Вероятностное пространство. Классический и геометрический способы задания вероятности.

Событие – всякий факт, наступление (или ненаступление) которого однозначно фиксируется в условиях эксперимента (A, B, C...)

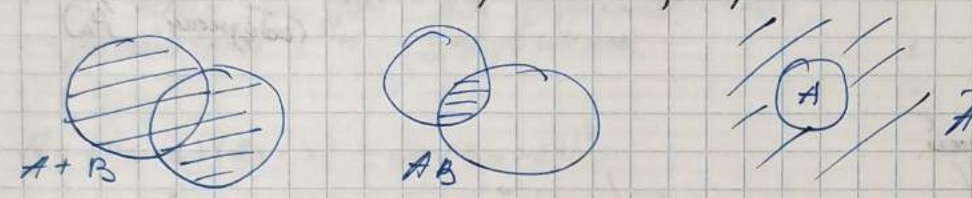
ω – элементарное событие – любой мыслимый исход

$\Omega = \{\omega\}$ – пространство элементарных событий.

$\mathcal{A}$ – алгебра событий:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$

2. $\forall A, B \in \mathcal{A}$: $A+B \in \mathcal{A}$, $AB \in \mathcal{A}$, $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{A}$



$A \to P(A)$ – вероятность события.

$\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ ~ вероятностное пространство

Классическая схема.

1. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ – конечное число исходов

2. ω_i равновозможны.

Тогда $\forall A \in \mathcal{A}$: $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$

$$\boxed{P(A) = \frac{k}{n}} \quad (1)$$

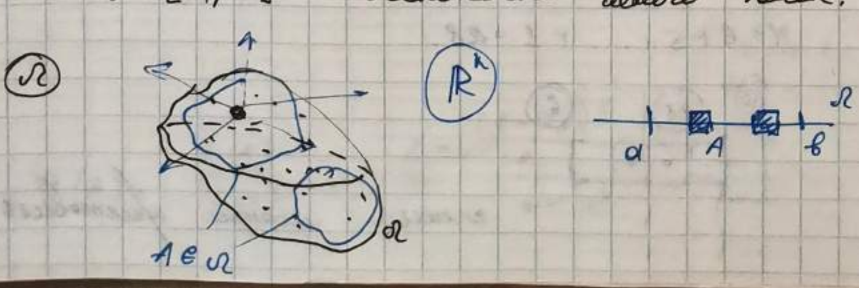
$(A = \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \ldots + \omega_{i_k})$, причём $\omega_i \omega_j = \varnothing$

Геометрическая схема.

$\Omega = \{\omega\}$ – число элементарных исходов ω бесконечно.

В классической схеме: $\frac{\infty}{\infty}$?

$\Omega = [a, b]$ ~ бесконечно много точек.



Тогда $\boxed{P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}}$ (2)

Комбинаторика.

Пусть есть $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — множество из "n" элементов. Из них делаем выборку "k" из "n" (без возвращения):

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

A_n^k — число размещений из "n" по "k". Частный случай:

$$A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! \text{ — число перестановок (обознач. } P_n)$$

C_n^k — число сочетаний.

Сочетание — неупорядоченный выбор "k" элементов из "n" элементов.

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$ Как получить?

число сочетаний ← $\begin{matrix} 1 & - & k! \\ C_n^k & - & A_n^k \end{matrix}$ → число перестановок

$$\Rightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Задача 1.3.

Из $[a, b]$ выбирают 2 точки.

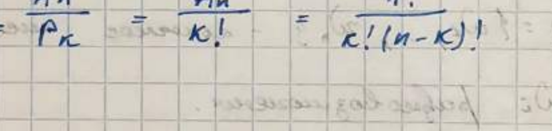
A — левая ближе к b, чем к a.

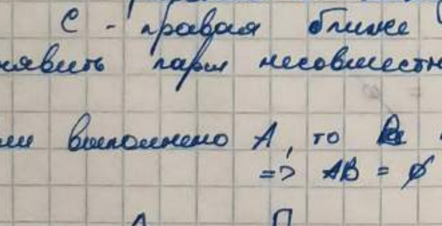
B — расстояние между точками $> \frac{b-a}{2}$

C — правая ближе к левой, чем к b.

