

Владимир Иванович Косицын. ~ экзамен

Дома почитать векторы.

Базовые представления теории колебаний.

~ колеб. не только во времени, но и в пространстве. Можно их построить модели, чтобы изучить колеб. в различных средах (жидкости, твердые тела, колеб. температуры и т.д.)?

Хотим узнать эволюцию во времени. (с помощью компьютер. пр.-во.)
динам. сист. не линейн

Динамические системы ~ которые опис. процесс эволюции.
 x - вектор, который описывает эту систему (набор переменных),
и путь от x_0 - нач. положение, где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (эвл. пр.-во)

Введем оператор эволюции G^t , где $t \in \mathbb{R}$ ($t \in \mathbb{R}_+$)
или $t \in \mathbb{Z}$ ($t \in \mathbb{Z}_+$)

Если хотим знать, что в будущем, то $t = 0, 1, 2, 3$ и т.д.,
если в прошлом, то $t = -1, -2, -3, \dots$

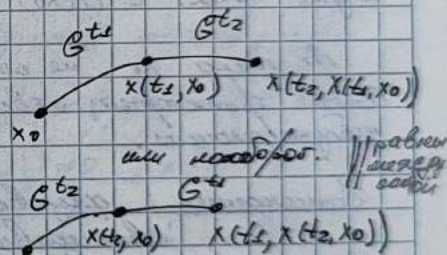
$x(t, x_0) = G^t x_0$ (1) ~ дейст. оператор $\rightarrow$ переносим в будущее или в прошлое

Условия на оператор:

1) G^0 ~ тождественный оператор: $x(0, x_0) = x_0$ (2)
- свойства не имеют произвольности

2) $G^{t_1+t_2} = G^{t_1} \cdot G^{t_2} = G^{t_2} \cdot G^{t_1}$ (3), ассоциатив.

$$x(t_1+t_2, x_0) = x(t_1, x_0) = x(t_2, x(t_1, x_0))$$
$$x(t_1+t_2, x_0) = x(t_2, x_0) = x(t_1, x(t_2, x_0))$$



Система предельно верно и то же состояние в независимости времени значит G^{t_1} тогда G^{t_2} или опер. $G^{t_1+t_2} \rightarrow$ движение придет в одну точку.

Совокупность (ин-во всех точек) x образует X ; которое назыв. фазовое пр.-во. (пр.-во всех состояний системы). Тогда пара $(X, \{G^t\})$ ~ образует динамическую систему $\rightarrow DC$.

В зависимости от того движется ли $t \in \mathbb{R}$ или $t \in \mathbb{Z}$ без динам. сист. делается на два типа: систем с дискретным временем и с непрерывным временем.

Разовая траектория - для $(t \in \mathbb{R})$ будет непрерыв. линия - $\Gamma = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} G^t x_0$

Различ. линии и арх. полутраектории:

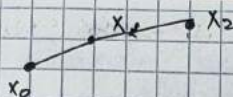
$$\Gamma = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} G^t x_0$$

$$\Gamma^+ = \bigcup_{t \geq 0} G^t x_0$$

$$\Gamma^+ = \bigcup_{t \geq 0} G^t x_0$$

Как правило, если не оговаривается, то говорят о Γ^+ .

То же самое можно ввести и для систем с дискретным временем. Но в фазовом пр.-во траектория - набор точек (обычно их соединяют - линиями).



Инвариантное мн-во - мн-во $A \subset X$ назыв. полностью инвариантным (отрицательно) инвариантным мн-во оно состоит из положительных (отрицательных) траекторий, т.е.

$$B^t A \subset A \quad t \geq 0 \quad (t \leq 0)$$

Если оно и положит. и отриц. инвариантно - простое инвариантное.

Теория траекторий.

→ система в покое

1. Точка x_0 назыв. персидурской точкой, если она устр. сложно соотв. $B^t x_0 = x_0$ для всех t .

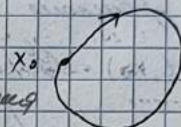
Заметим, что для систем с непр. временем ($t \in \mathbb{R}$) такие точки назыв. точка всего всег. равновесия.

2. Точка x_0 , если $T > 0$, а вып. $B^T x_0 = x_0$, $B^t x_0 \neq x_0$, $0 \leq t < T$ - точка точка, назав персидурской.

Траектория, прох. чрез эту точку назав - персидурской.
~ замкнутая траектория.

Аналогично в дискр. пр-ве, но точка просто точка.

→ Например - персидурская колебатель



3. Недупликация траекторий. Точка x_0 , обл. окрестности $U(x_0)$ для которой з такой интервал времени T_0 , где $B^t(U(x_0))$ не имеет общих точек с $U(x_0)$ при $t > T_0$, назыв. дупликацией.

А точка x_0 , не облад. такой окр-но - назыв. недупликацией.
Сов. траекторий, отв. таким точкам → дупликация и недупликация.

Замечание: фазовое пр-во X не обяз. должно быть с сохранением пространства.

картина, назав с классическим механикой.

φ, φ' - цикл, координата обл. S^1

$$X = S^1 \times \mathbb{R} \sim \text{окрестность на торе}$$

в этом случае
→ цилиндрическое фазовое пр-во.



Динам. система.

с непрерывным временем

~ обычно задаются системой дифф-уравнений.

$$\dot{x} = F(x)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

F - обычно нелинейная ф-я.

Пример: мех. задача в плоских карт.

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{r} = \lambda r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \\ r(t) = r_0 e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow B^t(r_0, \varphi_0) \rightarrow (r_0 e^{\lambda t}, \omega t + \varphi_0)$$

$\dot{x}$ - дифф-е во времени $= \frac{dx}{dt}$
в (4) высв. времени не входит → тогда система автономна

анал. неавтономное. (обычно на сист. действует внешняя сила.)

Динамические системы
с дискретным временем

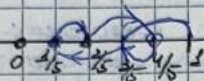
$$x(n+1) = F(x(n))$$

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{Z}, 0, 1, 2, \dots$$

обузда с дискр. временем

или коротко записывается: $\bar{X} = F(X)$ - говоря $\rightarrow$ точное отображение (= сист. с дискр. временем.)

Пример: $X = 2X \pmod{1}$ (5) по модулю 1 - если x равно x или x > 1 или x < 0 $\rightarrow$ рассм. на отрезке $[0, 1]$ (перевод в $[0, 1]$) г.к. по модулю.



$$x(0) = \frac{1}{5} \rightarrow x(1) = \frac{2}{5} \rightarrow x(2) = \frac{4}{5} \rightarrow x(3) = \frac{3}{5} \rightarrow x(4) = \frac{1}{5}$$

$\rightarrow$ периодическая траектория периода 4.

$J_e = (\frac{1}{5} - \epsilon, \frac{1}{5} + \epsilon)$, ϵ -малю $\rightarrow$ окрестность полностью покрыв. траекторией $\rightarrow$ динамический хаос. Траектория неустойчива (происхождение неустойчивости.)

Динамические системы
с непрерывным временем

Рассм. динамич. систему (1) и введём для неё понятие линии диссипации.
Говорят, что пов-ть $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \det D F(x) = 0\}$ будет трансверсальной линией $F(x)$, если $\det D F(x) \neq 0$, $x \in S$

Трансверсально - траектория не касается этой пов-ти

Если топологическая сфера S , т.е. граница топол. шара, то шар D - шар диссипации, если $(\det D F(x), F(x)) < 0$, $x \in S$ (т.е. все траектории входят в S (см. рис.))



траектория не касается

В дальнейшем из шара выбито не может. Можно рассм-ть систему в шаре.

Опр. 1. Система (1) назыв. диссипативной, если $\exists$ шар диссипации такой, если $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $G^t x_0 \in D$, $t \geq 0$.

ав. 09.22. Буде две взаимно перпендикулярные динамич. системы - поперечная область.

динам. системы (G^t, X)

Опр. 2. Компактная область D назв. поперечной областью, если выполняется такое условие:

$$G^t D \subset \Gamma_t, t \geq 0$$

где Γ_t - внутренность области

Пример: $\dot{X} = 3X(1-X) = f(X)$, X - дискретное время.
 $\sim$ это отображение мвл. дискретизация тока тока.

интервал от $[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$ явл. попом. абсциссы.

Согласно $\rightarrow$ делается так

Вспомогат. отрезок контуровая точка

$\frac{1}{5}$

$\frac{4}{5}$

$f(\frac{1}{5})$ и $f(\frac{4}{5})$ $\rightarrow$ найти экстрем. ф-ии и убедиться, что экстремумы отрез. внутри этого интервала.
Тогда $\exists x = \frac{1}{5} \rightarrow$ представим u в виде $u \in [\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$

Аттракторы

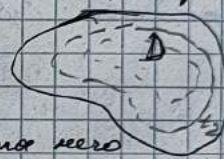
Для систем с диссипацией, внешне логично думать, что установившаяся форма (режим), в переходном процессе, как правило, не играет роли.

Фактически система "забывает" свое начальное состояние. Идеями, описывая установившиеся процессы явл. некоторые подмножества инвариантного мн-ва ($t \geq 0$) - аттракторы.

Существ. некое определенное аттрактор (по нам чисел Σ)

Опр. Пусть D подмножество обл. динамической системы (E^k, X) , тогда мн-во $A = \bigcap_{t \geq 0} D^t$ назыв. максимальным аттрактором в D .

что остается в этом пересечении, то и будет макс. аттрактором



Опр. Мн-во A явл. аттрактором, если для него $\exists \delta, \tau$ при $t \geq \tau$ для любой D , для которой A максимальна, $D^t \subset \delta$.

Результат - аттрактор в любой момент времени, в опр. $t \leq 0$.

Устойчивость динамических систем по Ляпунову

Запишем в вект. виде сист. с пер. временем.

$\dot{x} = F(x)$ ~ но можно добавить параметр. системы.

$\dot{x} = F(x, \mu)$ - где μ - параметр, $\mu \in R^k$

в любой реальной задаче мы не знаем μ точно.

1) Если параметр только имеет некие границы, возникли вопросы $\rightarrow$ какие нач. усл., какие времен. интервалы.

2) Раньше получили ответ для какого-то параметра (по этому хорошему) $\rightarrow$ в реальных системах эти параметры в действ. $\rightarrow$ некое множество значений. Ну можно много различных параметров - бифуркационные.

Како вывести устойчивость системы.

Опр. В 1937г. А.М. Андролев и Н.С. Голубинский ввели строгое понятие о-е устойчивости динам. систем с непрерывно действующим пространством.

$$\dot{x} = P(x, y)$$

$$\dot{y} = Q(x, y)$$

Рассматриваем фазовый динамический систему, где P и Q - непрерывные ф. ф. м., а сист. (1) экв. дифференциальной с непрерывными д.д. D_1 .

Окр. системы (1) назыв. грубой, если $\exists$ малое $\delta > 0$, что все динамич. системы (2) будут, где выполнят:

$$\dot{x} = P(x, y) + p(x, y)$$

$$\dot{y} = Q(x, y) + q(x, y)$$

малые изм. параметров

$$\mu \rightarrow \mu + \Delta \mu$$

$$|p(x, y)| + |q(x, y)| + \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| < \delta$$

имеют такую же структуру разбиения D на области, по преобразованию, что и системы (1)

Это значит малое μ можно ввести константу

Параметры, при которых система явл. негрубой называются бифуркационными.

Замечание: по окр-е грубости строится диаг. фазов. в двумерных сист.

В многомерном случае строится в окр-е $\mathbb{R}^n$.

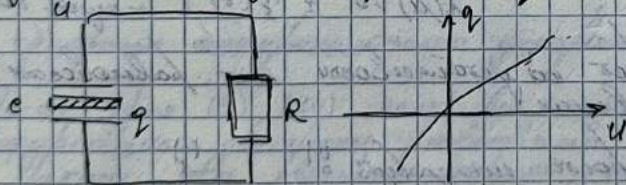
конец!

Контрольные в. и з.

- 1) Найти в двух и трех период. системе н.д.
- 2) Показать, что система $\dot{x} = x - x^3$ явл. диссипативной.
- 3) Найти погл. область для сист. $\dot{x} = 3,4x(1-x)$.

Одномерная динамика

Динам. системы с одномерными фазовыми пр-вами - системы на фазовой явл. проекциями векторов на фазов. динам. системы (Ф.С.) с конечно непрерывными фазов. пр-выми. Самый по себе такие системы опис. дост. простыми реальными системами.



Классический порядок:

Рассматриваем $\dot{x} = x - x^2$ (2) $\rightarrow$ проинтегрируем, в случае $x \neq 0, x \neq 1$

$$\ln|x| - \ln|1-x| + C = t \quad (3)$$

Запишем решение в x , $x(0) = x_0 \Rightarrow C$ и получим решение.

$$\ln \left| \frac{x}{x_0} \right| - \ln \left| \frac{1-x}{1-x_0} \right| = t \quad (4)$$

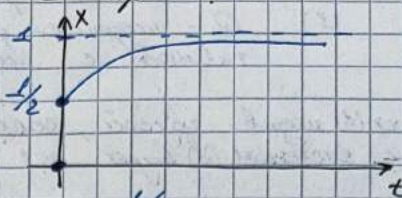
а) пусть $x_0 = 1/2$, поведем $x(t)$, $t \rightarrow \infty$ $\sim$ по формуле

б) как ведет себя $x(t)$ при разных x_0 . $\sim$ в принципе можно ответить (пробовать)

кан. переход $\rightarrow$ рассм-е фазовое пр-во:



стационарные решения.



$c.t. x_0 = 1/2 \rightarrow$ асимптотически пр-бл. к 1.

Рассмотрим в общем виде ф-я по фазе.

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (5), \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}^k$$

f - непрерывн. ф-я, удовле. выполн. соответ. теорем о сущ. единственности решения.

Сост. равн. $\sim$ такая коор. x , когда $\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x, \mu) = 0 \quad (6)$
 $\downarrow$
 $x = x_0(\mu)$

Возьмем сост. равн. и поместим возмущение.

$$x = x_0(\mu) + \xi(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\xi}(t) = f(x_0 + \xi(t)) \sim \text{разложим по } \xi \sim \text{в ряд.}$$

$$(7) \quad \dot{\xi}(t) = f(x_0 + \xi(t)) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x_0} \xi + \dots$$

Предположим, что $\frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x_0} \neq 0 = \lambda(\mu)$
 а хвост отбросим, оставим линейное приближ.

$$\Rightarrow \dot{\xi} = \lambda(\mu) \xi \quad (8) \sim \text{линейное.}$$

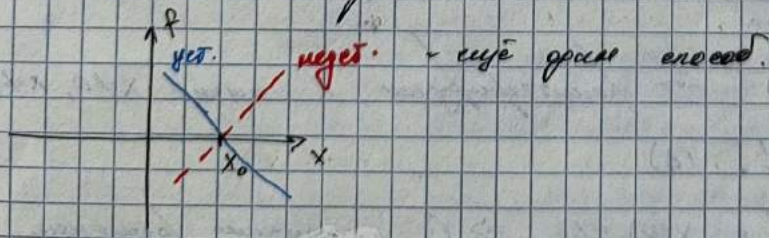
Процесс перехода от (7) к (8) назыв. линеаризацией, а $\lambda(\mu)$ - характеристическ. по-е на стационар. равновесии

$$\rightarrow \xi(t) = C e^{\lambda(\mu)t}, \quad \text{если } \lambda(\mu) < 0 \rightarrow \xi(t) \rightarrow 0 \sim \text{уст. точка.}$$

$$\lambda(\mu) > 0 \rightarrow \xi(t) \uparrow \sim \text{неуст. точка}$$

Метод линеаризации работает об устойчивости сост. равновесия в окрестности этих сост. равновесия.

Но можно по-другому $\rightarrow$ просто исследовать $\dot{x}$ по x и ставить знаки.



это фазовое сечение.

Бифуркация $\rightarrow$ изменение дрн.
 Бифуркация равновесия

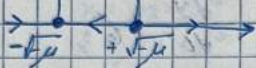
Коразмерность - размерность на единицу меньше размерности ф-ва, где система рассматривается.

Рассм-е системы

$$\dot{x} = \mu + x^2 \quad (9) = f(x, \mu)$$

$\mu < 0$

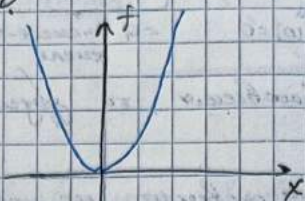
Во всем курсе, не обращаясь к бифуркации, параметр $\mu = 0$.



$$\mu + x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\mu}$$

Грубая система 1

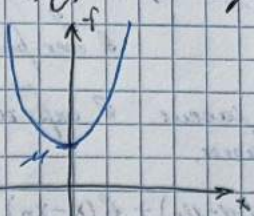
$\mu = 0$



Бифуркация (касается нулевой)

двухгранное равновесие

$\mu > 0$

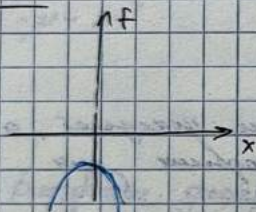


Грубая система 2

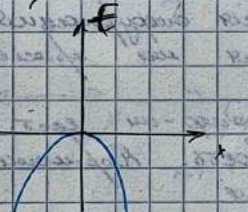
Аналогично рассмотрим уравнение для системы:

$$\dot{x} = \mu - x^2 = f(x, \mu) \quad (10)$$

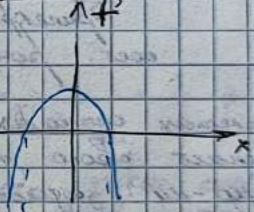
$\mu < 0$



$\mu = 0$

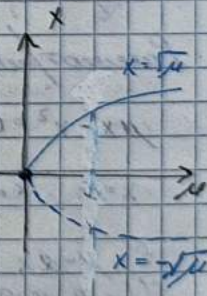


$\mu > 0$



Построим бифуркационную диаграмму $x(\mu)$

От-ся ур-я (9), (10) опи. все возможные бифуркации двухгран. равновесий, т.е. если в системе есть двухгран. равновесие, то эту сист. в окр. равнов. замкнутой окрестности и параметров μ должно привести к виду (9), (10) и бифуркационной диаграммы.



03.10.22

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

$$\dot{x} = \mu + x^2$$

~ опи. динам. механизмы с осев. равновесия.

В некоторых случаях эти ур-я опи. всевозм. бифуркации двухгранного равновесия. т.е. если в системе двухгран. равновесие, то можно привести к такому виду. Поэтому их назыв. нормальными формами.

Рассмотрим:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (1)$$

$$x = x_0, \mu = \mu_0$$

~ известно какое-то осев. равнов.

$$\lambda(0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, \mu_0)} = 0$$

Разложим $f(x, \mu)$ в ряд Тейлора в окр-ти $x=x_0$ и $\mu=\mu_0$:

$$\dot{x} = f(x, \mu) = f(x_0, \mu_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, \mu_0)} \cdot (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial \mu} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (\mu-\mu_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, \mu_0)} (x-x_0)^2 + \dots \quad (2)$$

в соот. равнов. $\lambda(0)=0$ — какое-то число

Т.к. рассм. в окр-ти т.равновесия, то функции именовали разлож. преобразования.

$$\dot{x} = a(\mu-\mu_0) + b(x-x_0)^2 + \dots \rightarrow \text{очевидно, что можно привести к одному из видов } \dot{x} = \mu - x^2 \text{ и } \dot{x} = \mu + x^2$$

$$\frac{1}{b} \frac{dx}{dt} = \frac{a}{b} (\mu-\mu_0) + (x-x_0)^2 + \dots$$

делаем замену переменных: $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$, где $\frac{dz}{dt} = b$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{a}{b} (\mu-\mu_0) + (x-x_0)^2 + \dots$$

введём $x_k = x - x_0$, $\frac{a}{b} (\mu-\mu_0) = \mu_k$. — получили нормальную форму.

$$\frac{dx}{dz} = \mu_k + x_k^2 + \dots$$

Транскритическая бифуркация соот. равновесия на прямой

Во многих случаях при биф-ии соот. равн не исчезает, а лишь меняет свою устойчивость. Нормальная форма для такой биф-ии задается др-е.

$$\dot{x} = \mu_k - x^2 \quad (3)$$

$$\dot{x} = \mu_k + x^2 \quad (4)$$

Рассмотрим ур-е (3) и найдём соот. равновесия.

$$\mu_k - x^2 = 0$$

Решим квадратное уравнение

$$\mu < 0$$

$$\mu = 0$$

$$\mu > 0$$

$$x=0, \quad x=\mu$$

$$f' = \mu - 2x$$

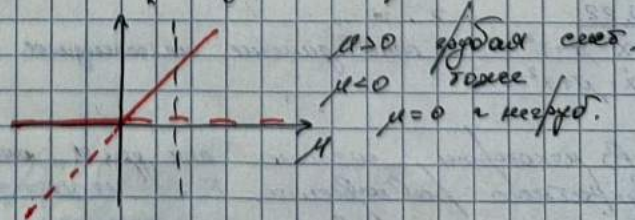
$$f'(x=0, \mu=0) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(0) = 0$$

— ничего сказать нельзя (нужна окрестность.)

$$\lambda(\mu) = f'(x_0, \mu_0)$$

Сделаем бифуркационную диаграмму:



— устойчив.
--- неуст.

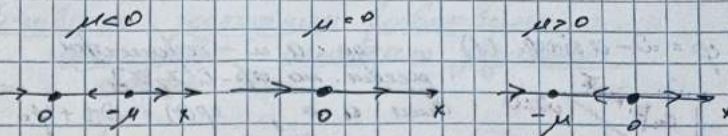
$\Rightarrow \mu=0$ — точка бифуркации.

Рассмотрим аналогично ур-е (4), найдём соот. равновесия.

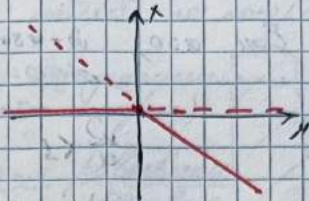
$$\mu_k + x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, \quad x = -\mu$$

$$f' = \mu + 2x$$



Бифуркационная диаграмма:



Трёхкратное равновесие.

Рассмотрим пару уравнений:

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (5)$$

$$\dot{\mu} = -\mu x + x^3 \quad (6)$$

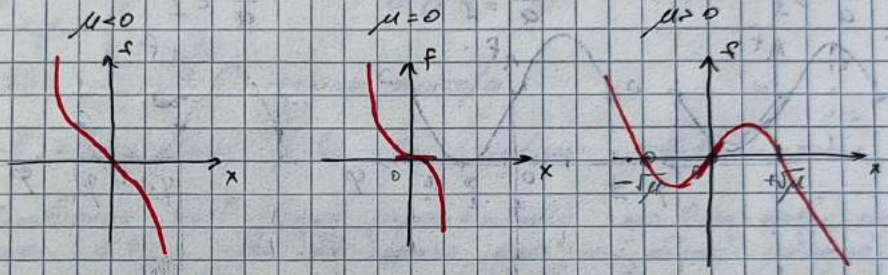
Рассмотрим ур-е (6). Зр-я инвариантная отн. преобр. $x \rightarrow -x$

$$f(x, \mu)$$

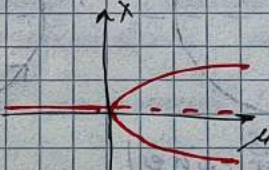
$$x=0 \text{ и } \mu - x^2 = 0$$

$$\rightarrow x = \pm \sqrt{\mu}$$

$$f' = \mu - 3x^2$$

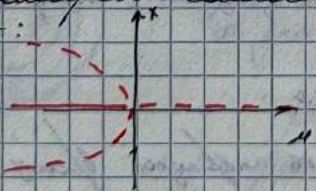


Бифуркац. диаграмма:



также существуют
период. колебания
(в микр. с автоколебл.)
век. стр.-ва бассейна
притяжения (max rel.)

Н/о: рассмотрим систему диф. в гр-ми (6).
вектор:



Изучим век. бифуркации крайности в динамич. системах на границах.

