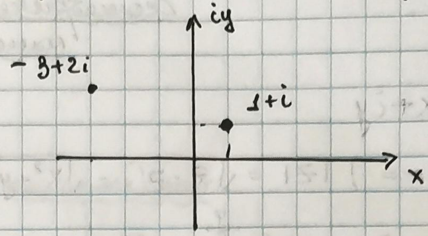
Понятие комплексного числа.

Опр. Под комплексным числом $z \in \mathbb{C}$ понимают пару действительных чисел (x, y), $x = \operatorname{Re} z$ — реальная часть, $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть.



i — мнимая единица

$i^2 = -1$

$z = (x, y) = x + iy$

Примеры компл. чисел: $1+i$; $-3+2i$; $3-5i$

Опр. z_1 и z_2 называются равными тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Операции с комп. числами.

$z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$.

1) $z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$

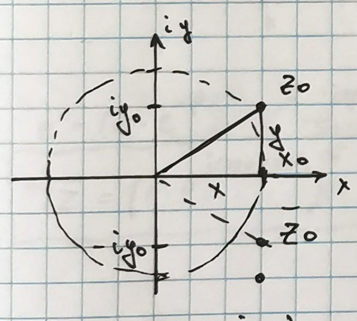
2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_2x_1 + iy_1x_2 + i^2 y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$

Опр. Комплексное число z называется чисто мнимым, если $x = \operatorname{Re} z = 0$ / назыв. действительным числом $y = \operatorname{Im} z = 0$.

3) $\operatorname{Im} z = y$; $\operatorname{Re} z = x$

4) Опр.: $\bar{z}$ — комплексно-сопряжённое числу z:

$$\bar{z} = x - iy$$
$$z = x + iy$$



если $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$ и $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$

$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + ixy - ixy + y^2 = x^2 + y^2$

5) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 - i(x_2y_1 - x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Примеры: $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = -2 + 5i$

$z_1 + z_2 = 3 + 2i - 2 + 5i = 1 + 7i$

$z_1 - z_2 = 5 - 3i$

$z_1 \cdot z_2 = (3+2i)(-2+5i) = -6 + 15i - 4i - 10 = -16 + 11i$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(3+2i)(-2-5i)}{4+25} = \dfrac{4-19i}{29}$

$\operatorname{Re} z_1 = 3$; $\operatorname{Im} z_1 = 2$

$|z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2 = 4+25 = 29$

Геометрическая интерпретация компл. числа.

$z = x+iy$

$(\rho = r =)\ |z| = \sqrt{z\cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ – модуль к.ч.

$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi;\quad -\pi<\varphi<\pi$

Форма компл. числа

1) $z=(x,y)=x+iy$ ~ алгебраическая форма к.ч.

2) $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi+2\pi n) + i\sin(\varphi+2\pi n)),\ n\in \mathbb{Z}$$

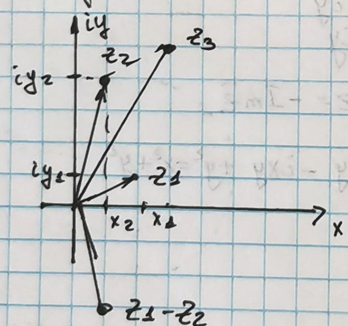
~ тригонометрическая ф-ма к.ч.

3) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ~ ф-ла Эйлера

$z = r\cdot e^{i\varphi}$

$z = r\cdot e^{i(\varphi+2\pi n)}$ ~ показательная форма к.ч.

$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi n$, где $\varphi\in(-\pi,\pi)$



$z_3 = z_1 + z_2$

$z_1 - z_2 = z_4$

$|z_1+z_2| \le |z_1+z_2|$

$|z_1-z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

Умножение в тригонометрической и показательной форме.

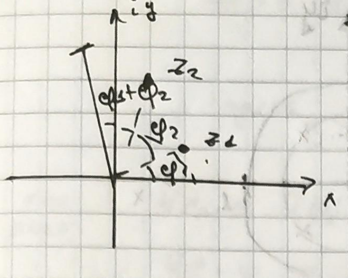
1) $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$z_1\cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$

$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_2+\varphi_1))$



Извлечение корня комплексного числа.

$z\cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin(2\varphi))$

$z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n) = r^n \cdot e^{i\varphi n}$

$(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 10} = 32\cdot e^{i(2\pi+\frac{\pi}{2})}$

$|1+i| = \sqrt{2};\ \varphi = \frac{\pi}{4}$

$\boxed{\sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{r}\cdot e^{i\frac{(\varphi+2\pi n)}{m}}}$ → m различных корней ($n=\overline{0, m-1}$)

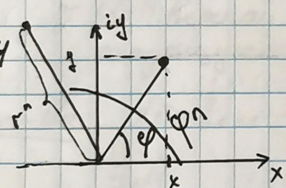
Пример: $\sqrt{i} = \sqrt{1\cdot e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}} = e^{i\frac{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}{2}}$

$n=0:\ z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

...

14.09.21.

$z = x+iy$



$r = |z| = \sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$

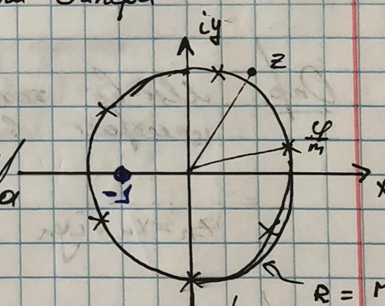
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ~ ф-ла Эйлера

$z = r\cdot e^{i\varphi} = r\cdot e^{i(\varphi+2\pi n)}$

$z^n = (r\cdot e^{i\varphi})^n = r^n\cdot e^{i\varphi n} = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n)$

$\boxed{\sqrt[m]{z} = (r\cdot e^{i(\varphi+2\pi n)})^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}}\cdot e^{i(\frac{\varphi+2\pi n}{m})}}$ — ф-ла Муавра

$n=\overline{0, m-1}$



~делит окружность на m равных частей.

Пример: $z^4+1=0$

$z^4 = -1$

$z = (-1)^{\frac{1}{4}} = (1\cdot e^{i(\pi+2\pi n)})^{\frac{1}{4}} = 1\cdot e^{i\frac{\pi+2\pi n}{4}}$

$|-1| = 1.$

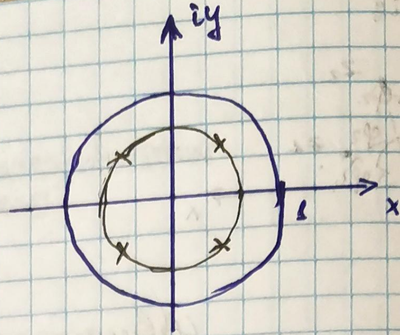
$\arg(-1) = \pi$

$n=0:\ z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$n=1:\ z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

$n=2:\ z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$

$n=3$: $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$



Пределы.

Предел последовательности к.ч.

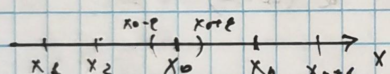
Опр.: Последовательность – пронумерованное множество к.ч., $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ – называется комплексной числовой послед-тью.

Опр. Число z_0 называется пределом последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, если

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N=N(\varepsilon);\ \forall n>N(\varepsilon) \quad |z-z_0|<\varepsilon.$$

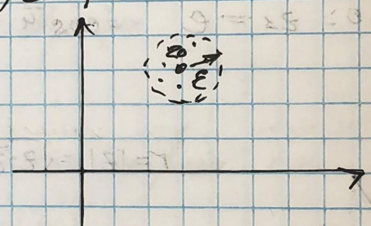
Геометрическая интерпретация:

а) $x_n \in R$



б) $z \in \mathbb{C}$

z_0 - точка сгущения



$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

Опр. Мн-во точек z нах-ся внутри окружности радиусом ε с центром в т. z_0 наз-ся ε-окрестностью точки z_0

$$|z-z_0|<\varepsilon$$

$$z_n = x_n + iy_n$$

Теорема 1 (Необходимое и достаточное условие сх-ти посл-ти)

~ Для того, чтобы посл-ть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $z_n = x_n + iy_n$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы сходились последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \mathrm{Re}\, z_n$, $y_n = \mathrm{Im}\, z_n$

Док-во

$\Rightarrow$ необх.: z_n - сходится к z_0

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2}$$

$$|x_n - x_0| < |z_n - z_0| < \varepsilon$$

$$|y_n - y_0| < |z_n - z_0| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon),\ \forall n>N(\varepsilon): \ |x_n-x_0|<\varepsilon_1$
$|y_n-y_0|<\varepsilon_2$.

пусть $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ~ т.е. необходимость доказана.

$\Leftarrow$: $\forall\varepsilon>0\ \exists N_1(\varepsilon): \forall n>N_1(\varepsilon): |x_n-x_0|<\varepsilon$
дост.

$\forall\varepsilon>0\ \exists N_2(\varepsilon),\ \forall n>N_2(\varepsilon): |y_n-y_0|<\varepsilon$

$N=\max\{N_1,N_2\} \to |x_n-x_0|<\varepsilon \quad \forall n>N(\varepsilon)$
$|y_n-y_0|<\varepsilon$

$$|x_n-x_0|^2+|y_n-y_0|^2 > |z_n-z_0|^2$$

$$|z_n-z_0| < \sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2} < \varepsilon$$

$N\to\infty \quad \varepsilon\to 0$

=> выполняется опр. посл. предела.

Опр: Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной, если $\exists M>0,\ M\in\mathbb{R}\ \ \forall n \ \ |z_n|\le M$

$\cancel{2+i > 1+3i}$?? Сравнивать можно только модули.

Теорема ~ Из всякой ограниченной послед-ти можно выделить сходящуюся подпослед-ть.

Док-во: $\{z_n\}_{n=1}$ – ограниченная

$\exists M \quad |z_n|\le M$

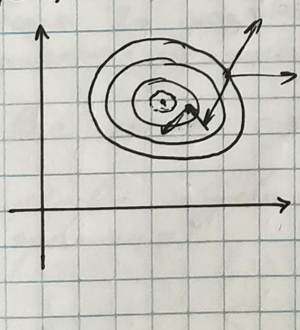
по т. МА о сход. подпосл.

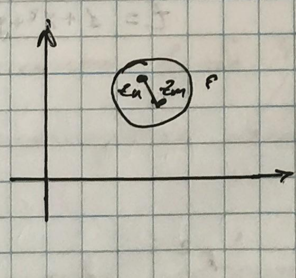
$\sqrt{x_n^2+y_n^2}\le M \to |x_n|\le M \to \{x_{n_k}\}\to$ сх.
$|y_n|\le M \to \{y_{n_k}\}\to$ сх.

$x_{n_t}+iy_{n_t}=z_{n_t}$
$\downarrow \quad \downarrow$
$x_t+iy_t=z_t$

$$\lim_{t\to\infty} z_{n_t}=z_t$$

Критерий Коши: Чтобы $\exists \lim_{n\to\infty} z_n=z_0 \iff \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall n,m>N(\varepsilon):$
$|z_n-z_m|<\varepsilon$





$z_n=x_n+iy_n$

$|x_n-x_m|<\varepsilon$
$|y_n-y_m|<\varepsilon$

Док-во: $|x_n - x_m| < \varepsilon$

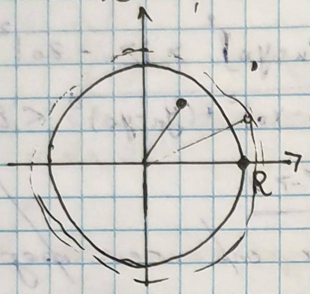
$|y_n - y_m| < \varepsilon$

$$\sqrt{|z_n - z_m|^2} \le \sqrt{|x_n - x_m|^2 + |y_n - y_m|^2} < \varepsilon$$

$$\varepsilon > |z_n - z_m| > |z_n - z_0|$$

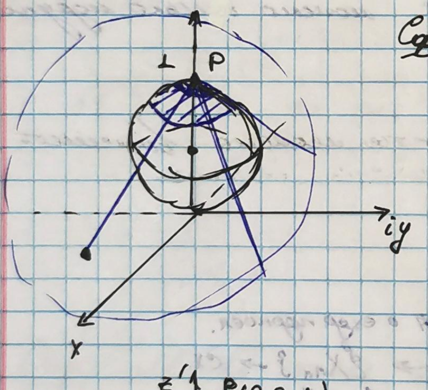
Понятие бесконечно удалённой точки.

$|z| < R$ но можем построить точку $|z| > R$



Опр.: Точка $z = \infty$ наз-ся бесконечно удалённой точкой в компл. плоскости, если $\forall R > 0$ $|z| > R$

Опр.: Комплексная пл-ть $\mathbb{C}$ вместе с бесконечно удалёнными точками образуют расширенную комплексную пл-ть $\overline{\mathbb{C}}$.



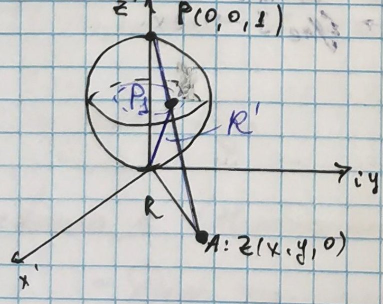
Сфера Римана.

$R = \frac{1}{2}$

P - полюс

Беск. уд. точки проектируются в сев. полюс (P) сферы Римана.
Другие точки проектируются пересечением прямых.

21.09.21.



$$\rightarrow \quad \frac{x' - 0}{x - 0} = \frac{y' - 0}{y - 0} = \frac{z' - 1}{0 - 1} = t$$

$$\begin{cases} x' = xt \\ y' = yt \\ z' = 1 - t \end{cases}$$

$$\xi = x' = \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \qquad \Leftarrow \qquad x'^2 + y'^2 + \left(z' - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\eta = y' = \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \qquad x^2t^2 + y^2t^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\zeta = z' = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \qquad t = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

Тогда: $\xi = \frac{\operatorname{Re} z}{1 + |z|^2}$

$$\eta = \frac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}$$

$$\zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} = \frac{R^2}{1 + R^2}$$

$|z|^2 = R^2$; $R'^2 = \eta^2 + \xi^2 + \zeta^2$

$$\xi^2+\eta^2 = \frac{x^2+y^2}{(1+|z|^2)^2} = \frac{R^2}{(1+|z|^2)^2} = \frac{R^2}{(1+R^2)^2}$$

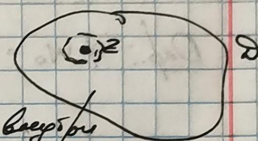
Если $R \to \infty$ $\zeta \to 1$, а $\xi^2+\eta^2 \to 0$

~док-ли.

Определение ф-ии комплексного переменного.

Опр. Пусть есть мн-во точек $E \in \mathbb{C}$, и существует — мн-во точек $D \in \mathbb{C}$, существует закон $f(z): E \to D$.

Опр. т.-ка z наз-ся внутренней т-й мн-ва D, если $\exists\, \varepsilon$-окрестность точки z, которая целиком лежит в мн-ве D



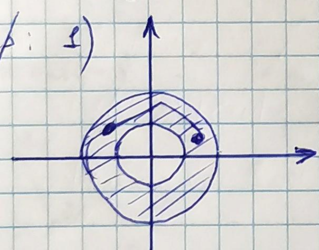
Опр. т-ка z_0 — граничная точка мн-ва D, если $\forall\, \varepsilon$-окр-ть т-ки z_0 содержит т-ки, лежащие внутри и вне D.

Пример: 1) $|z|=1$ — внутр. точки $|z|<2$

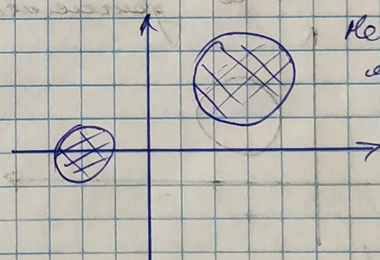
2) $|z|=1$ — не явл. внутр. $|z|\leq 1$ (граничная.)

Опр. Мн-во D называется связным, если любые две точки из D можно соединить ломаной линией целиком лежащей в D.

Пример: 1)



$1<|z|<2$ 2)



Несвязные мн-ва

Опр. Мн-во D назовём областью, если

1) D - связное мн-во

2) $\forall z \in D$ — внутр. т-ка.

Пример: $|z|<2$ — область

$|z|\leq 2$ — не область (есть граничные точки)

Опр. Точка z_0 называется внешней точкой мн-ва D, если ε-окр-ть z, целиком не принадлежащая D

Опр. Всё мн-во т-к, граничных в обл. D, $\bar{D}$ назовём границей D:

(X, Г, R)

Мн-во называется замкнутым, если оно содержит свою границу.

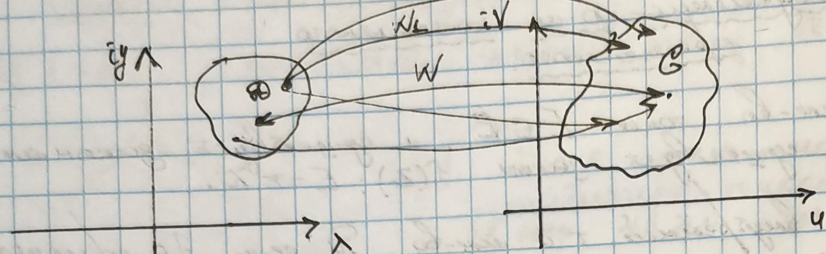
Опр. Если для области D можно построить круг R: D- целиком лежит внутри круга, то D-ограниченная область (огр. мн-ва)

Опр: $f(z)$ называется однозначной, если $\forall z$ она принимает различные значения.

$$w = f(z)$$

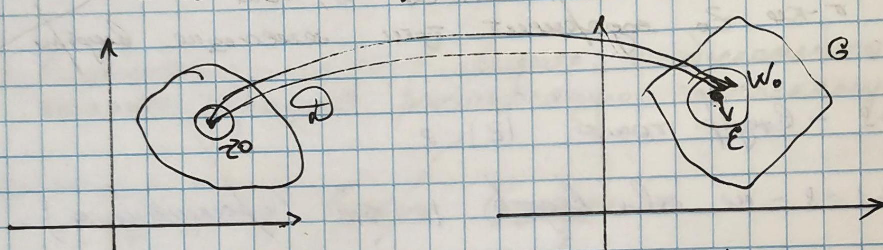
Структура: $z = x + iy$

$\rightarrow \quad w(z) = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad : \quad u(x,y) = \operatorname{Re} w, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} w$

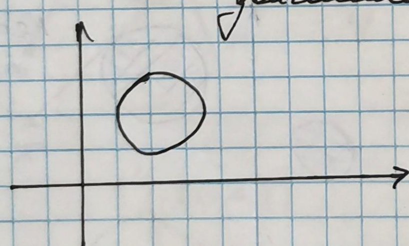


однозначности нет.