Выявить пары несовместных событий ($\omega_i \omega_j = \varnothing$)

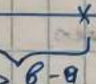
Если выполнено A, то B не наступит $\Rightarrow AB = \varnothing$



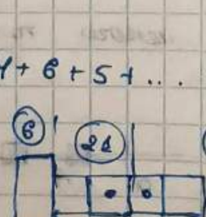


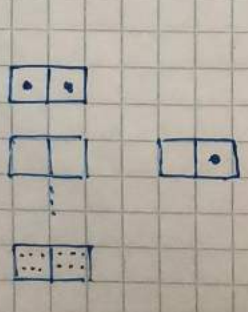
$BC = \varnothing$

Задача 1.6.



$7 + 6 + 5 + \dots + 1 = 28.$



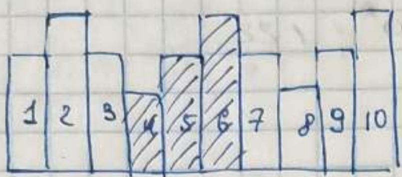


→ сколько можно приставить

$$P(A) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

Задача 1.9.

На полке 10 книг.



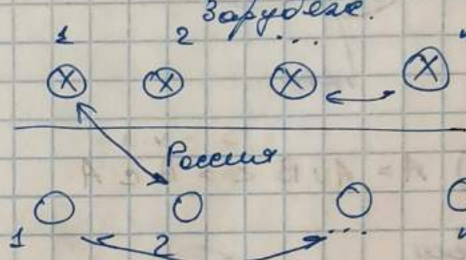
$$P(A) = \frac{8 \cdot \underbrace{P_3}_{=3!=6} \cdot \underbrace{P_7}_{=7!}}{10!} = \frac{8 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{C_{10}^3} \Rightarrow P(A) = \frac{8}{C_{10}^3}$$

- иначе: не важен порядок выбранных книг, все множества исходов взяли, а нужных „8"

Задача 1.12.

В эфир выходят $2n$ радиолюбителей, n - российских, n - зарубежных.



$$N = (2n-1)(2n-3)\ldots = (2n-1)!!$$

$$K = n(n-1)\ldots 1 = n!$$

$$\Rightarrow P = \frac{K}{N} = \frac{n!}{(2n-1)!!}$$

Задача 1.17.

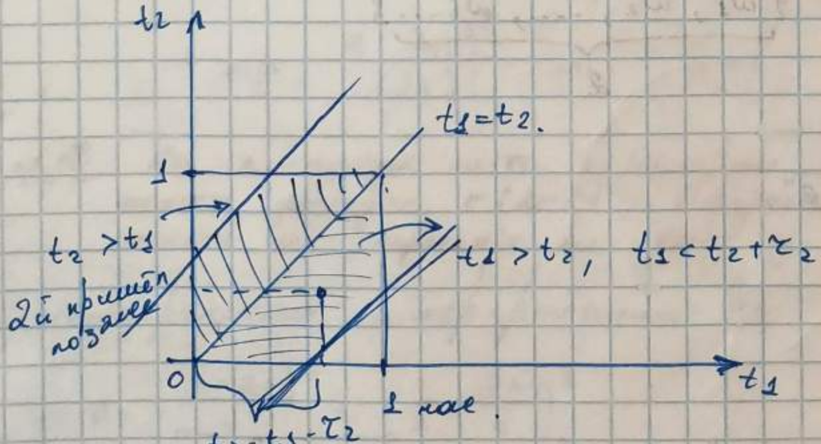
12:00 - 13:00 - время встречи 2х чел.

P, если ожидания τ_1, τ_2.

Приход каждого равновозможен.

Введём 2 параметра: t_1 - время прихода 1-го

t_2 - время прихода 2-го.