Динамические системы
на окружности.

$$\dot{\varphi} = F(\varphi) \quad (7)$$

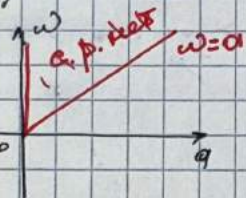
$$F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi)$$

Рассмотрим ур-е:

обознач $\varphi \in S^1$



$\dot{\varphi} = \omega - a \sin \varphi$ (8), где a, ω — постоянные, $\omega > 0, a \geq 0$
 рассматр. на $\varphi \in [-\pi, \pi]$

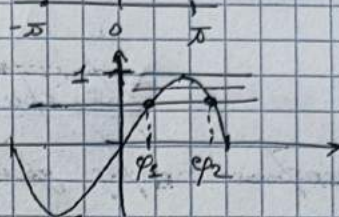


Если $a = 0$, $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$

Если $a > 0$, $\omega - a \sin \varphi = 0$
 $\sin \varphi = \frac{\omega}{a}$; если $\frac{\omega}{a} > 1$

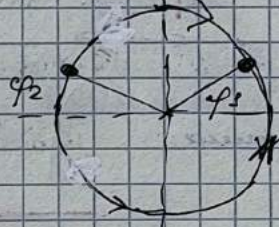
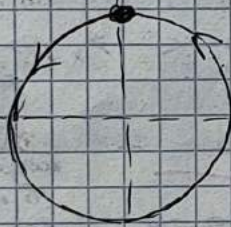
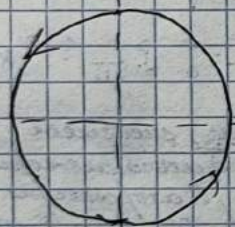
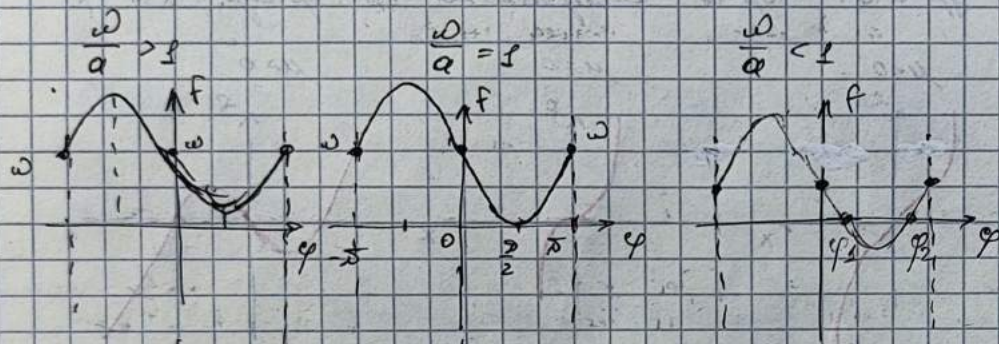
$$\frac{\omega}{a} < 1$$

два равновесия: $\varphi_1 = \arcsin(\frac{\omega}{a})$
 $\varphi_2 = \pi - \arcsin(\frac{\omega}{a})$



Построим как функцию $\dot{\varphi}$ будет зависеть $\frac{\omega}{a}$

Если $\frac{\omega}{a} = 1$, $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$



Фазовые портреты

$$\dot{\varphi} = a(\frac{\omega}{a} - \sin \varphi)$$

Неравномерность движения (скорость разная, то $\dot{\varphi} \uparrow$, то $\dot{\varphi} \downarrow$)
 вызывает из-за инерционности.

Бифуркация звукового равновесия.

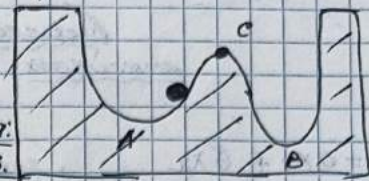
З/З: Для $\dot{\varphi} = a$ (8) построить зависимость периода вращения движения от параметра a и качественного вид...

и провести исследование динамики: $\dot{x} = -\mu x + x^3 - x^5$, $\mu > 0$.

Устойчивость состояний равновесия линейн. сист. равн. нелинейн. двумерных систем.

Простая сеть динамической системы, по которой можно сказать

мы должны говорить о возмущении (от него зависит куда пойдет шарик)



Опр-е устойчивости сост-я равновесия.
по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

Рассмотрим систему (1) $\dot{x} = F(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
Для линеар. сист. равновесия:

$$F(x) = 0 \quad (2)$$

Предположим, что $x = x^*$ - одно из таких сост. равновесия. Пример с шариком показывает, что уст. сост. равн. зав. от возмущения. Для того чтобы справиться возмущения мы должны ввести метрику.

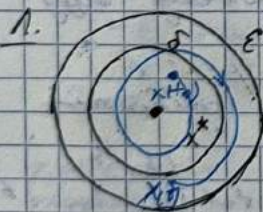
Возьмем $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ - длина вектора.

Заметим, в евклидовой н-ве все нормы эквивалентны.

Опр-е. Сост. равновесия $x = x^*$ просто устойчиво по Ляпунову, если для всякого $\varepsilon > 0$ (как бы мало оно ни было) можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства (3)

$\|x^* - x(t_0)\| < \delta \quad (3)$ вытекает нр-во: $\|x^* - x(t)\| < \varepsilon, t \geq 0$, где $x(t)$ - любое решение системы (1) опр-е линеар. устойчивости $x(t_0) \rightarrow$ устойчивость по Ляпунову.

Сост. равн. x^* любой мет. это линеар. топологическая точка.



Опр-е. Сост. равн. $x = x^*$ назыв. асимптотически устойчивым, если оно уст. по Ляпунову и для $x(t), x(t_0)$ выполняется:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x^* - x(t)\| = 0$$

$\Rightarrow$ стремление к точке равновесия



Рассм. в фазовом сост. равновесия $\rightarrow$ асимптотически устойчивые.

Замечание: если в опр-е такого δ не находится, то сост. равн. назыв. неустойчивым. Справим также внимание что выбирать δ можно из условия: $\delta \leq \varepsilon$, и много ε задают область допустимых возмущений.

Решая по 3 классу:

1. Устойчивость в целом $\rightarrow$ если оно уст. при любых н.у.

2. Устойчивость в области $\rightarrow$ если оно уст. по отношению к н.у.

из некоторой конкретной области.

3. Устойчивость в малом - или оно год. в малом отклонении, около точки равновесия.

линейная сист. равн.
линейных систем на фазовой плоскости

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases} \quad (4), \text{ где } a, b, c, d - \text{параметры}$$

Хотим показать как верб. себя система на фазовой плоскости.

x_2

В векторном виде: $\dot{x} = Ax$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Считаем, что в обш. случ. $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ сист. равн.

1) Ищем решение сист. в виде:

$$x_1 = B_1 e^{\lambda t}; \quad x_2 = B_2 e^{\lambda t}$$

$$\begin{cases} B_1 \lambda e^{\lambda t} = a B_1 e^{\lambda t} + b B_2 e^{\lambda t} \\ B_2 \lambda e^{\lambda t} = c B_1 e^{\lambda t} + d B_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1(a - \lambda) + b B_2 = 0 \\ c B_1 + (d - \lambda) B_2 = 0 \end{cases} \quad (5) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc = 0 \quad (6)$$

II. Действительные корни ур-я (6).

1) Случай несовпадающих корней: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_{1,2} \neq 0$

Покажем, что систему (4) можно привести к каноническому виду

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 \end{cases} \quad (7) \quad \sim \text{каноническая форма для любых с.р. с действ. корнями}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = h_{11} x_1 + h_{12} x_2 \\ \dot{u}_2 = h_{21} x_1 + h_{22} x_2 \end{cases} \quad (8) \quad \text{где } h_{ij} - \text{неизв. коэф-ты и } \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \neq 0$$

продифференцируем по времени ур-я (8)

$$\dot{u}_1 = h_{11} \dot{x}_1 + h_{12} \dot{x}_2 = h_{11}(ax_1 + bx_2) + h_{12}(cx_1 + dx_2) = x_1(a h_{11} + c h_{12}) + x_2(b h_{11} + d h_{12})$$

но с другой стороны из системы (7) $\downarrow$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda_1 (h_{11} x_1 + h_{12} x_2) \Rightarrow \int h_{11}(a - \lambda_1) + c h_{12} = 0 \\ &\quad b h_{11} + h_{12}(d - \lambda_1) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

~ это означает линейных друг ур-ий отн.

h_{11}, h_{12} она имеет тривиальное решение, если $\Delta = 0$.

Из $\Delta = 0$ ~ получили хар-ое ф.е. ~ т.е., т.к. есть $\lambda_1 \rightarrow \infty$ $\det = 0 \rightarrow \infty$ много решений

Если $c \neq 0$, то моды из коэф-ов j и o моды из коэф-ов o и o поменяются местами. ($h_{11} = p = \text{const} \Rightarrow h_{12} = \frac{p(a-\lambda_1)}{c}$, $c \neq 0$)

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - be = 0$$

Если $c = 0 \Rightarrow (\lambda - a)(\lambda - d) = 0$, т.е. $c = 0$ $a \neq d$, т.к. критичные коэф-ы обратны.

$$\Rightarrow \lambda_1 = a \quad \Rightarrow h_{11} = p = \text{const.}$$

$$\lambda_2 = d \quad h_{12} = -\frac{p}{p - \lambda_2}$$

Продолжить аналогичные выкладки для 2-го ур-я. (8)

Результаты первых выкладок: $h_{21} = 0$, $h_{22} = q$ произв. коэф. для $c = 0$
если $c \neq 0$: $h_{21} = q$, $h_{22} = -\frac{q(a-\lambda_2)}{c}$, $c \neq 0$

Для простоты $p = q = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = x_1 - \frac{(a-\lambda_1)}{c} x_2 \\ u_2 = x_2 - \frac{(a-\lambda_2)}{c} x_2 \end{cases}, c \neq 0$$

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - (a-\lambda_1) x_2 \\ u_2 = x_2 \end{cases}, c = 0, a \neq d$$

Далее рассматриваем систему ур-я (7).

а) корни одного знака. (λ_1 и λ_2 одного знака.)

Решая в нормальном базисе д.у. получим:

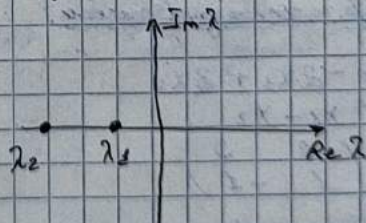
$$(\leq) u_2 = C(u_1)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \text{ где } \text{sign} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1, |\lambda_2| > |\lambda_1|$$

$C = \text{const}$

~ в этом случае ур-е (10) даст график кривой по...

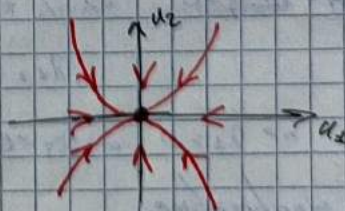
Пусть λ_1 и $\lambda_2 < 0$, $|\lambda_2| > |\lambda_1|$

т.е. $c = \text{const}$ произв. $\rightarrow$ координаты траекторий.



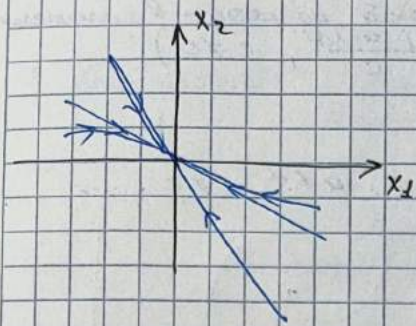
асимптотически устойчивый узел $\Leftarrow$

Напр-е $u_2 = 0$ ~ вернутое напр-е
а $u_1 = 0$ ~ невернутое напр-е

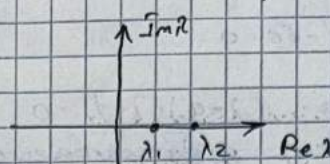


Как будет в ихорных пересечениях? Аналогично ур-ю (8)
 u_2 и u_1 через x_1 , x_2 . $\Rightarrow$ положить $u_2 = 0$ $\rightarrow$ невернутое напр-е.
 $u_1 \rightarrow$ вернутое напр-е. $\rightarrow$ неавтономное будет поведение

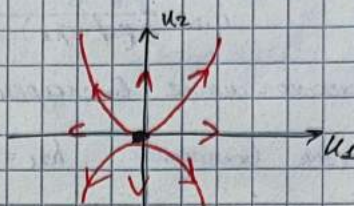
Направление:



б) Пусть $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, λ_1 и $\lambda_2 > 0$



неустойчивый узел $\Leftarrow$

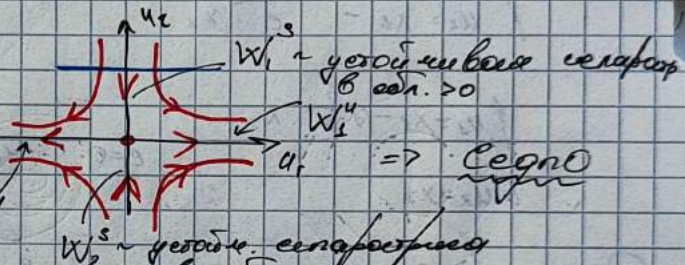
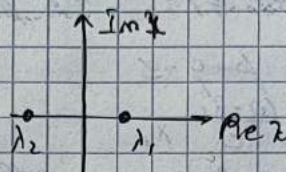


в) корни разных знаков.

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$$

$$u_2 \cdot (u_1)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \text{const}$$

$W_1^s \sim \text{stable}$
 $W_2^u \sim \text{unstable}$



В асимптотическом анализе
можно поступить аналогично.
Фр-я сепаратрис.

$$K_1 = \frac{c}{a - \lambda_1}, K_2 = \frac{c}{a - \lambda_2}, c \neq 0$$

$$K_1 = \frac{1-a}{b}, K_2 = 0, c = 0, a \neq 0$$

прямая $bK^2 + (a-d)K - c = 0$ $\rightarrow$ возвращая λ через K и в лев. осях.

Классификация точек: седло неуст. по Ляпунову

Пример исследования:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 > 0 \text{ и } \lambda_2 < 0 \Rightarrow \text{седло}$$

Фр-я сепаратрис.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim \text{и решаем}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = \lambda_1 x_1 \\ x_1 - x_2 = \lambda_1 x_2 \end{cases} \rightarrow$$

$$x_2 = \frac{(\lambda_1 + 2)}{3} x_1$$

аналогично для λ_2 устойчивой.

фр-я неуст. сепар.

Задача о сродных корнях:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 \end{cases} \quad (1)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ~ Заметим, что в случае кратных корней, существует две формы.

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda u_1 \\ \dot{u}_2 = \lambda u_2 \end{cases} \quad (2) \quad \sim \text{в этом случае с.р. можно дифференцировать, получив} \\ \text{уст. дифр. узел.}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda u_1 + u_2 \\ \dot{u}_2 = \lambda u_2 \end{cases} \quad (3)$$



Во (3) случае с.р. можно, выходя из точки узла, ~ у него нет ведущего направления, и есть ведущий.



II. Комплексно-сопряженные корни

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad \text{где } \beta > 0$$

Для вывода нормальной формы (1) мы не делили никаких ограничений на λ_1 и λ_2 . Введем теперь систему (1) оправдано и в случае к.с. корней, доказано u_1 и u_2 должны быть комплексными.

$$\begin{cases} u_1 = u + i v \\ u_2 = u - i v \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Пусть } \lambda_1 = \alpha + i\beta$$

$$\Rightarrow \dot{u} + i\dot{v} = (\alpha + i\beta)(u + i v) = \alpha u + i\alpha v + i\beta u - \beta v$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha u - \beta v \\ \dot{v} = \beta u + \alpha v \end{cases} \quad (3) \quad \sim \text{нормальная форма для к.с. корней}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Введенная система.

Используем эту систему: нам интересно как будет развиваться система.

Перейдем к полярным координатам.

$$\begin{cases} u = r \cos \varphi \\ v = r \sin \varphi \end{cases} \quad \sim \text{представим в системе} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = \alpha r \cos \varphi - \beta r \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = \beta r \cos \varphi + \alpha r \sin \varphi \end{cases} \quad (5) \quad \begin{matrix} / \cdot \cos \varphi \\ / \cdot (-\sin \varphi) \\ + \\ / \cdot \sin \varphi \\ / \cdot \cos \varphi \end{matrix}$$

Система (4) - линейная система относ. $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$

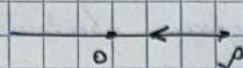
$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ r \dot{\varphi} = \beta r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\varphi} = \beta \end{cases} \quad (6)$$

(6) $\Rightarrow \rho = C e^{\frac{\alpha}{R} \varphi}$, $C = \text{const}$

За уст. отвечает $R e$ часть.

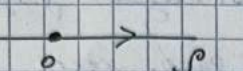
$\sim$ логарифм. спираль.

Если $\alpha < 0$



$\sim$ сжимающаяся спираль с равновесием - назыв. устойчивым фокусом.

$\alpha > 0$



$\sim$ спираль расширяющаяся из сост. равн. - назыв. фокус.

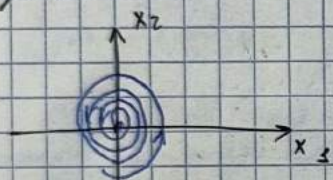
при $\alpha = 0$

$\sim$ для малых ρ - окружность, такое сост. равн. - центр.

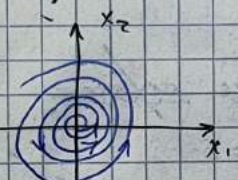
Устойч. фокус - асимптотически устойчив. Неуст. фокус - неуст. по Ляпунову.

Центр - устойчив по Ляпунову, но не асимптотически.

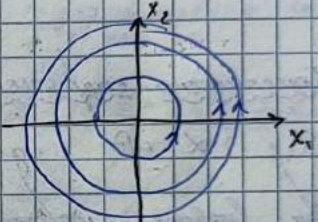
Решение сеп. вернуться к переменным x_1, x_2 спираль перейдет в спираль. А окружность, т.е. центр могут перейти в эллипс, т.е. преобр. колебание.



устойчивый фокус.



неуст. фокус



консервир. центр, т.к. $\alpha = 0 \Rightarrow \rho = \text{const}$

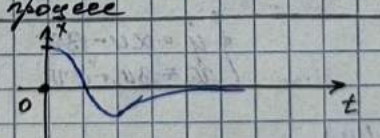
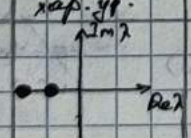
Колебания двумерных линейных систем.

Сост. равновесия

хар. ур.

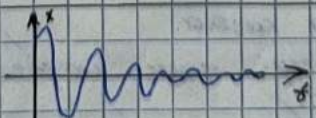
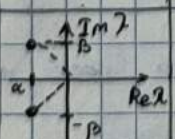
Решает. процесс

Устойч. узел.



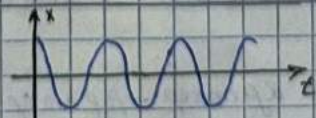
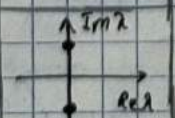
Затухающие аperiodические колебания.

Устойчивый фокус



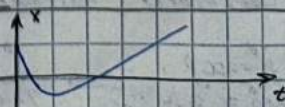
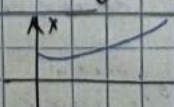
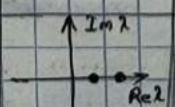
Затухающие oscillatory колебания.

Центр.



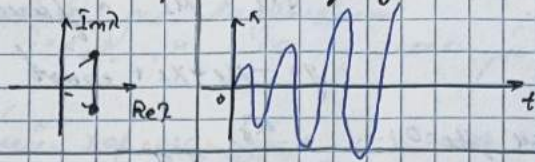
Периодич. колебания.

Неустойчивый узел.

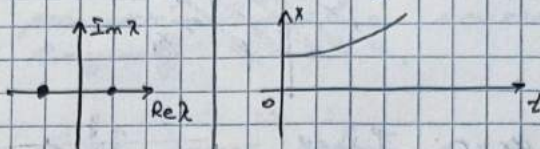


Круговым фокус.

Нарис. асимптот. колебания



Седно



Бифуркационная диаграмма

Рассмотрим хар-ое ур-е для λ :

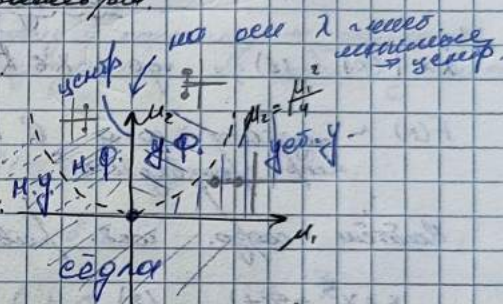
$$\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + \alpha\delta - \beta\epsilon = 0, \text{ где } \alpha, \delta, \beta, \epsilon \text{ это некоторые параметры.}$$

Обозначим через $\mu_1 = -(\alpha + \delta)$
 $\mu_2 = \delta\epsilon + \beta\epsilon = \alpha\delta - \beta\epsilon$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \mu_1\lambda + \mu_2 = 0 \quad (7)$$

Хотим разбить пр-во (μ_1, μ_2) на области с типами равновесия.

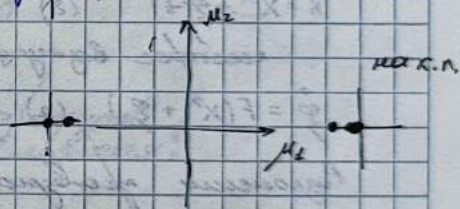
$\mu_2 = \mu_1 = 0$ - такое же рассматр. (главное вырождение)



$$\text{Если } \mu_2 = 0; \mu_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\mu_1 \Rightarrow$$

$$D = \frac{\mu_1^2}{4} - \mu_2 < 0 \text{ - вещ. сопр. корни}$$

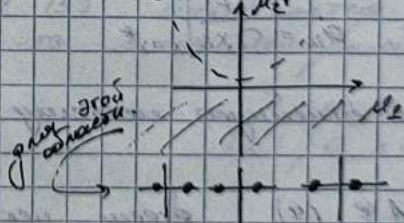
$$\Rightarrow \mu_2 > \frac{\mu_1^2}{4}$$



если $\mu_2 < 0 \leadsto \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \rightarrow$ седно $\rightarrow$ седно

Седно всегда имеет границу с устойчив.

Рассмотрим систему на прямой $\mu_2 = 0$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \dot{x}_2 = \epsilon x_1 + \delta x_2 \end{cases} \quad (8)$$

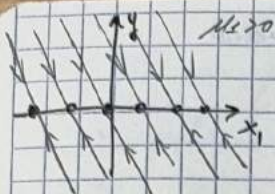
$$\mu_2 = \delta\epsilon + \beta\epsilon = \alpha\delta - \beta\epsilon = 0$$

$$\mu_1 \neq 0$$

Введем вместо x_2 новую переменную: $\alpha x_1 + \beta x_2 = y$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y \\ \dot{y} &= \alpha x_1 + \beta \dot{x}_2 = \alpha y + \beta(\epsilon x_1 + \delta x_2) = \alpha y + \beta\epsilon x_1 + \beta\delta x_2 = (\alpha + \delta)y + (\beta\epsilon - \alpha\delta)x_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = y \\ \dot{y} = -\mu_1 y \end{cases} \quad (9) \quad \text{из системы (9) вытекает инд.-ое} \Rightarrow y = 0 \text{ - линия изг. равновесия.}$$



Если $\mu_1 > 0$; $\frac{dy}{dx_1} = -\mu_1$ — прямая
 $y = -\mu_1 \cdot x_1 + \text{const}$

Если $\mu_1 < 0$:



Если $\mu_1 = 0$: $\begin{cases} \dot{x}_1 = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow y = \text{const}$



Устойчивость сост. равн.
многомерных нелинейных систем
Метод линеаризации.

$\dot{x} = F(x)$ (1), где $x \in \mathbb{R}^n$, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$F(x)$ — векторная ф-я в окр. области $D \subset \mathbb{R}^n$. (линейная — нуль-т. крив. производных.)

Найдём сост. равн. $F(x) = 0 \rightarrow x = x^*$ одно из с/р

$x = x^* + \xi$ (2) $\rightarrow$ представим в (1)

какое-то выражение

$\dot{\xi} = F(x^* + \xi)$ (2)

Разложим правую часть в ряд Тейлора по ξ

$\dot{\xi} = A\xi + \dots$ (3), где A — матрица Якоби $n \times n$.

$A, a_{ik} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right|_{x=x^*}$

Расс-м линейную систему, отброшены члены более высокого порядка:

$\dot{\xi} = A\xi$ (3) будем искать решение в виде

(4) $\xi = B \cdot e^{\lambda t}$, где B — вектор столбец длины n , λ — корень λ (с крив. коэффициентами).