Опр.: $\{ w_0 = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \} \iff \{ \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(z_0, \varepsilon) > 0 : \;\; \forall z : \; 0 < |z - z_0| < \delta : \;\; |f(z) - w_0| < \varepsilon \}$



Опр: $w = f(z)$ наз-ся непрерывной в окрестности z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A = f(z_0)$ и не зависит от напр., по которому движемся к z_0



Опр: $w = f(z)$ наз-ся непрерывной на мн-ве D, если она непрерывна в каждой точке этого мн-ва.

Св-ва непр. ф-ций:

1) $w = f(z)$ – непрерывна в D, то $u(x,y)$, $v(x,y)$ – непрерывные.

2) $f_1(z)$, $f_2(z)$ – непрерывны в D $\Rightarrow$ $\left. \begin{matrix} f_1(z) \pm f_2(z) \\ f_1(z) \cdot f_2(z) \end{matrix} \right\}$ непрерывны.

3) $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ – непрерывны в D, если $f_2(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$

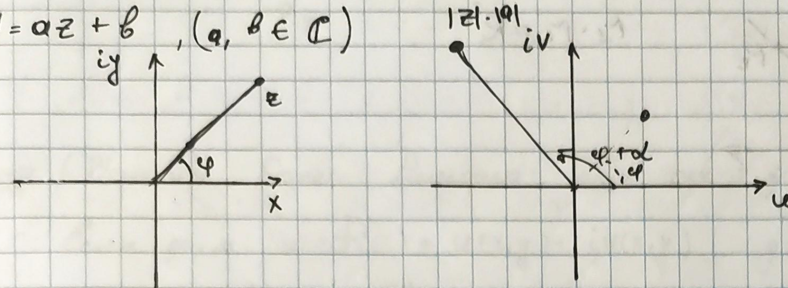
4) Если $f(z)$ непр. в D и D – огранич., то $f(z)$ – огранич. в D.

$\exists M \in \mathbb{R}, \; M > 0 : \; |f(z)| < M$

Виды функций комплексного переменного.

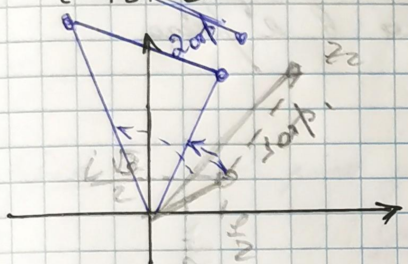
1) Линейная функция.

$W = az + b$, $(a, b \in \mathbb{C})$



? Поворачивает, растягивает и выполняет паралл. перенос

$\left.\begin{array}{l} a = |a|\cdot e^{i\alpha} \\ z = |z|\cdot e^{i\varphi} \end{array}\right\}$ $a\cdot z = |a||z|\, e^{i(\varphi+\alpha)}$



$W = (1+i)\,z + 2i$

$\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_1 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

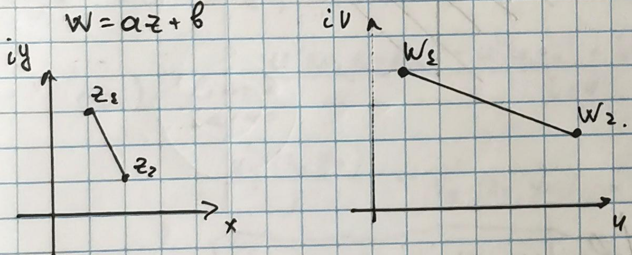
$z_2 = \sqrt{3} + i$

$|z_1| = 1$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$

$|z_2| = 2$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$

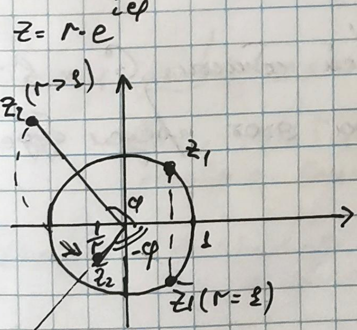
28.09.21.

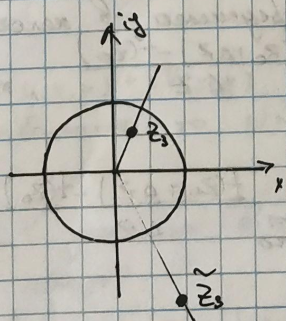
$W = az + b$



2) $W = \frac{1}{z} =$

$z = r\cdot e^{i\varphi}$



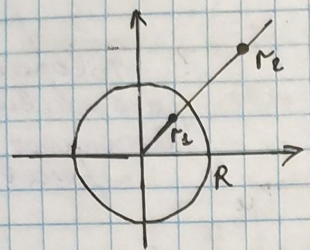


Отображение всего, что внутри круга → на бесконечную плоскость, или, что за кругом → в него.

Св-во: отображение является однозначным

Инверсией называется такое отображение, в котором каждой точке внутри круга радиуса r соответствует точка, расп. вне круга радиуса r.

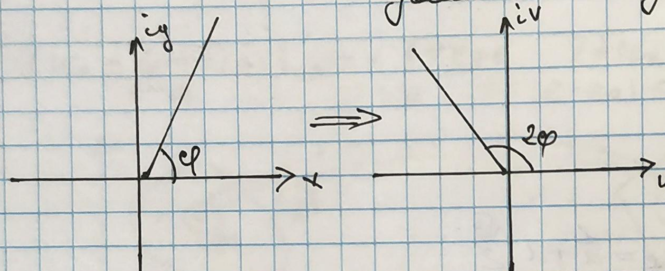
Опр:



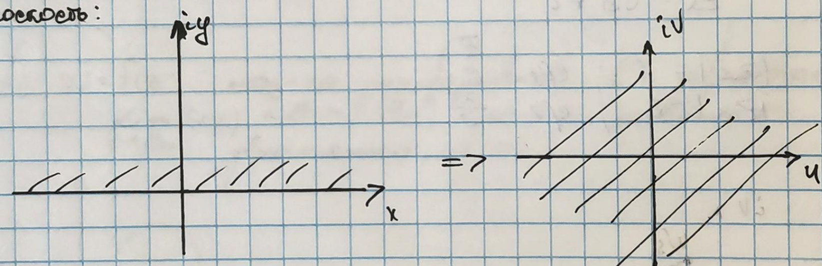
$r_1 \cdot r_2 = R^2$

3) $W = z^{\alpha}$

$W = z^2 = r^2 \cdot e^{2i\varphi}$ ~ происходит растяжение пространства с увеличением угла в 2 раза.



Плоскость:



$W = z^2 \rightarrow z = \sqrt{W}$

Дифференцирование ф-ий комплексного переменного.

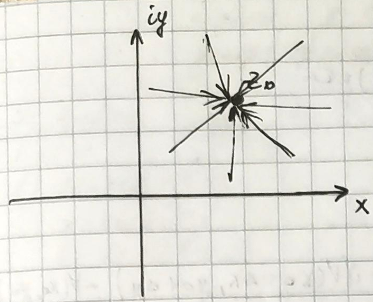
$w = f(z)$

Опр: Пусть ф-я $w=f(z)$ определена в некоторой области G, и в окр. точки z_0 $\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$, тогда этот предел будем называть производной:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

а $f(z)$ - дифф-я функция

Геометрическая интерпретация:



$$w = f(z) = u(x,y) + iV(x,y)$$

Теорема (Условие Коши-Римана для опр-я диф-ти функции)

~ Если ф-я $w = f(z) = u(x,y) + iV(x,y)$ диф-ма в т. z_0, то $\exists$ частная производная ф-ий $u(x,y)$ и $V(x,y)$, которые должны удовлетворять следующим условиям:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}}$$

← условие Коши-Римана.

Док-во: Если ф-ия диф-ма, тогда

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

1) Пусть $\Delta z = \Delta x$, $\Delta y = 0$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0) + i(V(x_0+\Delta x, y_0) - V(x_0,y_0))}{\Delta x} =$$

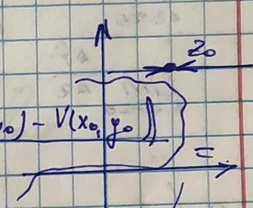
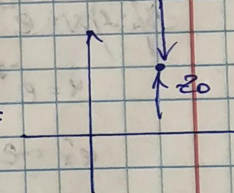


график [illegible]

$$= u'_x(x_0,y_0) + iV'_x(x_0,y_0)$$

2) Когда $\Delta z = i\Delta y$, $\Delta x = 0$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{i\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) + i(V(x_0,y_0+\Delta y) - V(x_0,y_0))}{i\Delta y} =$$



$$= \frac{u'_y(x_0,y_0)}{i} + V'_y(x_0,y_0) = -i\,u'_y(x_0,y_0) + V'_y(x_0,y_0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} u'_x(x_0,y_0) &= V'_y(x_0,y_0) \\ -u'_y(x_0,y_0) &= V'_x(x_0,y_0) \end{aligned}}$$

, ч. т. д.

Обратное утверждение:

~ Если $w = f(z) = u(x,y) + iV(x,y)$, где $u(x,y)$ и $V(x,y)$ удовлетворяют условию Коши-Римана, то $w = f(z)$ диф-ма в D.

Док-во: $z_0 = x_0 + iy_0$

т.к. ф-ии u, v диф-мы в каждой точке, то:

$$u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) = u'_x(x_0,y_0)\Delta x + u'_y(x_0,y_0)\Delta y + \underbrace{\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)}_{\text{беск. малая}}$$

ДУРАК

$$V(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - V(x_0,y_0) = V'_x(x_0,y_0)\Delta x + V'_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}} \frac{\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)}{|\Delta z|}=0 \quad ; \quad \lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}} \frac{\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)}{|\Delta z|}=0$$

$$|\Delta z|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)+i[V(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-V(x_0,y_0)]}{\Delta z}=$$

в т. x_0,y_0

$$=u'_x\frac{\Delta x}{\Delta z}+u'_y\frac{\Delta y}{\Delta z}+\frac{\varepsilon_1}{\Delta z}+i\left(V'_x\frac{\Delta x}{\Delta z}+V'_y\frac{\Delta y}{\Delta z}+\frac{\varepsilon_2}{\Delta z}\right)=$$

Используем условие Коши-Римана:

$$u'_y\frac{\Delta y}{\Delta z}=-V'_x$$

$$V'_y\frac{\Delta y}{\Delta z}=u'_x$$

$$=u'_x\frac{\Delta x}{\Delta z}-V'_x\frac{\Delta y}{\Delta z}+i\left(V'_x\frac{\Delta x}{\Delta z}+u'_x\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)+\frac{\varepsilon_1+i\varepsilon_2}{\Delta z}=\left\{\text{теперь } \begin{matrix}\Delta x\to0\\ \Delta y\to0\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\left\{\begin{matrix}\Delta y=0\\ \Delta x\to0\end{matrix}\right\}=u'_x+iV'_y$$

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\left\{\begin{matrix}\Delta x=0\\ \Delta y\to0\\ \text{Условие КР}\end{matrix}\right\}=-V'_x+i\cdot u_x$$

Опр Функция, для которой выполняется условие Коши-Римана называется аналитической функцией.

Пр: 1) $W=e^{iz}=e^{ix-y}=e^{-y}\cdot e^{ix}$

$u=e^{-y}\cos x$; $V=e^{-y}\sin x$

$u'_x=-e^{-y}\sin x = V'_y=-e^{-y}\sin x$

$V'_x=e^{-y}\cos x \quad u'_y=-e^{-y}\cos x$

$\Rightarrow W'_z=(e^{iz})'=ie^{iz}$

2) $W=\operatorname{Re} z^2=\operatorname{Re}(x^2-y^2+2ixy)=x^2-y^2$

$u=x^2-y^2$; $V\equiv0$ ~ не выполн. условия Коши-Римана.

3) $W=\bar z=\overline{x+iy}=\underbrace{x}_{u}-\underbrace{iy}_{V}$

$U'_x=1\neq V'_y=-1$ ~ не выполн. усл. КР

Следствие: (Необходимое и достаточное условие аналитичности ф-ии).

Пусть $w=f(z)=u(x,y)+iV(x,y)$, тогда необх. и дост. условием аналит. ф-ии W в обл D является:

— если в $D \in \mathbb{C}$ $u(x,y)$ и $V(x,y)$ явл. непрерывно-дифференц. условиями К-Р.

Проверка усл. К-Р.

1) $W = az + b$

$a = a_1 + i a_2$

$b = b_1 + i b_2$.

$u = (a_1 x - a_2 y) + b_1$

$V = a_1 y + a_2 x + b_2$.

$\to$ $u'_x = a_1 \equiv V'_y = a_1$

$u'_y = -a_2 \equiv -(V'_x = a_2)$

выполн. усл. К-Р.

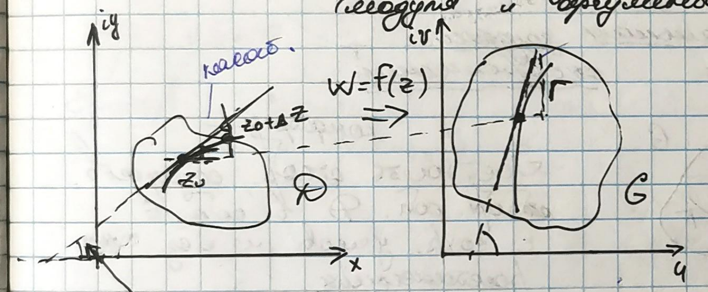
2) $W = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

$u'_x = 2x \qquad V'_y = 2x$

$u'_y = -2y = -(V'_x = 2y)$ — выполн. усл. К-Р.

12.10.21.

Геометрический смысл производной.
(модуля и аргумента).



γ - гладкая кривая

$W = f(z)$

$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in T$

$z = x(t) + iy(t)$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$$

$W(t_0) = u(t_0) + V(t_0)$

$$W'_t(t_0) = f'_z(z_0)\cdot z'_t(t_0) = |f'_z|\cdot e^{i\arg f'_z(z_0)} \cdot |z'_t| \cdot e^{i\arg z'_t(t_0)}$$

$$\arg f'_z(z_0) = \arg W'_t(t_0) - \arg z'_t(t_0) \qquad (1)$$

$$k = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta W|}{|\Delta z|} = |f'_z(z_0)|$$

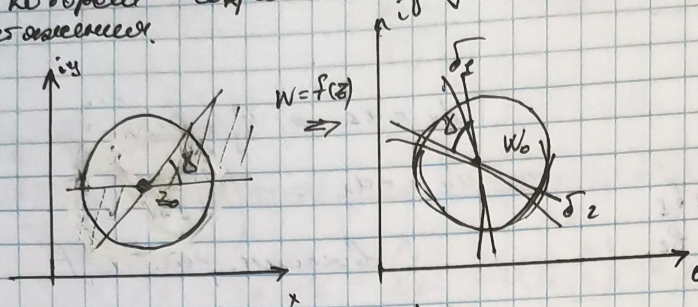
$|\Delta W| = k|\Delta z|$ $\Rightarrow$ Аргумент (1) - изменение угла касательной при отображении по закону $W = f(z)$

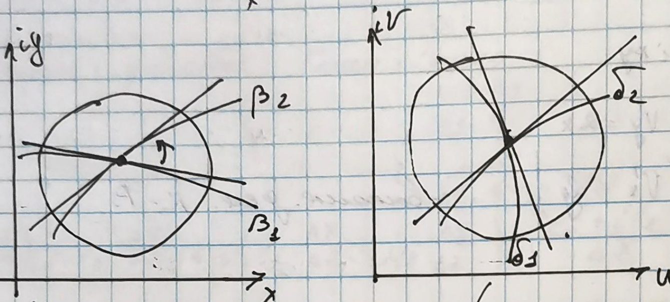
k - модуль производной - коэф. растяж. элемент. площадки Δz, при отображении с плоскости z на $W = f(z)$

Конформное отображение

$w = f(z)$

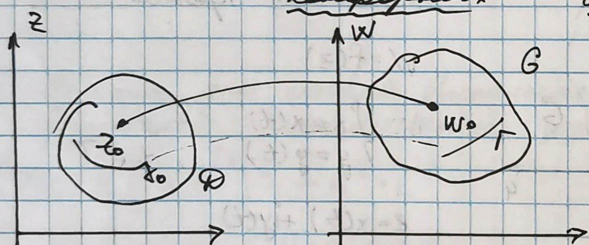
Опр. Род конформного отобр. называют ф-ю компл. переменного, при котором сохраняются углы поворота и коэффициент растяжения.





Если напр. угла меняется на противоположное — это конформное отобр. 2 рода (иначе 1 рода.)

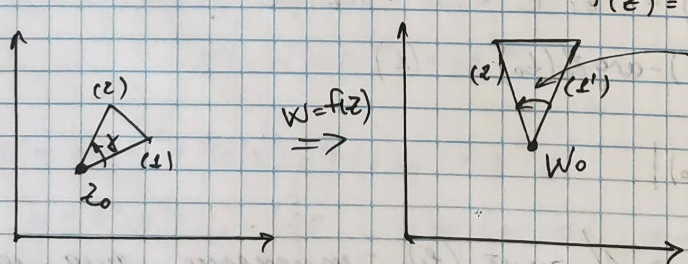
Фундаментальная задача конформных отображений.



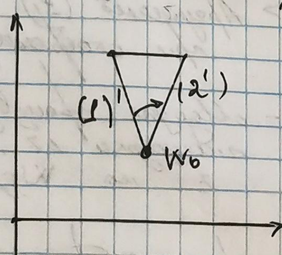
Построить конформное отобр., осуществ. отобр. обл. D в обл. G с сохр. углов и без растяжения.

Применение: в задачах гидродинамики, аэродинамики, ф-ла Жуковского:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$



~ 1 рода



~ 2 рода

Св-ва конформного отобр.