$t_2 - t_1$ - разность с момента прихода 2.

$$t_2 > t_1$$
$$t_2 < t_1 + \tau_1$$

$$P(A) = \frac{S(A)}{\underbrace{S(\Omega)}_{1}} = \frac{1 - \frac{(1-\tau_1)^2}{2} - \frac{(1-\tau_2)^2}{2}}{1} = \frac{1 - \frac{1-2\tau_1+\tau_1^2}{2} - \frac{1-2\tau_2+\tau_2^2}{2}}{1} =$$

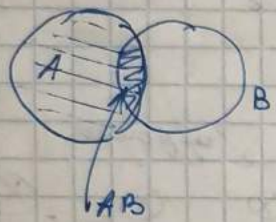
$$= -\left[\frac{\tau_1^2+\tau_2^2-2(\tau_1+\tau_2)}{2}\right] = -\frac{\tau_1^2+\tau_2^2}{2} + (\tau_1+\tau_2)$$

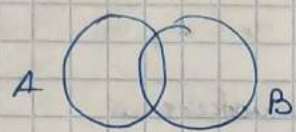
$$5 \text{ мин.} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}.$$

Д/з: 1.1 (2, 4), 1.5, 1.7, 1.14, 1.18, 1.20*, 1.22

Домашняя работа.

1.1. 2) $AB \subset A$, $A \subset A \cup B$

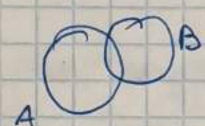




4) $A = A \cup B \Leftrightarrow B \subset A$

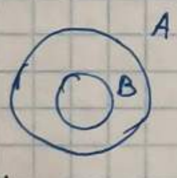
Если

или



→ не следует первое.

Если



→ следует первое.

1.5. n-кратное бросание симметричной монетки.

$\omega_i = \underbrace{\text{РГРРГР}\ldots\text{Г}}_{n}$; $\Omega = \underbrace{\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i \ldots\}}_{2^n}$

а) Г ~ k раз:

$$P = \frac{C_n^k}{2^n} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!\,2^n}$$

б) не менее k раз:

$$P = \sum_{i=k}^{n} \frac{C_n^i}{2^n}$$

При $k = \frac{n}{2}$ и $n \to \infty$ а: $C_n^{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{(\frac{n}{2})!\,(\frac{n}{2})!} = \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}}{\left(\sqrt{\pi n}\cdot(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}\right)^2} =$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot 2^n}{\pi n}.$$

$$\Rightarrow P \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

б: $P = \sum\limits_{i=\frac{n}{2}}^{n} \frac{C_n^i}{2^n} = \underbrace{\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2^n}}_{\approx\sqrt{\frac{2}{\pi n}}} + \dots + \frac{C_n^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\left(C_n^{\frac{n}{2}} + \dots + C_n^n\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}\left(C_n^0 + \dots + C_n^n\right) \to \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{2^n} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C_n^n}{2^n} = 0 \qquad \Rightarrow \underline{P \to \frac{1}{2}}$

1.7. Брошены 3 монеты. Какова вероятность, что выпадут ровно два герба.

$N = 2^3 = 8$ – возможных исходов.

$P = \frac{C_3^2}{2^3} = \frac{3}{8}$

1.14. $2n$ – гостей → n женщин
→ n мужчин

Если зафиксировать „ячейку" $\frac{М - Ж}{2!}$

Пусть 1 место занимает М: $(n = 5)$

$\underset{\frac{5}{10}}{М} - \underset{\frac{5}{9}}{Ж} - \underset{\frac{4}{8}}{М} - \underset{\frac{4}{7}}{Ж} - \underset{\frac{3}{6}}{М} \dots \qquad P(A) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

или Ж:

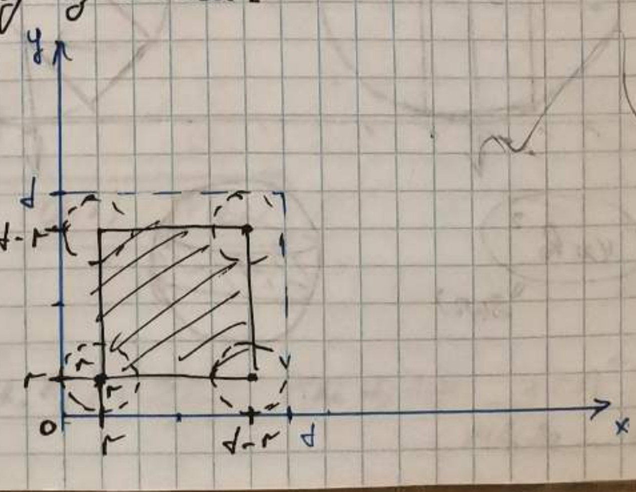
$\underset{\frac{5}{10}}{Ж} - \underset{\frac{5}{9}}{М} - \underset{\frac{4}{8}}{Ж} - \underset{\frac{4}{7}}{М} - \underset{\frac{3}{6}}{Ж} \dots \qquad P(B) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$\Rightarrow P = \frac{2!\,(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$