Подставляя, получим сист. ур-ий от B . Она имеет нетрив. решение, когда ее определитель равен 0.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

17.10.22.

Если его раскрыть получим характеристическое ур-е:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (5)$$

λ — характерист. показатели сист. равновесия.

Далее мы будем рассм-ть случаи, где $a_0 > 0$ (иначе roots

Рассмотрим линейную сист. (3).

Справедливы след-я, док. Матюковичи:

- 1) Если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то сист. равн. асимптотически устойчива.
- 2) Если среди корней хар-ого ур-я (5) есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то сист. равн. 0 неустойчива по Матюковичу.
($\operatorname{Re} \lambda_i > 0$)

3) Если хар-ое ур-е не имеет корней с ...
но имеет нек-ое число корней с нулевой вещественной частью,
то сист. равн. может быть устойчивой (но не асимптотически), так и неустойчивой.

Если $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, то хар-р устойчивости сист. равн. будет такой же как в линейной системе. (4)
Если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ - асимпт. уст. и в нелинейной системе.

Метод линеаризации (или метод Матюковича)

Устойч. сист. $\rightarrow$ линеариз. систему $\rightarrow$ отбросить нелинейность $\rightarrow$ и линеаризация по способу Ляпунова.

Пример: $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 1 - e^x \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 1 - e^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow (0,0)$

Матрица Якоби (скаляр детерминанта) в т. 0

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$\Rightarrow 0$ - корень

Но это не меняет, где работает метод линеаризации?
Только в малой окрестности сист. равновесия!

Критерий Рауса - Гурвица?

Сформулируем для хар-ого ур-я (5). Составляется матрица Гурвица. В каждой строке все коэффициенты с тем же номером, и если

$$A_k = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{по, } k > n \\ a_k = 0, k < 0 \end{matrix}$$

Для строки, уменьшаем индекс первой на 1, и т.д. аналогично, но для индексов не $\rightarrow 0$, но диагональ a_1, a_1

Далее вычисляются главные диагональные миноры.

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

Для того чтобы все корни ур-я (5) с вещ. коэф-тами имели отриц. вещ. части ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0$) надо, чтобы все главные диагональные миноры делились были положительными $\Rightarrow$ значит сист. равн. асимптотически устойчива.

Случай $n=3$: $a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad / : a_0$

$$\lambda^3 + \underbrace{\frac{a_1}{a_0}}_a \lambda^2 + \underbrace{\frac{a_2}{a_0}}_b \lambda + \underbrace{\frac{a_3}{a_0}}_c = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (6)$$

Матрица Гурвица: $A_H = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & a & c \end{pmatrix}$

$$\Delta_1 = a, \quad \Delta_2 = ab - c, \quad \Delta_3 = c(ab - c)$$

$$\Rightarrow \text{условия: } \begin{cases} a > 0 \\ ab - c > 0 \\ c > 0 \end{cases} \rightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i=1,2,3$$

не каждая λ может быть условием на параметры.

Второй метод Ляпунова

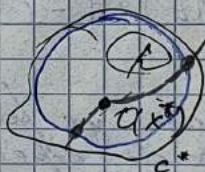
основан на сущ-ии у систем нелинейных скалярных ф-ий:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{ф-ия Ляпунова}$$

$$V(x)$$

Эта с-я м-ов с-в. равн. в обл. D . Для того чтобы ф-я была ф-ей Ляпунова.

1) должна быть непрерывна, и иметь непрерывное преобразование в обл. D .



2) Знакооп-е и знакоп-е ф-ии.

Ф-я $V(x)$ назыв. знакооп. в обл. D , если она ф-я в 0 или в т. O и имеет принимаеб знак. одного знака, во всех других точках области D . (область конуса и т.д.)

Ф-я $V(x)$ назыв. знакоп-е в обл. D , если она ф-я в 0 с-в. равн. O и в других точках D она имеет знак и тот же знак.

Пример: $V_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow V(0,0,0) = 0, V(x_1, x_2, x_3) \neq 0$

$$V_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2$$

Знакооп.

Знакоп-е.

Если ф-я имеет опр-е, то пов-ти уравня $V(x) = C = \text{const}$, всегда замкнутые, и они всегда стабилизируются к равновесию.

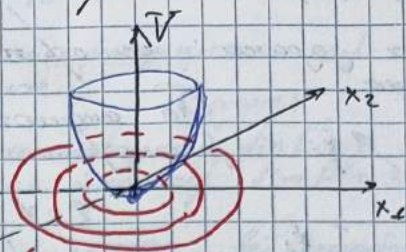
C^* , $C < C^*$, пов-ти C авт. замкнутыми только ниже какого-то критического C^* , далее могут быть пересек.

Замеч. пов-ть $\rightarrow$ не может идти через точку с-в.

равн. дается абз. быть такой переменной

$$V(x_1, x_2, x_1)$$

Возьмем ф-ю $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a} + \frac{x_2^2}{a}$



Фронт Ляпунова — участок
или изогн. линии уровня
вдоль траектории движения.

линии уровня.

Наро взято производную от V .

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x) = (\text{grad } V \cdot F)$$

Теорема (об устойчивости — дост. усл.)

~ Если для сист. (1) $\exists$ в обл. D функцион-я ф-я $V(x)$,
произв. которой по t в силу системы V авт. убывает, и,
знак противоположен. знаку ф-ии V , то сист. равн. то
уст. по Ляпунову.

Обычно $\dot{V}$ выражат линеин. сп-й функцией.

Теорема (об асимпт. устойчив.).

~ Если для сист. (1) $\exists$... такое авт. функцион-я,
знак противоположен. знаку V , то сист. равн. авт. асимптотически
устойчива. (линии уровня сжимаются
к точке.)

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$



Сформируем ф-ю Ляпунова: обычно строит как квадратичную
форму, но вообще этого нечего делать.)

$$O(x_1 = x_2 = 0)$$

$$V = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} \rightarrow \dot{V} = x_1 \cdot \dot{x}_1 + x_2 \cdot \dot{x}_2 = x_1(-x_1 + x_2 - x_1^3) + x_2(-x_1 - x_2 - x_2^3) =$$

$$= -x_1^2 + x_1 x_2 - x_1^4 + x_1 x_2 - x_2^2 - x_2^4 = -x_1^2 - x_2^2 - x_1^4 - x_2^4 \leq 0$$

спр. в 0 только в равнов.

$\Rightarrow O(x_1 = x_2 = 0)$ асимптотически устойчиво во всей окрестности
н-ве.

Этот метод говорит об устойчивости во всей окр-сти, но
это сложный метод, и, в. и не существует ф-ии Ляпунова.

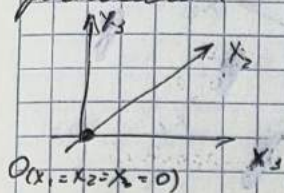
(IV)

Решение сист. равновесия в
3-х переменных.

Рассмотрим систему $\dot{x} = f(x)$ при $(1=2)$
Хотим найти устойчивые корни х-а у-а.

$$n=3, \quad \lambda_i, \quad i=1, 2, 3$$

Нам задачка: посмотреть на равнов. пр-во в окр-сти точки равновесия.



По аналогии с двумерными сист. или рассмотрим такую линейную сист-цу

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{где } A: 3 \times 3 \text{ матрица}$$

Можно привести к нормальной форме

$$u = N\varphi, \quad \text{где } \det N \neq 0$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 \end{cases}$$

Система 7 коэф-ов, коэф-ы форм-ов для заданного сист. равновесия ф-кцион. линейных сист-цы

$$u_1(t) = u_1^0 e^{\lambda_1 t}, \quad u_2(t) = u_2^0 e^{\lambda_2 t}, \quad u_3(t) = u_3^0 e^{\lambda_3 t} \quad (8)$$

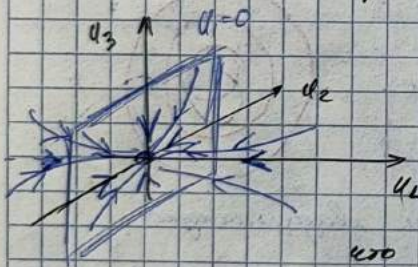
где $u_i^0 = \text{const}$

$\Rightarrow$ Очевидно, если $\text{Re } \lambda_i < 0, \quad i=1, 2, 3$ $\rightarrow$ равновесие асимптотически устойчиво

7 корней λ_i одного знака

1) Случай отриц. корней $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$

$\varphi u_2 = 0$ явл. решением ф-ы в (7)



Если положить $\{u_2 = u_3 = 0\} \rightarrow$ прямая u_1 но все динамич. окр-сть $\rightarrow$ ф-е $\lambda_i < 0 \Rightarrow$ равновесие к 0 асимптотически (но не пресекается)

Говорит с такой ф-ей динамики, что траектор. пересекается не по непересекаемо

Пусть $u_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2^0}{u_1^0} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

u_3 ф-а $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1$

уст. узел

$$\frac{u_3}{u_1} = \frac{u_3^0}{u_1^0} e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t}$$

$\Rightarrow$ все остальные траектор. асимпт. приближ. к сист. равн.

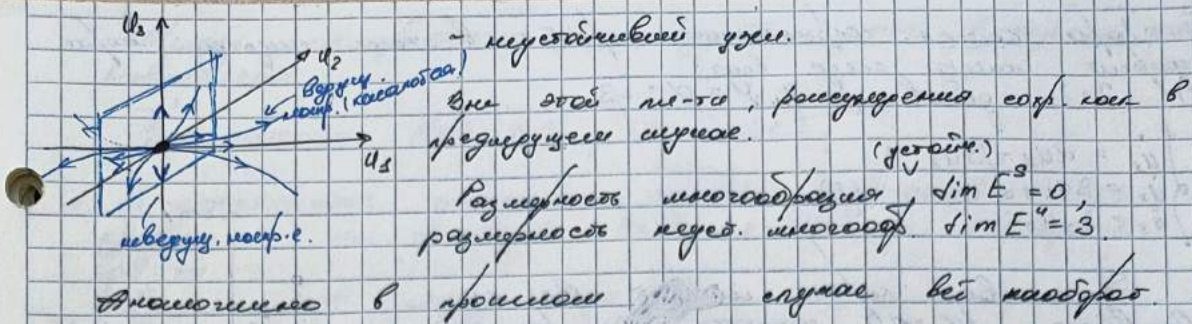
24.10.22

Пусть все корни этого ф-ы будут комплексными и действительными

$\text{Im } \lambda_i$

$$\text{примем: } \begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2 \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 \end{cases} \quad (9)$$

Неблизко видеть, что не-то $\{u_2 = 0\}$ явл. решением этой сист-цы. На этом не-то ф-ы для стационар. ф-ы



II. Корни λ_i разного знака
 1) Для $\alpha = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, а $\lambda_3 > 0$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda_1 u_1 & \text{исполн. 1 из коорд. } u \\ \dot{u}_2 &= \lambda_2 u_2 & \text{исполн. 2 из коорд. } u \\ \dot{u}_3 &= \lambda_3 u_3 & \text{исполн. 3 из коорд. } u \end{aligned}$$

Но при $u_3 = 0$ $\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0$ $\rightarrow$ на м-те $u_3 = 0$
 $u_3 = \lambda_3 u_3 \Rightarrow \lambda_3 > 0 \rightarrow$ траектория уходит
 от равновесия $\{u_3 = 0\}$

Для u_1, u_2 введем ф-ю Ляпунова:

$$V = \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2}, \quad \dot{V} = u_1 \cdot \lambda_1 u_1 + u_2 \cdot \lambda_2 u_2 = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 \leq 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2 < 0)$$

рассматривая пов-ти уровня $V = \text{const}$ $\rightarrow$ цилиндры ориентир.
 вдоль осей u_1 и u_2 проецируясь по ним строго сближаются.

Но здесь пов-ти уровня незамкнуты.
 В силу неравновесия (2) траект. м-ты (1) не имеют пов-ти
 уровня ф-ции V внутри и следовательно все
 траект. вне этой траект. асимптотически $t \rightarrow \infty$ приближ.
 к этой траект. (то есть сходятся к м-те $u_3 = 0$)
 ~ это равновесие называется седлом, ф-ция $\{u_3 = 0\}$ -
 назыв. неустойчивым многообразием седла (соф. E^s), а
 $\{u_1 = u_2 = 0\}$ ~ неуст. многообр. седла (E^u)

$$\Rightarrow \dim E^s = 2; \quad \dim E^u = 1$$

аналогично $u_2 > 0$ и $u_2 < 0$ ~ разноразмерное седло.

Все многообр. левостороннее от м-ты седла (1).
 Если выберем точку в $u_3 = c$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ при $t = 0$, при
 $t \rightarrow \infty$ точка уйдет в бесконечность, если же выберем в соф. ф-ции
 $t \rightarrow -\infty$ будет стремиться к соф. равновесия

Согл. равн. лежит как в уст. так и в неуст. многообразии.

2) Пусть $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2, \lambda_3 > 0$

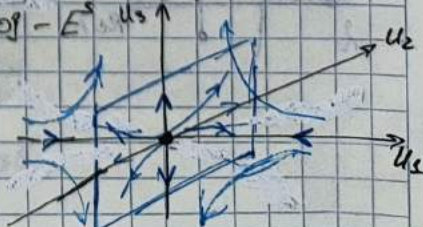
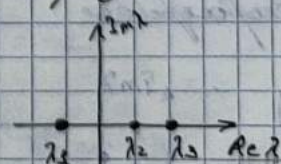
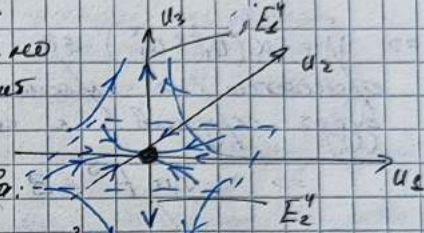
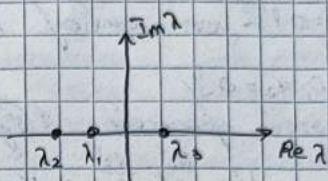
~ всё рассматривается аналогично
 т.к. $\lambda_2, \lambda_3 > 0 \rightarrow$ соф.-е многообразие $\{u_3 = 0\}$

одномерное многообразие задается

Аналогично строится унимодуль.

$$V = \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_3^2}{2}, \quad \{u_2 = u_3 = 0\} = 0$$

$$\Rightarrow \dim E^u = 2; \quad \dim E^s = 1$$



iii. Если корни сопряженных корней: в этом случае корни
 имеют вид: $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_1 - \beta u_2 \\ \dot{u}_2 = \beta u_1 + \alpha u_2 \\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3 \end{cases}, (3)$$

Пусть все корни имеют $\text{Re} < 0$
 Очевидно $u_3 = 0$ — тривиальное решение
 этого уравнения

$u_3 = 0$ — тривиальное решение

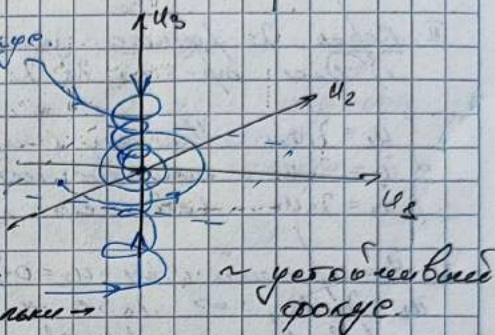
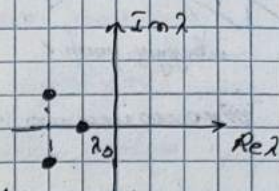
$$u_1 = 0, u_2 = 0$$

Все это приводит к вращению в плоскости
 функции:

$$V = \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2}$$

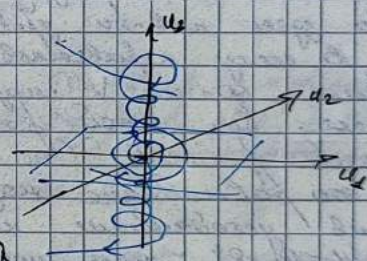
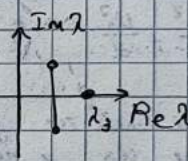
$\Rightarrow \dot{V} = \alpha(u_1^2 + u_2^2) < 0$ — все траектории
 стремятся к началу (т.е. спиралью —
 вокруг скручивая к себе, вращаясь)

$$\Rightarrow \dim E^s = 3, \dim E^u = 0$$

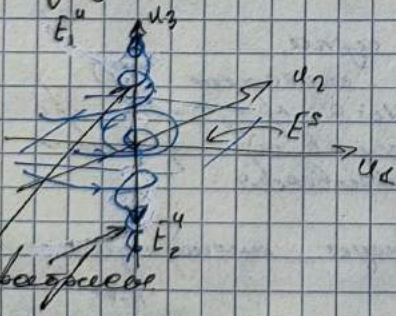
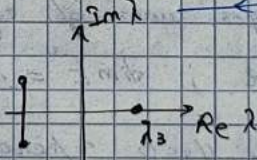


2) Пусть корни все являются
 — значит, что здесь будет
 неустойчивый фокус, просто движение
 стрелки в др. сторону в плоскости
 нулевой

неустойчивый
 фокус



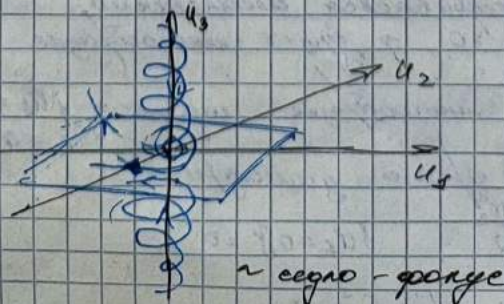
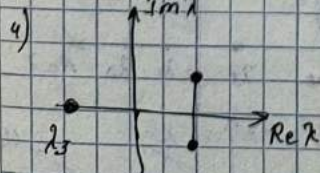
3) Пусть корни $\text{Re} < 0$
 — значит, что здесь будет



— седло-фокус.

Здесь два направления от u_3 —
 экспоненциальное, а также u_3 имеет
 экспон. все элементы.

$$\Rightarrow \dim E^u = 1; \dim E^s = 2$$



$$\dim E^s = 1$$

$$\dim E^u = 2$$

— седло-фокус

1. Второе условие линеаризации справедливо лишь в окр-ти соот. равновесия.

Предположим $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$, где $i=1, 2, 3$.

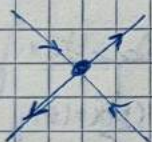
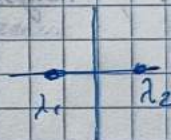
2. В нелинейных системах линии многообразия $\rightarrow$ это кривые. (не прямые, не плоск.) и некоторые сов-т.

Но если в соотв. между ними теорема (Бруилла - Хардиана). Если соот. равн. упрощает, то 3-мер. базисировать. тогда линейные кривые образуют поверхность. (таким образом, можно рассмотреть), что действительно которого кривая из окр-ти соот. равн. некая система превращается в фазовую из окрестности соот. равновесия линеаризованной системы с сохранением направления движения.

Справедливо утверждение окр-ти нелинейных систем качественно совпадает с тем как как окр-ти соот. равн. соотв. линеаризованной системы (если $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$)

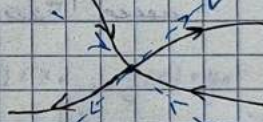
При этом различаются и устойчивое многообразие линеариз. и нелинейной систем совпадают. Однако инвариантное многообразие не совп. с многообразием линеаризов. системы, а лишь касается их в соот. равновесии (теорема Хартмана - Гробмана)

Пример: рассмотрим линеариз. двумерную систему



у линеариз. системы

$\Rightarrow$ мы утверждаем выше для нелиней. сист.



и они касаются (это касание кривые)

Пример: рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2 - z^2 \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = -2z \end{cases} \sim \text{ср. соот. равн. в } (0, 0, 0)$$

Линеаризуем (выкладки отменяются):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = -2$$

$\sim$ соот. равн. ср-но

$$E^s = \{x=0, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

В нелинейных системах добав. W

$$E^u = \{y=z=0, x \in \mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow W^u$ совп. с E^u

$$W^s = \{x = \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5}\} \sim \text{многообразие фазов.}$$

10/11/17

$$x - \frac{y^2}{5} - \frac{z^2}{5} = 0$$

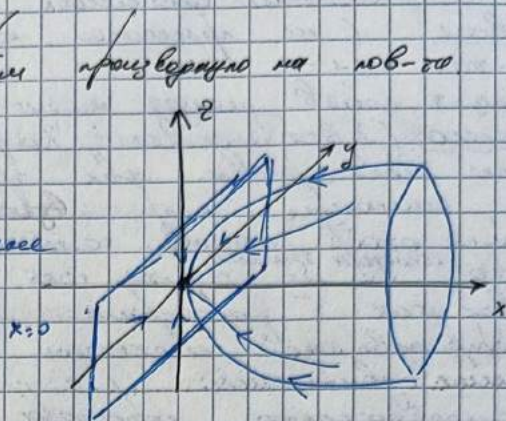
$$\dot{x} - \frac{2}{5}y \cdot \dot{y} - \frac{2}{5}z \cdot \dot{z} = 0$$

$$x - y^2 - z^2 + \frac{2}{5}y^2 + \frac{4z^2}{5} = 0 ?$$

Вместо $x = \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5}$ - берём производную по времени

$$\frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} - \frac{1}{5}y^2 - \frac{2z^2}{5} = 0$$

→ в крест. системе по крестам
будет эллипсоид



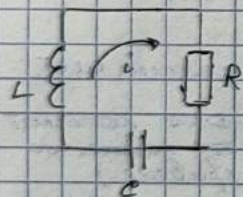
31.10.22.

Вихревой и карманный осциллятор

Осциллятор - простейшая дин-ма система с 2 нормальными
колебаниями, пр-вами. В простейшем виде можно
определить простейшие колеб. процессы

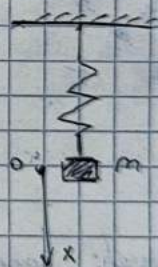
Круг, квадрат, пр-во с такими свойствами (напр.
электрические контуры, ядерные ёмкости и индуктивные
конт., купольные антенны, акустич. резонаторы.)

Динамика линейного осциллятора



~ простейший колеб. контур.

или механический аналог:



Рассмотрим колеб. контур (i - ток в контуре,
 q - заряд на конденсаторе.)

$$(1) U_L + U_R + U_C = 0, \text{ где } U_L = L \frac{di}{dt}, U_R = Ri, U_C = \frac{q}{C}$$

$i = \frac{dq}{dt}$ (2), всё представив получим:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (3) \quad \div L$$

Введём обозначения: $q = x$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dx}{dt} + \frac{x}{LC} = 0$$

$$\text{Введём: } 2\delta = \frac{R}{L}, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4)$$

δ - отвечает за потерю в контуре.

ω_0 - собственная частота осциллятора

Ур-е (4) ~ ур-е линейного осциллятора с диссипацией.

Гармонический осциллятор.

Предположим, что в зап. системе свобод. колебание энергии. Такие системы, где энергия сохраняется ~ консервативные.

$$\delta=0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{y} = -\omega_0^2 x \\ \dot{x} = y \end{cases} \quad (5) \quad \rightarrow \text{т. } O(0,0) - \text{с.р.}$$

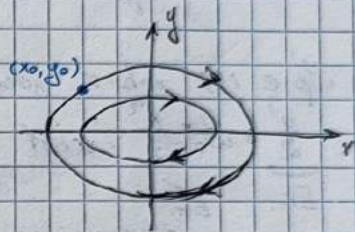
Найдем частоту характеристических показателей. (система уже линейная.)

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (6), \text{ но фаз-овую систему } \omega_0 > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \Rightarrow \text{т.к. нет вещ. чл.} \rightarrow \text{т.к. с.р.} - \text{центр.}$$

Ищем ур-я системы: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2 x}{y}$

$$\frac{y^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} = \text{const} \quad (7) \text{ ур-е эллипса.}$$



$y > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0 \Rightarrow x$ - растет $\rightarrow$ стрелки вправо

$y < 0 \Rightarrow \dot{x} < 0 \rightarrow x$ - уменьшается $\rightarrow$ стрелки влево.

Все процессы в таких ф-х процессах $\rightarrow$ периодические колебания.

Зная (x_0, y_0) произв. нач. условия.