Замечание: конформ. отобр. осуществляется однолистными ф-ями

Теорема 1.
~ Пусть ф-я $w=f(z)$ явл. однолистной и аналитической в обл. G, тогда $f(z)$ выполняет конформное отображение области G из области $D \in W$

Теорема 2.
~ Пусть ф-я $w=f(z)$ выполняет конформное отображение области G в область $D \in W$. Пусть $f(z)$ - ограничена в D, тогда $w=f(z)$ является однолистной и $\exists f'_z(z_0)$

Замечание: Если $w=f(z)$ - выполн. конф. отобр. $1^{го}$ рода, то $\overline{W} = \overline{f(z)}$ (компл. сопр.) — конф. отобр. $2^{го}$ рода.

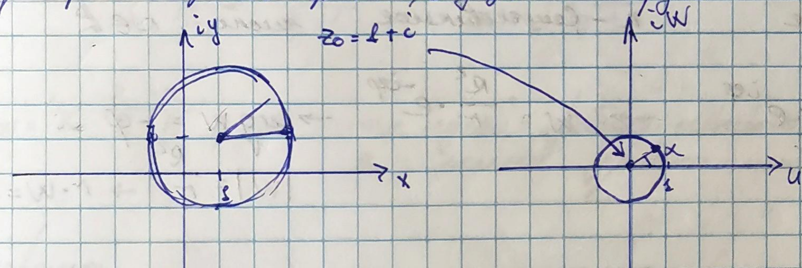
Простейшие конформные отображения:

1) Линейная ф-я:

$$w = az + b \quad \to \quad z = \frac{w}{a} - \frac{b}{a}$$

$$w'_z = a$$

Пример: построить ф-ю, осущ. к.о. кругом $|z-1-i| \le 2 \Rightarrow |w| \le 1$



$w(1+i) = 0 + i\cdot 0$

$w = a(1+i) = \frac{1}{2} e^{i\alpha}(1+i) = 0+i0$

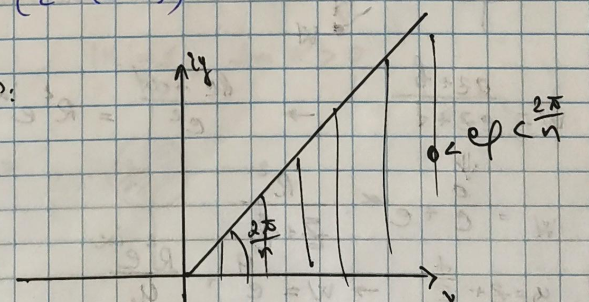
$|w'_z| = k = \frac{1}{2}$

$$w(z) = a(z-(1+i)) = \frac{1}{2} e^{i\alpha}(z-(1+i))$$

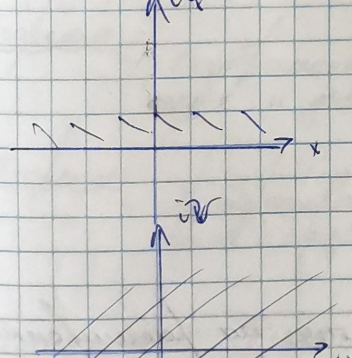
2) Степенная функция:

$$w = z^n = |z|^n \cdot e^{i\varphi n}$$

P:

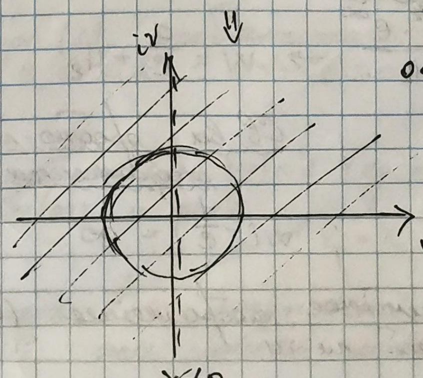


Пример: $w = z^2$; $\operatorname{Im} z > 0$



$\Downarrow$

$0 < \varphi < \infty$

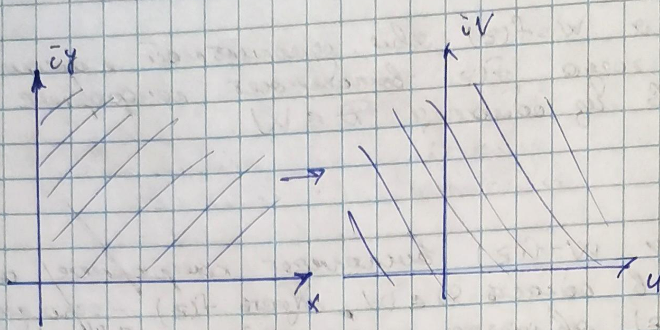


$x \ne 0$

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}\cdot k \to \varphi = 2\pi k$$

$$|z| = r \to |w| = r^n$$

Пример: Нужно отобразить:



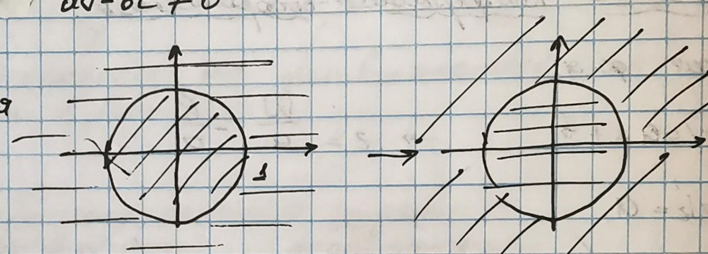
$\operatorname{Im} z > 0$

$\operatorname{Re} z > 0$ $\qquad w = a z^2 + b$

3) Дробно-линейное отображение:

(1) $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $\quad ad - bc \neq 0$

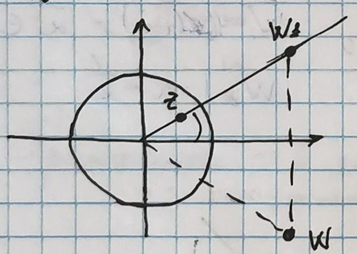
$w = \dfrac{1}{z}$ ~ инверсия



$w = kz$ - подобие $\qquad$ k - вещественное число, $k \in R$

$$w = \frac{R^2}{z} \qquad z = r\cdot e^{i\varphi} \to w = \frac{R^2}{r}\cdot e^{-i\varphi} \to \arg w = -\varphi$$

$$|w| = \frac{R^2}{r} \to r\cdot w = R^2$$



$$w = \frac{az+b}{cz+d} \to \frac{bc-ad}{c^2} = R^2 e^{i\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$w = \frac{a}{c} + e^{i\alpha}\cdot\frac{R^2}{z+\frac{d}{c}}$$

1) $u_1 = z + \dfrac{d}{c} \to w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{R^2 e^{i\alpha}}{u_1}$

паралл. перенос

2) $u_2 = \dfrac{R^2\cdot e^{i\alpha}}{u_1} \to w = \dfrac{a}{c} + u_2$

Св-ва дробно-линейного отображения.

$$w(\infty) = \frac{a}{c} \quad ; \quad w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

1) Дробно-линейное отображение (3) - аналитич. на расширенной комплексной пл-ти.

(3) осуществляет взаимно-однозначное (конформное) отображение расширенной плоскости $(z) \to (w)$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

1. Теорема. – Дробно-линейное преобразование (1) может отобразить одну плоскость конформно на другую так, что произвольно заданные 3 различные точки пл-ти (z) переходят в произвольно заданные 3 различные точки плоскости (w)

$$z_1, z_2, z_3 \to w_1, w_2, w_3$$

$$w_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d} \qquad w_2 = \frac{az_2+b}{cz_2+d} \qquad w_3 = \frac{az_3+b}{cz_3+d}$$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

Пример:

$z = -1, 1, \infty$ $\qquad$ $w = 0, 1, -1$

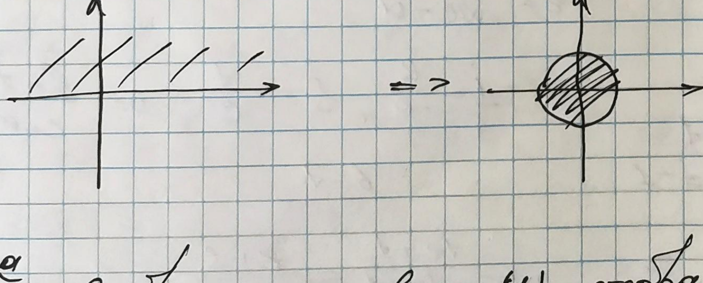
$$\frac{w-0}{w-1} : \frac{-1}{-1-1} = \frac{z+1}{z-1} : \cancel{\frac{\infty+1}{\infty-1}}$$

$$\frac{2w}{w-1} = \frac{z+1}{z-1} \to w = \frac{z+1}{-z+3}$$

(3) $w = k\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$, где α – "нуль" дробно-линейного преобр.
β – полюс дробно-линейного преобр. $w(\beta) = \infty$

2 Теорема. – Чтобы дробно-линейное отображение (3) отображало $\operatorname{Im} z > 0$ в круг $|w| < 1$, необх. и достаточно

$$w = k\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}, \quad |k| = 1, \quad \operatorname{Im}\alpha > 0$$



3 Теорема – Отображение вида (1) отображало в себя: необх. и дост., $a, b, c, d \in R$, $ad - bc > 0$.

4 Теорема. – Преобразование (3) отображало $|z| < 1$ (ед. круг) в един. круг $|w| < 1$ необх. и дост.
$$w = k\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \quad |k| = 1$$

Замечание: Ф-ия в теоремах 2-4 однозначно отображает область D в G если имеют место дополнит. условия:

1) $z_0 \to w_0$
$z_0 \in D \quad w_0 \in G$

2) z_0 - внутр. точка, z_1 - граничная т-ка
$\downarrow \qquad \downarrow$
w_0 - внутр. т. G $\quad w_1$ - граничная т-ка G

3) 3 произвольные граничные точки $D \to 3$ произвольные граничные точки G.

1 Пример:

$$\operatorname{Im} z > 0 \to |w| < 1: \ w(i) = 0, \ \arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}$$

Решение:

$$\boxed{w = k\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}}, \ |k| = 1$$

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \Rightarrow \alpha \text{ и } \varphi$$

$$w(i) = e^{i\varphi}\frac{i-\alpha}{i-\bar{\alpha}} = 0 \Rightarrow \alpha = i, \ \bar{\alpha} = -i$$

$$\frac{dw}{dz} = e^{i\varphi}\frac{2i}{(z+i)^2} \to w'(i) = \frac{e^{i\varphi}2i}{(2i)^2} = -\frac{ie^{i\varphi}}{2}$$

$$\arg w'(i) = -\frac{\pi}{2} = \arg(-i) + \arg\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 0 + \varphi$$

$$\varphi = 0$$

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

2 Пример: $\operatorname{Im} z > 0 \to \operatorname{Im} w > 0$
$-1, 0, 1 \Rightarrow 0, 1, \infty$

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \to w(cz+d) = az+b$$
$$wcz + wd = az + b$$

$$z = \frac{b - wd}{wc - a}$$

$\frac{b}{d} = 1$
$c + d = 0$
$a - b = 0$
$a = b, \ c = -d, \ b = d$
$d = 1 \to a = b = 1, \ c = -1$

$$w = \frac{z+1}{-z+1}$$

$$-1 = \frac{b}{-a}; \ 1 = -\frac{d}{c}; \ 0 = \frac{b-d}{c-a}$$

$$b = d$$

$$w = \frac{dz+d}{-dz+d} = \frac{z+1}{-z+1}$$

Круговое св-во дробно-линейной ф-ии:

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0, \ A \neq 0 \quad (4)$$

5 Теорема. ~ Дробно-линейная функция преобразует ф-ло (4) окружность в $\Rightarrow$ окружность

Пример: $w = \frac{z+1}{2z+1}$

$4x^2+4y^2+2x-5y=1$ → окружность

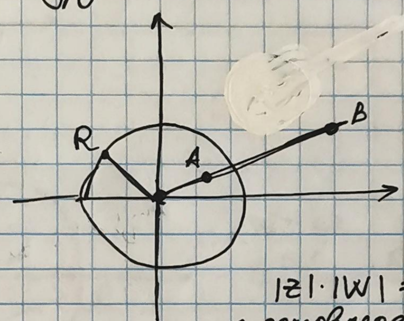
$z = -\frac{1}{2}$ — нет точек являющ. полюсами ф-ии w

преобразование

$4x^2+4y^2+2x-5y=0$ → прямая

т.е. определяем по полюсу.

Опр.: точки A и B называются симметричными отн. окружности Ω, если каждая из них является инверсией другой относительно окружности.



$|z| \cdot |w| = R^2$ — основное св-во инверсии.

Теорема: — Если дробно-линейное преобразование (1), (3) переводит окружность → окружность, то точки симметричные относительно первой окружности ⟹ точки симметричные относит. 2-й окружности.

Пример: $|z|<1 \Rightarrow |w|<1$

точка α перешла в центр круга.

$\alpha = re^{i\varphi} \to \frac{1}{r}e^{i\varphi} = \frac{1}{r \cdot e^{-i\varphi}} = \frac{1}{\bar{\alpha}}$

$z = \alpha \to w = 0 \;\; -> \;\; z = \frac{1}{\bar{\alpha}} \to w = \infty$

$w(\alpha) = 0 \qquad w\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right) = \infty$

$w = k_1 \frac{z-\alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} = k \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \Rightarrow |z|=1 \Rightarrow |w|=1$

$|w| = |k| \cdot \left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|$

$1 = |k| \cdot \left|\frac{(z-\alpha)}{z\left(\frac{1}{z}-\bar{\alpha}\right)}\right| = |k| \left|\frac{z-\alpha}{\bar{z}-\bar{\alpha}}\right|$

$|z|=1 \qquad \bar{z}$

$\overline{z-\alpha} = \bar{z}-\bar{\alpha}$

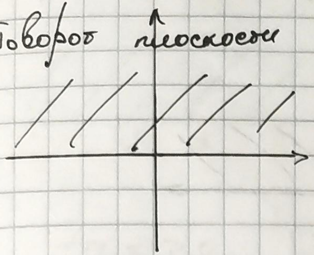
$|z| = |\bar{z}| \Rightarrow |k| = 1$

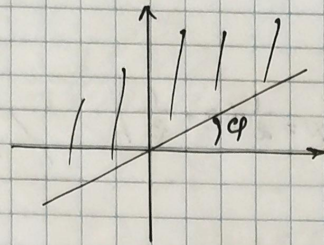
$k = e^{i\varphi}$

$$(5)\quad \boxed{w = e^{i\varphi}\,\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}}$$ — общ. вид преобр. единичного круга в себя

Основные подходы при выполнении конформных отображений.

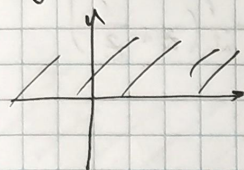
1. Поворот плоскости

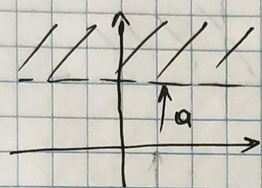




$w = e^{i\varphi} z$

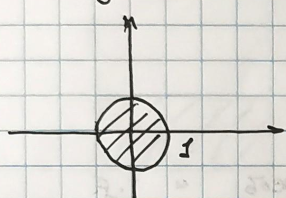
2. Сдвинуть плоскость

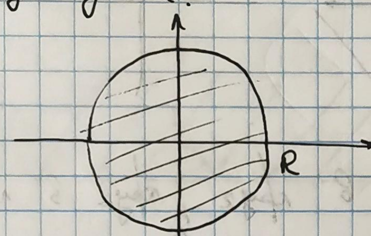




$w = z + a$

3. Круг с единичного радиуса до R.

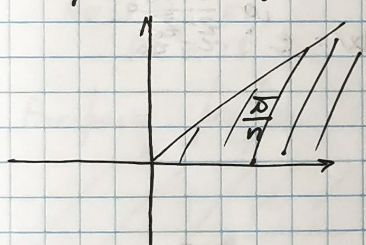


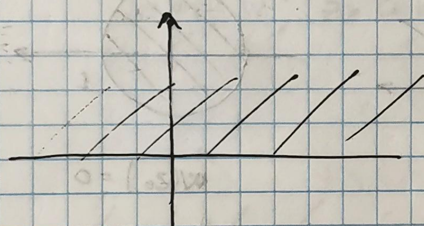


$W = kz$

$\underline{k > 1}$, $\underline{R > 1}$

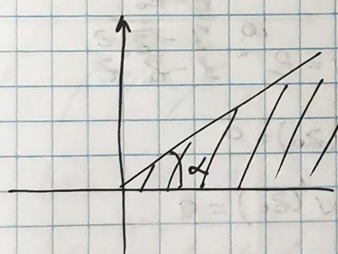
4. Сектор на полуплоскость.





$w = z^n$

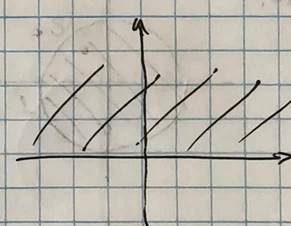
5.



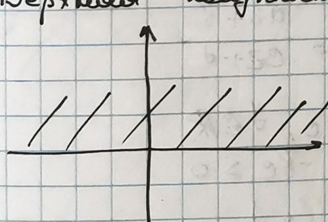
α - не кратно n

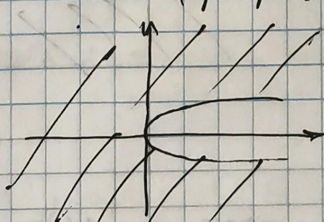
$0 < \operatorname{Arg} z < \alpha < \pi$

$w = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$



6. Верхняя полуплоскость растягивается (разрез по лучу от 0 до $+\infty$)

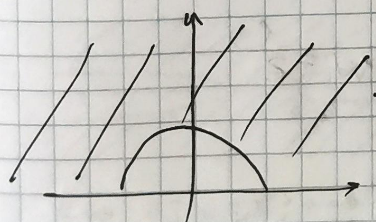




$w = z^2$

$\operatorname{Im} z > 0$

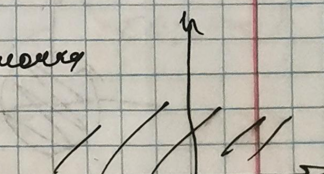
7)



$\operatorname{Im} z > 0$,

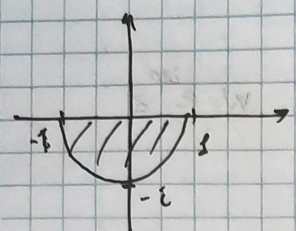
$|z| > 1$

Восстановление Жуковского

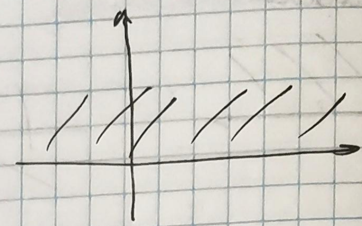


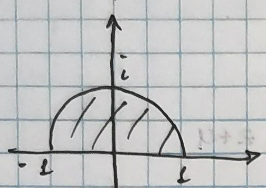
$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ ~ ф-я Жуковского.

