname{Re} \lambda_{2,3}(0) \neq 0$ и $u \neq 0$ на некотором конечном отрезке $u \in [-u_0, u_0]$

Тогда систему можно переписать в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{u} = \mu + \ell(\mu) u^2 + \dots \\ \dot{v} = B(\mu) v + \dots \end{cases} \quad \text{где } v = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}; \quad B(\mu) - \text{матрица } 2 \times 2.$$

Доп. условие невырожденности: $\ell(\mu) \neq 0$.

λ_2 и λ_3 абс. действ. ненулевые $B(\mu)$.

1) Пусть λ_2 и λ_3 - действительные, тогда $B(\mu) \rightarrow$ диагональ

$$B(\mu) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

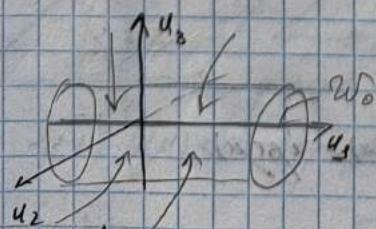
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \mu + \ell(\mu) u^2 + \dots \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu) u_2 \\ \dot{u}_3 = \lambda_3(\mu) u_3 \end{cases} \quad \text{предположим } \ell(\mu) > 0, \text{ тогда система имеет одномерное инвариантное многообразие:}$$

$$u_0 = \{u_2 = u_3 = 0 + \dots\}$$

1.1) $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$

Можно ввести в рассмотрение функцию:

$$V(u_2, u_3) = \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_3^2}{2} \quad \rightarrow \quad \dot{V} = \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2 < 0$$



Все траектории сходятся к инвариантному u_0

На этом многообразии все сд. ур-ния

$$\dot{u} = \mu + \ell(\mu) u^2 \quad \rightarrow \text{теб. по прямой}$$

Согл. формулы: $\mu < 0: \mathcal{O}_2(-\sqrt{\frac{\mu}{\ell(\mu)}} + 0, 0)$

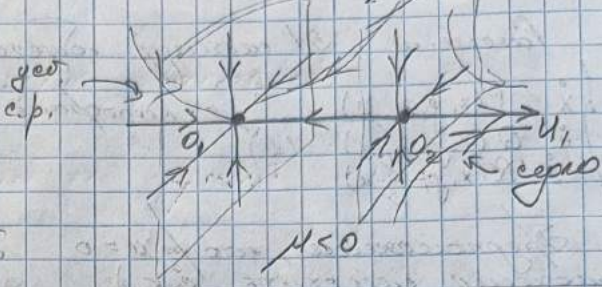
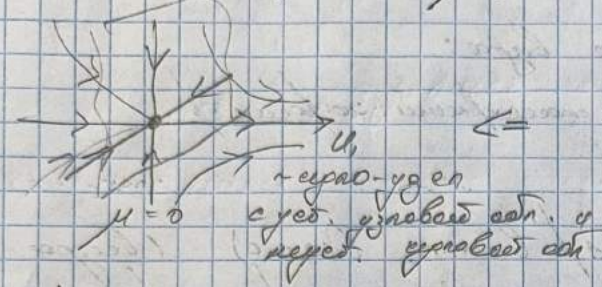
$$\mathcal{O}_2(\sqrt{\frac{\mu}{\ell(\mu)}}, 0, 0)$$

$\mu = 0$: $O(0,0,0) \rightarrow$ двукратное вырождение равновесия

$\mu > 0$: $\emptyset$

т.е. сферическая и немногообразная:

$W^s(O_1) = \{u_1 = -\sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}\}$ и $W^s(O_2) = \{u_1 = \sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}\}$