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \\ y(t) = \dot{x}(t) = -C_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{cases} \quad (8)$$

Исп. нач. условия: $x(0) = x_0, y(0) = y_0$

$$x_0 = C_1, C_2 \omega_0 = y_0 \Rightarrow C_2 = \frac{y_0}{\omega_0}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{y_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ y(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + y_0 \cos(\omega_0 t) \end{cases} \quad (9)$$

условия периодичности $\begin{cases} x(T) = x_0 \\ y(T) = y_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_0 = x_0 \cos(\omega_0 T) + \frac{y_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) \\ y_0 = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 T) + y_0 \cos(\omega_0 T) \end{cases} \quad (10)$$

~ это система линейных уравн. ф-ий от $\cos(\omega_0 T)$ и $\sin(\omega_0 T)$, решим например методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & \frac{y_0}{\omega_0} \\ y_0 & -\omega_0 x_0 \end{vmatrix} = -\omega_0 x_0^2 - \frac{y_0^2}{\omega_0}, \dots \text{ранг не равен.}$$

$$\begin{cases} \cos(\omega_0 T) = 1 \\ \sin(\omega_0 T) = 0 \end{cases} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

→ все траектории имеют форму и тот же период совершения (период колебаний не зависит от нач. условий → свободные колебания.)

Рассежем сложное движение в каноническом виде:

$$a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} ; \quad \text{где } \varphi = \frac{b}{a} \quad \sim \text{используем.}$$

$$(11) \quad \begin{cases} x = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ y = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}, \quad \text{где } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{y_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \text{где } \varphi = \frac{\omega_0 x_0}{y_0}$$

Вид. (11) пока-т, что в нем консерв. осциллятор не имеет энергии.

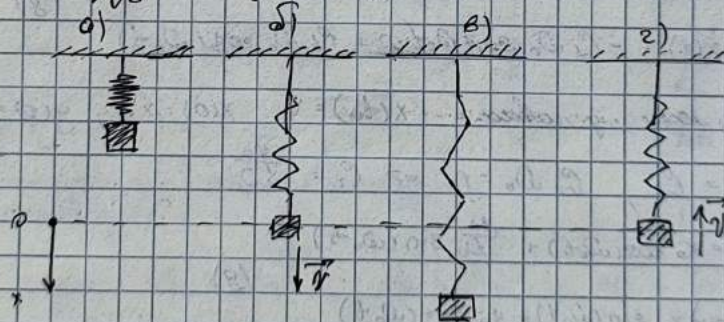
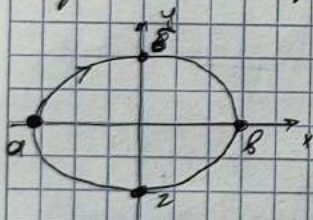
Зр-е (9) пока-т закон сохр-н энергии осциллятора.

$$\underbrace{\frac{y^2}{2}}_{E_k} + \underbrace{\omega_0^2 \frac{x^2}{2}}_{E_p} = \text{const}$$

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \\ E_p &= \frac{A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

E_k и E_p во времени осциллируют, но в сумме они постоянны.

Вернемся к физической задаче нарисованного груза для тар-х тарх.



Рассмотрим осциллятор при наличии трения.

В реальных системах всегда имеют сопротивление или диссипацию энергии. (трение, сопротивление, и т.д., особенно в жидкостях.)

$$\begin{cases} \ddot{x} = y \\ \dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим случай $\delta > 0$ (энергия не будет сохр-ся).

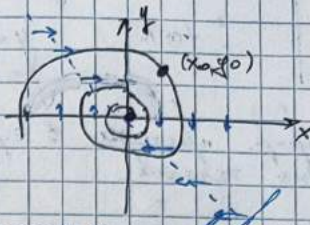
$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (14)$$

$$\delta > 0 : 1) \delta^2 - \omega_0^2 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2} \rightarrow \text{равно. ус. колеб.}$$

для краевой верши $\omega = (\omega^2 - \delta^2)^{1/2}$

Уравнение - кривая, которую траектории пересекают под углом и тем же углом в точке пересечения.



$$y=0 \rightarrow \dot{x}=0, \dot{y} = -\omega^2 x$$

пресека. траекторию так, что касательная - вертикальная прямая вертикальных касательных.

Угол наклона горизонт. касательных: $\dot{y}=0 \rightarrow y = -\frac{\omega^2}{2\delta} x$
траект. пересека. траекторию так, чтоб были горизонтальными.

Запишем ур-е нач. усл. для колебл: $x(0) = x_0, y(0) = y_0,$

- найдем, получаем:

$$\begin{cases} x = e^{-\delta t} \left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{(y_0 + \delta x_0)}{\omega} \sin(\omega t) \right] \\ y = e^{-\delta t} \left[y_0 \cos(\omega t) - \frac{[(\omega^2 + \delta^2)x_0 + \delta y_0]}{\omega} \sin(\omega t) \right] \end{cases} \quad (15)$$

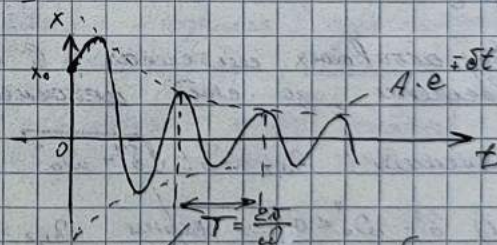
введ. ф-лу безразмерного времени. введем ф-лу:

$$\begin{cases} x = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi), \\ y = \sqrt{\delta^2 + \omega^2} A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi + \theta) \end{cases} \quad \text{где } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(y_0 + \delta x_0)^2}{\omega^2}}$$

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{y_0 + \delta x_0}{\omega x_0}, \\ \tan \theta &= -\frac{\omega}{\delta} \end{aligned}$$

Осциллографно-задающий процесс.

Наблюдая осциллограмму:



Введем хар-ку такого процесса - логарифмический декремент затухания (δ)
Рассмотрим два соседних максимума.

$$x(t_1) = A e^{-\delta t_1}$$

$$x(t_2) = A e^{-\delta t_2}, \quad t_2 > t_1$$

$$\Rightarrow \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = e^{\delta(t_2 - t_1)} = e^{\delta T} = e^{\delta \frac{2\pi}{\omega}}$$

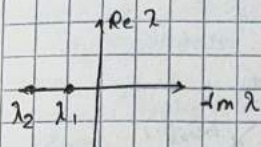
$$\delta = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \delta \delta = \frac{2\pi}{\omega} \delta$$

Введенный таким образом декремент затухания для линейных систем, а также того в случае когда действует нелинейный закон демпфирования.

хар-т равновесия ампл. колебаний во времени, т.е. число.

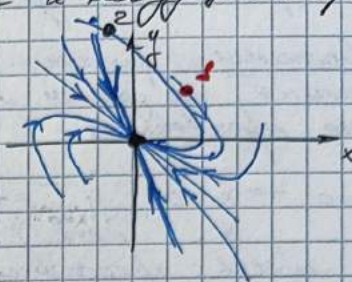
δ равно числу колебаний после которого ампл. колебл. уменьш. в e раз.

2) $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ $\rightarrow$ устойчивый узел.

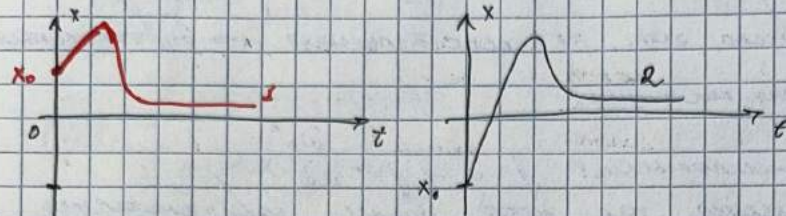


Можно вывести верные и неверные напр-я.

$y = \lambda_1 x$ - вер. н.р.
 $y = \lambda_2 x$ - невер.



хар-р. прихода в с.р. разный в разных точках



0.11.22.

Риссовский осциллятор с
"трено-ли" затуханием.

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2\delta y \end{cases} \quad (1)$

случай $\delta < 0$ Записываем полную энергию.

$E = \frac{y^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2}$

$\frac{dE}{dt} = y \cdot \dot{y} + \omega_0^2 x \cdot \dot{x} = -2\delta y^2 - \omega_0^2 x y + \omega_0^2 x y = -2\delta y^2$

когда $y \neq 0 \rightarrow \frac{dE}{dt} < 0$ - факторич.
 будет протекать в сторону возр-я

С фаз-ой точки время - это линия абсциссы.

В активном режиме, в котором переходный процесс длится во времени, за счёт нестационарности.

Вспомогат.: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

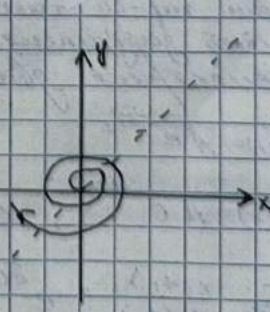
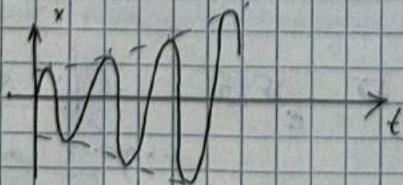
1) $\delta^2 - \omega_0^2 < 0 \rightarrow$ корни $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \rightarrow$ мнимый полюс

2) $\delta^2 - \omega_0^2 > 0 \rightarrow$ устойчивый узел.

$2\delta y = -\omega_0^2 x$

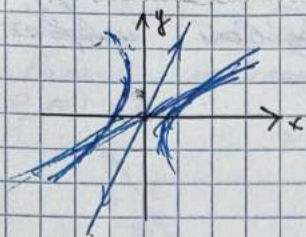
$y = -\frac{\omega_0^2 x}{2\delta} \rightarrow$ с лине. наклоном

Осциллограмма:



Верхний и нижний напр-я $\rightarrow$ процесс
 процесс - периодический.

Также вводится хар-кт: логарифмич. амплитуд. нарастания



$$f_c = -d.$$

Динамика целесобного осциллятора.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 y - f(x) \end{cases} \quad (2) \text{ обобщение линейного осциллятора, где } f(x) - \text{искажает } \varphi - x.$$

1) Канонический импульс с консервативной канонической осцилляцией.
 $\ddot{x} + f(x) = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) \end{cases} \quad (3) \text{ Каноническое уравнение, если считать } (3) \text{ с } \text{коэф. перемещения, полная энергия} - E.$$

$$t = t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$$

$$y dy = -f(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = - \int_{x_0}^x f(x) dx = - \int_{x_0}^x f(x) dx - \int_{x_0}^x f(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x) dx = \frac{y_0^2}{2} + \underbrace{\int_0^{x_0} f(x) dx}_{const} = h$$

$$\Rightarrow \text{Решение в неявном виде: } \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x) dx = h$$

$$E_n = \frac{y^2}{2}, \quad E_n = \int_0^x f(x) dx, \quad \text{если } h \text{ будет такое, что решение не } \rightarrow \text{зависит энергии, при котором не имеет колебаний.}$$

1) Заметим, что все соот. равн. имеют общ. реш. при гранич. $y=0$, а кан. во $f(x)=0$. $\Rightarrow$ может быть много с.р.

2) Пред-м по $x \rightarrow E_n$

$$\frac{dE_n}{dx} = f(x) \Rightarrow E_n(x) \text{ имеет экстремумы, коэф. которых совп. с коэф. состояния равновесия.}$$

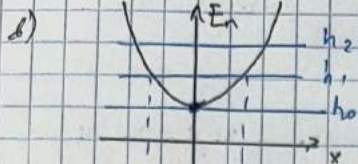
3) $y \rightarrow -y$ много не меняется (решение, фазовый портрет симметричен относительно оси $y=0$).

$$4) y = \sqrt{2(h - E_n(x))} \Rightarrow h - E_n(x) \geq 0 \Rightarrow E_n(x) \leq h$$

$$5) \frac{dy}{dx} = \sqrt{2(h - E_n(x))}$$

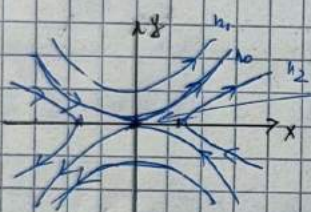
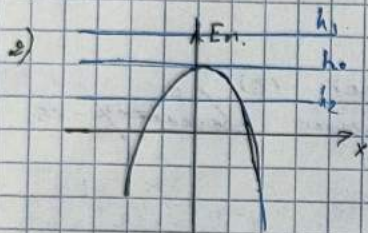
$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} < 0, & \frac{dE_n(x)}{dx} > 0 \\ > 0, & \frac{dE_n(x)}{dx} < 0 \end{cases}$$

Позволяет, зная $E_n(x)$ → построить фазовый портрет

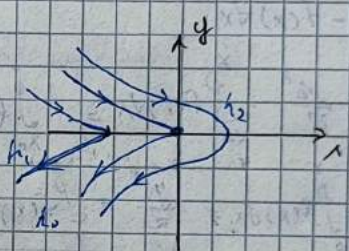
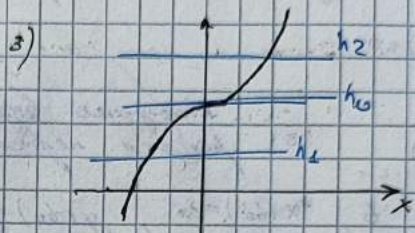


~ строим фазовый портрет из уравн

«энерг. Если известна энергия → можно найти другие энергии. → можно приближать другие энергии.



седло



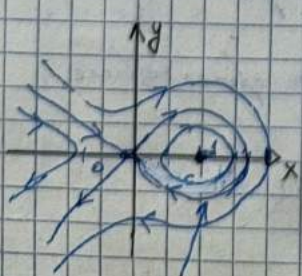
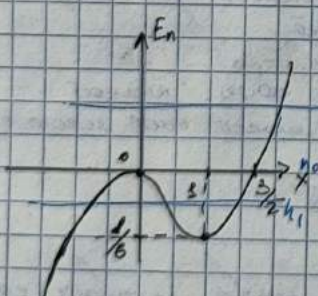
Пример: $\ddot{x} + x^2 - x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^2 + x \quad (*) \end{aligned}$$

$$E_n = \int_0^x f(x) dx + x = \int_0^x (x^2 - x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

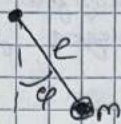
$$E_n(0) = 0, \quad E_n\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\frac{dE}{dx} = x^2 - x = x(x - 1)$$



полностью фазовый портрет (дважды отмечены в фазовом портрете.)

Длина нити l постоянна.
 Расс-м движение шарика массы m в поле тяжести g .
 (E, m) шарик отклоняет от вертикали.



$$J = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = \sum m_k \dot{r}_k^2, \quad J - \text{кинетическая энергия шара}$$

$$J = m l^2 \dot{\varphi}^2, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_{\text{тан}}}{l}$$

m_k - масса шарика, r_k - радиус-вектор шарика, (+ сила тяжести $\sim r$)
 Моменты сил тяжести вычисл. от н. г. шарика.

$$M_1 = -mgl \sin \varphi, \quad M_2 = -\kappa l^2 \ddot{\varphi}$$

8.11.22. Представим в основном др-е поворота:

$$m l^2 \frac{1}{l^2} \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - \kappa l^2 \frac{1}{l^2} \ddot{\varphi} \quad (5)$$

$$\frac{m l^2}{m l^2} \frac{1}{l^2} \ddot{\varphi} + \sin \varphi + \frac{\kappa l^2}{m l^2} \frac{1}{l^2} \ddot{\varphi} = 0$$

сделаем замену времени, так, что

$$\frac{1}{l^2} \ddot{\varphi} = \frac{1}{l^2} \ddot{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{l^2} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} \ddot{\varphi}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} t \quad \Leftarrow$$

$$\text{где } \frac{1}{l^2} \ddot{\varphi} = \frac{1}{l^2} \ddot{\varphi}$$

~ просто масштабировали время.

обозначим $\mu = \frac{\kappa l}{m g} \cdot \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{l^2} \ddot{\varphi}$, дальше ... обознач. др-е по τ .

$$\ddot{\varphi} + \sin \varphi + \mu \ddot{\varphi} = 0 \quad (6) \rightarrow \mu - \text{хар-т жесткости}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y \\ \dot{y} = -\sin \varphi - \mu y \end{cases} \quad (7)$$

~ изобразим сист. 7.

Размер др-е пр-ва $\rightarrow 2$

и поскольку ось $\sin \varphi \rightarrow$ циклич., то можно разбить систему в циклический др-е пр-ва.

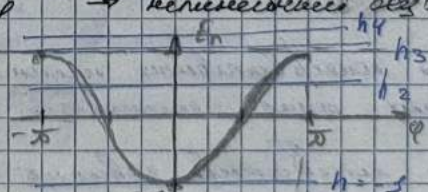
$$G = S^1 \times R$$

обозн. открытости.

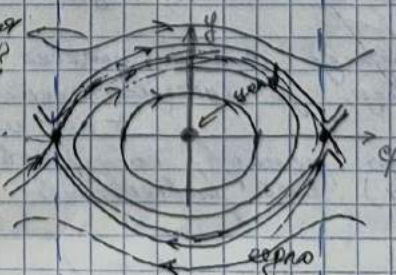
1) Пусть $\mu = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = y \\ \dot{y} = -\sin \varphi \end{cases} \rightarrow$ нелинейный осциллятор.

$$E_0(\varphi) = -\cos \varphi$$

при $h < -1$ нет таких действительных значений φ .

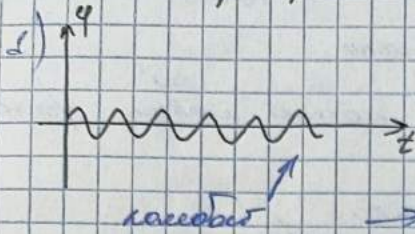


Заменим систему координат и рассмотрим движение шарика в поле тяжести. Около центра шарика замедл. движения, т.е. около центра замедл. движения шарика. Около центра шарика замедл. движения шарика. Около центра шарика замедл. движения шарика.

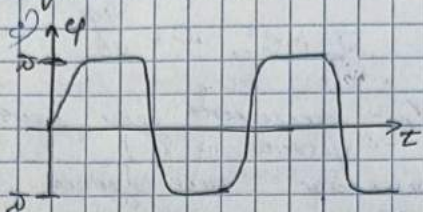


Нарисуем поле различных проекций

Возмеш $x(t)$ и $y(t)$ введем сост. равн.
 $\rightarrow \sin \varphi \approx \varphi \rightarrow$ перейдем в лев. ~~гашмон.~~ осциллятор

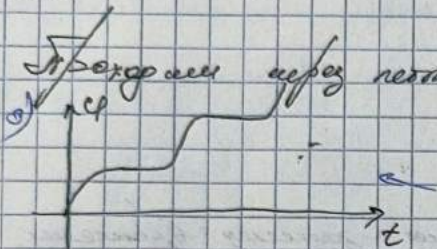


Возмилу факторило Бидуно 1.
неде (окр. сраа.) ф-замедл. 4
сидел.



Если будешь подходить к делу, → успешно будет всё идти.

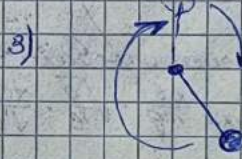
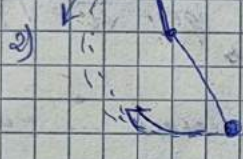
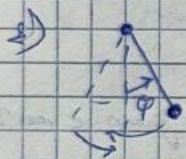
активность префронтальной коры.



но возмем чл. 212-е и като
а крива. рече прелиста. ср.

Врачу

⇒ Внутр. левель → расходительное движение
Вне левель → восстановительное



Вуцнм поверенм маломкма прч Галеванам н.

$$\frac{y^2}{2} - \varepsilon_{\text{всп}} = h. \quad \sim \text{расчет в расходе в невязке бере}$$

$y > 0$ (всі симетр.)

$$y = \sqrt{2(h + \cos \varphi)} = \sqrt{2h \left(1 + \frac{1}{h} \cdot \cos \varphi\right)} \approx \sqrt{2h}$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\gamma} \Rightarrow \dot{\varphi} \approx \sqrt{2\epsilon} h \Rightarrow \varphi(t) = \sqrt{2\epsilon} h \cdot t + \varphi_0, \text{ for } h \gg 1.$$

Свойства консервативных нелинейных осцилляторов:

1. Параметры среды: температура, влажность, свет, питание, кислород, углекислый газ.
2. Период калебания зависит от начальных условий, т.е. формы, колич., качеств. среды, кислотности.
3. Формы перехода могут измен. в широких пределах, (от высшейшей до низшейшей.)
4. Возможно одно существование нескольких уст. (по Мелникову) состояний (т.е. возможна мультистаб. бистаб.).
5. Разделение переход происходит на зудли с прич. разл. св-в ваших суд. с апаратурами судно

Нелинейный осциллятор с диссипацией

2) $\mu \neq 0, \mu > 0$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y \\ \dot{y} = -\sin \varphi - \mu y \end{cases}$$

Запишем, используя первое уравнение осциллятора

$$E = \frac{y^2}{2} + \int f(\varphi) d\varphi$$

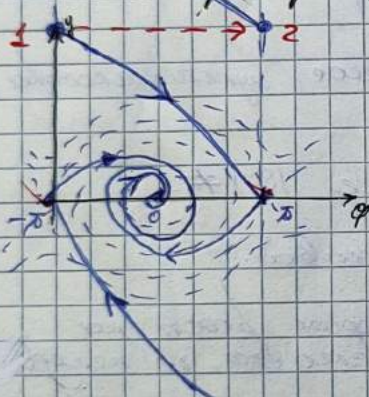
Рассмотрим более общую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\mu y - f(x) \end{cases} \quad (8) \quad \Rightarrow E = \frac{y^2}{2} + \int f(x) dx$$

$$\frac{dE}{dt} = y \cdot \dot{y} + f(x) \cdot \dot{x} = -\mu y^2 - f(x)y + f(x)y = -\mu y^2 \leq 0$$

$\Rightarrow$ энергия убывает, все стремится к сост. равн.

В качестве примера рассмотрим систему (7)



Найдем линии уровня полной энергии $E(\varphi) = \text{const} \rightarrow$ будут совп. с линиями консерв. движения, но это не траектории. $\Rightarrow$ в данном случае это портр. ф-я Пуанкаре.

Сост. равн. такое же, как при $\mu=0 \Rightarrow$ в итоге все траектории притягиваются к сост. равн.

т.е. $\rightarrow$ в т.р. (или т.р. $\rightarrow$ в т.л.) т.е. у нас всё в цилиндре.

$\Rightarrow$ Глобальная асимптотическая устойчивость

16)

Основная св-ва динамич. отображений

Векторизация времени $\rightarrow$ дискр. времени

Непрерывные точки переходят в дискр. отображения

(2) $\bar{X} = F(x), x \in \mathbb{R}^n, F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

где $\bar{X} \equiv x(n+1), n \in \mathbb{Z} \rightarrow$ кал. временная дискретность
 $x = x(n) \rightarrow$ заданные нач. точки

$$x(0) \rightarrow x(1) \rightarrow x(2)$$

полу-траектория (т.е. часть траектории)

Отображение $x(0) = x_0, F^n x_0, F^{n+1} x_0, \dots$, а полная траектория

Непрерывная точка: $x = F(x) \quad (2)$

Здесь можно решить сист. (2) $\rightarrow x = x^*$

Оказ. для зад. типа ср. дифференциал в функции рассужд-я
также вводится понятие дифференциала по линейному
(только здесь двукр. вместо "линейн. функц."

И тем. метод минимизации:

$$x = x^* + \xi(n)$$

$$x^* + \xi = F(x^* + \xi) = F(x^*) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x^*} \cdot \xi + \dots$$

в силу ур-я (2)

$$\Rightarrow \xi = A\xi \quad (3), \quad \text{где } A = [m \times m], \quad a_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{x=x^*}$$

Найдём решение сист. (3) в виде:

$$\xi = C(S)^n, \quad \text{где } C - \text{матрица постр. вектор}$$

$\rightarrow$ определяем и подставляем значение
для ур-ий, под. имеет нестрем. решение
для

$$\det(A - SE) = 0 \quad (5),$$

где S - число, минимизирующее функцию потерь,
 $S_i, i=1, 2, \dots, m$

Непр-е. точка будет грубой если все $|S_i| \neq 1$

Если $|S_i| < 1$ - будет грубой и устойчивой.