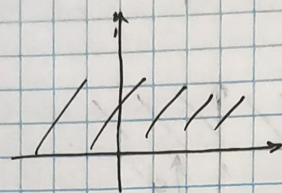
8.



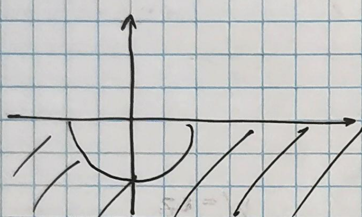
$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

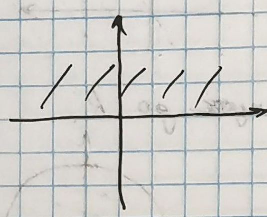






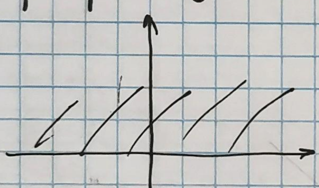
$w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$



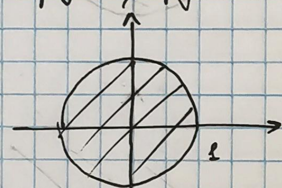


$w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

9. Преобр. полупл-ти в круг, круг в плоскость и т.д.



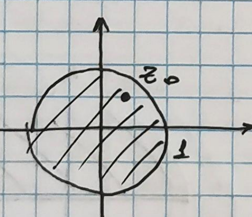
$\operatorname{Im} z > 0$

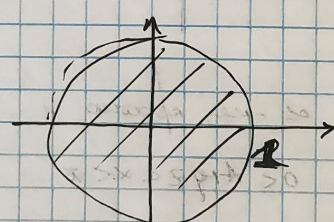


$w(z_0) = 0$

$w = e^{ia} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$

10.



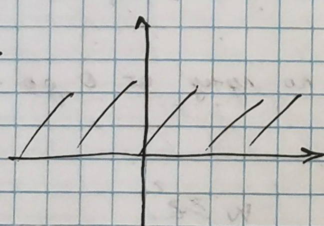


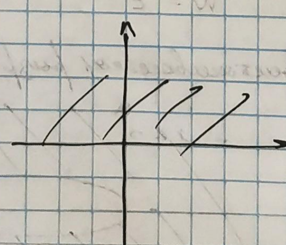
$w = e^{ia} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 \cdot z}$

$w(z_0) = 0$

$\operatorname{Arg} w'(z_0) = a$

11.



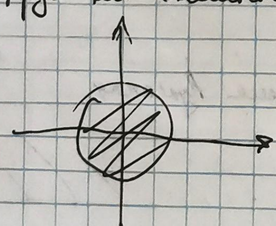


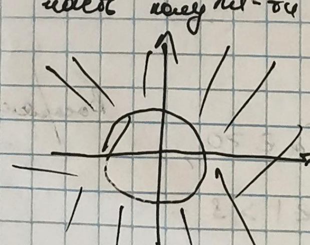
$w = \frac{az + b}{cz + d}$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$ad - bc > 0$

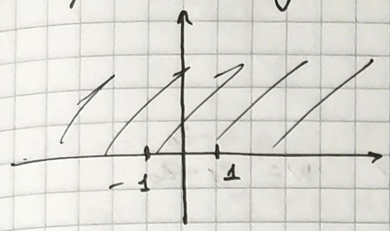
12. Круг на внешнюю часть полупл-ти (выворачив.)

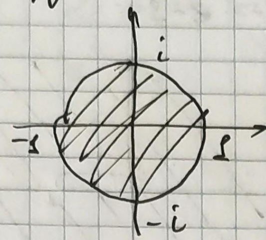




$w = \frac{1}{z}$

13. Верхняя полуплоск-ть в круг.



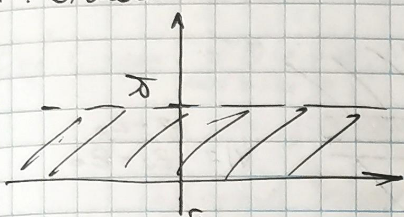


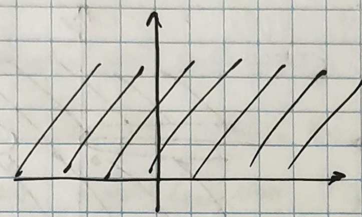
$$\frac{w+1}{w+i}\cdot\frac{1+i}{1+1}=\frac{z+1}{z+0}\cdot\frac{1-0}{1+1}$$

по ф-ле, чтобы $1 \to 1$
$-1 \to -1$
$i \to i$

$\operatorname{Im} z > 0$ $\quad |w| < 1$

14. Полоса.

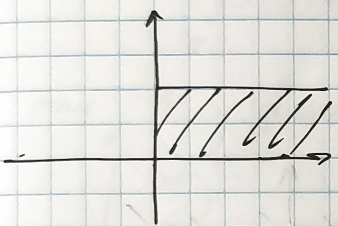


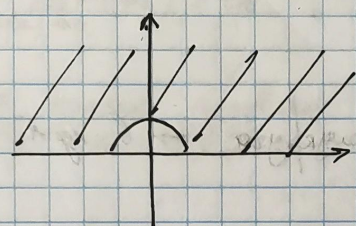


$w = e^z$

$0 < \operatorname{Im} z < \pi$

15.

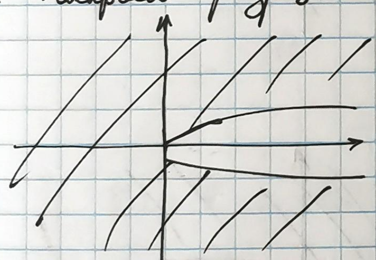


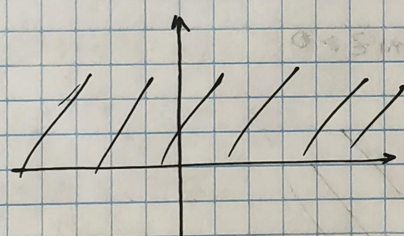


$0 < \operatorname{Im} z < \pi$
$\operatorname{Re} z > 0$

$w = e^z$; $z = \ln w$

16. Раскрыть разрез.

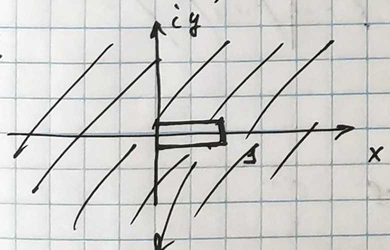




$w = \sqrt{z}$

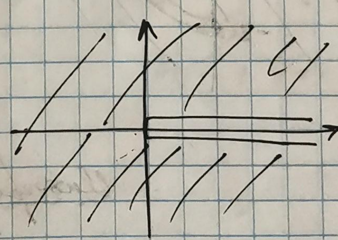
$[0; +\infty)$

17.



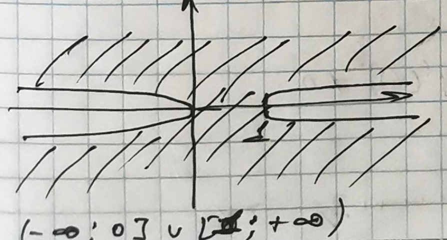
Продлить разрез

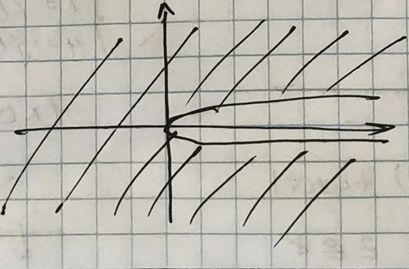
$w = \dfrac{z}{1-z}$



$[0; 1]$ $\quad [0; +\infty)$

18. Два действительных разреза.



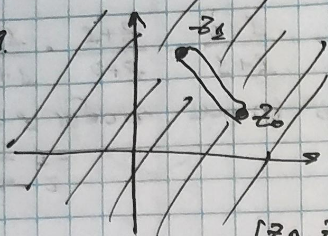


$[0; +\infty)$

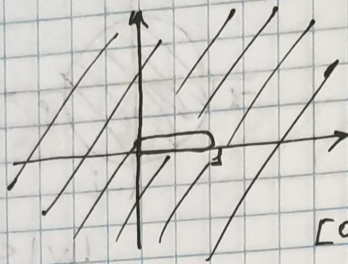
$(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

$$w = \frac{z}{z-1}$$

19.



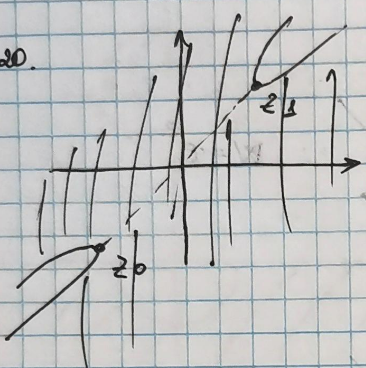
$[z_0, z_1]$

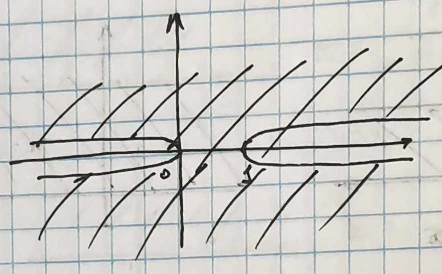


$[0; 1]$

$$w = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

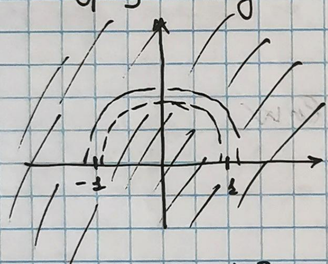
20.





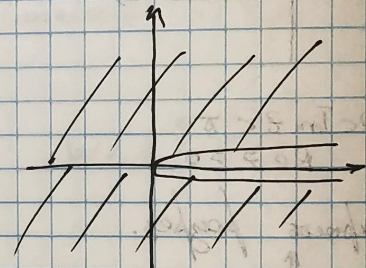
$$w = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

21. Разрез в виде полукруга $\to$ в луч.

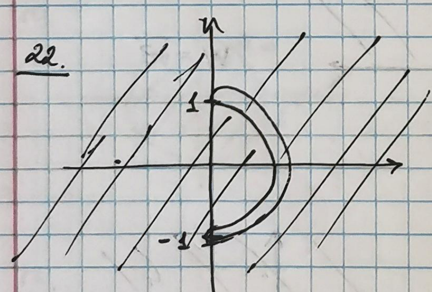


$|z| = 1$; $\operatorname{Im} z > 0$

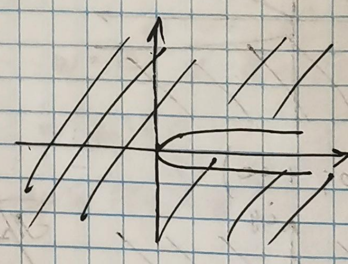
$$w = \frac{1}{i} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$



22.

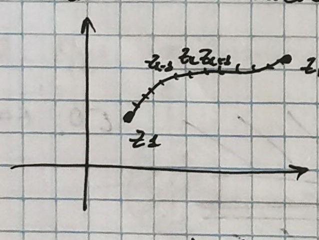


$$w = \frac{1}{i} \, \frac{z-i}{z+i}$$



Интегрирование ф-ии компл. переменного

Основные свойства:



$\gamma(t)$ — кусочно гладкая кривая

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$$

$z = x(t) + iy(t)$

$f(z)$, $z \in \gamma$

$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$

$z_0 = z(\alpha) \ldots \quad z_n = z(\beta)$

$\cup z_{k-1} z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \quad |\Delta z_k|$

пусть $\xi_k \in \cup z_{k-1} z_k$

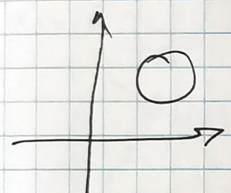
ξ

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta z_k \quad (1)$$

Опр.: если $\exists \lim\limits_{\max|\Delta z_k| \to 0} I_n$, который не зависит от способа разбиения γ и не зависит от выбора точек z_k, то этот $\lim = S$ предел интегр. предел называется интегралом $f(z)$ по γ.

$$\int\limits_{(\gamma)} f(z) dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta z_k.$$

если γ - замкн., то такая кривая - контур $\to$ интеграл по контуру



$z(\alpha) = z(\beta)$

$f(\xi_k) = U(P_k) + iU(P_k)$

P_k: $\quad Re\, \xi_k = x(P_k)$

$\quad Im\, \xi_k = y(P_k)$

$\xi_k = \varepsilon_k + i\eta_k, \quad \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k.$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} [U(P_k)\Delta x_k - V(P_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n} [U(P_k)\Delta y_k + V(P_k)\Delta x_k]$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

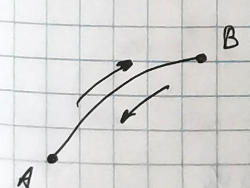
$$\int\limits_{\gamma} U dx - V dy \qquad\qquad \int\limits_{\gamma} U dy + V dx$$

$$\Downarrow$$

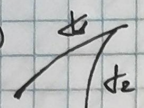
$\exists \int\limits_{\gamma} f(z) dz$ ~ криволин. интегр. II рода

Свойства:

① $\int\limits_{AB} f(z) dz = -\int\limits_{BA} f(z) dz$



② $$\int\limits_{\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

③ 

$$\int\limits_{\gamma}[\alpha f_1(z) + \beta f_2(z)]\,dz = \alpha\int\limits_{\gamma} f_1(z)\,dz + \beta\int\limits_{\gamma} f_2(z)\,dz$$

④ Оценка интеграла:

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,dL$$ dL - дифф-л дуги γ

Док-во:

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \left|\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta z_k\right| \le$$

$$\le \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\cdot\underbrace{|\Delta z_k|}_{\le \Delta L_k} \le \int\limits_{\gamma}|f(z)|\,dL$$, ч.т.д.

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le M\cdot L$$ L - длина кривой

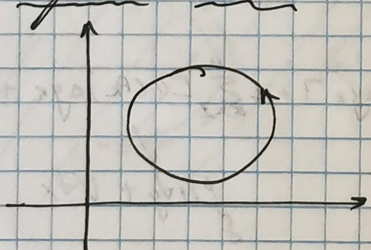
$$M = \max_{z\in\gamma}|f(z)|$$

⑤ Замена перем. при интегр.

γ: $z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$.

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\,z'_t\,dt.$$

Теорема Коши.



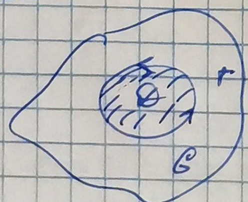
γ_+ - напр-е движ-я полож.

γ_- - напр-е движ-я отриц.

Пусть в односвязной области G определена однознач. аналитич. ф-я $f(z)$. Тогда

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$ ($\Gamma \in G$, Γ - произв. замкн. кусочно-гладкий контур.)

Док-во:



по ф-ле Грина:

$P(x,y)$, $Q(x,y)$

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \oint_\Gamma u\,dx - v\,dy + i\oint_\Gamma u\,dy + v\,dx$$

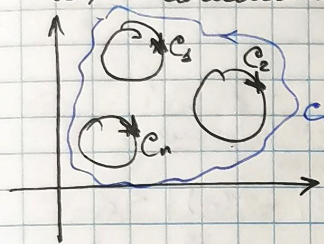
$$\int_\Gamma u\,dx - v\,dy = \iint_D (-v'_x - u'_y)\,dx\,dy = 0$$

$$\int_\Gamma u\,dy + v\,dx = \iint_D (u'_x - v'_y)\,dx\,dy = 0 \rightarrow \text{из условия Коши – Римана}$$

ч.т.д.

Теорема (Коши для многосвязной области).

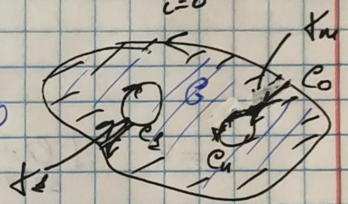
$f(z)$ – аналитична и однозначна в некоторой области G, а G ограничена контуром C_0 снаружи и $C_1, \dots, C_n$ изнутри. тогда



$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$, C – полный контур области в напр. положит. обхода.

$$C = \bigcup_{i=0}^{n} C_i$$

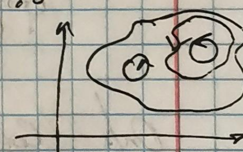
Док-во: $\int_{\gamma_i^+} f(z)\,dz + \int_{\gamma_i^-} f(z)\,dz$



$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_0}\dots + \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\gamma_i^+}\dots + \int_{\gamma_i^-}\dots\right) + \sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}\dots = 0$$

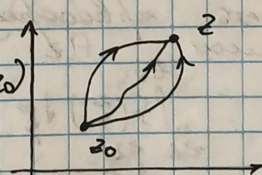
$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_0} f(z)\,dz + \sum \int_{C_i^-} f(z)\,dz = 0$$

Замечание: если $f(z)$ – аналитическая в G, $\Gamma \subset G$, то в общем случае многосвязная.



$$\int_\Gamma f(z)\,dz \neq 0 \qquad \Gamma\text{ – многосвязная об.}$$

Следствие: Расс-м $\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi = F(z, z_0)$



Интеграл не зависит от формы пути, а только от нач. и конечных условий.