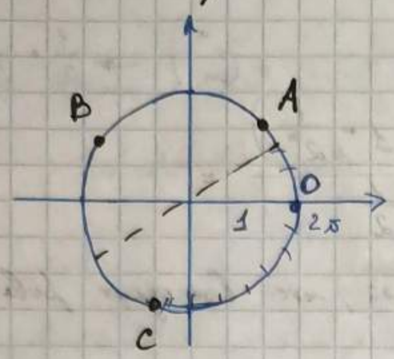
1.18. На клетчатую пл-ть с размером клетки d наудачу бросается монета радиуса r $(2r < d)$. Определить вероятность того, что монета не пересечёт ни одну из линий.

Геометрическая интерпретация:

$\Rightarrow P = \frac{(d-2r)^2}{d^2} = \left(1 - \frac{2r}{d}\right)^2$



1.22. На окружности наудачу выбираются три точки A, B, C. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный.



$\cup AB = x$

$\cup BC = y$

$\cup AC$.

Чтобы был остроугольный, мысленно можно окр. раздел. на 2 части, 2т. в одной, 1т. в другой.

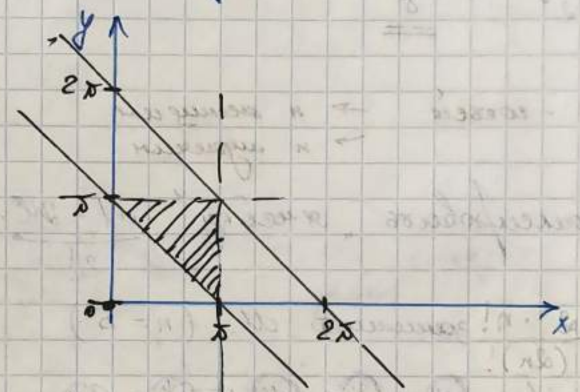
$R = 1$: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$

Чтобы был остроугольный:

$0 \le 2\pi - x - y \le \pi$ $\qquad 0 < \cup CA < \pi \;\; \rightarrow \;\; \cup AC \overset{2\pi -}{=} \cup AB + \cup BC$

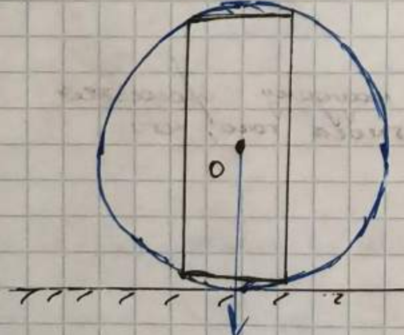
$-\pi \le x + y - 2\pi \le 0 \longrightarrow \pi < x + y \le 2\pi$.

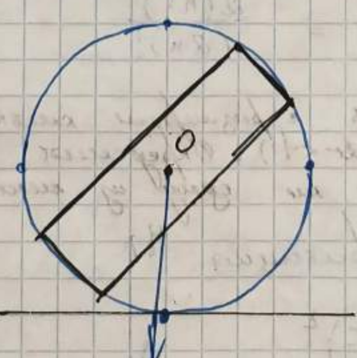
$$\begin{cases} y \le -x + 2\pi \\ y > -x + \pi \\ x \in [0; \pi] \\ y \in [0; \pi] \end{cases}$$

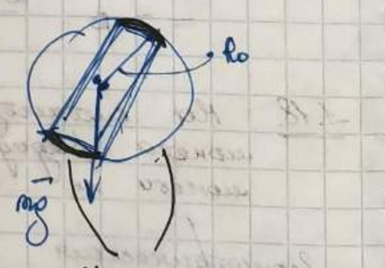


$$P = \frac{\pi^2 \cdot 2}{2 \cdot 4\pi^2} = \frac{1}{4}$$

1.20*. Какое соотношение между радиусом R и толщиной H должна иметь однородная цилиндрическая шайба, чтобы вероятность её падения на ребро равнялась $\frac{1}{3}$?