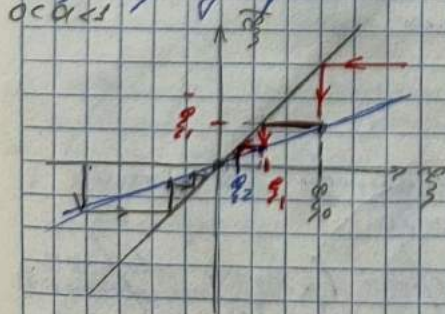
Если среди S_i найдётся хотя бы одно $|S_i| > 1$ - неустойчивая.
Если $|S_i| = 1$ - неустойчивая.

Рассмотрим простейшее, линейное уравн-е:

$$\xi = a\xi, \quad a \neq 0$$

$$C(S)^n = a(S)^n C \rightarrow S = a$$

Будем рассматривать векторное по-то. (не производя!)
 ξ и ξ - векторы



1. Найдем диссипацию

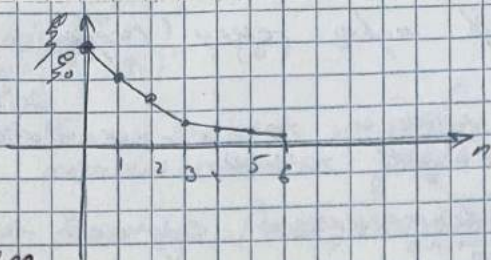
2. Зададим по-то минимизацию
 $F = a\xi$

3. Берём любое н.у.

! Ф. и идеал. пересека с диссип.
вектора в минимизирующей точке.

4. Восстановим вектор в ξ до перес. в $F \rightarrow$
и ξ до пер. с диссип. и составим перпенд. $\rightarrow \xi_0$.
и восстановим вектор.

Срещи с 0 асимптотично.



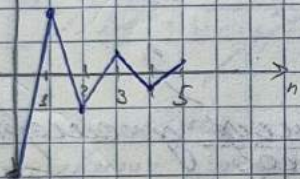
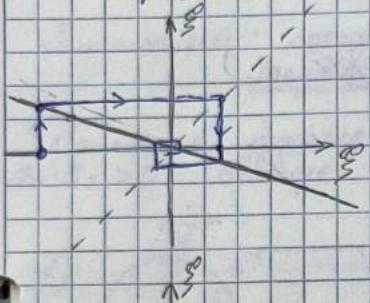
14.11.22.

$$\bar{x} = a x (1)$$

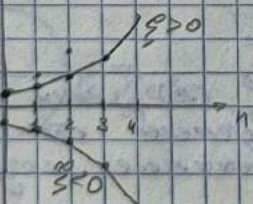
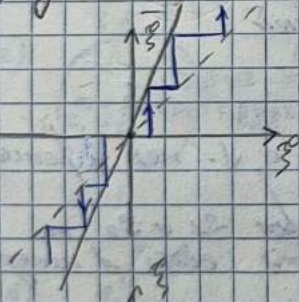
$$x \sim (a)^n$$

1) Теперь рассмотрим случай $-1 < a < 0$

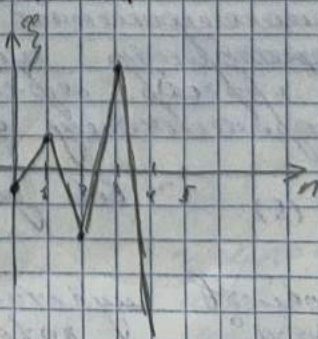
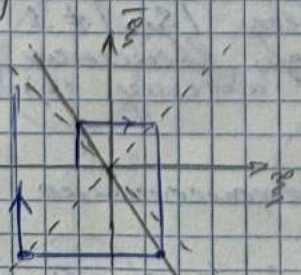
Функция послед. $\rightarrow$ функция с отриц. наклоном.
 $\rightarrow$ точка устойчивости



2) Пусть $a > 1$. Тогда где x -я послед. пересекается. Биссектр. $\rightarrow$ там неподвижная точка
 $\rightarrow$ точка неустойчивости



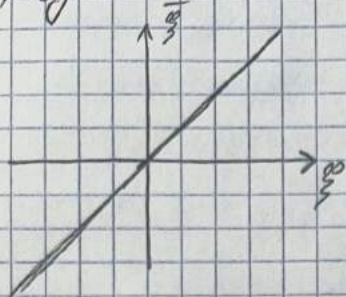
3) Пусть $a < -1$. $\Rightarrow$ точка неустойчивости



прямая биссектр.

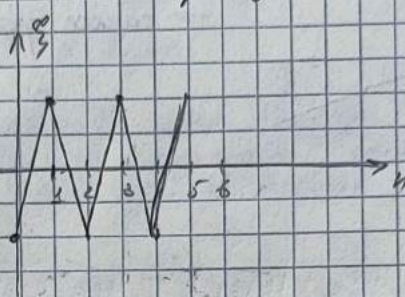
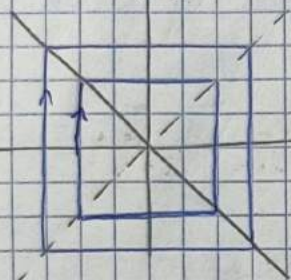
Отображение $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ тожд. пер. точку (через отображение)?

4) Пусть $\alpha = 1$. $\rightarrow \bar{z} = z$ $\rightarrow$ любая точка на биссектрисе или перпенд. прямой



Это вырожденный случай $\rightarrow$ линейно

5) Пусть $\alpha = -1$ $\rightarrow$ преобразование (сфидра 2.)



$\rightarrow$ 3 линейных функционалов

(7)

Классификация пер. точек линейных функционалов

Решим-ли:

$$\begin{cases} \bar{z}_1 = a z_1 + b z_2 \\ \bar{z}_2 = c z_1 + d z_2 \end{cases} \quad (2), \text{ где } a, b, c, d - \text{ нек. параметры}$$

будем предполагать, что мультипликаторы S_1 и S_2 не равны. (как преобраз. мультипликаторов $\Rightarrow$ есть 1 пер. точка в кан. координатах $z_1 = z_2 = 0$)

(3) $\begin{cases} \bar{z}_1 = C_1(z) \\ \bar{z}_2 = C_2(z) \end{cases}$ $\rightarrow$ будем искать решение. порождаем (3) в (2) мы получим сист. линей. фк. уравнений от z_1 и z_2 . для линей. нетрив. решения, дискр. $\Delta = 0$

$$\Rightarrow z^2 - (a+d)z + (ad-bc) = 0 \quad (4)$$

Проверим классификацию при условии $|S_{1,2}| \neq 1$. Попробуем аннотировать систему с нек. значением ϵ при нек. пер. перекрещивающ. множестве (2) можно привести к нормальному виду:

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = S_1 u_1 \\ \bar{u}_2 = S_2 u_2 \end{cases} \quad (5) \quad \sim \text{ все сводится к каноническому}$$

Суммой действий мультипликаторов $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$, и тогда решение также в следующем виде:

$$\begin{cases} A_1 u = u_1 (S_1)^n \\ u_2 = A_2 (S_2)^n \end{cases} \quad (6)$$

св. ба.

1. Если $|S_{1,2}| < 1$, то предел $\lim_{n \rightarrow \infty} u_i = 0$ и эта точка является асимптотическим узлом кривой. ($i=1,2$)

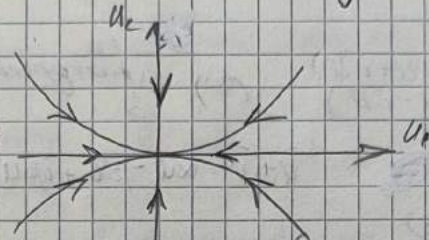
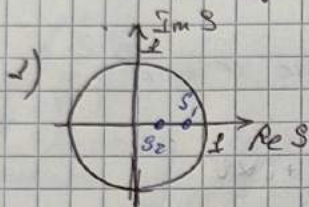
2. Если $|S_{1,2}| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_i| = \infty$ — точка неустойчивости

3. Один из корней $|S_1| < 1$, а другой $|S_2| > 1$, тогда точка будет седловой.

(S_1, S_2) — плоскость.

Замечание: порядок, связ. с поряд. уравнениями радиуса распределением!

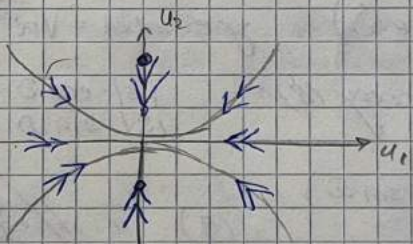
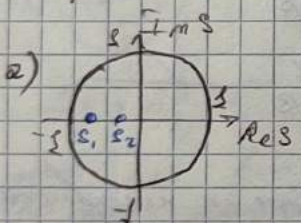
Получим бифуркацию рассейте параметризацию при упр. $S_1, S_2 > 0$ (всегда только это первый корень равен 1).



Корни $u_1 = 0$, тогда $u_2 = 0$ и система имеет бифуркацию в точке.

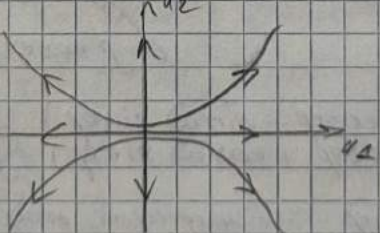
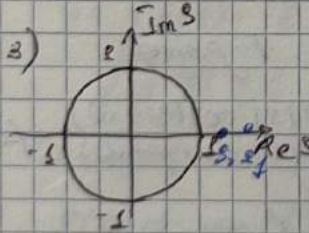
~ упр. узел.

срешко. — упр. узел — фазовая плоскость
детальнее фазовый портрет — фазовая плоскость

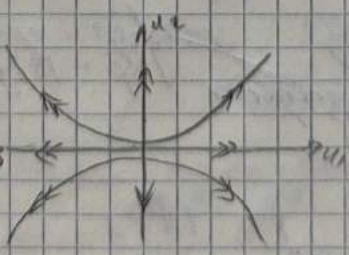
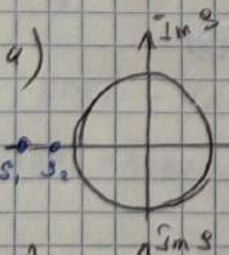


~ упр. узел.

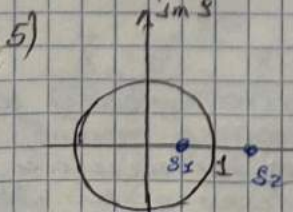
↓ указывает фазовую



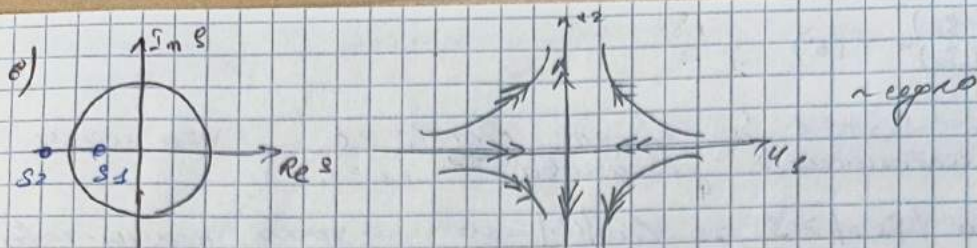
~ неуст. узел.



~ неуст. узел.



~ седло.
 $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$ сеп.
сеп. седло



классифик. корней. точек в
единице л.с. мультипликаторов (18)

Здесь $s_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Решения (5) сов. сопр. , но u_1 и u_2 тоже сопр. сопр.

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = s_1 u_1 \\ \bar{u}_2 = s_2 u_2 \end{cases} \quad (5) \quad \leftarrow \quad \begin{cases} u_1 = \alpha + i\beta \\ u_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{u} + i\bar{v} = (\alpha + i\beta)(u + i\bar{v}) \\ \bar{u} - i\bar{v} = (\alpha - i\beta)(u - i\bar{v}) \end{cases} \quad (4) \quad \text{переходим } \bar{u} \text{ и } \bar{v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{u} = \alpha u - \beta \bar{v} \\ \bar{v} = \beta u + \alpha \bar{v} \end{cases} \quad (8) \quad u + i\bar{v} = \alpha u - \beta \bar{v} + i\beta u + i\alpha \bar{v}$$

Запишем мультипл. s_1 и s_2 в тригонометр. виде:

$$s_{1,2} = |s| \cdot (\cos \omega \pm i \sin \omega), \quad \text{где } |s| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

представим в системе (8) $\leftarrow \begin{cases} |s| \cdot \cos \omega = \alpha \\ |s| \cdot \sin \omega = \beta \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{u} = |s| \cdot (\cos \omega - \sin \omega) \\ \bar{v} = |s| \cdot (\sin \omega + \cos \omega) \end{cases} \quad (9) \quad \text{а перейдем к полярным координатам}$$

$$u = \rho \cos \varphi, \quad \bar{v} = \rho \sin \varphi$$

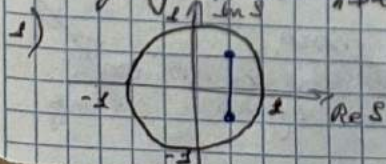
$$\Rightarrow \begin{cases} \rho \cos \varphi = |s| \rho (\cos \omega \cdot \cos \varphi + \sin \omega \sin \varphi) = \rho |s| \cos(\varphi + \omega) \\ \rho \sin \varphi = |s| \rho (\sin \omega \cos \varphi + \cos \omega \sin \varphi) = \rho |s| \sin(\varphi + \omega) \end{cases} \quad (10)$$

можно возложить $\bar{\rho}$ и $\bar{\varphi} \rightarrow$ абсолютное значение $\bar{\rho}$ и $\bar{\varphi}$ л.с. л.

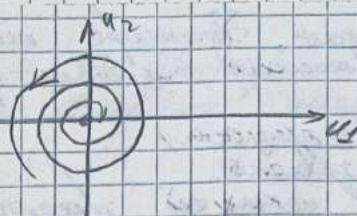
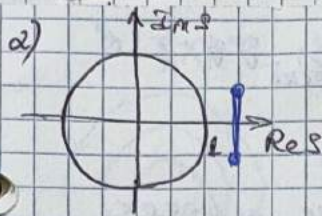
$$\text{где: } \arg \bar{\varphi} = \arg(\varphi + \omega) \Rightarrow \begin{cases} \bar{\varphi} = \varphi + \omega \\ \bar{\rho} = |s| \rho \end{cases} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho(n) = \omega n + \rho_0 \\ \rho(n) = \rho_0 |s|^n \end{cases}$$

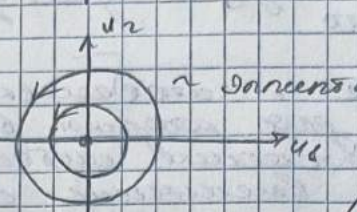
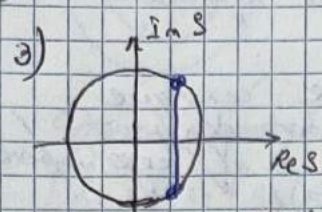
Затем проверим: $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = \begin{cases} 0, & |s| < 1 \\ +\infty, & |s| > 1 \end{cases}$



$\sim$ устойчивый диск
(но не граница)
но на самой же
границе, а не внутри



~ нуль фокус.



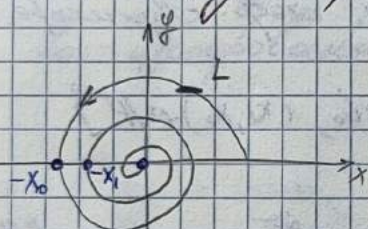
~ эллипс. нуль точки.

Видно, что системы с крив. функцией могут порождать
мел. с релакс. временем. (обобщения Пуанкаре)

Рассмотрим обобщения Пуанкаре (18)

$$\begin{cases} \dot{x} = f \\ \dot{y} = -\alpha y - \omega^2 x \end{cases} \quad (12) \quad \text{— нел. осцил. с релаксацией.}$$

Рассм. случай $\delta > 0, \omega^2 > \delta^2 \rightarrow$ не фазовой
м-то $\rightarrow$ уел. фокус



В рассматриваемом случае

$$N = \{y=0, x < 0\}$$

Можно ввести отобр. связ. точки
на этой кривой с фокусом

$$\omega = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

пред. при $t=0: y=0; x=-x_0 \rightarrow$ нулевое состояние системы
со спец. точкой.

$$\begin{aligned} x(t) &= -e^{-\delta t} x_0 \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \\ y(t) &= e^{-\delta t} x_0 \left(\omega + \omega' \right) \sin \omega t \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим через τ время перемещ. от $-x_0$ к $-x_\tau$

$$y(\tau) = 0, \quad x(\tau) = -x_\tau \Rightarrow \sin \omega \tau = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} \text{ и подставим в } x(t) \text{ — получим (13)}$$

$$x(\tau) = -x_\tau = -e^{-\frac{\delta 2\pi}{\omega}} x_0$$

(14) $\Rightarrow x_\tau = e^{-\frac{\delta 2\pi}{\omega}} x_0$, т.к. x_0 выбирается произвольн., то
пр-е 14 и сразу получим отобр.

$$\bar{x} = e^{-\frac{\delta 2\pi}{\omega}} x \sim \text{отображ. Пуанкаре}$$

это отображение возм. систем Пуанкаре
 $S = e^{-\frac{\delta 2\pi}{\omega}}$ — мультипликатор.

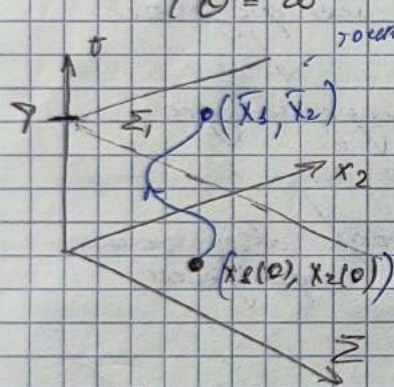
Знаем, что алгебра Пуанкаре может быть введена. Ре абз. траект., м.б. и фазов.

- 1) Уровн. / условий (связей.)
- 2) Возбуждаемого траект.
- 3) Во всех точках соседней траектории фазов.
- 4) ее трансверсальности

След-е логические и необходимые условия. Это логич. условия, для которых всегда след-е сел. Пуанкаре невозможности совести с период. фазов. кривою (с период. внешним возд.).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad \sim f_1, f_2 - \text{пер.од. ф.м. в } \overline{D} = \overline{D} \times \overline{D}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, \frac{0}{\omega}) \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, \frac{0}{\omega}) \\ \dot{0} = \omega \end{cases} \quad \sim \text{увел. системы 3-го} \\ \text{пор-ка, которую переопределяет} \end{aligned}$$



точки не совп.

траектория период. окол. Пуанкаре

$$\Sigma_0 = \{t=t_0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

через период

$$\Sigma_1 = \{t=t_0 + \frac{2\pi}{\omega}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

След. Пуанкаре $P: \Sigma \rightarrow \Sigma_1$ (необходима соседняя)

21.11.22.

(25) Устойчивое цикло на фазовой

плоскости.

~ это состояние равновесия. (в реальн. системе это означает неустойчивость параметров во времени.)

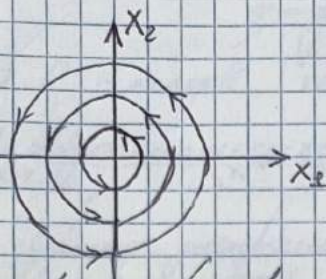
Рассм-м произвольную систему на фазовой м-те:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \quad (2)$$

Ор. Устойчивая траектория - замкнут. фаз. кр. траектория период. окол. если существует фаз. кривая конформизм. окол. этой траектории, внутри которой нет других траекторий.

Например: $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (2) \quad \sim \text{прямая разделение}$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = C = \text{const}$$



- эти траектории не изолированы.
в окр-ти могут быть траектории.

Первый интеграл:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} \quad (3)$$

переходим к полярным коор.
 $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$

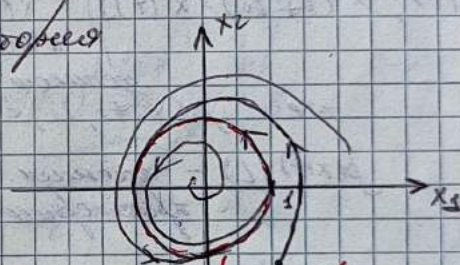
$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = -r \sin \varphi + r \cos \varphi (1 - r^2) \\ \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = r \cos \varphi + r \sin \varphi (1 - r^2) \end{cases} \quad \begin{cases} \cdot \cos \varphi + \\ \cdot \sin \varphi + \end{cases} \begin{cases} -\sin \varphi + \\ \cos \varphi + \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ r \dot{\varphi} = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (4)$$

$\Rightarrow \varphi(t) = t + \varphi_0$ по элементу поляр. коор. $r \geq 0$



до - изолированная траектория



до - предельный цикл

Опр. Предельный цикл есть замкнутая изолир. траектория.

Выберем нач. точку: $t = t_0, \varphi(t_0) = 0$

$$\Rightarrow h_0 = \{x_1 = \cos(t - t_0), x_2 = \sin(t - t_0)\}$$

Запишем предельный цикл в общем виде для системы (1):

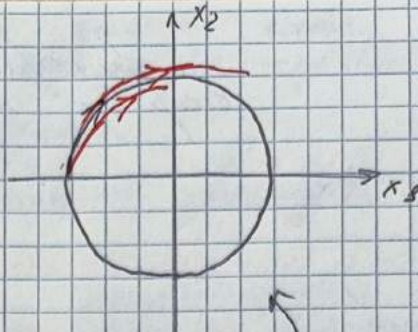
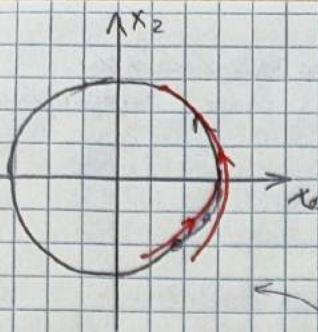
$$h_0 = \{x_1 = x_1^*(t), x_2 = x_2^*(t)\}, \text{ где } x_i^*(t + T_0) = x_i^*(t), i = 1, 2.$$

$$T_0 > 0$$

Вид предельного цикла зависит от параметров системы.

Устойчивый и неустойчивый предельные циклы.

Предположим, что у нас равновес. м. то все предельные циклы. В малой окр-ти пред. цикла все траект. будут притяг. к пред. циклу.



Покажется, что один из них и другой нет. Но! Движения неизоформны (следствие нелинейности). Выбираем точку с тем самым временем, который разное время для них нужно пройти своей орб. устойчивости (сравнительно) (по закону Ньютона, кажется неуж, но по законам этим орб. кинематика)

19) Фазовая устойчивость:

$$x = F(x), x \in \mathbb{R}^n$$

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$L = \{x = x^*(t), x^*(t_0 + T_0) = x^*(t_0)\} \quad x(t_0) = t_0 \leq t \leq t_0 + T_0, \text{ для которых } \|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \delta, \text{ в фазовом пространстве}$$

т.е. $\rho(x(t), L) < \varepsilon$ для $t \geq t_0$, где

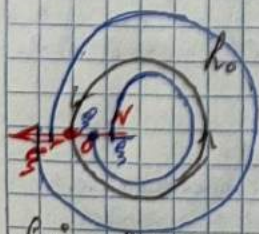
$\rho(x(t), L)$ - миним. евклидово расстояние от $x(t)$ до траектории L :

$$\rho(x(t)) = \inf_L \|x(t) - L\|$$

Более того, если при этом расстояние $\rho(x(t), L) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то говорят об асимптотической орбитальной устойчивости.

20) Характеристики предельных циклов на фазовой плоскости.

Пусть это произвольный предельный цикл на фазовой плоскости.



Рассматривая точку, проводим касательную к ней перпенд. век. раскл. в окр-ти пред. цикла. Вспомогат. пред. $\vec{F}$ с касательн. касат. в точке пересечения.

Какая картина получается.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \quad (2)$$

За заданное время T_0 провед. спаять эту траекторию (N - заданная циклопара).