Теорема (о первообразной)

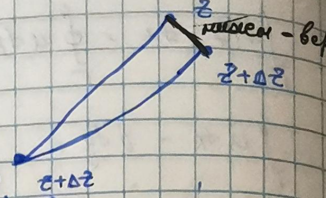
– Пусть ф-я $f(z)$ определена и непр. в некоторой односвязной области G, тогда $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$, $\Gamma \subset G$

Следовательно ф-я $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ является аналит.-ой ф-ей z и $\Phi'(z) = f(z)$

Док-во: Докажем сущ-ть аналитичность и сущ. производной.

$$\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi$$



$$\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\xi = \Delta z$$

Оценим: $$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi - f(z)\cdot\Delta z\right| =$$

$$\Delta z = \int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\xi$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\big(f(\xi)-f(z)\big)\,d\xi\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\max_{\xi\in[z,\,z+\Delta z]}|f(\xi)-f(z)|\cdot|\Delta z| =$$

$$= \max_{\xi\in[z,\,z+\Delta z]}|f(\xi)-f(z)|$$

Т.к. $f(z)$ непрерывна, то выполняется условие:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: |\Delta z|<\delta;\ |f(z+\Delta z)-f(z)|<\varepsilon$

для $\max|f(\xi)-f(z)|$ найдётся ε, которой мы можем ограничить

$$\Rightarrow \exists\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} = f(z) \Rightarrow \Phi'(z)=f(z)$$

~ непрер. и аналит. ф-я.

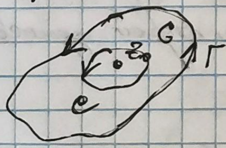
ч.т.д.

$$\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$$ ~ первообразная для $f(z)$

Опр. Совокупность первообразных называются неопределённым интегралом $f(z)$ в некоторой односвязной области G.

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\xi)\,d\xi = \Phi(z_2)-\Phi(z_1) =$$
$$= \int\limits_{z_0}^{z_2} f(\xi)\,d\xi - \int\limits_{z_0}^{z_1} f(\xi)\,d\xi$$ ~ не зависит от пути интегр.

Формула Коши: Пусть $f(z)$ - аналит ф-я в некоторой односвязной области G, огранич-й контуром Γ



Построим контур $C \subset G$, окр. z_0

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$$ ~ вспомогательная ф-я (аналит. в D)

$\Rightarrow$ Построим внутри ещё один контур γ получим многосвязную область D.

$$\int\limits_{C^+}\varphi(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^-}\varphi(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

выберем γ ~ окружность с радиусом ρ

$z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$

$\rightarrow dz = i\rho e^{i\varphi}d\varphi$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{i\varphi})\, i\cancel{\rho e^{i\varphi}}\,d\varphi}{\cancel{\rho e^{i\varphi}}} = i\int_0^{2\pi}[f(z)-f(z_0)]d\varphi +$$

$+ 2\pi i f(z_0) \ominus$

$$\int_0^{2\pi} f(z) \pm f(z_0)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}[f(z)-f(z_0)]d\varphi + \underbrace{\int_0^{2\pi} f(z_0)d\varphi}_{2\pi f(z_0)}.$$

$$\ominus\ i\int_0^{2\pi}[f(z_0+\underbrace{\rho e^{i\varphi}}_{\Delta z \text{ при } \rho\to 0})-f(z_0)]d\varphi + 2\pi i f(z_0) \Rightarrow 2\pi i f(z_0)$$

Устремим $\rho \to 0$ $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z : |z-z_0| < \delta$

$|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$

$$\left|\int_0^{2\pi}[f(z_0+\rho e^{i\varphi})-f(z_0)]dz\right| < 2\pi\varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$\boxed{\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)}$$ ~ интегральная ф-ла Коши

Следствия:

1) z_0 $\quad$ C $\quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \text{ внутри } C \\ 0, & z_0 \text{ вне } C \end{cases}$

2) C ~ окружность радиуса R и с центром в т. z_0

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z_0+Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}}iRe^{i\varphi}d\varphi = \frac{1}{2\pi R_0}\int f(z)\,dl$$

$d\varphi = dl = R_0 d\varphi$

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{|z-z_0|=R} f(z)\,dl}$$ ~ ф-ла ср. знач. по контуру $|z-z_0|=R$

3) Принцип максимума модуля аналит-ой ф-ии.

Теорема: ~ Пусть $f(z)$ аналитич. в G и непрерывна в G и $\bar{G}$, тогда $|f(z)| = \text{const}$ (или достигает максим. значения на границе области G (т.е. на $\bar{G} = \Gamma$)

Док-во:

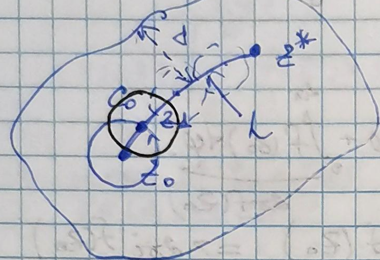
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — непр. по условию.

$|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$

Если ф-я непр., то она достигает своего максимума в некоторой точке (x_0, y_0)

$\Rightarrow \exists (x_0, y_0)$, $|f(z_0)| = M$

$|f(z)| \le |f(z_0)|$



Опишем вокруг z_0, C_0 - окружность радиуса R_0

$\Rightarrow \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi R_0} \int_{C_0} f(z)\, dl \quad$ (т. о ср. зн.)

$$M = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi R_0} \left| \int_{C_0} f(z)\, dl \right| \le \frac{1}{2\pi R_0} \int_{C_0} |f(z)|\, dl \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi R_0} M \underbrace{\int_{C_0} dl}_{=2\pi R_0} \le M$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi R_0} \int_{C_0} |f(z)|\, dl = M \quad \to \quad |f(z)| = M \quad \forall z \text{ – лежащем на контуре.}$$

Соединим кривой z_0 и z^*

$|f(z_1)| = M \qquad C_1: R < d \quad \Rightarrow z_2 = C_1 \cap L$

$|f(z_2)| = M \quad \dots \quad C_2: R < d$

Будем так же продолжать разбивать L на граничные точки и строить окружности.

$z_1, z_2, \dots, z_n = z^* \quad \to |f(z_i)| = M$

$|f(z^*)| = M$

т.к. $f(z)$ непр. и анал. ф-я, то по её св-вам если $|f(z)| \ne M$, где z – внутр. точка области G
$\Rightarrow |f(z)| = M = f(z^*)$, где z^* – лежит на границе этой области ($\bar{G}$).

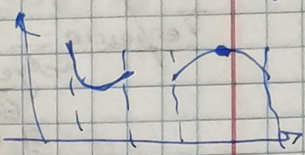
Замечание: Если $f(z) \ne 0$, $\forall z \in G$ и непрерывна на границе $\bar{G}$ $\Rightarrow$ следует принцип минимума модуля:

$f(z)$ достигает миним. значения на границе.

$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$, т.к. $f(z)$ анал. $f(z) \ne 0$

$\Rightarrow \varphi(z)$ - выполн. все усл-я теоремы для максимума модуля $\Rightarrow$ достигается на границе когда $f(z) \to$ минимума

$$\Rightarrow |f(z)| = \frac{1}{M}, \quad z \in \bar{G}$$



3) <u>Зависимость</u> <u>интеграла</u> <u>Коши</u> от <u>параметра</u>.

$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi$ — две компл. переменные z_0 и ξ (они не связаны)

Пусть есть $\quad \varphi(z_0, \xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}$

$$\varphi(z, \xi)$$

$z = x + iy$; $\xi = \xi + i\eta$; $\xi \in C$, $z, \xi \in G$

Условия:

1) $\forall \xi \in C$, $\varphi(z,\xi)$ - аналит.
2) $\forall z \in G$, $\forall \xi \in C$, $\varphi(z,\xi)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ - непрерывные по совокупности переменных z и ξ

$$\exists \int\limits_C \varphi(z,\xi)\, d\xi = F(z) = U(x,y) + iV(x,y) \quad \forall z \in G$$

<u>Св-ва</u> $F(z)$:

① $F(z)$ - аналитическая ф-я в области G $\Rightarrow F'_z = \int\limits_C \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, d\xi$

<u>Док-во:</u> $\varphi(z,\xi) = u(x,y,\xi,\eta) + iv(x,y,\xi,\eta)$

$$U(x,y) = \int\limits_C u(x,y,\xi,\eta)\, d\xi - v(x,y,\xi,\eta)\, d\eta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_x = \int\limits_C u'_x\, d\xi - v'_x\, d\eta \;; \quad U_y = \int\limits_C u'_y\, d\xi - v'_y\, d\eta$$

$$V(x,y) = \int\limits_C u(x,y,\xi,\eta)\, d\eta + v(x,y,\xi,\eta)\, d\xi$$

$$V_x = \int\limits_C u'_x\, d\eta + v'_x\, d\xi \qquad V_y = \int\limits_C u'_y\, d\eta + v'_y\, d\xi$$

Усл. Коши - Римана: $u'_x = v'_y$, $v'_x = -u'_y$ для ф-ии φ

$$U_x = \int\limits_C v_y\, d\xi + u_y\, d\eta = V_y$$

$$U_y = -\int v_x\, d\xi + u_x\, d\eta = -V_x$$

$F = U + iV \Rightarrow \begin{cases} U_x = V_y \\ V_x = -U_y \end{cases}$ - выполн. усл. К-Р.

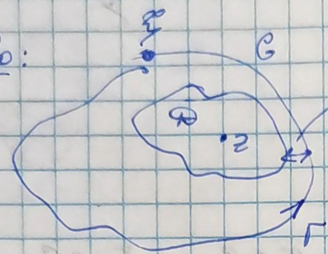
$\Rightarrow F$ - аналит-ая, ч.т.д.

$$F'_z = U_z + iV_z = \int\limits_C \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, \xi)\, d\xi$$

Теорема: ~ Пусть $f(z)$ - аналитическая в обл. G и непрер. в $\overline{G}$
$\overline{G} = G \cup \Gamma$ ~ т.е. область G замкнута, тогда $\forall z \in G$
$\exists$ производн. любого порядка ф-ии $f(z)$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi$$

Док-во:



$\forall z \in D \quad |z - \xi| \geq d > 0$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \varphi(z, \xi)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi$$

$$\exists\, f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}\, d\xi$$

...

$$\exists\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi$$

Следствия:

1) **Теорема Морера:**
~ Пусть $f(z)$ - непрер. в G и $\int\limits_C f(z)\, dz = 0$, $C \subset G$
Тогда $f(z)$ - аналитична в G

Док-во: $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, dz \Rightarrow F(z)$ - аналитична в G

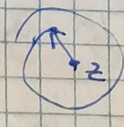
$\Rightarrow \exists F'(z) = f(z) \to$ аналитическая

$\Rightarrow \exists\, F''(z) = f'(z) \to$ аналитическая.

2) **Теорема Лиувилля:**
~ $f(z)$ - аналитическая, $|f(z)|$ - равномерно ограниченная:

$$f(z) = C$$

Док-во: $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi$



$\exists M > 0: \quad \forall \xi \in \mathbb{C} \quad |f(\xi)| \leq M$

$C: |\xi - z| = R$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{|f(\xi)|}{R^2}\, dl \leq \frac{M \cdot 2\pi R}{2\pi R^2} = \frac{M}{R}$$

$R \to \infty \quad \underline{|f'(z)| \equiv 0} \quad \Rightarrow \forall z \quad f'(z) = 0 \to f(z) = const$

Замечание: там где на действ. пр-ти ф-ии ограничены, на компл. пл-ти это может нарушаться, например $|\sin z| > 1$

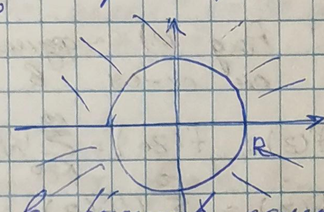
Теорема (основная теорема алгебры)
~ Всякий многочлен $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$, где $a_i \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ имеет по крайней мере один нуль (т.е. $P(z_0) = 0$)

Док-во: от противного.

Пусть $P(z)$ не имеет нулей, тогда

$f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ ~ аналит. ф-я в расширенной пл-ти $\overline{\mathbb{C}}$, то

$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0 \to \exists R > 0$



$|f(z)| \leq 1 \qquad |z| \geq R$

$\Rightarrow$ $f(z)$ - равномерно ограничена в расшир. компл. пл-ти $\Rightarrow$ по теореме Лиувилля $f(z) = \text{const} \equiv 0$

$\to f(z) \equiv 0$, что противоречит предположению $f(z) = \dfrac{1}{P}$

ч.т.д.

3.11.21

Ряды

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k$, $w_k \in \mathbb{C}$ (1)

1) Опр.: Ряд сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. ($\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$)

$\exists \lim\limits_{n \to \infty} S_n = S \qquad \to S = S_n + r_n$

2) $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} w_k$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N,\ |r_n| < \varepsilon$

3) Необходимое условие сходимости ряда:

$\lim\limits_{k \to \infty} w_k = 0$

4) Достаточное условие сх-ти ряда (критерий Коши):

$\{\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}: |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} w_k| < \varepsilon\} \Leftrightarrow \{$ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k$ - сх-ся$\}$

5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |w_k|$ - сх-ся $\Longrightarrow$ (1) сходится абсолютно.

6) Критерий Коши и Даламбера для абс. сх-ти.

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{W_{k+1}}{W_k}\right| = q, \quad \begin{cases} q<1 & \text{- сх-ся} \\ q>1 & \text{- расх-ся} \\ q=1 & \text{- ?} \end{cases}$$ ~ Даламбера.

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|W_k|} = q$$ ~ Коши.

Функциональные ряды.

Пусть определена область G, где $\{U_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$. Будем называть функциональным рядом: (2) $\sum_{k=0}^{\infty} U_k(z)$, если $z_0 \in \mathbb{C}$ - зафикс. то перейдём в числовой ряд (1) $W_k = U_k(z_0)$

Опр: Ряд (2) ~ функц. ряд ~ наз-ся сходящимся в обл. G, если он сх-ся в каждой точке области.

$$f(z): \ f(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(z_0)$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(z)$$

Опр. Функциональный ряд (2) наз-ся равномерно сходящимся в обл. G, если $\forall \varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon)$
$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} U_k(z)\right| < \varepsilon, \quad \forall z \in G$$

Опр. Функц. ряд (2) наз-ся сх-ся в обл. G, если $\forall \varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon, z)$: $\forall n > N(\varepsilon, z)$: $\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} U_k(z)\right| < \varepsilon, \quad \forall z \in G$

Достаточный признак равномерной сх-ти: (признак Вейерштрасса)

~ Если $\forall z \in G$ функц-й ряд мажорируется числовым сх-ся рядом, то такой ф-ый ряд сх-ся равномерно в G.

Док-во: $\sum_{k=0}^{\infty} U_k(z)$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$: $\forall z \ |U_k(z)| < a_k$, $\forall z, \forall k$

Расм-м $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(z)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |U_k(z)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$

$\Rightarrow$ сх-ся при данном n и $\forall z \in G$

ч.т.д.

Критерий Коши: (необх. и дост. усл. равном. сх-ти ряда):

~ Для того, чтобы функц. ряд (2) сх-ся равномерно $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon) \ \forall p \in \mathbb{N}: \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(z)\right| < \varepsilon, \ \forall z \in G$.

Св-ва равномерно сходящихся рядов.

Теорема 1 (о непр.-ти суммы равномерно сх-ся ряда.)
~ Если функц. ряд (2) $u_k(z)$ непрерывен в обл. G и (2) сх-ся равномерно к ф-ии $f(z)$ в G, то $f(z)$ так же непрерывна в G.

Теорема 2. (О почленном интегрировании ф.р.)
~ Если ф.р. (2) сх-ся равномерно в G, $u_k(z)$ – непрерывна в G, тогда

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int u_k(z)\,dz$$

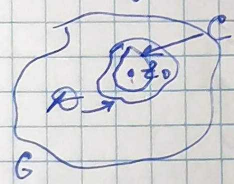
$f(z)$ – сумма ряда (2)
C – кусочно-гладкая кривая, $C \subset G$

док-во анал. док-ву для функц. рядов.

Теорема 3. (1я теорема Вейерштрасса)
~ Пусть $u_k(z)$ из ряда (2) – аналитич. в обл. G, $\sum\limits_{k=0} u_k(z)$ – сх-ся равномерно в любой замкнутой области $\bar{D} \subset G$ к ф-ции $f(z)$, тогда:

1) $f(z)$ – аналитич. в G
2) $f^{(n)}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k^{(n)}(z)$
3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_k^{(n)}(z)$ – равномерно сходится в $\bar{D} \subset G$

Док-во: Пусть $z_0 \in G$ построим $D \subset G$, $z_0 \in D$



1) → $u_k(z)$ – непрер. ⇒ $f(z)$ – непр.

Построим произвольный контур C ($z_0 \in C$)
Тогда из теоремы Коши, св-ва 2:

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=0} \int_C u_k(z)\,dz = 0$$

⇒ $f(z)$ – аналитическая по теореме Морера.

т.к. z_0 – произв. т-ка ⇒ $f(z)$ – аналитична в G

2) Рас. п.1, пусть $d = \min$ расстояние от z_0 до C, рас-м следующий функц. ряд:

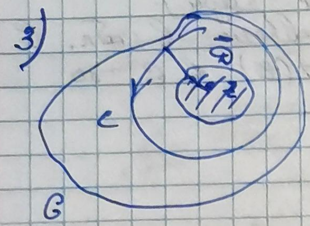
$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \to \text{равном. сх-ся на } C$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_C \frac{u_k(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$$

$$2\pi i\, f^{(n)}(z_0) = 2\pi i \sum_{k=0} u_k^{(n)}(z_0)$$ т.к. z_0 – произв. т.

⇒ утв. 2.