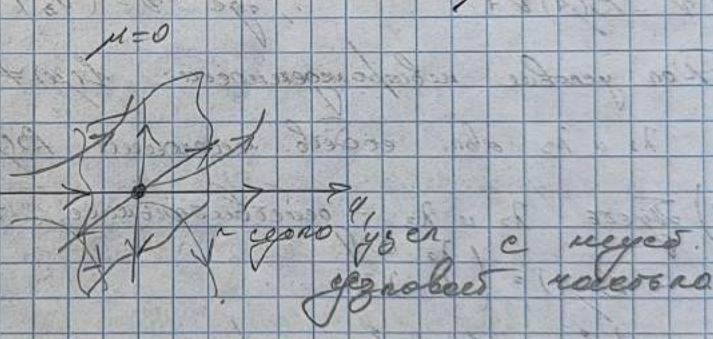
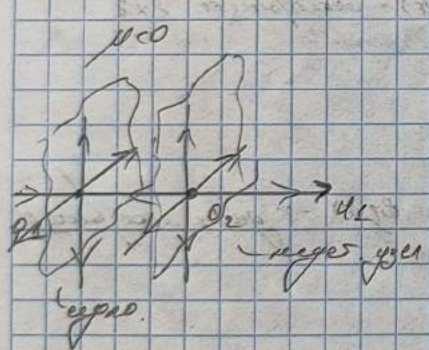
1.2) $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$

Можно рассмотреть граде р-но Ляпунова

$V_2 = \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2 > 0 \rightarrow$ окр. O_2 и O_1 фазовые функции убывают от u_1 .

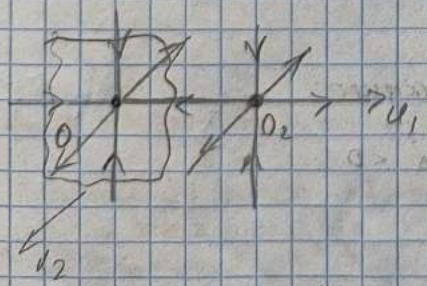
$\Rightarrow$ Фазовое пространство имеет вид

$W^s(O_1) = \{u_1 = -\sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}\}$ и $W^s(O_2) = \{u_1 = \sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}\}$

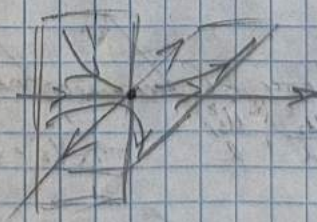


1.3) $\lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$

$\mu < 0$
 $\uparrow u_3$



$\mu = 0$



ср. ур. с.р.

2) Комплексно-сопряженные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$

Матрица имеет вид

$B(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

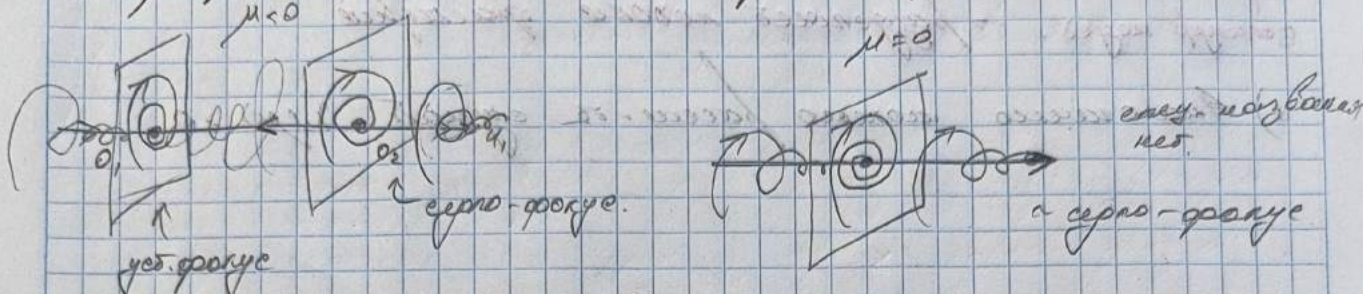
Тогда имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu + \alpha(\mu)u_1^2 + \dots \\ \dot{u}_2 = \alpha(\mu)u_2 - \beta(\mu)u_3 \\ \dot{u}_3 = \beta(\mu)u_2 + \alpha(\mu)u_3 \end{cases}$$

$V_2(u_2, u_3) = \alpha(\mu)(u_2^2 + u_3^2)$ всё зависит от знака $\alpha(\mu)$

Всё аналогично функции $V_2(u_2, u_3)$, только по u_2 и u_3 фазовая дуга вращается.