По теореме о крив. касательн. раскл. существует траектория близкая к L . Говорят, что (x) инст. токеническое отображение

$\bar{g} = g(\xi)$, g - нек. гладкая ф-я

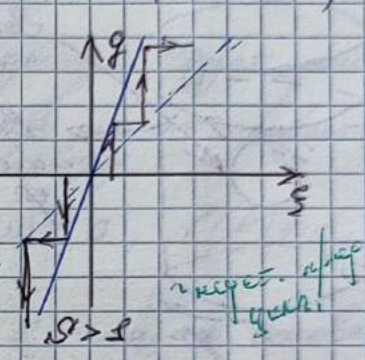
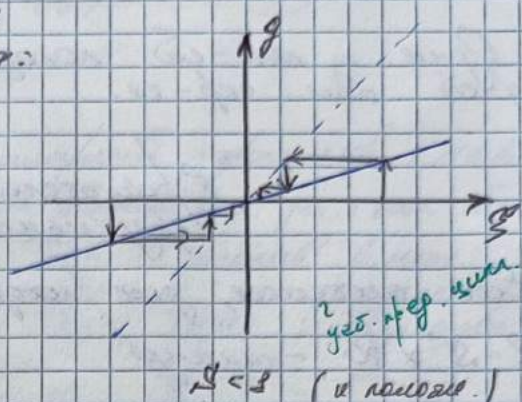
т.о. $\sim$ крив. тогда $0 = g(0)$

1) Мультпликатор $S = g'_*(0)$ (произв. в кривизнах)

Сформулируем задачу:
 Будет ли $S < 0$?



предел. фазовый
 $\Rightarrow$ на п-ти $S > 0$



Мультпликатор можно ввести по-другому, если известно ф-е

$$S = \exp \int_0^1 \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{x=x^*(t)} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{x=x^*(t)} \right] dt$$

а) Характеристический показатель

линеаризуем относительно вектору (ξ) по предельным

$x_i = x_i^* + \eta_i(t)$, $i=1,2$ — линейная сист. с периодом T_0

$$\dot{\eta} = \sum_{j=1}^2 a_{ij}(t) \eta_j(t) \quad (5)$$

$$a_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{x=x^*(t)}, \quad a_{ij}(t+T_0) = a_{ij}(t)$$

решение системы имеет вид (из теории Флоке)

$$\eta_i(t) = \sum_{j=1}^2 c_j \Phi_{ij}(t) e^{\lambda_j t}, \quad i=1,2$$

где Φ_j — ф-ция Флоке с периодом T_0

λ — хар-ис. показатели системы.

Существ теорема Андронова-Позаринского для автономных систем, по которой:

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{x^*(t)} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{x^*(t)} \right] dt$ — де коэф.

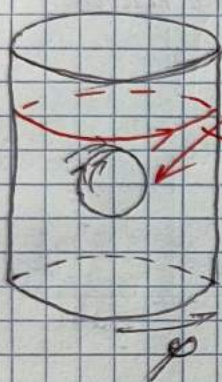
пр. $\lambda_2 < 0$ ~ прер. цикл устойчивости.
 $\lambda_2 \geq 0$ ~ неустойч.

$\lambda_2 = \lambda = \frac{1}{T_0} \ln 3$ (в) Какой бы цикл не был для пок-ль равен 0 для него всегда сеть $S=1$.

Другой из пок-ей показывается, что цикл замкнутой, друг от друга. экр-те.

Вращательные и касат. предельные циклы.

Есть системы, для которых фазовые пр-ва ~ цилиндрич.
 $B = S^2 \times R$ ~ цилиндр.



Замкнув касат. прер. цикл должен касат. к пов. S^2 цилиндра.

Вращательный касат. охватывает цилиндр, пр. полярной оброте φ для λ_2 на S^2 .

Основные бифуркации с ф. на фазовой м-те.

Запишем условия бифуркации объектов.

Глобальное
 Сопр. равн.: $\rightarrow \text{Re } \lambda_i \neq 0, i=1,2$
 Прер. цикл: $\rightarrow S \neq 1$

Пусть сеть действ. λ_1, λ_2 , зав. от параметра μ $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu)$ и пусть пр. $\lambda_1(0)=0$ наруш. условие бифуркации. условие, пр. $\lambda_1=0$ и $\lambda_2=0$ ~ второе биф. условие (по втор. реше.)

По степени бифуркации:

$\lambda_1(0)=0$ ~ условие невырожденности.
 $\lambda_2(0) \neq 0$ ~ основная биф. (коррел. с 1.)

Если касат. сопр.
 $\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu) \rightarrow \alpha(0)=0$ ~ биф. усл.
 $\beta(0) > 0$

Согр. равн. могут или самоустойчивость, или биф. равн. касат. = 0

Для узлов $S=1$. - Бифурк. уел.

28.11.22

Сепаратрисная бифуркация.
Состояния равновесия (двухмерное равновесие)

(27)

Рассм-м систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \quad (1)$$

μ - скалярный параметр ($\mu \in \mathbb{R}$)

$\mu=0$ - бифурк. уел. (по к. бифур.)

Предположим, что сист. (1) имеет равнов. в кр. $O_0(x_1=x_2=0)$. Предположим, что это сист. имеет решения кривые $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu)$. Предположим, что

$$\lambda_1(0)=0 \quad (2) \quad \sim \text{в бифуркации}$$

Нормальная форма для этой бифуркации будет иметь вид:

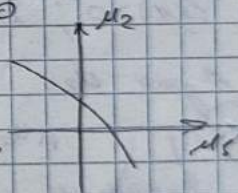
$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu + \ell(\mu)u_1^2 + \dots \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu)u_2 + \dots \end{cases} \quad (3) \quad \sim \text{спец. уел. можно сделать так же вид.}$$

Нужно добавить доп. условия: $\lambda_2(\mu) \neq 0, \ell(\mu) \neq 0$ (4)
(условия невырожденности).
Диф. кор. д. ф. кр. $\rightarrow$

Все бифуркации классифицируются 1-м изв. основными бифуркациями.

Если дан 2 параметра $\rightarrow$ крив. $\lambda_2(\mu_1, \mu_2)=0$

Берем крив. μ_2 / μ_1 в крив. λ_2 и получим кор. д. ф. кр. (в 3х мерном пр-ве координат μ_1, μ_2, λ_2)

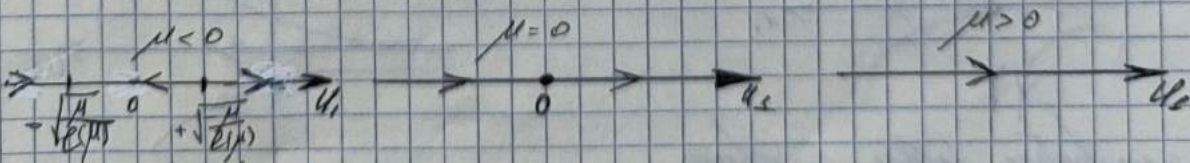


I. Пусть $\ell(\mu) > 0$,

а) $\lambda_2(\mu) < 0$

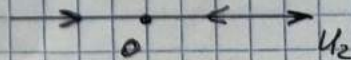
Каждое из др. уел. - это упрощение на фазовой плоскости. Рассмотрим сист. (3):
 $\mu + \ell(\mu)u_1^2 = 0 \rightarrow u_1^2 = -\frac{\mu}{\ell(\mu)} \Rightarrow \mu < 0, u_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{\ell(\mu)}}$

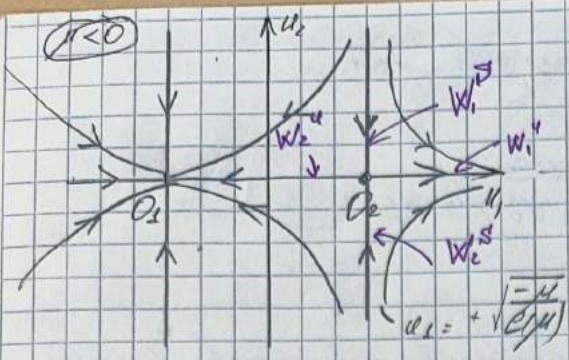
Все наши биф-ии в окрестности точки!



Система не де упр. система:

Рисуем фазовый портрет.



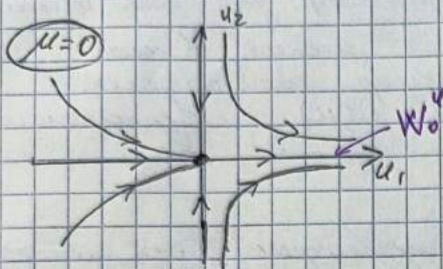


$$O_1(u_1 = -\sqrt{\frac{-\mu}{\epsilon(\mu)}}, u_2 = 0)$$

$$O_2(u_1 = +\sqrt{\frac{-\mu}{\epsilon(\mu)}}, u_2 = 0)$$

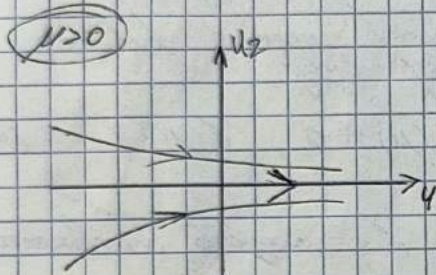
$\Rightarrow O_1$ - сед. узел. + ветви. направления, $u_2 = 0$ (каж. ветви направления), наверху $u_1 = -\sqrt{\frac{-\mu}{\epsilon(\mu)}}$.

O_2 - седло; ветви. сепаратр, $u_2 = 0$, узел сеп. $\rightarrow u_1 = +\sqrt{\frac{-\mu}{\epsilon(\mu)}}$



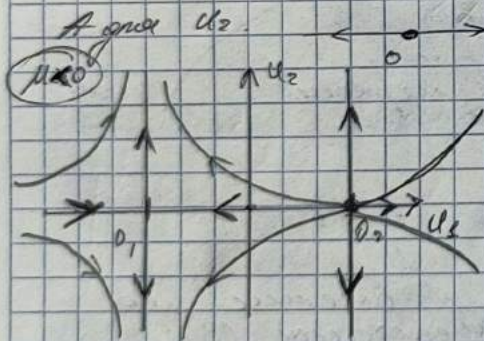
~ Седло-узел (двухгранное равновесие)

~ сеп. узелов совпадает и сепаратр совпадает, который определяет для аб. фазы равнов. узел. сепаратр совпадает. В седло-сеп. ветви. сеп. $u_1 = 0$

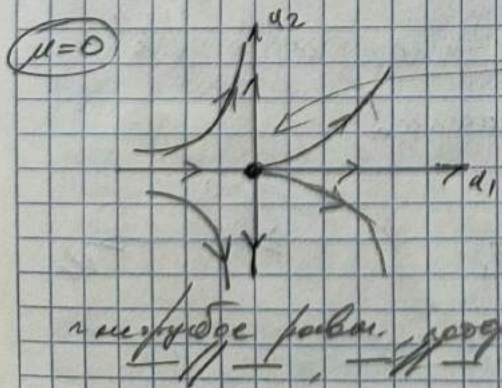


Седло-узел - неустойчивое сеп. равн., которое при изменении параметров либо исчезнет, либо разветвится на 2 группы.

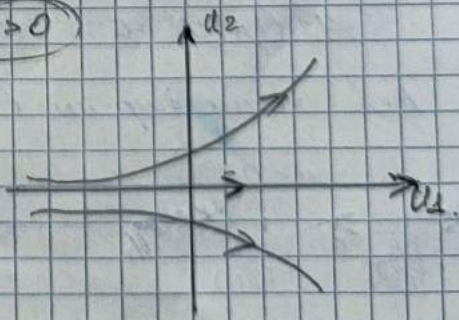
б) $\epsilon(\mu) > 0$; $\lambda_2(\mu) > 0$ - по направлению u_1 все сходится по-прежнему. $\rightarrow$ будут расх. от сеп. равн.



O_1 - седло, O_2 - неуст. узел.



седло-узел $\mu > 0$

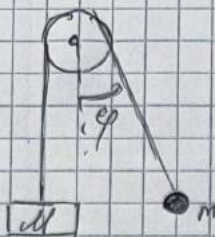


~ неустойчивое равн., узел

II. $\ell(\mu) < 0$ ~ самосопряжённое (будет на экзамене.)



Пример: рассмотрим движущуюся материальную точку, к которой приложен внешний функциональный момент.



$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \frac{1}{l} \ddot{y} - \lambda y - \sin \varphi \\ \ddot{y} = \lambda y - \ddot{\varphi} \end{cases} \quad \lambda, \gamma > 0$$

λ - хар-т внешнего момента
 γ - хар-т точки

Равовре. кр-во - цилиндр (если φ - период.) : $\Omega = S^1 \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y=0 \\ \lambda y - \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

если $\lambda > 1$ ср. нет.

$$\lambda = 1 \rightarrow O_0(\varphi = \frac{\pi}{2}, y=0)$$

$$\lambda < 1 \Rightarrow O_1(\varphi = \varphi_1, y=0)$$

$$\varphi_1 = \arcsin \lambda$$

$$O_2(\varphi = \varphi_2, y=0)$$

$$\varphi_2 = \pi - \arcsin \lambda$$

Можно воспользоваться методом чисел/раздвиги.

$$\begin{vmatrix} 0-p & 1 \\ -\sqrt{1-\lambda^2} & -\lambda-p \end{vmatrix} = 0$$

$$p^2 + \lambda p + \sqrt{1-\lambda^2} = 0$$

$$p_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \sqrt{1-\lambda^2}}$$

$$\frac{\lambda^2}{4} > \sqrt{1-\lambda^2} \rightarrow \text{устойчивый узел.}$$

$$\frac{\lambda^2}{4} < \sqrt{1-\lambda^2} \rightarrow \text{устойчивый фокус.}$$

$$\lambda = 2(1-\lambda^2)^{\frac{1}{4}}$$

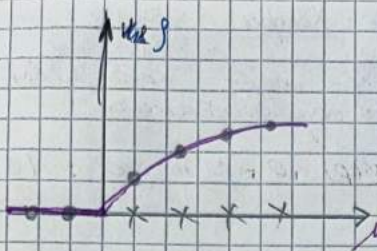
Запишем детерминант для точки O_2 :

$$\begin{vmatrix} 0-p & 1 \\ \sqrt{1-\lambda^2} & -\lambda-p \end{vmatrix} = 0$$

$$p^2 + \lambda p - \sqrt{1-\lambda^2} = 0 \rightarrow \text{седло}$$

Сам-но найти касательные к сепаратрисам.

На границе $\lambda = 1$ происходит одно-узловое бифуркация состояния равновесия.



это для $\mu > 0$:
 ~ за счёт смещения грав. само. равн.

~ малое появление период. движений

~ Супер критическая бифуркация Андронова - Холда. (зрелищная, детайлировка бифуркация)

5.12.22.

II. Первая неавтономная величина показывается $L(\mu) > 0$

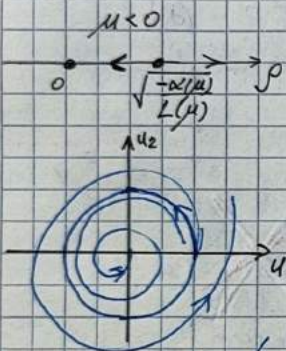
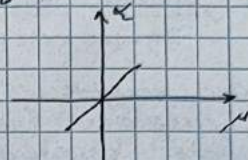
$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \beta \\ \dot{\rho} = \alpha \rho + L(\mu) \rho^3 \end{cases} \quad (3)$$

Здесь считать, что $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, $L(\mu) \neq 0$

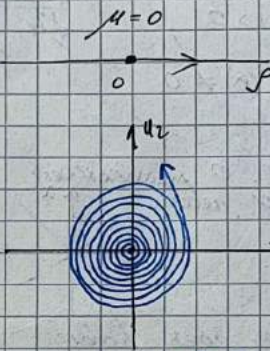
Состояние равновесия $\rho = 0$, $\alpha(\mu) + L(\mu) \rho^2 = 0$

$$\rho^2 = -\frac{\alpha(\mu)}{L(\mu)}$$

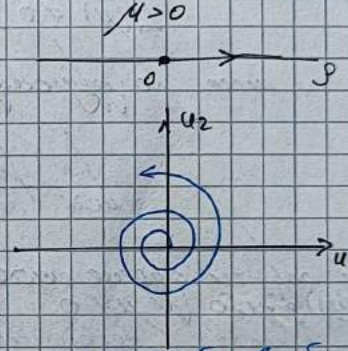
$$\Rightarrow \rho = \sqrt{-\frac{\alpha(\mu)}{L(\mu)}} \quad \text{при } \mu < 0$$



~ есть период. движение



~ нулевой момент малый фазус (малая критическая точка нелинейности)



~ нулевой момент фазус

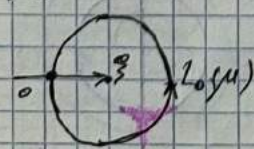
При $\mu < 0$ есть период. движение, при $\mu > 0$ амплитуда становится всё меньше

Казив. суперкритической бифуркацией Андронова - Холда (не зависит от приближенного значения) ~ здесь граница устойчивости опасная. (при переходе галлоуда-го дается).

(23)

Среднеуловная бифуркация предельных циклов (тангенциальная). (образование двукратного периода цикла)

Предположим, что система (2) имеет пред. цикл.



Выберем нач. коор. в точке пересечения с осью ξ Пуанкаре.

$$\xi = g(\xi, \mu) \quad (2)$$

$$g(0, \mu) = 0 \quad (3)$$

Напишем бифуркационное условие:

$S = g'_2(0,0) = 1$ (1) ~ дифференц. условие
мультипликатор.

Разложим g по степеням ξ и μ

$$g(\xi, \mu) = g(0,0) + g'_1(0,0)\xi + g'_\mu(0,0)\mu + \frac{1}{2}g''_{11}(0,0)\xi^2 + \frac{1}{2}g''_{22}(0,0)\mu^2 + g''_{1\mu}(0,0)\xi\mu$$

Тогда отображение примет вид:

$$\bar{\xi} = \alpha(\mu) + (1 + \beta(\mu))\xi + \delta\xi^2 + \dots \quad (5) = g(\xi, \mu) \sim g\text{-н. поворота}$$

Условие невырожденности: $\delta \neq 0$ и $\alpha'_\mu(0) \neq 0$
для определённости будем считать $\alpha'_\mu(0) > 0$

$$g'_1 = 1 + \beta(\mu) + 2\delta\xi$$

$$g''_{11} = 2\delta$$

$$g'_2 = 1 + \beta(\mu) + g''_{22}\mu$$

$$I. \quad \delta > 0 \Rightarrow g'_1 > 0$$

$$\Rightarrow g''_{11} > 0$$

$\Rightarrow$ кривая выпукла вниз и монотонно растёт.

Ищем неподвижные точки (т.е. $\bar{\xi} = \xi$)

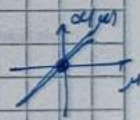
$$\Rightarrow \alpha(\mu) + \beta(\mu)\xi + \delta\xi^2 = 0$$

$$\xi^2 + \frac{\beta(\mu)}{\delta}\xi + \frac{\alpha(\mu)}{\delta} = 0$$

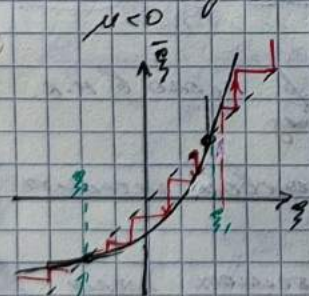
$$\Rightarrow \xi_{1,2} = -\frac{\beta(\mu)}{2\delta} \pm \sqrt{\frac{\beta^2(\mu)}{4\delta^2} - \frac{\alpha(\mu)}{\delta}}$$

очень мал.
более
велик. интервал. вел. $\beta - \mu$
(мал. число)² < (мал. число)²

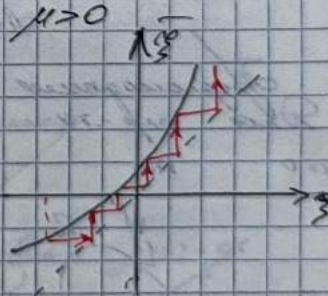
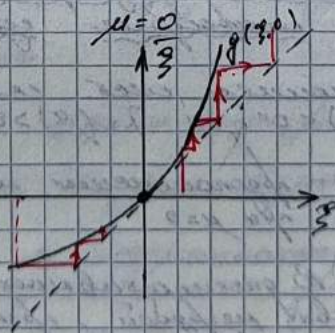
$$\Rightarrow \xi_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{\alpha(\mu)}{\delta}}$$



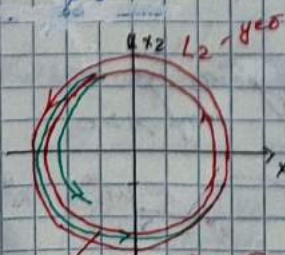
Рисуем диаграмму Римана: (не забываем, что всё это в малой окрестности)



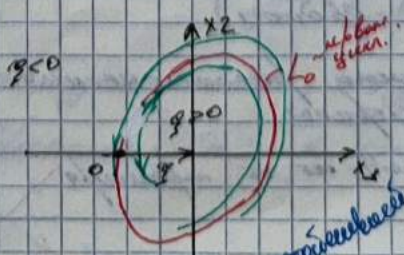
непр. точки.
каждой непр. точке
соотв. пред. цикл.



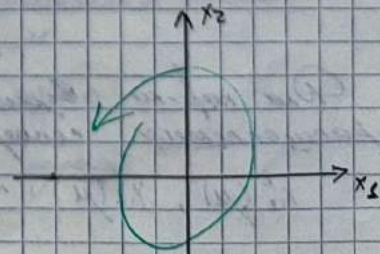
пред. цикл не с.



L_2 - неуст.



неустойчивый

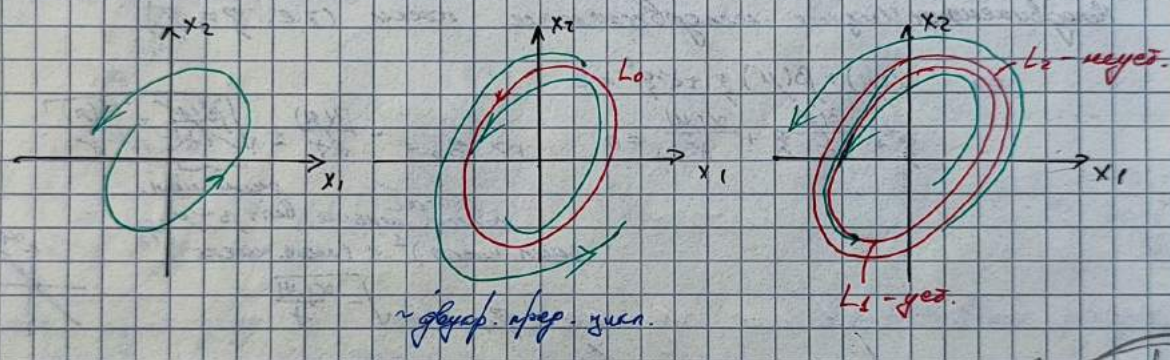
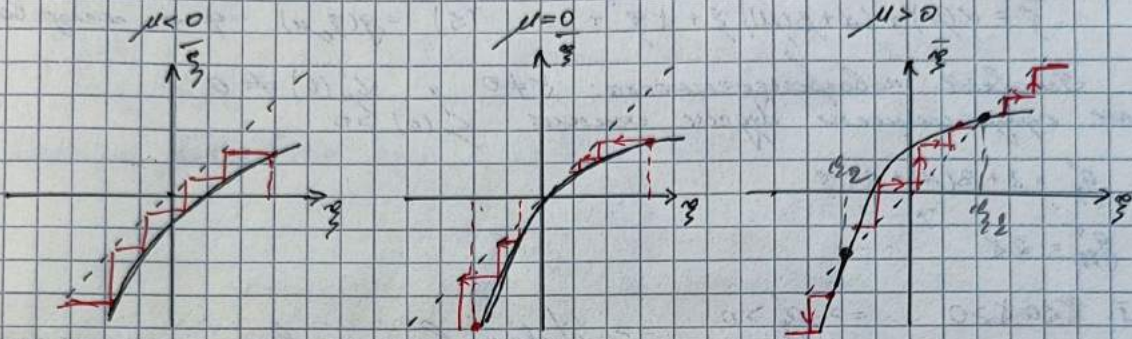
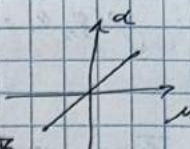


цикл в нест

L_0 - двукратный пред. цикл. ~ неустойчивый пред. цикл, который при сколь угодно малом изменении параметра распадается на 2 предельных цикла

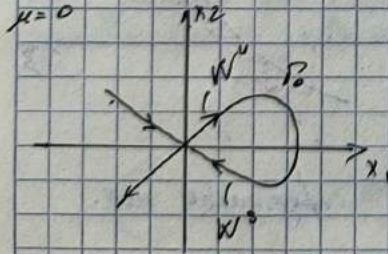
II. $\bar{x} < 0 \Rightarrow$ ф-я рассредоточения по фазе монотонно растет $\bar{x}_2' > 0$, $\bar{x}_2'' < 0$ ~ выпукло вверх.