3)



$z \in \bar{D}$, $C \in G$, $\bar{D} \subset C$

$|z-\xi| \ge d$, $\xi \in C$

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z) = \underbrace{f(z)}_{\text{анал. ф-я}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k(z)}_{\text{анал. ф-я}}$$

$\Rightarrow r_n(z)$ - аналит. ф-я

$$\frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{r_n(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}\, d\xi = r_n^{(k)}(z)$$

т.к. $\sum u_k(z)$ - сх-ся равномерно, то остаток стремится к нулю

$$r_n^{(k)} = \sum_{l=n+1}^{\infty} u_l^{(k)}(z)$$

$\sum u_l(z)$ - сх. равном. $\to \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$:

$\forall n > N(\varepsilon) \ |r_n(z)| < \varepsilon \ \forall z \in \bar{D}$

$$|r_n^{(k)}(z)| \le \frac{k!}{2\pi}\oint_C \frac{|r_n(\xi)|}{|\xi - z|^{k+1}}\, dl < \frac{k!}{2\pi}\frac{L\cdot\varepsilon}{d^{k+1}}$$

dl — элемент дл. контура C

$$L = \max_{\xi \in C} |r_n(\xi)|$$

ч.т.д. (п.3)

Замечание: 1) п. 3 $\bar{D} \subset G$, а не во всей G

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ $|z| \le 1$ ~ сх-ся равномерно

$\sum \frac{1}{n^2}$ - сх-ся

$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} \to |z| < 1$ - сх-ся, $|z| = 1$ расх.

2) Док-во верно также если $\bar{G} = G \cup \Gamma$ (замкнута)

3) Док-во верно в случае многосвязной области.

Теорема 4. (2я теорема Вейерштрасса)

Пусть $u_k(z)$, (z) - аналит. в G. и ряд (2) сх-ся равномерно на границе G контура Г, тогда функ. р. (2) сходится равномерно на $\bar{G} = G \cup \Gamma$

Док-во:

$$S_{n+p}(z) - S_n(z) = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(z) \to \text{аналит. и непр. в } \bar{G}$$

Из критерия Коши следует: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon)$

$\forall \xi \in \Gamma, \forall p \in N$: $|S_{n+p}(\xi) - S_n(\xi)| < \varepsilon$

По теореме о максимуме модуля:

$\Rightarrow \forall z \in G \quad |S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon \Rightarrow$ усл. равн. сх-ти по Коши в $G \Rightarrow \overline{G}$,

ч.т.д.

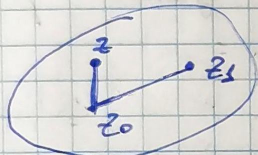
Степенные ряды.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$, z_0 - ц.т. ряда.

Теорема Абеля:

~ Если степенной ряд (3) сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, $z_1 \in \mathbb{C}$, то он сх-ся абсолютно $\forall z: |z-z_0| < |z_1 - z_0|$, а в круге: $|z-z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|$ сх-ся равномерно.

Док-во: Рассмотрим область:



$$|z-z_0| < |z_1 - z_0|$$

$$q = \frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} < 1$$

1) Необх. усл. сх-ти ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} |C_n (z-z_0)^n| = 0 \Rightarrow \exists M > 0$,

$|C_n (z-z_0)^n| < M$, $\forall n$

$$\Rightarrow |C_n| < \frac{M}{|z-z_0|^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n (z-z_0)^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot q^n = \frac{M}{1-q}$$ ~ конечное число.

$\Rightarrow$ абсолютная сх-ть $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$

2) Равн сх-ть:

$|z-z_0| \leq \rho$ по критерию Вейерштрасса

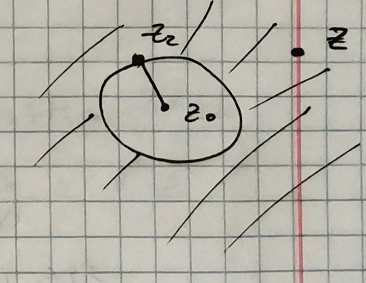
$$|C_n (z-z_0)^n| \leq \frac{M\rho^n}{|z_1-z_0|^n}; \quad M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{|z_1-z_0|}\right)^n = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{M}{1-q}$$

$\Downarrow$

мажор. ряд сх-ся $\qquad q < 1$

Следствия: 1) $\sum C_n (z-z_0)^n$ расх. в т. $z_2 \Rightarrow$ расх. $\forall z : |z-z_0| > |z_2 - z_0|$

~док-во от противного



2) $\forall$ С.р. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \ \exists R$:

$|z-z_0| < R$ – с.р. сход-ся

$|z-z_0| > R$ – с.р. расх-ся

R - радиус сх-ти ст. р. , $|z-z_0|<R$ - обл. сходимости

$|z-z_0|=R$ - ? доп. иссл.

$$R = \sup_{z:\ \sum c_n(z-z_0)^n\text{ - сх-ся}} |z-z_0|$$ ~ макс. возможный круг

3) Внутри круга сх-ти степ. ряд. сх-ся к аналитич. ф-ии.

4) Степенной ряд внутри круга сх-ти можно почленно дифф-ть и интегрировать необходимое число раз, R не меняется! (у новых рядов)

5) Коэф-ты C_n:

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad , \ f(z) \text{ - сумма ряда.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = f(z)$$

$$f(z_0) = C_0$$

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, n (z-z_0)^{n-1} \Big|_{z=z_0} = C_1$$

$$f''(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n (n)(n-1)(z-z_0)^{n-2} \Big|_{z=z_0} = C_2 \cdot 2 \cdot 1$$

...

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=k}^{\infty} C_n\, n(n-1)\dots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k} \Big|_{\substack{z_0 \\ n=k}} = C_k \cdot k!$$

$$C_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

6) $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}$ - ф-ла Коши-Адамара.

$r = \frac{1}{R}$, $0 < r < \infty$

$|z_1 - z_0| < \frac{1}{r}$ $\qquad |z_2 - z_0| > \frac{1}{r}$

$\sqrt[n]{|C_n|} \to$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n > N$:

$$\sqrt[n]{|C_n|} < r + \varepsilon$$

$|z_1 - z_0| < \frac{1}{r}$, $\varepsilon = \frac{1 - r|z_1 - z_0|}{2|z_1 - z_0|} > 0$, тогда:

$$\sqrt[n]{|C_n|}\,|z_1 - z_0| < (r+\varepsilon)|z_1 - z_0| = \frac{1 + r|z_1 - z_0|}{2} < q < 1$$

$\sum |C_n (z-z_0)^n| \leq \sum q^n \Rightarrow$ равн. сх-ть.

Следстви

Теорем
~

Док-во:

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \sqrt[n]{|c_n|} > r-\varepsilon$

Если рассм-м т. z_2: $|z_2 - z_0| > \frac{1}{r}$

$$\varepsilon = \frac{r|z_2-z_0|-1}{|z_2-z_0|} > 0$$

$$\sqrt[n]{|c_n|}\cdot|z_2-z_0| > (r-\varepsilon)|z_2-z_0| = 1$$

$$\Rightarrow \sum 1 \le \sum |c_n(z_2-z_0)^n|$$

расх. расх-ся, т.к. $|c_n(z_2-z_0)^n| > 1$ не выполн. необх. усл.

Граничные случаи:

$r=0$, $r=\infty$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon): \forall n>N(\varepsilon), \sqrt[n]{|c_n|}<\varepsilon$

необх. усл. сх. р. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=0$

$\varepsilon = \frac{q}{|z-z_0|}$, $0<q<1$, z - любая точка $z \neq z_0$

$|c_n(z-z_0)^n| < q^n \Rightarrow$ ряд сх-ся, $R=\infty$

$r=\infty$

$\forall M>0, \sqrt[n]{|c_n|}>M$;

т. $z\neq z_0$

$M|z-z_0| = q > 1 \Rightarrow |c_n(z-z_0)^n| > 1 \Rightarrow$

только при $z=z_0$, $R=0$

Следствие 3. $\sum c_n(z-z_0)^n \xrightarrow{} f(z)$ - аналит.

$\exists$ $F(z)$ - аналит в $|z-z_0|<R$ можно ли построить степенной ряд?

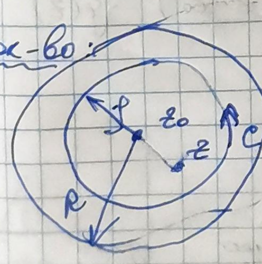
$\exists$-ли $f(z)=\sum c_n(z-z_0)^n$?

Теорема Тейлора:

Пусть $f(z)$ - аналитич $|z-z_0|<R$, тогда внутри этого круга $f(z)$ может быть представлена однозначно степенным рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Док-во:



z: $|z-z_0|<R$ Построим контур.

$C_\rho(z_0)$ - радиуса ρ с ц. в z_0

$|z-z_0|<\rho$

$f(z)$ - аналитич.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)}\, d\xi$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$$

ряд сх-ся равномерно по ξ

$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$ — сумма геом. прогрессии

т.с. $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|^n \leq \frac{|z-z_0|^n}{\rho^n}$ — сх-ся равномерно.

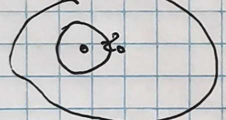
По признаку Вейерштрасса:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} f(\xi)\frac{1}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi}_{=C_n}\cdot(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

C_n опр. ед. образом $\to$ ряд определён однозначно, ч.т.д.

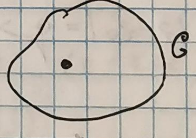
4.11.21.



$f(z)$ - аналит.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Единственность опр-я аналит-ой функции:



Опр. (нули аналит-ой ф-ии)

~ Пусть $f(z)$ - аналитическая в G. т. z_0 называется нулём ф-ии $f(z)$, если $f(z_0) = 0$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k \Rightarrow C_0 = 0$$

с другой стороны: $C_1, C_2, \dots, C_{k-1} = 0$, $C_k \neq 0$

$\Rightarrow z_0$ — "0" к-го порядка

$f^{(k-1)}(z)\big|_{z=z_0} = 0$; $f^{(k)}(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow f(z) = (z-z_0)^k\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+k}(z-z_0)^m = (z-z_0)^k\cdot g(z)$$

где, $g(z_0) \neq 0 = C_k$

Теорема (о нулях аналит. ф-ий)

~ Пусть $f(z)$ - аналитич. в G, и равна нулю в некоторых точках этой области, $f(z_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots$

Если $\{z_n\}$ сх-ся к a: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $f(z)\equiv 0$ $\forall z\in G$.

Док-во: $a\in G$ => разложим $f(z)$

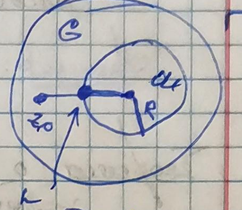
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

Радиус сходимости: $R \geq \min|a-\xi|$

$\xi\in\Gamma$ (границе области) контур

$f(z)$ - непр., т.к. аналитич.

$\forall \{z_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $\quad \{f(z_n)\}\to f(a)$,



тогда пусть используем посл-ть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая представляет собой посл-ть „нулей" ф-ии $f(z)$

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=0=f(a) \Rightarrow a - „0" \text{ ф-ии } f(z)$$

$f(z)=(z-a)f_1(z)$; $\quad f_1(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{n+1}(z-a)^n$

59. $f_1(z)$

$z_n\neq a$, в силу того, что $f_1(z_n)=0 \to C_1=0$

$\Rightarrow f_1(z)=(z-a)f_2(z)$,

где $f_2(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(z-a)^n$ ... аналогично можно проводить рассуждения до бесконечности.

$\Rightarrow C_n=0$ $\forall n \Rightarrow f(z)=0$

$\forall z\in |z-a|<R_0 \Rightarrow z^*=\lim\limits_{n\to\infty} z_n \to a_1=L\cap\Lambda_0$

где Λ_0: $|z-a|=R$

и проведём точно такие же рассуждения.

=> Так мы постепенно доберёмся до т. z_0

$\Rightarrow f(z_0)\equiv 0$, но т.к. z_0 - произв. точка в G

Следствие: 1) $f(z)\not\equiv 0$ в G и $f(z)$ - аналитична в G, тогда $\forall D\subset G$ кол-во „нулей" конечно.

2) Если $\exists z_0$: $f(z_0)$ бесконечного порядка
$\Rightarrow f(z)\equiv 0$ (в окр-ти т-ки z_0, $C_n=0$).
G - огр. область.

3) 2) => аналит. ф-я может иметь беск. много „0" только в неограниченной или открытой области.

Опр: ФКП, аналитич. в $\mathbb{C}$ ($z\neq\infty$) называется целой функцией.

1) Целая ф-я в $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ имеет конечное число „0"

2) На $\overline{\mathbb{C}}$ целая ф-я имеет счётное число „0"

$\sin z \quad . \quad \underline{z = \pi n} \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \pi n = \infty$

Теорема (Пикара) - малая теорема

~ Областью значений целой ф-ии является вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$ за исключением может быть одной т-ки.

Пример: e^z, $e^z \neq 0$

Теорема (о единственности опр-я аналит. ф-ии)

~ Пусть $f(z)$ и $g(z)$ - аналит. в G.
Если $\exists \{z_n\} \to a$: $z_n \in G$, $a \in G$: $f(z_n) = g(z_n)$,
то $f(z) \equiv g(z)$ в G

Док-во: Построим вспомог. ф-ю: $h(z) = f(z) - g(z)$

$\forall z_n$ из посл-ти $h(z_n) = f(z_n) - g(z_n) = 0$

по теореме о „нулях" $\rightarrow h(z) \equiv 0$ в G $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(z) \equiv g(z)$, ч.т.д.

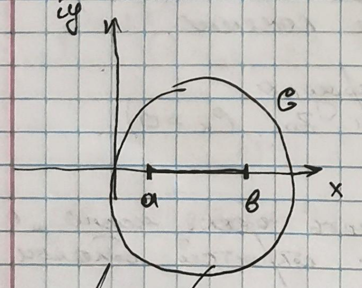
Следствия: 1) Если $f_1(z)$, $f_2(z)$ - аналит. в G, $\exists l \subset G$:
$f_1(z) \equiv f_2(z) \Rightarrow f_1(z) \equiv f_2(z)$ в G.

2) $f_1(z)$ - аналит. в G_1, $f_2(z)$ - аналит в G_2,
$G \subset G_1$, $G \subset G_2$
тогда $\exists$ единственная аналит. ф-я $f_3(z)$

$$f_3(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1 \\ f_2(z), & z \in G_2 \end{cases}$$

Аналитическое продолжение

Ув: пусть на $[a, b] \subset Ox$ задана $f(x)$, $f(x)$ - непрерывн.,
тогда в $G \subset \mathbb{C}$: $[a, b] \subset G$ $\exists$ только единственная аналитическая ф-я $f(z)$: $f(z) \equiv f(x)$, $z \in [a, b]$



$f(z)$ - аналитическое продолжение с действительной оси на компл. пл-ть

$f(x) = \sin x \rightarrow f(z) = \sin z$

Примеры: e^x, $\sin x$, $\cos x$

$e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

$$\Rightarrow e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

~ явл. аналит. продолжением.

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ – не целые ф-ии!

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$

$F(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$, $\forall z \in R$ $F(x) \equiv 0$

В силу теоремы, док. ранее $\to F(z) \equiv 0$

$\Rightarrow \underline{\sin^2 z + \cos^2 z = 1}$, $\forall z$

<u>Теорема 1.</u>

~ Пусть есть $f_i(z)$, $i = \overline{1,n}$ – аналитич. в G
$[a, b] \subset Ox$, $[a, b] \in G$

$$\Phi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \Phi(f_1(z), \ldots, f_n(z)) = 0,$$
$\forall z \in G$.

<u>Следствия:</u> 1) Если $f_1(z) = f(z)$, $f_2(z) = f'(z)$ ... $f_{n+1}(z) = f^{(n)}(z)$

$$\Phi(f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0 \to$$

$$\to \Phi(f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)) = 0$$

$\to f(x)$

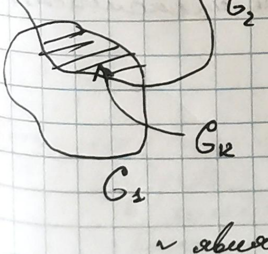
$\to f(z)$

<u>Теорема 2.</u>

~ Пусть есть ф-ия к.п. $w_i = f_i(z_i)$, $i = \overline{1,n}$ – аналит. ф-ии
$z_i \subset G_i$, $i = \overline{1,n}$
$[a_i, b_i] \in G_i$, $i = \overline{1,n}$. Пусть имеется некая аналит. ф-я $\Phi(w_1, \ldots, w_n)$ – аналитическая по w_i,
тогда, $\Phi(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)) = 0 \Rightarrow$
$x_i \in [a_i, b_i]$

$$\Rightarrow \Phi(f_1(z_1), f_2(z_2), \ldots, f_n(z_n)) = 0$$
$$\forall z_i \subset G_i$$

<u>Основная задача аналитического продолжения.</u>



$f_1(z)$, $\forall z \in G_1$

$f_2(z)$, $\forall z \in G_2$

$f_1(z) \equiv f_2(z)$, $\forall z \in G_{12}$.

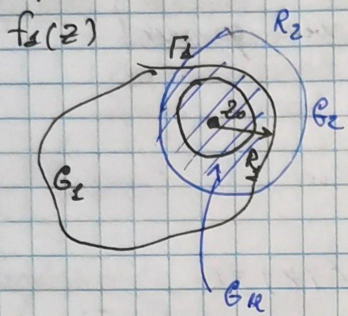
Тогда $F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \forall z \in G_1 \\ f_2(z), & \forall z \in G_2 \end{cases}$

~ является аналит-ая в $G = G_1 \cup G_2$ и называется аналитическим продолжением $f_1(z)$ на G (аналит. продолж. явл. единственным — св-во)

— одна из формулировок задачи.