2.1) $\alpha(\mu) < 0 \Rightarrow V_2 < 0$ все траект. стремятся к оси u_1 .



2.2) $\alpha(\mu) > 0 \rightarrow$ аналогично дуге неустойчивости.

Бифуркация Андронова-Хопфа в трехмерном случае

Пусть система (1) имеет ср. в $O(0,0,0)$ при $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$

и пусть характерист. полином: $\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$
 $\lambda_3(\mu) \neq 0$ — усл. невырожденности.

Биф.-ое условие: $\alpha(0) = 0$, а $\beta(0) \neq 0$

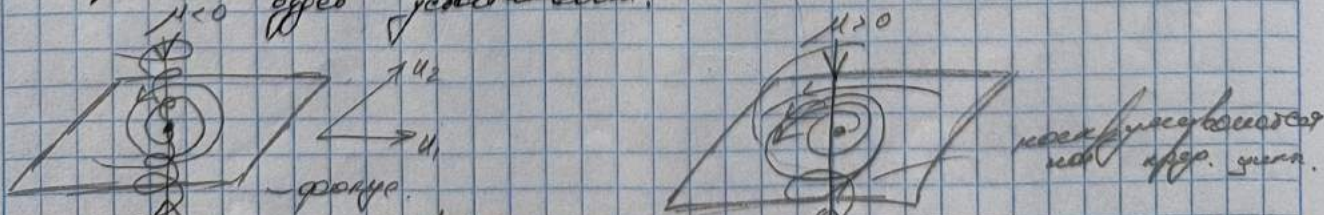
и первая лямбда-величина: $\beta(0) \neq 0$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha(\mu)u_1 - \beta(\mu)u_2 + \beta(\mu)(u_1^2 + u_2^2)u_1 + \dots \\ \dot{u}_2 = \alpha(\mu)u_2 + \beta(\mu)u_1 + \beta(\mu)(u_1^2 + u_2^2)u_2 + \dots \\ \dot{u}_3 = \lambda_3(\mu)u_3 + \dots \end{cases}$$

— нормальная форма.

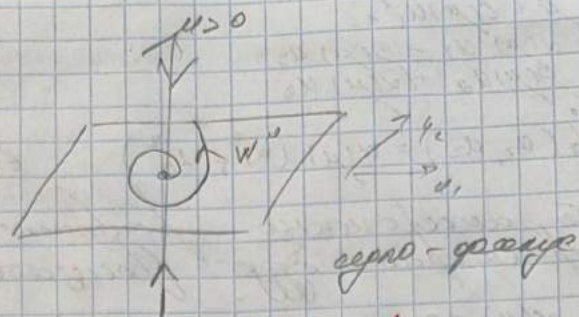
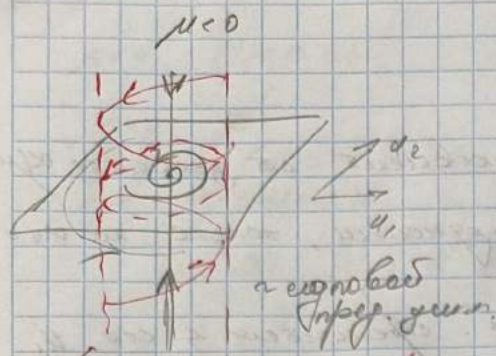
Аналогично с двумерным случаем на л-те всё будет так же. Просто теперь нужно учесть третье напр-е:

1) $\lambda_3(\mu) < 0$. Если инвариантное многообразие $W_0 = \{u_3 = 0\}$ — «оно» будет устойчивым.



2.1) $\beta(\mu) < 0$ — устойчивый бифр. и т.д. Андронова-Хопфа

2.2) $\beta(\mu) > 0$ — аналогичная бифуркация Андронова-Хопфа



сечение взаимодействия $\rightarrow$ разделение на две части.

2) Аналогично можно рассмотреть случай $\lambda_0(\mu) > 0$.