$\bar{x}_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha(\mu)}{\beta}}$, $\bar{x} < 0 \Rightarrow \alpha(\mu) > 0$ должно быть



Бифуркация кардиальной фазы 24/85
Регла сепаратриса

Предположим в нашей сист. сеть с.р. сепаратрисы в н.к. Для сеп-ты $\lambda_2(\mu) < 0$, а $\lambda_2(\mu) > 0$.



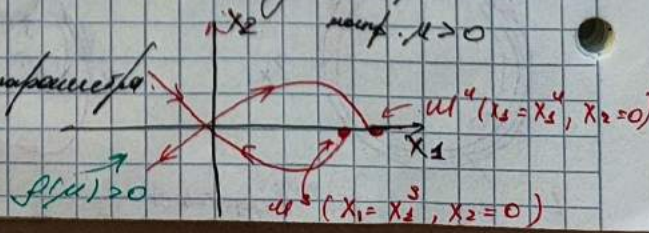
$\leftarrow$ предположим на фазовой плоскости при $\mu = 0$

В диссипативных системах регуля авт. неустойчив, при измен. параметра она разрушается?

Γ_0 ~ ассимптотическая (гетоклиническая дробина)

Для хар-ки взаимного расположения введём ф-ю расщепления сепаратрисы:

$x_2^3(\mu), x_2^4(\mu)$ ~ зав. от параметра



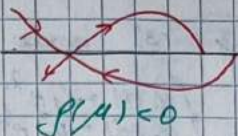
а при $\mu < 0$ рождению по формуле.

Введем ф-ю:

$$p(\mu) = \chi_2''(\mu) - \chi_2^3(\mu)$$

Вторая важная хар-ка: српловая величина:

$$\gamma(\mu) = \lambda_1(\mu) + \lambda_2(\mu)$$



12.12.22

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \quad (5)$$

Предположим, что есть равновесия

$(x_1=0, x_2=0)$ — српо, т.е. $\lambda_1(\mu) > 0$, $\lambda_2(\mu) < 0$

Делаем линейное преобразование (норм. форма), получим:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1(\mu) u_1 + g_1(u_1, u_2, \mu) \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu) u_2 + g_2(u_1, u_2, \mu) \end{cases} \quad (6)$$

Предположим, что сист. (5) имеет гомоклиническую фазовую

$$g_c(0,0,\mu) = 0, \quad \ell = 1, 2 \quad (u_1=0, u_2=0)$$

При малых μ гомоклиническая фазовая разбивается.

Введем отрезки (секунды),

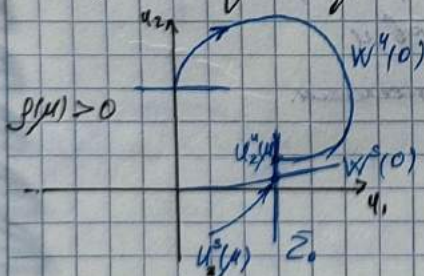
$$\Sigma_0 = \{u_1 = \pm \varepsilon, u_2 > 0, |u_2| < \varepsilon\}$$

$$\Sigma_1 = \{u_2 = \pm \varepsilon, |u_1| < \varepsilon\}, \quad \text{где } \varepsilon, \pm, \varepsilon - \text{малые полож. числа.}$$

$$T = T_g \circ T_c \text{ — отображения: } \begin{aligned} T_c: \Sigma_0 &\rightarrow \Sigma_1 \\ T_g: \Sigma_1 &\rightarrow \Sigma_0 \end{aligned}$$

В малой окрестности српо сепаратриса имеет вид $u_1 = \mu u_2$, можно отн. к ней. системой. (укажем g_1 и g_2)

Возникает два варианта:



заданной ф-ю рождению

$$p(\mu) = u_2''(\mu) - u_2^3(\mu)$$

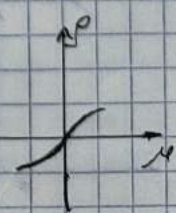
1. Бифуркационное условие: $p(0) = 0$ (если нетя при $\mu=0$)

2. Условие не вырожденности: $\gamma(0) \neq 0$, $p'(0) \neq 0$.
условие бифуркации не было при $\mu=0$.

Для определенности будем считать, что $p'(0) > 0$

Покажем отображение T_c : в этом случае

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1(\mu) u_1 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu) u_2 \end{cases} \quad (3)$$



$$t=0: u_1(0) = \frac{1}{2}, u_2(0) = \frac{1}{2}$$

Ур-я (3) легко интегрируются, и получившие $t=0$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2} e^{\lambda_1 t} \\ u_2(t) &= \frac{1}{2} e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (4)$$

Подставим в (3) функции трансформации сист. ч. от Σ_0 до Σ_1 .

$$u_1(z) = \frac{1}{2}, u_2(z) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{\lambda_2 z}$$

$$\Rightarrow \Sigma = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{с другой стороны: } u_1(z) &= \frac{1}{2} e^{\lambda_1 z} = \frac{1}{2} e^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{\ln \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = C \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1^0 = C(u_2^0)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{2}{3}$$

соотношение (6) и задаёт нам вид экв.

Положимое отображение T_0 показывает, что оно существует. (при $\mu=0$ экв-ва T_0 и экв. пред) Но зная (при малых μ) о крив. фазовой экв. ч. с фаз. малых μ существует фазовая

Более того

$$u_2^0 = p(u_1^0, \mu) \quad (7)$$

- T_0 .

или дифференцируемая

и непрерывное, взаимнооднозначное отображение. разложение в ряд Тейлора.

$$u_2^0 = p(0,0) + \frac{\partial p}{\partial u_1} \bigg|_{(0,0)} u_1^0 + \frac{\partial p}{\partial \mu} \bigg|_{(0,0)} \mu + \dots = a u_1^0 + b \mu + \dots$$

$$(8) \quad u_2^0 = a u_1^0 + b \mu + \dots$$

В отображении (8) параметр a положителен >0 , а b и μ отрицателен, но $\neq 0$ (непрямая Σ из локуса $a>0$?) ($a<0$ характер и пересечения фазовых траекторий)

Полное отображение:

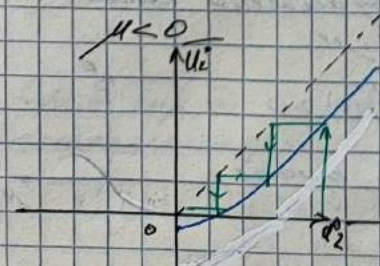
$$u_2^0 = a C(u_1^0)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + b \mu$$

C - преобразование.

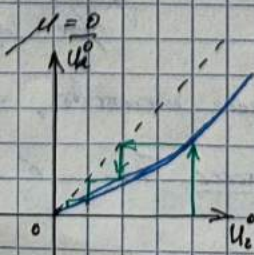
и нелинейность становится

Рассмотрим случаи:

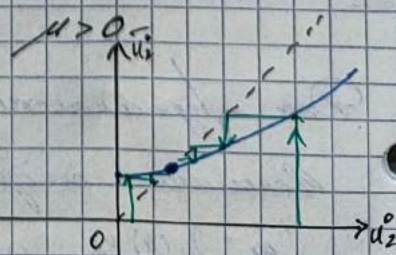
$$1) \quad \dot{u}_1(0) = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) < 0 \quad (\lambda_1(0) > 0, \lambda_2(0) < 0)$$



непр. т.ч. не

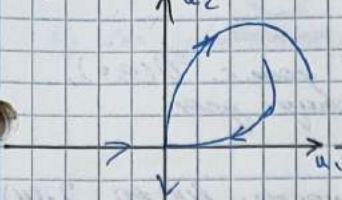


силь. т.ч. нелинейности.

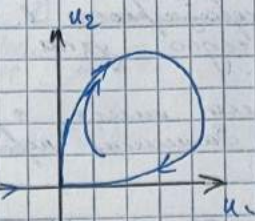


непр. экв. т.ч. не

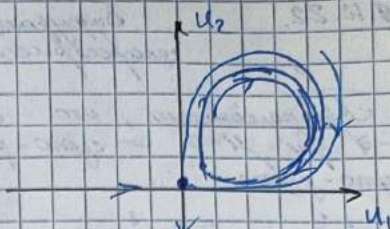
Разовые течения:



$p(u) < 0$

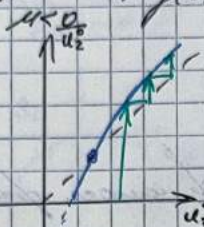


$p(u) = 0$

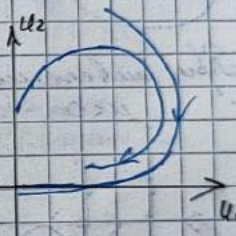
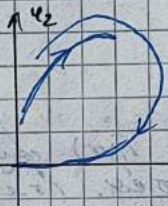
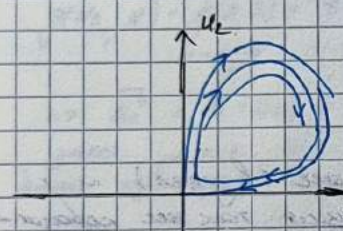
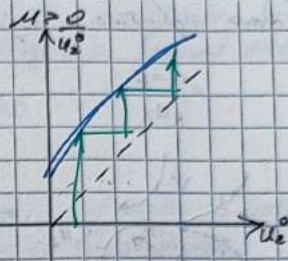
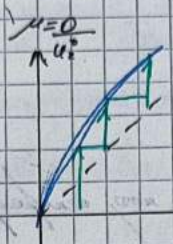


$p(u) > 0$

2) $F(0) > 0 \rightarrow g(0) < 1$



~ поворот кривой. точка.

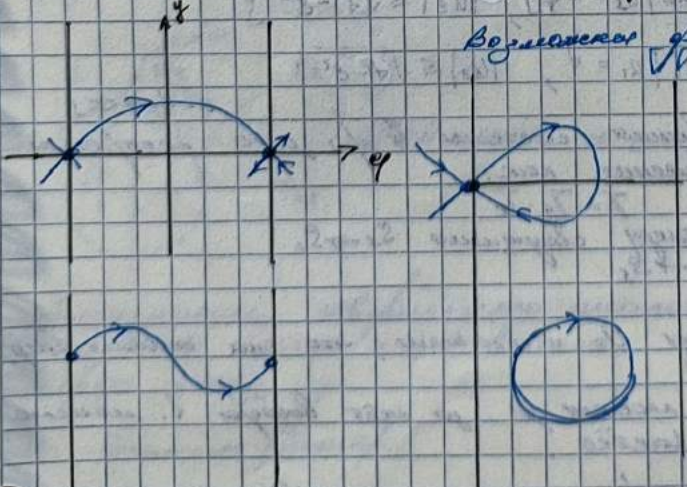


Рез. рассужд. в $B < 0$

Замечания: Рассуждения о вращательных и трансляционных преобразованиях.

Для систем на цилиндре: $G = S^1 \times R$

Возможные фазовые портреты:



Поворот фазового пространства? Сдвиг фазового пространства. - в фазовом пространстве. Когда кривая, проходящая через точку, не является замкнутой (исключение от экв. фазового пространства) - в фазовом пространстве.

19.12.22.

Бифуркация координаты 1. Пусть
сепаратрисы, седло-узел.

(26)

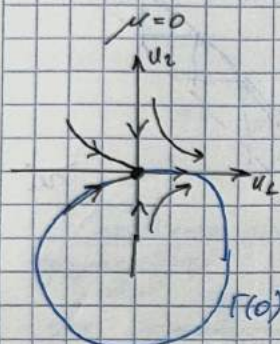
Предположим, что система имеет с.р. в коор.с. $O(0,0)$,
→ при $\mu=0$ → седло-узел. Запишем норм. форму для
седло-узла:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu + \psi(\mu)u_1^2 + \dots \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu)u_2 + \dots \end{cases} \quad (1)$$

Условие невырожденности: $\psi(\mu) \neq 0$, $\lambda_2(\mu) \neq 0$

Бифуркационное условие: $\lambda_2(0) = 0$

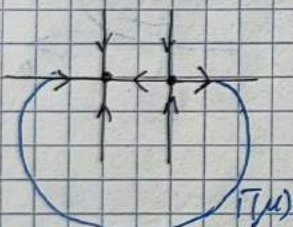
Для ор-ти: $\lambda_2(\mu) < 0$, $\psi(\mu) > 0$



Предположим, что сепаратрисы ор. имеют форму,

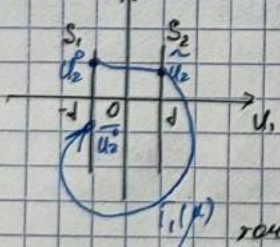
будем предполагать, и это важно, что кривая $\Gamma(0)$ не попадает в край. (не рассматриваем.)

При увеличении μ ,
 $\mu < 0$



Траектория $\Gamma(\mu)$ будет туже все (в узел.) ~
сохраняться. (т.е. бифуркация так же корд.с.)

Для $\mu > 0$



Введем 2 секции: S_1 и S_2

$$S_1 = \{u_1, u_2 \mid u_2 = -\delta, |u_1| \leq \sqrt{2\mu - \delta^2}\}$$

$$S_2 = \{u_1, u_2 \mid u_1 = \delta, |u_2| \leq \sqrt{2\mu - \delta^2}\}$$

$0 < \delta \ll 1$

Для исследования системы & при $\mu > 0$ рассмотрим
точечное отображение T :

$$T = T_g \circ T_e$$

где T_e - отображение между секциями $S_1 \rightarrow S_2$,
а T_g - отображение $S_2 \rightarrow S_1$.

Покажем отображение T_e : выберем u_2^0 и покажем, что она имеет след
на S_2 .

1) итерации на (1) ур-е. → при любых μ за экот. время t можно
преобр. $u_1^0 \Rightarrow u_1(t) \approx u_1^0$ (растет)

2) покажем, что 2 время τ преобр. точки $u_2^0 \rightarrow u_2^1$ (сеге
покажем, что $u_2(1)$ видно, что u_2 - стабилизируется, "фиксируется")

$$u_2(0) = u_2^0, \quad u_2(t) = u_2^0 e^{\lambda_2 t} \quad (2)$$

$$z = \Sigma \quad \tilde{u}_2 = u_2^0 e^{i\omega z} \quad (2)$$

u_2 — уравнение:

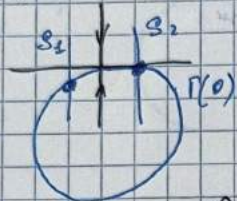
$$\frac{du_1}{dt} = \mu + i u_1^2$$

$$u_1 = \frac{du_1}{dt} + \mu \quad ; \quad \Rightarrow \quad \tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_1}{i u_1^2 + \mu} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i} \frac{du_1}{u_1^2 + \frac{\mu}{i}} =$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{\mu}} \quad (3) \quad \rightarrow \infty \text{ при } \mu \rightarrow 0$$

Фр-я (2) и (3) дают логическое соответствие с.р. коэ., а время отложено.

Преобразим координаты. Заметим, что $\exists$ траектория, которая превращает $u_2 \rightarrow u_2^0$. Для $\mu=0$ было $\Gamma(0)$ нарисован также не случайно. По непрерывности по μ $\Gamma(0) \rightarrow \Gamma_1(\mu)$.



$\exists$ отображение: $u_2^0 = \varphi(u_2, \mu)$ при $\mu=0$ диффеоморфизм.

Разложим эту функцию в ряд:

$$\varphi(u_2, \mu) = \underbrace{\varphi(0,0)}_a + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \Big|_{(0,0)}}_b u_2 + \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2^2} \Big|_{(0,0)}}_c \mu + \dots$$

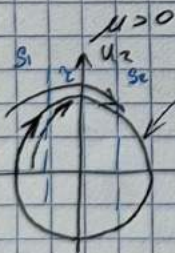
$$\Rightarrow u_2^0 = a + b u_2 + c \mu + \dots \quad (4) \quad \text{и оценка констант}$$

знак конст. a, c не на что не влияет, а $b \neq 0$ (кабы не было переколов, т.е. перегиб траекторий).

$$u_2^0 = a + b e^{i\omega z} u_2 + c \mu + \dots \quad (5) \quad \leftarrow \text{линейное отображ. } T, \text{ где } \tau \text{ из в.ф. (3)}$$

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{\mu}}$$

для определенности $a, c > 0$ (оба есть, т.к. коэф-ты в $e^{i\omega z}$ $\ll 1$). $\Rightarrow$ ей соотв. устойчивый предельный цикл. Т.е. лотия разрушается и лотия уст.



1) период $\approx \tau$

2) Движение по циклу равномерное.

Заметим, совершенно аналогично рассуждая с другой стороны (с.р. коэ. $\neq 0$) в этом случае рождается неуст. пред. цикл.

Рассуждаем иначе:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r) \\ \dot{\varphi} = \sin \varphi - \mu \end{cases} \quad (6) \quad \text{где } \mu > 0$$

Фр-я можно рассмотреть отдельно



$$\dot{\varphi} = \sin \varphi - \mu$$

а.р: $\sin \varphi = \mu$, $\mu > 1$ - реальный нест

$0 < \mu < 1$: $\varphi_1 = \arcsin \mu$, $\varphi_2 = \pi - \arcsin \mu$.

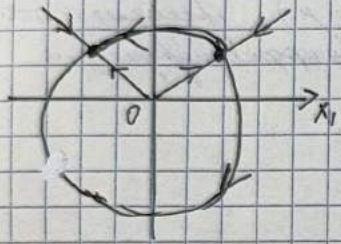
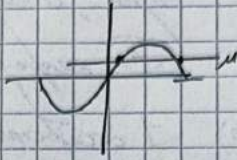
Классическое пок-тв, что $\varphi_1 \sim \text{неуст.}$, $\varphi_2 \sim \text{уст.}$

$$\mu = 1; \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Рисуем фазовые портреты.

$0 < \mu < 1$
 $\mu < 1$

$\sin \varphi = \mu$



$\mu = 1$



$\mu > 1$ - реф. нест.

- неуст. фокус

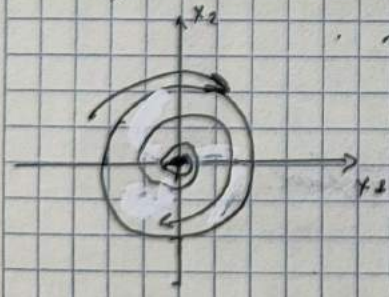


Таблица результатов

Рисуем портреты (для одного из уравнений)

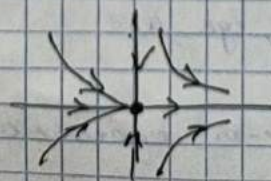
Значения параметра
Бифуркации

$\mu < 0$

$\mu = 0$

$\mu > 0$

Седло-узлы
а.р.

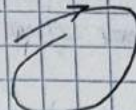
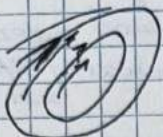


I - локальные

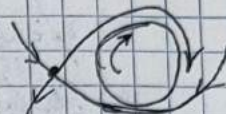
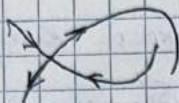
2. Андронов-Хопфа.
(центр - критич.)



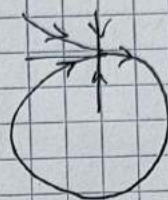
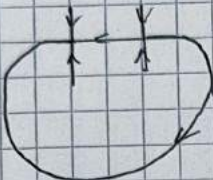
3. Двухфазный
предельный
цикл.



4. Песочная
рис. с.

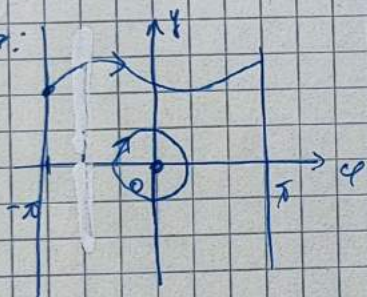


Песочная
с-у.



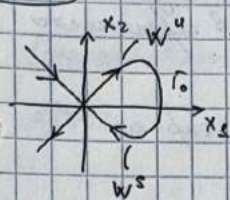
II-

Комплексная:



Генер. и вращ. / ~~переход~~ / ~~уменьш.~~

24/25



Предположим, что в нашей системе есть с.р. - сепаратор в канале координат. Для определенности $\lambda_1(\mu) < 0$, $\lambda_2(\mu) > 0$

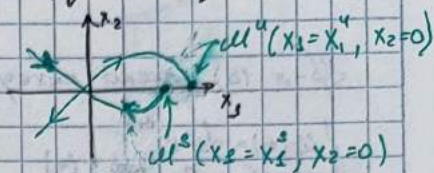
Γ_0 - гомоклиническая траектория (двойно асимптотическая к сепаратору)

Γ_0 явл. петлей, при изменении параметров, она деформируется

Для характеристики взаимного расположения вводим функцию расщепления сепараторов:

$\chi_1^s(\mu)$, $\chi_2^s(\mu)$ ~ зависят от параметра.

$\mathcal{F}(\mu) = \chi_1^s(\mu) - \chi_2^s(\mu)$ ~ ф-я расщепления $\mathcal{F} > 0$



Вторая базисная коор-та петли сепаратора: энергетическая величина.

$$\mathcal{F}(\mu) = \lambda_1(\mu) + \lambda_2(\mu)$$



Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \quad (1)$$

Предположим, что система равновесия в т. $O(x_1=0, x_2=0)$ ~ сепаратор, т.е. $\lambda_2(\mu) > 0$, $\lambda_1(\mu) < 0$

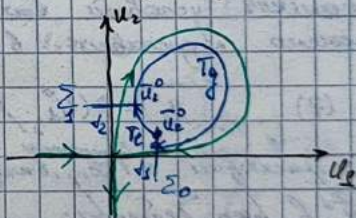
С помощью линейного неособого преобразования система приводится к нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1(\mu) u_1 + g_1(u_1, u_2, \mu) \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu) u_2 + g_2(u_1, u_2, \mu) \end{cases} \quad (2)$$

где нелинейные ф-ны $g_i(0,0,\mu)=0$, $i=1,2$ и предположим, что при $\mu=0$ система (2) имеет гомоклиническую орбиту Γ_0

Про малые u_1 и гомоклиническая орбита деформируется:

Введём 2 среза, трансверсальных к траектории (секунды)



$$\Sigma_0 = \{u_1 = d_1, |u_2| < \varepsilon\}$$

$$\Sigma_2 = \{u_1 = d_2, |u_2| < \varepsilon\}$$

где d_1, d_2, ε - малые положительные числа.

Введём функцию расщепления $\mathcal{R}(\mu)$, используя в качестве секунд срезы Σ_0 , следующим образом:

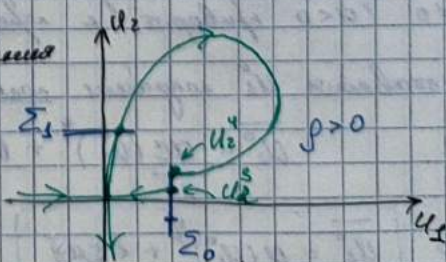
$$\mathcal{R}(\mu) = u_2^s(\mu) - u_2^u(\mu)$$

где u_2^s и u_2^u - ординаты точек первого пересечения нулевой линии и устойчивой сепараторной петли с секундой Σ_0

Тогда бифуркационное условие существования траектории Γ_0 можно записать так:

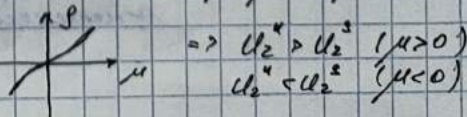
$$1) \mathcal{R}(0) = 0 \quad (\text{т.е. петля при } \mu=0)$$

$$2) \text{ Условие нелинейности: } \mathcal{R}'(0) \neq 0, \mathcal{R}''(0) \neq 0$$



Взаимное расположение сепараторов различно.

Для определения $\mathcal{R}'(0) > 0$



Покажем точечное отображение в окрестности траектории Γ_0 в виде диффеоморфизма двух отображений $T = T_0 \circ T_1$, где T_1 действует в окрестности сечения Σ_0 , а T_0 - в окрестности поперечной линии Γ_0 .