Продолжение с использованием степенных рядов:

$f_1(z)$

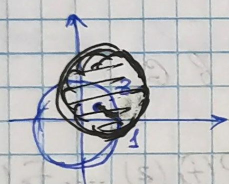


$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$G_2:\ |z-z_0|<R_2 \Rightarrow G=G_1\cup G_2$$

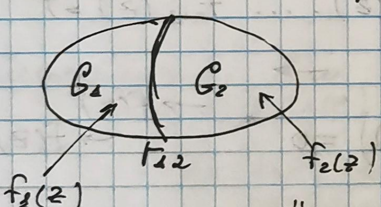
$$F(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in G_1\\ f_2(z), & z\in G\end{cases}$$

Пример: $|z|<1 \quad f(z)=\dfrac{1}{1-z}$



$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1\pm z_0-z}=\frac{1}{1-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$$

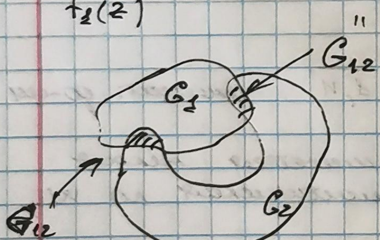
Аналитическое продолжение через границу:



Γ_{12} — кусочно-гладкая

$$f_1(z)\equiv f_2(z),\ \forall z\in\Gamma_{12}$$

$$G=G_1\cup G_2$$



$$F(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in G_1\cup\Gamma_{12}\\ f_2(z), & z\in G_2\cup\Gamma_{12}\end{cases}$$

$$\tilde{G}=G_1\cup G_2\setminus G''_{12}$$

без

$$G''_{12}:\ f(z)\neq f_2(z)$$

$\tilde{F}\to\tilde{G}$ — явл. аналит. продолжение $f_1(z)$ на $\tilde{G}$ (или $f_2(z)$ на $\tilde{G}$)

$$F_1(z)=\begin{cases}\tilde{F}(z), & z\in\tilde{G}\\ f_1(z), & z\in G''_{12}\end{cases}$$

и возможно противоположное:

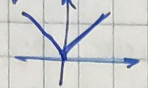
$$F_2(z)=\begin{cases}\tilde{F}, & z\in\tilde{G}\\ f_2, & z\in G''_{12}\end{cases}$$

$F(z)$ — многозначная в $G''_{12}\subset G$

$F(z)$ – однозначна на $\tilde{G}$, G_{1z} – $\forall z$ $F(z)$ – свободна.

пример аналогии для представления:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ -x, & x \in [-1,0] \end{cases}$$



← вот того ↑

Опр. ф-я $F(z)$, полученная путём аналит. продолжения вдоль всевозможных цепочек областей, выходящих из обл. G_1, где изначально определена $f_1(z)$, называется полной аналитической функцией.

Её область опр-я R наз-ся естественной областью существования полной аналит. ф-ии.

т.е. R – Риманова поверхность.

Замечание: Продолжение ф-ии $F(z)$ за пределы области её естественного существования – невозможно.

$\frac{1}{1-z}$ – $z \neq 1$

Ряды Лорана!!!

Опр: ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$, z_0 – фикс. т-ка, $C_n \in \mathbb{C}$, называется рядом Лорана.

Область сходимости Ряда Лорана:

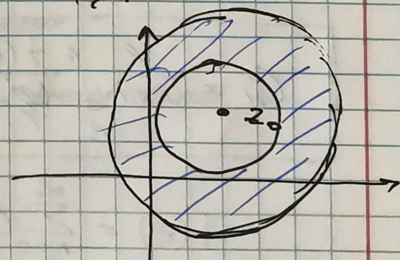
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{(z-z_0)^n}$$

(I) → R-радиус: $|z-z_0| < R$

(I) $= f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$

(II): $\xi = \frac{1}{z-z_0}$ → $f_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n \xi^n$ → $|\xi| < \frac{1}{r}$

$f_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{(z-z_0)^n}$ $\quad |z-z_0| > r$



РЛ: $r < |z-z_0| < R$ кольцо.

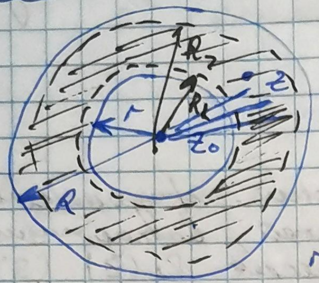
– обл. сх-ти достиг. в кольце для ряда Лорана.

Теорема (Лорана)

– Пусть $F(z)$ – аналитическая в кольце $r < |z-z_0| < R$, тогда в кольце она однозначно представляется в виде ряда Лорана:

Док-во: z - лежит в кольце.

$r < |z - z_0| < R$



Построим окружности:

$C_{R_1}(z_0)$, $C_{R_2}(z_0)$, такие, чтобы

$r < R_1 < R_2 < R$

$R_1 < |z - z_0| < R_2$

Напишем ф-лу Коши: $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{R_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$

C_{R_2}: $\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = q < 1$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_2}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi\,(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

C_{R_1}: $\left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| = q < 1$

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{(z - z_0) - (\xi - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^n}$$

$$f_1(z) = \frac{-1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{C_{R_1}} f(\xi)(\xi - z_0)^n\,d\xi\,\frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$$C_{-n} = +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}^{+}} f(\xi)\cdot(\xi - z)^{n-1}\,d\xi$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad C: r < |z - z_0| < R$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n};$$

Единственность: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n' (z - z_0)^n \quad \exists C_k' \neq C_k$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n' (z - z_0)^n; \quad C_\rho(z_0), \quad r < \rho < R$$

$(z - z_0)^{-m-1}$

$$\int\limits_{C_\rho} (z - z_0)^{n-m-1}\,dz = \left|\begin{matrix} z - z_0 = \rho\cdot e^{i\varphi} \\ dz = \rho i e^{i\varphi}\,d\varphi \end{matrix}\right| = \rho^{n-m} i \int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi(n-m)}\,d\varphi =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi i, & n = m \end{cases}$$

$$C_n' \cdot \cancel{2\pi i} = C_n' \cdot \cancel{2\pi i} \quad \forall m \Rightarrow C_n \equiv C_n'$$

Опр: $f(z)$ задана в G ($z \in G$), Γ - граница G, точка $z_0 \in \bar{G}$ называется правильной точкой $f(z)$, если $\exists$ степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$, который сходится к ф-ии $f(z)$ в обл. G. 5.11.21.

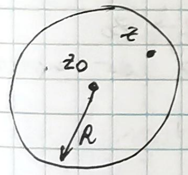
Опр: Если т-ка $z \in \bar{G}$ не является правильной, то она называется особой точкой $f(z)$.

Утверждение: Если $f(z)$ - аналитич. в обл. G, то все внутр. т-ки в G - правильные. Т-ки лежащие на границе области (т.е. в Γ), м.б. правильными или особыми.

Теорема:
- На границе круга сх-ти степенного ряда лежит хотя бы одна особая точка $f(z)$, к которой сх-ся степенной ряд.

Опр: Точка z_0 называется изолированной особой точкой $f(z)$, если существует $R > 0$, что $f(z)$ однозначна и аналитична в кольце: $0 < |z - z_0| < R$, точка z_0 - особ. точка $f(z)$.

В изолированной особой точке $f(z)$ - может быть не определена.



$0 < |z - z_0| < R$

Возможные варианты разложения в ряд Лорана:

1) Р.Л. не содержит члены с отриц. степенями.
2) Содержит конечное число членов с отриц. степеня.
3) Содержит бесконечное число членов с отриц. степенями.

(1) Если нет отриц. степеней:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C_0 < \infty \quad (|C_0| < \infty)$$

Пример: $f = \frac{\sin z}{z}$

Доопределяем: $f(z_0) = C_0 \Rightarrow |z - z_0| < R$

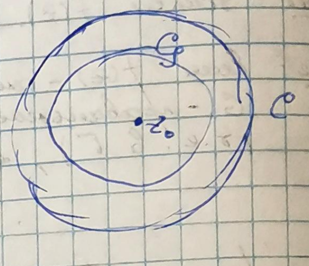
z_0 - устранимая особая точка.

Теорема (об устранимой особой точке)
~ Если $f(z)$ - аналитична в $0<|z-z_0|<R$ и ограничена в этом кольце, то т. z_0 - устранимая особая точка

Док-во: пусть у нас имеется кольцо $0<|z-z_0|<R$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi \;:\quad C_\rho(z_0)$$ окр. с центром в z_0 и радиусом ρ



$\exists M\ \forall z:\ 0<|z-z_0|<R:\ |f(z)|\le M$

Оценка по модулю:
$$|C_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_{C_\rho}\frac{|f(\xi)|}{|\xi-z_0|^{n+1}}\,dl\le$$
$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{C_\rho}\frac{M}{\rho^{n+1}}\,dl=\frac{M}{\rho^{n+1}}\cdot\frac{2\pi\rho}{2\pi}=\frac{M}{\rho^n}$$

$\rho\to 0$ Если $n<0$, $n=-m$: $|C_{-m}|\le M\rho^m\to 0\ \to\ |C_{-m}|\to 0$

ч. т. д.

② Конечн. число членов с отриц. степенями:
$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{C_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

z_0 - полюс $\underline{m\text{-го}}$ порядка. $f(z)$

Теорема (о поведении $f(z)$ в окружности полюса)
~ z_0 - полюс аналит. ф-ии $f(z)$, тогда при $z\to z_0$ $|f(z)|$ - неограниченно возрастает независимо от способа стремления z к z_0.

Док-во:
$$f(z)=\underbrace{\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}}_{\text{вынесем}}+\ldots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=$$
$$=(z-z_0)^{-m}\left[C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+C_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^{n+m}\right]$$
$$=(z-z_0)^{-m}\psi(z)$$

$$\lim_{z\to z_0}\psi(z)=C_{-m}\ \to\ |f(z)|=\frac{|\psi(z)|}{|z-z_0|^m}\xrightarrow[z\to z_0]{}\infty$$

ч. т. д.

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m},\quad z_0 \text{ - полюс } m\text{-го порядка.}$$

Теорема (о полюсе):
~ Пусть ф-я $f(z)$ аналитич. в окрестности изолированной особ. т. z_0 и неограниченно возрастает в этой окрестности по модулю не зависимо от пути стремления $z\to z_0$, тогда z_0 - полюс $f(z)$

Док-во: $\forall A>0$ $\exists\delta$-окрестность т. z_0: $|f(z)|>A$

построим вспом. ф-ю: $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ → огранич. и аналит. в δ-окрестности

$\exists \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0 \quad \to$ т. z_0

Т.к. $g(z)$ в т. z_0 - неопределена, $\Rightarrow z_0$ - устранимая особая точка $g(z)$. $\Rightarrow g(z_0) = 0$ - можем доопределить.

z_0 - нуль $g(z)$

$$g(z) = (z - z_0)^m \cdot \varphi(z), \quad \text{где } \varphi(z_0) \neq 0$$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \underbrace{\frac{1}{\varphi(z)}}_{\text{через ряд Тейлора}} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$$

выр. ~ хар-м для z_0 - полюса m-го порядка.

ч.т.д.

__Следствие:__ Если т. z_0 - ноль m-го порядка для $g(z)$: $g(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$, то т. z_0 - полюс m-го порядка для

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}, \quad \psi(z_0) \neq 0$$ и наоборот.

(3) Бесконечное число членов с отриц. степенями:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

z_0 - существенно-особая точка.

__Теорема (Сохоцкого - Вейерштрасса).__

~ Каково бы ни было $\varepsilon > 0$ в любой окрестности существенно особой точки z_0 ф-ии $f(z)$ найдётся хотя бы одна точка z^*, в которой значение $f(z)$ отличается по модулю от произвольно заданного комплексного числа A не более, чем на ε: $|f(z^*) - A| \leq \varepsilon$

__Док-во:__ (от противного)

Пусть A - комплексное число, $\varepsilon > 0$, тогда $\exists \delta > 0: \forall z \ |z - z_0| < \delta$:
$|f(z) - A| > \varepsilon$

Построим ф-ю: $\psi(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$ ~ определена и ограничена в окрестности т. z_0.

$\Rightarrow$ т. z_0 - устранимая особая точка $\psi(z)$

$\psi(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$, $m \geq 0$ и порядок нуля ф-ии в т. z_0

$$f(z) = \frac{\hat{\varphi}(z)}{(z - z_0)^m} + A$$

$\Rightarrow z_0$ - полюс m-го порядка

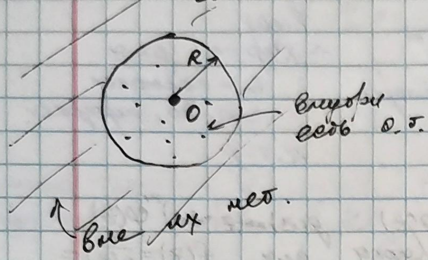
$\Rightarrow$ разложение $f(z)$ в ряд Лорана содержит конечное число отрицательных степеней ($m < \infty$), $\Rightarrow$ противоречит изначальному условию теоремы, что число отрицательных __степеней__ __бесконечно__!

ч.т.д.

$\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

Замечание: если z_0 - существенно особая точка $f(z)$, то z_0 - сущ. особ. т. для $g(z) = \overline{f(z)}$

Опр: бесконечно удалённая точка компл. пл-ти является изолированной особой точкой однозначной аналитич. ф-ии $f(z)$, если $\exists R > 0$: вне круга $|z| > R$ $f(z)$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от т. $z = 0$.



$f(z)$ - аналит. $R < |z| < \infty$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$

Для беск. удалённой точки так же есть 3 случая:

1) $z_0 = \infty$ - устранимая о. т.
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} C_n z^n$$

2) $z_0 = \infty$ - полюс m-го порядка:
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} C_n z^n \quad (m > 0)$$

3) $z_0 = \infty$ - существенно особая точка:
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$

$z_n \to \infty$, $f(z_n) \to$? к любому числу, которое захотим

Чтобы определить х-р $z_0 = \infty$ делается замену:

$$\boxed{w = \frac{1}{z}} \to \underline{w = 0}$$
$$z = \infty$$

характер о.т. при замене не изменяется.

Пример: ① $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$

$$\frac{1}{f(z)} = 0 \to \underline{z = 0} \text{ - особая точка}$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

$z = 0$ - устранимая особая точка.

добавим: $f(0) = 1$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \sin z = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$$

② $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$ докажем, что $z_0 = 0$ - полюс 3-го порядка.

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!} = \frac{1}{z^3 \cdot 0!} + \frac{1}{z^2 \cdot 1!} + \frac{1}{z \cdot 2!} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \ldots$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+3)!}$$

$z=0$ - полюс 3-го порядка.

③ $$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$z=0$

$$\lim_{z\to 0} \sin\frac{1}{z} \nexists$$

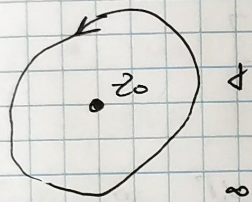
$\Rightarrow z=0$ - существенно особая точка.

Теория вычетов.

Опр: Вычетом аналит-ой ф-ии $f(z)$ относит. изолированной особ. точки z_0 - называется компл. число, определяемое

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(\xi)\, d\xi \equiv Res[f(z), z_0] \equiv Выч[f(z), z_0]$$

$\gamma \in$ области аналитичности $f(z)$



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0) \rightarrow C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

при $n=-1$:

$$\Rightarrow C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(\xi)\, d\xi = Res[f(z), z_0]$$

① Если z_0 - правильная точка, то $C_{-1} = 0 \Rightarrow Res[f, z_0] \equiv 0$

z_0 - устранимая особ. точка, то $Res[f(z), z=z_0] = 0$

Способы нахождения вычетов.

1) $z=z_0$ - полюс 1-го порядка

$$f(z) = \frac{C_{1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots$$

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z\to z_0} (C_{-1} + C_0(z-z_0) + \dots)$$

$$\boxed{C_{-1} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)}$$

$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ и

$$\psi(z) = (z-z_0)\psi_1(z)$$

$$C_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)\cdot(z-z_0)+\frac{\varphi''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\dots}{(z-z_0)\psi'(z_0)+\frac{1}{2!}(z-z_0)^2\psi''(z_0)+\dots}\cdot(z-z_0)$$

$$= \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$ — для полюса 1-го порядка

$$\boxed{C_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}$$

$$\underset{z_0 - \text{пол. 1-го пор.}}{res[f, z_0]} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, и $\varphi(z_0) \neq 0$

② z_0 — полюс m-го порядка.

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

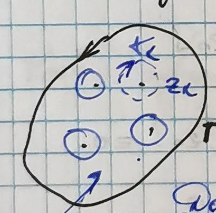
$$(z-z_0)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \dots + \underline{\underline{C_{-1}}}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^{n+m}$$

$$res[f, z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

(Т) **Основная теорема вычетов:**

— Пусть $f(z)$ — аналитическая ф-я. $\bar{G} = G \cup \Gamma$ за исключением конечного числа т-к, z_k $(k=\overline{1,m})$, $z_k \in G$, тогда

$$\int_{\Gamma^+} f(\xi)\,d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res[f, z_k]$$



Док-во: Построим вокруг каждой изолированной точки маленький контур γ_k.

γ_k: z_k лежит внутри γ_k

$f(z)$ — аналитическая.

Тогда по обобщённой теореме Коши:

$$\int_{\Gamma^+} f(\xi)\,d\xi + \sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k^-} f(\xi)\,d\xi = 0$$

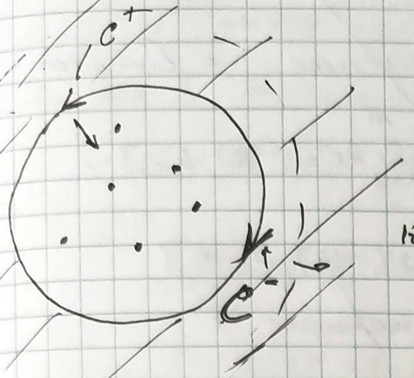
$$\int_{\Gamma^+} f(\xi)\,d\xi = \sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k^+} f(\xi)\,d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res[f(z), z_k]$$

ч.т.д.

Вычет $z = \infty$

Опр: Вычетом однозначной аналит. ф-ции $f(z)$ относит. изолир. ос. т. $z = \infty$ наз-ся комплексное число, которое вычисляется:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(z)\,dz$$



C^- — не содержит конечных особых точек.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n, \quad C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R^+} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

$|z|>R$, нет других особых точек

$C_R: |z| = R$

$$\boxed{\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}}$$

$z=\infty$ — устр. о. т. $\rightarrow \lim_{z\to\infty} f(z) = C_0$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) \neq 0$$

$z=\infty$: устр. о. т.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{C_n}{z^n} + C_0 = \ldots \frac{C_{-2}}{z^2} + \frac{C_{-1}}{z} + C_0$$

Замена:

$$w = \frac{1}{z}$$

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\cdot w^n$$

$$\operatorname{res}[f, z=\infty] = -C_{-1} = -\lim_{w\to 0}\frac{d}{dw} f\left(\frac{1}{w}\right)$$

$z=\infty$ — полюс m-го порядка.

$$w = \frac{1}{z}$$

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \ldots + C_{-2}w^2 + C_{-1}w + C_0 + \frac{C_1}{w} + \ldots + \frac{C_m}{w^m} \quad \Big|\cdot w^m$$

$$w^m\cdot f\left(\frac{1}{w}\right) = \ldots + C_{-2}w^{m+2} + C_{-1}w^{m+1} + C_0 w^m + C_1\cdot w^{m-1} + \ldots + C_m$$

Диф-м $(m+1)$ раз:

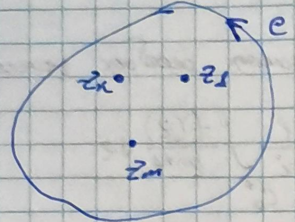
$$\operatorname{res}[f(z), z=\infty] = -\lim_{w\to 0}\frac{1}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\left[w^m\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right]$$

Теорема (о сумме вычетов) в $\overline{\mathbb{C}}$

Пусть $f(z)$ — аналитическая на расшир. компл. пл-ти $\overline{\mathbb{C}}$ за исключением конечного числа изол. особ. точек z_k, $k=\overline{1,m}$, и точки $z=\infty$, тогда,

$$\sum_{k=0}^{m} \operatorname{Res}[f(z), z_k] = 0$$

Док-во: Расс-м контур C, который содержит все эти особые точки.