Ω: $4\pi R_0^2$ — $S(\Omega)$

1.14.

М. $\cdot \; \cdot \; \cdot \quad n$

Ж. $\cdot \; \cdot \; \cdot \quad n \quad = 2P_n^2$

$$P = \frac{2(n!)^2}{(2n)!} \leftarrow \Omega$$

уга - пуга
пу - пу - пу
Тюрьма !

26.02.22.

1.15.

$(n+k)$ мест случ. образом занимают n человек. Найти вероятность, что будут заняты определённые $m \le n$ мест.

$$\times \; \circ \; \times \quad \circ \; \times \quad \times \qquad P = \frac{C_{n+k-m}^{n-m} \cdot C_m^m}{C_{n+k}^{n}}$$

$(n+k-m)$ ~ свободные места.

$(n-m)$ ~ займут другие места

Зан. 2. Независимость.
Условная вероятность.

$A, B \in \mathcal{A}$

(1) $\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$ ~ попарная независимость.

$\boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$ ~ вер-ть события A при усл., что B произошло

$P(B) > 0 \Rightarrow \boxed{P(A|B) = P(A)}$ (2)

Условная вероятность.

Независимость в совокупности

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$

$\forall \; i_1, i_2, \ldots, i_k \in (1, 2, \ldots, n)$

$$\boxed{P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})}$$

Теорема сложения:

(3) $P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum\sum\sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 A_2 \ldots A_n)$

Теорема умножения:

(*) $\boxed{P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2 | A_1)\cdot P(A_3 | A_1 A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 A_2 \ldots A_{n-1})}$

2.2.

События A и B независимы. Будут ли независимыми события: а) A и $\bar{B}$, б) $\bar{A}$ и $\bar{B}$?

а) $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$ $\quad A\bar{A} = \varnothing$, $B\bar{B} = \varnothing$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

$A \times |\ B + \bar{B} = \Omega$

$AB + A\bar{B} = A\Omega = A$

$P(AB + A\bar{B}) = P(A)$

По аксиоме Колмогорова: $\Rightarrow P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$

$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)\cdot P(B) = P(A)[1 - P(B)] =$

$= P(A)\cdot P(\bar{B})$ $\Rightarrow$ независимы.

б) Аналогично $\Rightarrow$ независимы.

2.4.

Студент пришёл на экзамен, зная 20 из 25 вопросов. Экзаменатор задаёт студенту 3 вопроса. Найти вер-ть, что студент знает все три вопроса.

A_1 - студент знает 1ый вопрос.

A_2 - // - 2ой вопрос.

A_3 - // - 3ий вопрос.

B - студент знает все 3 вопроса.

$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$P(B) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2 | A_1)\cdot P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23} =$

$= \frac{57}{115} < 0.5$

По классической схеме: 20.19.18

$P(B) = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = \frac{20!\,3!\,22!}{3!\,17!\,25!} = \frac{57}{115}$

25·24·23

2.8.

Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта.

A - появление туза.
B - появление карты красной масти
C - появление бубнового туза
D - появление 10тки

Опр-ть зависимость пар событий: а) A и B
б) A и C
в) B и C
г) B и D
д) C и D

а) $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

$P(AB) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} = P(A) \cdot P(B)$ ~ независимые.

б) $P(C) = \frac{1}{52}$

$P(AC) = \frac{1}{52} \neq P(A) \cdot P(C)$ - зависимые.

г) B и D. ; $P(B) =$

$P(D) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$P(B|D) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$ ~ зависимые

б) A и C.

$P(A) = \frac{1}{13}$; $P(A|C) = 1$. ~ зависимые

в) B и D.

~ независимые

$P(B) = \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{1}{13}$.

г) C и D ~ зависимые.

$P(C) = \frac{1}{52}$; $P(D) = \frac{1}{13}$.

$P(C|D) = 0$

2.11. Даны три попарно независ. равновер. соб-я, которые не могут произойти одновременно. Опр-ть максимально возможное знач-е вероятности суммы этих событий. Изменится ли ответ, если снять у событий условие равной вер-ти?

$\max P(A+B+C)$ - ?