Поперечное отображение T_1 : в этом случае Γ_0 -я мб. (2) окр-ся в основной линейной части:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1(u) u_1 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(u) u_2 \end{cases} \quad (3)$$

$$T_1: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$$

пусть при $t=0$ выполнены условия: $u_1(0) = \frac{1}{2}$
 $u_2(0) = u_2^0 > 0$
 т.е. $(u_1(0), u_2(0)) \in \Sigma_0$

Γ_0 -я (3) легко интегрируется, и представляя $t=0$:

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{1}{2} e^{\lambda_1 t} \\ u_2(t) = u_2^0 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим через τ - время движения между Σ_0 и Σ_1 вдоль траектории, т.е.

$$\frac{1}{2} = u_1^0 e^{\lambda_1 \tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{1/2}{u_1^0} \quad (5)$$

$$u_1(\tau) = \frac{1}{2}, \text{ а}$$

$$u_2(\tau) = u_2^0$$

С другой стороны, $u_2(\tau) = \frac{1}{2} e^{\lambda_2 \tau} = \frac{1}{2} e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \frac{1/2}{u_1^0}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1/2}{u_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot (u_1^0)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} =$
 $= C \cdot (u_1^0)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \Rightarrow u_2^0 = C (u_1^0)^q, \text{ где } q = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

Глобальное отображение T_0 : покажем, что траектории системы (2) образуют отображение

$$T_0: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$$

Действительно, поскольку траектория Γ_0 при $t=0$ соединяет Σ_1 и Σ_0 . При этом время движения вдоль Γ_0 от Σ_1 до Σ_0 будет конечным. Отсюда и по теореме о непрерывной зависимости траекторий системы (2) от начальных условий вытекает существование отображения T_0 , которое можно представить в следующем виде:

(7) $u_2^0 = p(u_1^0, u)$ - T_0 является диффеоморфизмом (непрерывное взаимнооднозначное отображение).

значение u_2 в начале траектории $\in \Sigma_0$, выходя из Σ_1 (т.е. $(u_1^0, u_2^0) \in \Sigma_0$)

Разложим в ряд Тейлора:

$$u_2^0 = p(0,0) + \left. \frac{\partial p}{\partial u_1} \right|_{(0,0)} u_1^0 + \left. \frac{\partial p}{\partial u} \right|_{(0,0)} u + \dots = \alpha u_1^0 + \beta u$$

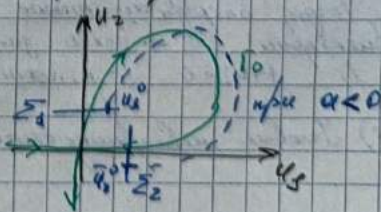
$$\Rightarrow (8) \quad u_2^0 = \alpha u_1^0 + \beta u + \dots$$

В соотношении (8) коэффициент α принципиально > 0 , а β в мб. различен, но $\neq 0$ ($\alpha < 0$ приводит к пересечению фазовых траекторий).

Подставляя u_2^0 получим полное отображение:

$$u_2^0 = \frac{\alpha}{a} (u_1^0)^q + \beta u$$

$$\Rightarrow u_2^0 = \alpha (u_1^0)^q + \beta u$$



нелинейность степенная

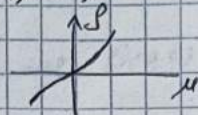
$$u_2^0 = a(u_2^0)^2 + b\mu$$

$$a > 0, \quad b(\mu) \neq 0, \quad b > 0$$

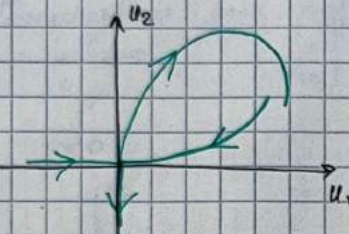
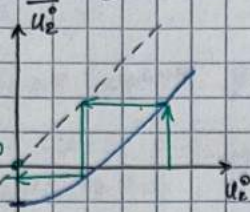
$$(+ \text{или} \lambda_1(\mu) < 0, \lambda_2(\mu) > 0)$$

Рассмотрим случаи:

$$1) \quad \nabla(0) = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) < 0 \quad (\text{т.е. } q(0) = -\frac{\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)} > 1.)$$

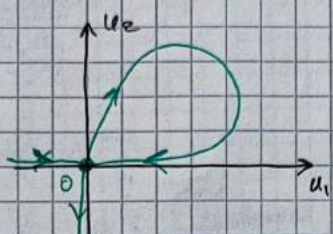


$$\mu < 0 \quad (p < 0) \quad u_2^0 < 0$$



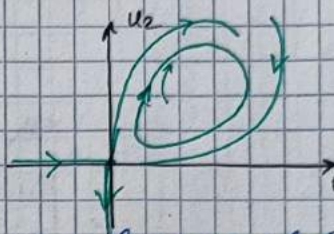
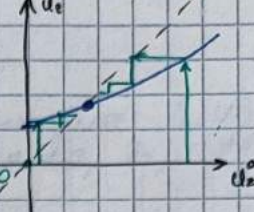
~ непрерывный ток ток

$$\mu = 0 \quad (p = 0) \quad u_2^0 = 0$$



соотв. гомоклинные Г.

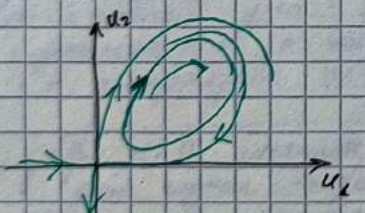
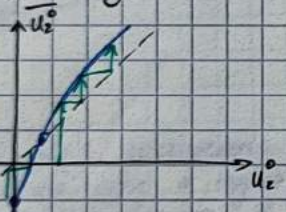
$$\mu > 0 \quad (p > 0) \quad u_2^0 > 0$$



~ неавто. гомоклинные траектории для mu > 0

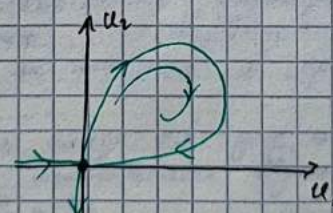
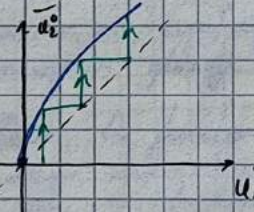
$$2) \quad \nabla(0) = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) > 0 \quad (\text{т.е. } q(0) = -\frac{\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)} < 1)$$

$$\mu < 0 \quad (p < 0) \quad u_2^0 < 0$$



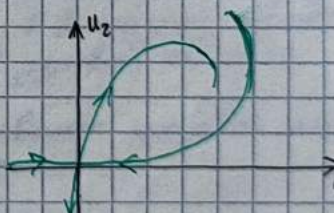
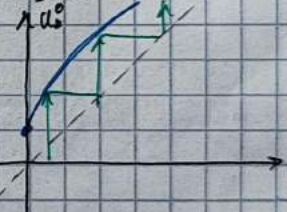
~ авто. фаз. цикл

$$\mu = 0 \quad (p = 0, u_2^0 = 0)$$



~ соотв. гомоклинные Г. (но не авто.)

$$\mu > 0 \quad (p > 0, u_2^0 > 0)$$



$$\frac{du_1}{dt} = \mu + u_1^2$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_2 - \mu$$

26) Рождение седлового узла из пары сепаратрис седло-узла.

Предположим, что система (1) имеет с.р. в начале координат $O(0,0)$ и при $\mu=0 \rightarrow$ седло-узел.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \mu) \end{cases} \quad (1)$$

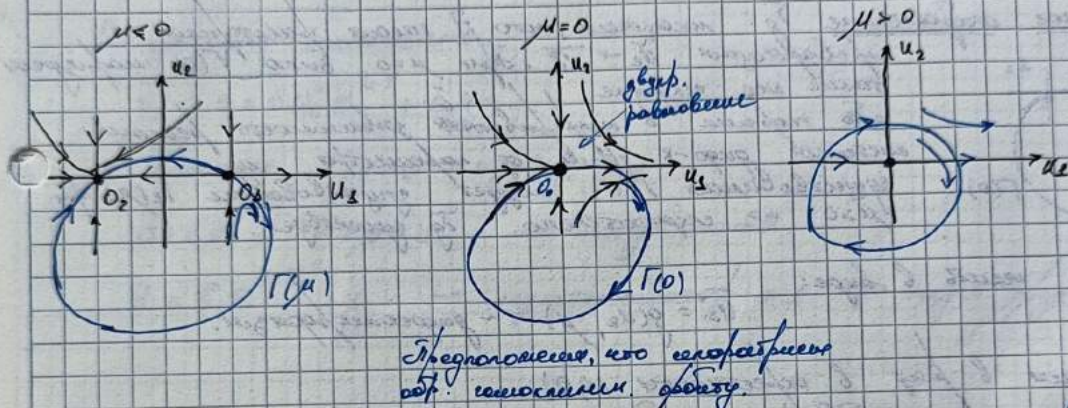
Нормальная форма для седло-узла:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu + L(\mu)u_1^2 + \dots \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu) \cdot u_2 + \dots \end{cases} \quad (2)$$

Бифуркационное условие седло-узла: $\lambda_1(0) = 0$
Условие невырожденности: $L(\mu) \neq 0, \lambda_2(\mu) \neq 0$

Рассмотрим для определенности: $\lambda_2(\mu) < 0, L(\mu) > 0$

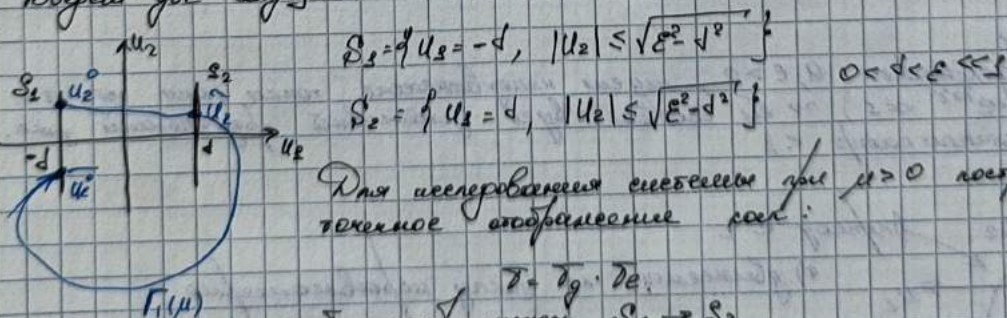
$$u_{1,0} = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{L(\mu)}}$$



Предполагаем, что сепаратрисы с.р. совершают полный оборот.

При $\mu < 0$ состояние равновесия O_0 распадается на два узла - устойчивый узел и седло. При этом самоподобие траектории $\Gamma(0)$ трансформируется в $\Gamma(\mu)$, с.р. сепаратрисы седла, окружей в устойчивый узел. Существование траектории $\Gamma(\mu)$ вытекает из непрерывности о том, что $\Gamma(0)$ возвращается в 0 в общем случае, т.е. сепаратриса $W^s(O_0)$ не попадает в "край" узловой области.

При $\mu > 0$ система не имеет с.р. для исследования фазовой плоскости в этом случае применим отображение Пуанкаре. Введем две окружности S_1 и S_2



$$S_1 = \{u_1 = -d, |u_2| \leq \sqrt{\epsilon^2 - d^2}\}$$

$$S_2 = \{u_1 = d, |u_2| \leq \sqrt{\epsilon^2 - d^2}\}$$

$$0 < d < \epsilon \ll 1$$

Для исследования системы при $\mu > 0$ построим точное отображение P с.р.:

$$P = T_g \cdot T_e$$

где $T_e \sim$ с.р. между $S_1 \rightarrow S_2$
 $T_g \sim$ с.р. от $S_2 \rightarrow S_1$

Полное отображение P : выберем u_1^0 и покажем, что она составит цикл на S_2 .

1) Рассмотрим на S_2 ур-е $\rightarrow$ при малом μ за счёт выбора d можно пренебречь $u_1^2 \Rightarrow u_1 \approx 0 \Rightarrow u_2$ - растёт.

2) Покажем, что $\exists$ время τ перехода точки $u_2^0 \rightarrow \tilde{u}_2$. Из (1) видно, что из-за $\lambda_1(\mu) < 0 \rightarrow u_2$ со временем уменьшается (сжимается).

Прост $u_2(t=0) = u_2^0 \rightarrow u_2(t) = u_2^0 e^{\lambda_1 t}$

при $t = \tau: \tilde{u}_2 = u_2^0 e^{\lambda_1 \tau} \quad (2)$

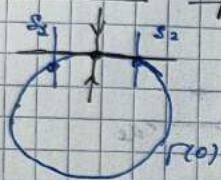
Из 5.00 гр-а: $\frac{du_2}{dt} = -\mu + u_2^2$

(3) $\rightarrow \tau = \int_{u_2^0}^{\tilde{u}_2} \frac{du_2}{u_2^2 - \mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{u_2^0}^{\tilde{u}_2} \frac{du_2}{u_2^2 - \frac{\mu}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \arctg \frac{u_2 \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \Big|_{u_2^0}^{\tilde{u}_2} = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \arctg \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}$

при $\mu \rightarrow 0 \quad \tau \rightarrow \infty$

т.е. при достаточно малом $\mu > 0$ стационарная точка будет очень долго достигаться в окрестности начальной координаты.

Глобальное отображение τ_0 :



покажем, что $\exists$ такая точка, преобразуясь $\tilde{u}_2 \rightarrow u_2^0$. При $\mu = 0$ было $\Gamma(0)$, наперед такие же скрутки.

В теории о непрерывности зависимости решения от параметра μ существование $\Gamma(0)$ имеет существование $\Gamma_2(\mu)$ при $\mu > 0 \rightarrow$ следовательно τ_0 существует.

Будем искать в виде:

$u_2^0 = g(\tilde{u}_2, \mu) \sim$ диффеоморфизм.

Разложим в ряд в окрестности $(0,0)$:

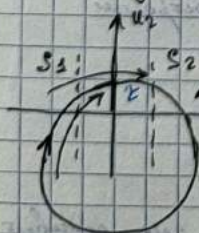
$g(\tilde{u}_2, \mu) = g(0,0) + \frac{\partial g}{\partial \tilde{u}_2} \Big|_{(0,0)} \tilde{u}_2 + \frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{(0,0)} \mu + \dots$

$\Rightarrow u_2^0 = \alpha + b \tilde{u}_2 + c \mu + \dots \quad (4) \quad b > 0$, чтобы не было перековок диаг. а, с ни на что не влияет. очень маленьким.

$u_2^0 = \alpha + b u_2^0 e^{\lambda_1 \tau} + c \mu + \dots$
 $\tau = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \arctg \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}$

(5) полное отображение τ , где сф. τ из выражения (3).

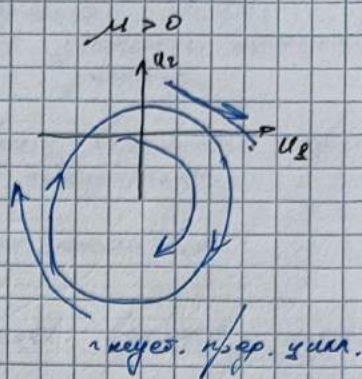
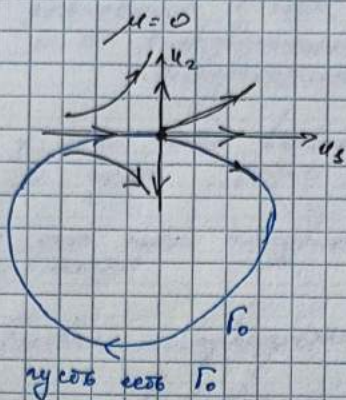
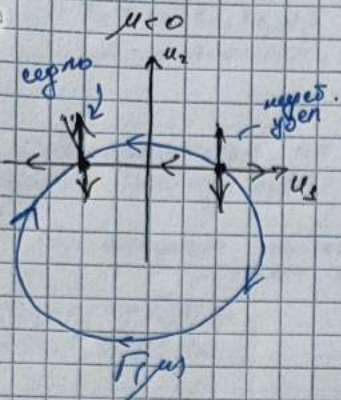
Для определенности $a, c > 0$, ищем неподвижные точки (они есть, т.е. изобр-т $\forall \mu \tau^2 \ll 1$) $\sim$ ей соответствует устойчивый предельный цикл, т.е. путь или цикл < 1 .



1) период < 1

2) движение по циклу неравномерно

Если рассмотреть случай $\lambda_2(\mu) > 0$, $\zeta(\mu) > 0$



Рассуждая аналогично:

$$\bar{u}_2^0 = a + b u_2^0 e^{\lambda_2 \tau} + c \mu + \dots$$

τ большое; $\lambda_2 > 0 \Rightarrow \forall e^{\lambda_2 \tau} > 1$.

$$a + b u_2^0 e^{\lambda_2 \tau} + c \mu = u_2^0 \rightarrow \text{непрв. точка.}$$

$$\vartheta = b e^{\lambda_2 \tau} > 1 \rightarrow \text{мультипликатор} > 1 \Rightarrow \text{узел. пр. укл.}$$

27. Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \mu) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \mu) \end{cases}$$

Пусть эта система имеет малое собственное равновесие в кан. координатах $O(0,0)$
 $\mu=0$ — дифференциальное уравнение параметра (дифференциальное условие)

Предположим, что у этой сист. равновесия равны х-ые координаты $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu)$ и пусть $\lambda_1(0)=0$ — в дифференциал.

Нормальная форма для такой дифференциал имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu + l(\mu) u_1 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu) u_2 \end{cases}$$

Условие неавтономности: $l(\mu) \neq 0, \lambda_2(\mu) \neq 0$

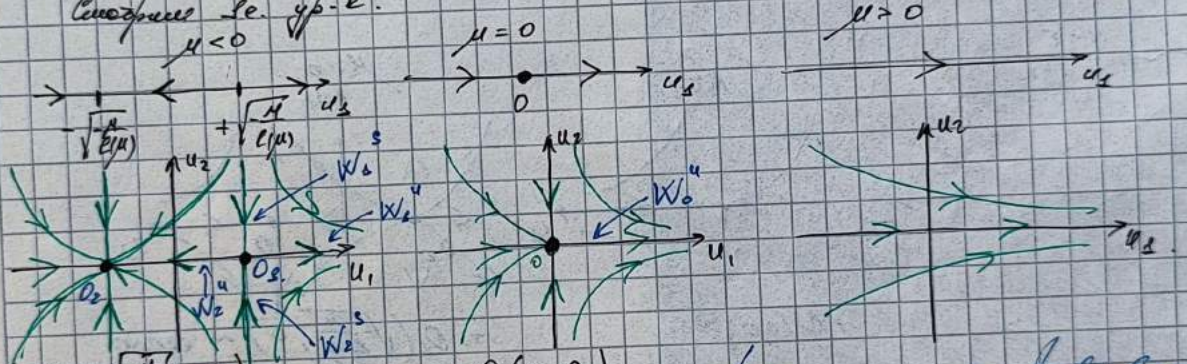
Из 2-го ур-я: собственное равновесие:

$$\mu + l(\mu) u_1^2 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{l(\mu)}} \text{ где не рассуждаем случаи:}$$

1. $l(\mu) > 0$.

а) $\lambda_2(\mu) < 0 \rightarrow$ сист. равн. $u_2 = 0$ из 2-го ур-я.

Смотрим 1-е ур-е.



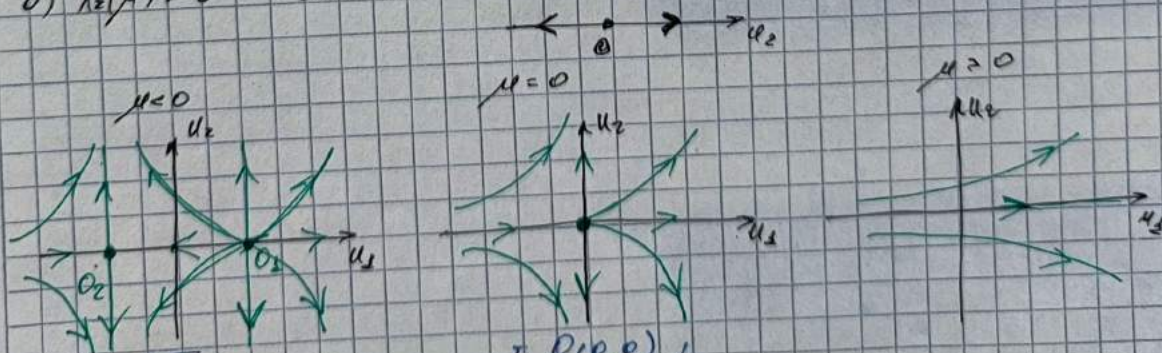
$$O_1 \left(+\sqrt{\frac{\mu}{l(\mu)}}, 0 \right)$$

$$O_2 \left(-\sqrt{\frac{\mu}{l(\mu)}}, 0 \right)$$

O_1 — седло; O_2 — узел.

$O(0,0)$ — неустойчивое равновесие
 — седло, узел.
 — седловое с.р.
 Свойственная область и седловая область, которая образуется сразу от точки двух вет. сепаратрис.

б) $\lambda_2(\mu) > 0 \rightarrow$ обн. u_2 ничего не изменилось, а для u_1 :



$$O_1 \left(+\sqrt{\frac{\mu}{l(\mu)}}, 0 \right)$$

$$O_2 \left(-\sqrt{\frac{\mu}{l(\mu)}}, 0 \right)$$

O_1 — седло
 O_2 — неуст. узел.

$O(0,0)$
 — неустойчивое с.р.
 — седло-узел.

$$2. \quad L(\mu) < 0$$

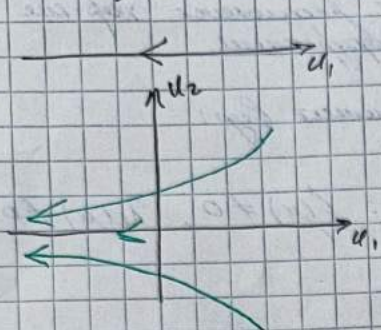
$$u_{1,c}^0 = \pm \sqrt{\frac{\mu}{L(\mu)}} \\ u_2^0 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu + L(\mu) u_2^2 \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu) u_2 \end{cases}$$

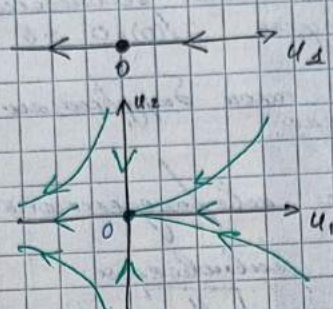
$$a) \quad \lambda_2(\mu) \neq 0$$

 $\Rightarrow$

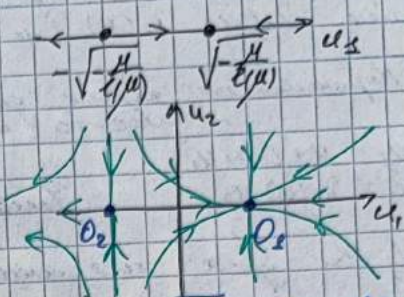
$$\mu < 0$$



$$\mu = 0$$

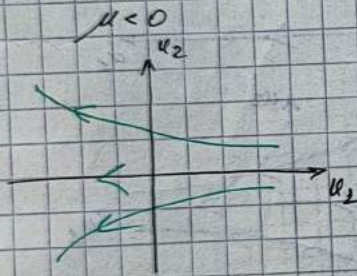

 $\therefore O(0,0) \text{ неустойчиво}$

$$\mu > 0$$

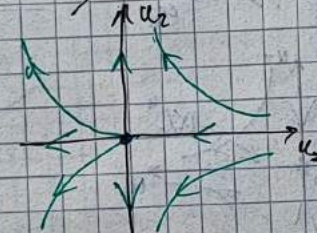

 $O_1(\sqrt{\frac{\mu}{L(\mu)}}, 0) \sim \text{устойчиво}$
 $O_2(-\sqrt{\frac{\mu}{L(\mu)}}, 0) \sim \text{устойчиво}$

$$b) \quad \lambda_2(\mu) > 0$$

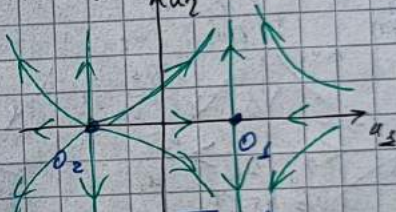
$$\mu < 0$$



$$\mu = 0$$


 $\therefore O(0,0) \sim$

$$\mu > 0$$


 $\therefore O_1(\sqrt{\frac{\mu}{L(\mu)}}, 0) \sim \text{устойчиво}$
 $\therefore O_2(-\sqrt{\frac{\mu}{L(\mu)}}, 0) \sim \text{устойчиво}$