$z=\infty$ (далеко)

По основной теореме о вычетах:

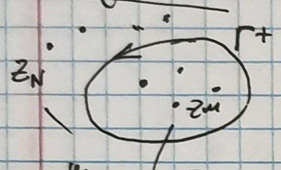
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\xi)\,d\xi = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}[f(z), z_k] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(\xi)\,d\xi = -\mathrm{Res}[f(z), z=\infty]$$

$\Rightarrow$ утв. теоремы

ч. т. д.

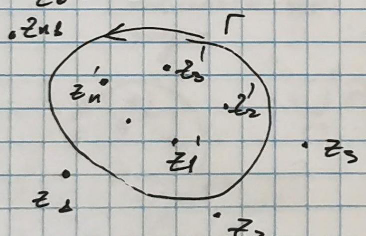
Следствие:



$$\int_\Gamma f(z)\,dz = -2\pi i \sum_{k=0}^{N} \mathrm{Res}[f, z_k]$$

и.о. точки вне Γ + $z=\infty$

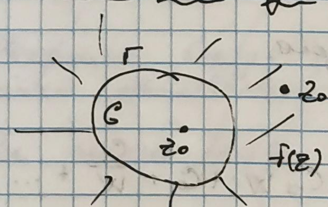
Теорема. $f(z)$ - аналитич. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$ за исключ. конечного числа т-к, z_k, $k=\overline{1,n}$, - изол. т-ки.



$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{res}[f, z_k] = 0$$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = -2\pi i \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{res}[f, z_k]$$

Ф-ла Коши для неогранич. области:



$f(z)$ - аналитич. вне Γ

$\forall z_i \in \Gamma$ $\exists$

$\exists \lim_{z\to z_i} f(z) = f(z_i) < \infty$

$z=\infty$ - устранимая о. т.

$$\exists f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z)$$

Вспом. ф-я:

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-z_0} \Rightarrow \exists \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} = \varphi(\infty) = 0$$

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{1}{z}\,\frac{f(z)}{1-\frac{z_0}{z}} = \text{ можем подобрать } \left|\frac{z_0}{z}\right| < 1$$

окрестность $\to$

$$= \underbrace{\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0}{z}\right)^n}\left(\underline{f(\infty)} + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \ldots\right)$$

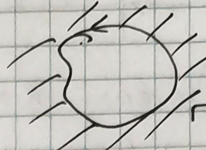
$$\mathop{\mathrm{res}}_{z=\infty} \varphi(z) = -C_{-1} = -f(\infty)$$

Если z_0 - внутри контура Γ → то никаких особых точек у $\varphi(z)$ - нет.

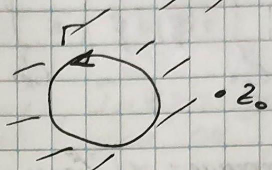
1) z_0 in Γ => $\varphi(z)$ в Γ нет особых точек.

2) z_0 out Γ → z_0 - полюс $1^{го}$ порядка $\varphi(z)$

$$\operatorname{res}[\varphi(z), z_0] = f(z_0)$$



$$\int_{\Gamma^+} \varphi(\xi)\,d\xi = -2\pi i \operatorname{res}[\varphi(z), \infty] = 2\pi i f(\infty)$$

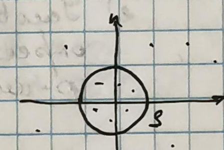


$$\int_{\Gamma^+} \varphi(\xi)\,d\xi = 2\pi i f(\infty) - 2\pi i f(z_0)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi = \begin{cases} f(\infty), & z_0 \text{ in } \Gamma \\ f(\infty) - f(z_0), & z_0 \text{ out } \Gamma \end{cases}$$

Применение вычетов к вычислению интегралов.

① $I = \int_0^{2\pi} F(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi$



$F(\cos\varphi, \sin\varphi) = R(x, y)$ -

$$z = e^{i\varphi} \Rightarrow dz = i\cdot \underbrace{e^{i\varphi}}_{z}\,d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} F\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{z} = \frac{1}{i}2\pi i \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}[\tilde{F}(z), z_k] = A \in \mathbb{R}$$

$|z_k| < 1$

$$\tilde{F}(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}$$ ~ аналитич, за искл. конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_N$

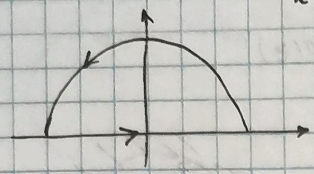
② $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A_1 \to -\infty \\ A_2 \to +\infty}} \int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx$$

Опр: главным значением (по Коши) несобствен. интеграла $1^{го}$ рода $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ назыв. значение предела $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx$, если он $\exists$.

v.p. ~ valeur principale (главное значение)

Лемма: $f(z)$ - аналитич $\forall z: \operatorname{Im} z > 0$ всюду за исключением конечного числа изолированных особых точек и существует $\exists R_0 > 0$, $M > 0$, $\delta > 0$: $\forall z: \operatorname{Im} z > 0$, $|z| > R_0$ имеет место оценка $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$

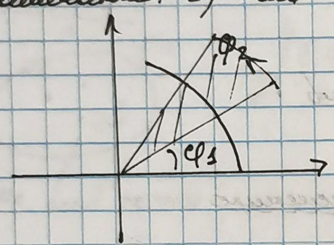
Тогда: $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C'_{R^*}} f(\xi)\,d\xi = 0$ $\qquad C'_{R^*}$ — полуокружность $|z| = R$: $\operatorname{Im} z > 0$



Док-во: $R > R_0$

$$\left|\int\limits_{C'_{R^*}} f(\xi)\,d\xi\right| \le \int\limits_{C'_{R^*}} |f(\xi)|\,dl \le \frac{M\cdot\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{M\pi}{R^{\delta}} \to 0,\quad \delta>0,\ R\to\infty$$

Замечание: 1) Если лемма выполняется $\forall z$: $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$



тогда интеграл по $\forall$ дуге от φ_1 до φ_2 так же зануляется.

2) Условия леммы выполняются, $f(z)$ — аналит. в окрестности ∞, $z = \infty$ — ноль не ниже 2-го порядка ф-ии $f(z)$ => разложим в ряд Лорана.

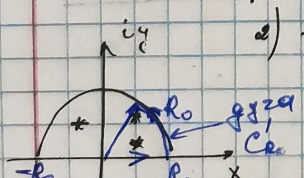
$$f(z) = \frac{C_{-2}}{z^2} + \frac{C_{-3}}{z^3} + \frac{C_{-4}}{z^4} + \dots = \frac{\psi(z)}{z^2}$$

$|\psi(z)| < M \Rightarrow |f(z)| < \frac{M}{|z|^2}$ $\qquad \delta = 1 > 0$

~ выполн. условия леммы.

Теорема 1.

~ Пусть 1) $f(x)$, опр-на $-\infty < x < +\infty$, имеет аналитич. продолжение на $\operatorname{Im} z \geq 0$ — $f(z)$



2) $f(z)$ — удовл. условиям леммы и не имеет особых изолир. точек на действ. оси.

$\operatorname{Im} z_k \neq 0$

Тогда главное значение несобств. интеграла 1-го рода $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ существует и определяется:

$$\boxed{\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{res}[f(z), z_k]}$$

Док-во: $f(z)$, $|z_k| < R_0$

Возьмем контур $R > R_0$: C'_R: $|z| = R$ — в верхней полуплоскости.

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{C_R'} f(z)\,dz}_{\to 0,\ R\to\infty} = 2\pi i \sum_n \text{res}[f(z),\ z=z_n] \quad (\text{Im}\, z_n > 0)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_n \text{res}[f(z),\ z=z_n], \quad \text{Im}\, z_n > 0$$

③ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\, e^{imx}\,dx$

Лемма Жордана:

~ $\Phi(z)$ - аналит. в верхн. полупл., $\text{Im}\, z > 0$ за исключением конечного числа изол. ос. т. и равномерно относит. $\arg z$ ($0 < \arg z \le \pi$) стремится к 0 при $|z| \to \infty$, тогда при $m > 0$

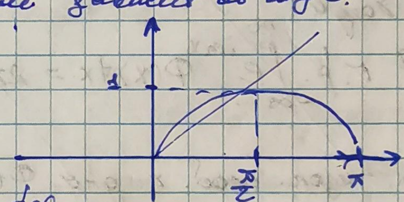
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R'} e^{imz}\, \Phi(z)\,dz = 0$$

C_R' - дуга $|z| = R$, $\text{Im}\, z > 0$

Док-во: т.к. $\Phi(z) \to 0$ равномерно при $|z| \to \infty$

$\Rightarrow$ $|\Phi(z)| < \varepsilon(R)$, $|z| < R$, $\varepsilon(R) \to 0$ $R \to \infty$
не зависит от $\arg z$.

Замена $z = R \cdot e^{i\varphi}$



$$\left|\int_{C_R'} e^{imz}\,\Phi(z)\,dz\right| < \varepsilon(R)\cdot R \cdot \int_0^{\pi} \left|e^{imRe^{i\varphi}}\right| d\varphi =$$

$$= 2\,\varepsilon(R)\cdot R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\varphi}\,d\varphi \le 2\,\varepsilon(R) R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2mR\varphi}{\pi}}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{m}\,\varepsilon(R)\left(1 - e^{-mR}\right) \to 0 \quad R \to \infty,$$ ч.т.д.

Замечание: 1) Если $m < 0$ и $\Phi(z)$ удовл. условиям леммы Жордана, если $\text{Im}\, z \le 0$ $\Rightarrow$ утв. справедливо для интеграла по дуге C_R'': $\text{Im}\, z < 0$

2) ЛЖ справедлива при более слабых ограничениях на $\Phi(z)$ по сравнению с леммой 1.

e^{imz}

Теорема 2

~ Пусть 1) $\Phi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, имеет аналитическое продолжение $\Phi(z)$: $\forall z$ $\text{Im}\, z > 0$

2) $\Phi(z)$ удовл. лемме Жордана, и не имеет особых точек на действительной оси.

Тогда:

$$\exists \text{ г.р.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{imx}\Phi(x)\,dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{res}\left[e^{imz}\Phi(z),\ z=z_k\right]$$
$m>0$, $\operatorname{Im} z_k > 0$

z_k – изол. о.т. $\Phi(z)$, $\operatorname{Im} z_k > 0$

Док-во: аналогично теореме 1.

Замечания: 1) г.р. $\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\cos mx\,dx = \operatorname{Re} I$

г.р. $\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)\sin mx\,dx = \operatorname{Im} I$

2) С помощью теоремы можно вычислить

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{, если } f(x) \text{ – чётная.}$$

3)

Теорема. $\Phi(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ имеет аналит. продолжение $\Phi(z)$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\Phi(z)$ удовл. лемме Жордана и не имеет особой точки на действ. оси.

Тогда:

$$\exists \text{ г.р.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{imx}\Phi(x)\,dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{res}\left[e^{imz}\Phi(z),\ z_k\right]$$
$\operatorname{Im} z_k > 0$

z_k – изол. особ. т. для $\Phi(z)$: $\operatorname{Im} z_k > 0$.

Док-во: аналогично док-ву л. Жордана.

3) Теорема позволяет вычислить

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \text{, если } f(x) \text{ – чётн. ф-я}$$

$$\int_0^{\infty}\Phi(x)\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\cos mx\,dx,\quad \Phi(x) \text{ – чётн.}$$

$$\int_0^{\infty}\Phi(x)\sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\sin mx\,dx,\quad \Phi(x) \text{ – нечётн.}$$

4) Если $\exists$ ос. т. $f(x)$, $\Phi(x)$: $\operatorname{Im} z = 0$

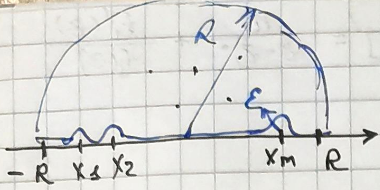
$x=c$, $a<c<b$

$$\text{г.р.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

$(f(c)=\infty)$

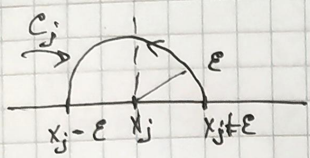
Пусть $x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}$

Построим $f(z)$ – аналит. продолжение $f(x)$, $\operatorname{Im} z > 0$



x_i – простые полюса $f(z)$ ($1^{го}$-порядка)

$R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$



$$\int_{C_{j\varepsilon}} f(z)\,dz = \left| \begin{matrix} z-x_j=\varepsilon e^{i\varphi} \\ dz = i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi \\ 0\le\varphi<\pi\end{matrix}\right| = i\varepsilon\int_0^\pi f(x_j+\varepsilon e^{i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{ряд Лорана в} \\ \text{окрестн. } x_j \end{matrix}\right| = (*)$$

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-x_j} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-x_j)^n$$

$$(*) = i\int_0^\pi \left[C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varepsilon^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}\right]d\varphi = \pi i C_{-1} + \underbrace{i\sum_{n=0}^{\infty} C_n \varepsilon^{n+1}\int_0^\pi e^{i(n+1)\varphi}\,d\varphi}_{\varepsilon\to 0 \quad \to 0} = \pi i C_{-1}$$

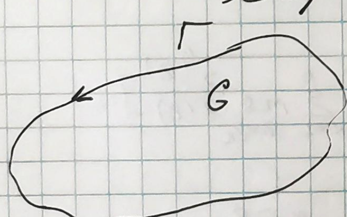
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi i C_{-1} = \pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=x_j} f(z)$$

$$\Rightarrow \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{res}[f(z), z_k, \operatorname{Im} z_k>0] + \pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}[f(z), z=x_j, \operatorname{Im} z=0]$$

x_j – простой полюс.

__Замечание__: $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)e^{imx}dx$, x_i – простые полюса $\Phi(x)$ – аналогично.

Логарифмический вычет.



$\Gamma \subset G$, $f(z)$ – аналит. всюду, кроме конечного числа изол. особых точек.

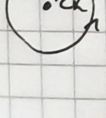
z_k, $k=\overline{1,p}$ – полюса $f(z)$

Вспом. ф-я: $\varphi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ – логарифмическая производная $f(z)$

z_k – полюса $f(z)$ – особые точки $\varphi(z)$

__Опр.__ Под логарифмическим вычетом $\varphi(z)$ понимают:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$



z_j – ноль n_j – полюса $f(z)$: $f(z) = (z-z_j)^{n_j} f_1(z)$

$f_1(z_j)\neq 0$

$$\varphi(z) = [\ln f(z)]' = [n_j \ln(z - z_j) + \ln f_1(z)]' = \frac{n_j}{z - z_j} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

$\Rightarrow$ z_j - полюс $1^{го}$ порядка для $\varphi(z)$

$$\operatorname*{res}_{z = z_j} \varphi(z) = n_j$$

Пусть $z = z_k$ - полюс $f(z)$ порядка p_k.

$$f(z) = \frac{C_{-p_k}}{(z - z_k)^{p_k}} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z - z_k} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_k)^n =$$

$$= \frac{\psi(z)}{(z - z_k)^{p_k}}, \quad \psi(z_k) \neq 0, \quad z_k \text{ - правильная точка } \psi(z)$$

$$\varphi(z) = [\ln f(z)]' = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \frac{p_k}{z - z_k}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname*{res}_{z = z_k} \varphi(z) = -p_k$$

Теорема (о подсчёте числа нулей ф-ии)

- Пусть $f(z)$ - аналит. в $\bar{G}$ за исключением конечного числа полюсов внутри G,
  $f(z)$ не обращается в ноль ни в одной точке $z \in \Gamma \subset \bar{G}$
- Тогда разность между полным числом нулей и полным числом полюсов $f(z)$ в G определяется:

$$N - p = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \text{(с учётом их кратности)}$$

N - число нулей.
p - число полюсов.

Док-во: из основной теоремы о вычетах:

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{k=1}^{p} \operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{f'(z)}{f(z)}\right] =$$

$$= 2\pi i \{\sum n_j - \sum p_k\}, \quad \text{ч.т.д.}$$

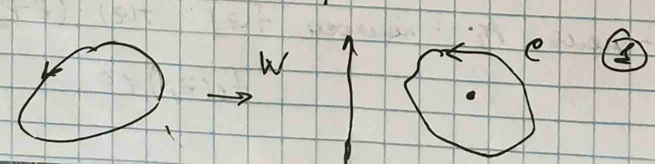
Геом. смысл:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \ln f(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \underbrace{\ln |f(z)|}_{0} + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma d \arg f(z) =$$

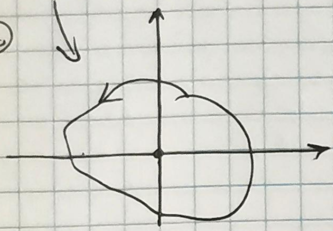
$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_\Gamma [\arg f(z)] = N - p$$

$w = f(z)$



или

②



В ① - вариация равна 0

Во ② - вариация соответствует кол-ву оборотов обхода, которая совершает точка вокруг точки $w=0$

Литература: 1. Тихонов, Свешников ТФКП

2. Лаврентьев; Шабат (1987)

Доп. лит.: Маркушевич - краткий курс ТФКП.
Шабунин - лекции по ТФКП.