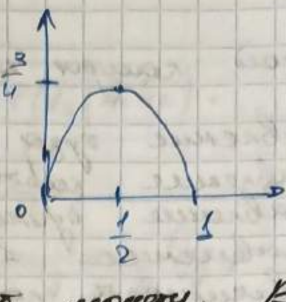
$P(A) = P(B) = P(C)$

1) $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) =$

$= 3p - 3p^2 \le \frac{3}{4}$

2) $P(A+B+C) = P_1 + P_2 + P_3 - P_1 P_2 - P_2 P_3 - P_1 P_3$

~ ф-я трех переменных.
через локал. макс.



2.20. Трое игроков поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у ~~которого~~ кого раньше выпадет "герб". Опр-ть вероятность выигрыша для каждого из игроков.

Г
РГ
РРГ
. . .

A_1 - выигрывает "первый"

$$A_1 = Г_1 + P_1P_2P_3Г_1 + P_1P_2P_3 \cdot P_1P_2P_3Г_1 + \dots$$

несовместные.

$$P(A_1) = P(Г_1) + P(P_1P_2P_3Г_1) + \dots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots = \frac{8}{2\cdot 7} = \frac{4}{7}$$

$$q = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(A_2) = \frac{\frac{1}{4}\cdot 8}{7} = \frac{2}{7}.$$

$$P(A_3) = \frac{1\cdot 8}{8\cdot 7} = \frac{1}{7}.$$

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1.$$

Домашняя работа.

Д/З: 2.5, 2.7, 2.9, 2.12, 2.16*, 2.19, 2.22*.

2.5. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает наугад. Какова вер-ть, что ему придётся звонить не более, чем в три места?

A_1 - неуг.	A_1 - уг.	A_1 - неуг.
A_2 - неуг.	A_2 - неуг. . .	A_2 - уг.
A_3 - уг.	A_3 - . . .	A_3 - . . .
. . .		
$\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}$	$1/10$	$\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}$

$$\to P = \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

Ответ: $P = \frac{3}{10}$

2.7. A - выпадение герба на первой монете.
B - выпадение хотя бы одного герба
C - выпадение хотя бы одной цифры
D - выпадение герба на одной монете.
Зависимы или нет пары событий?

до да нод да

OP

OO

PO

PP

а) A и C

$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{3}{4}$

$P(A|C) = 1 \neq P(A)$ → <u>зависимые</u>

б) B и C

$P(B) = \frac{3}{4}$; $P(C) = \frac{3}{4}$

$P(B|C) = 0$ → <u>зависимы</u>

в) A и D

$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{3}{4}$

$P(A|D) = \frac{1}{2} = P(A)$ → <u>независимы</u>

г) B и D

$P(B) = \frac{3}{4}$; $P(D) = \frac{3}{4}$

$P(B|D) = 1$ → <u>зависимые</u>

<u>2.9.</u> Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появление хотя бы одной шестерки имело вероятность: а) большую 0.5 ; б) большую 0.8?

а) A_i - выпала шестёрка
B_i - не выпала шестёрка.

$P(B_i) = \frac{5}{6}$ → для n бросков - они независимы.

$\Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,5$ → $n < \log_{\frac{5}{6}} \frac{5}{10}$

$n > \log_{\frac{6}{5}} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{6}{5}} = \frac{1}{\log_2 1,2}$

б) Аналогично: $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,2.$ → $n > \log_{\frac{6}{5}} 5 = \frac{1}{\log_5 1,2}$

$$n > \frac{1}{\log_5 1,2}$$

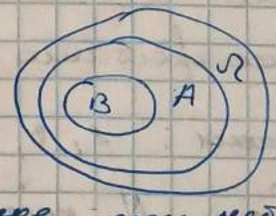
<u>2.12.</u>

A_1 ~ книга есть в 1й библиотеке

...

B_1 ~ книга взята в 1й библиотеке.

...



т.к. равновероятно есть книга в фонде или нет

→ $P(A_i) = \frac{1}{2}$

$P(B_i|A_i) = \frac{P(B_i A_i)}{P(A_i)} = \frac{1}{2}$

Пусть C - пусть хотя бы в данной библ. есть книга.

$P(\bar{A}_1 + B_1) = P(\bar{A}_1) + P(B_1) = 1 - P(A_1) + P(B_1) = \frac{1}{2} + P(B_1)$

• $P(B_1 A_1) = P(B_1 | A_1) P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$B_1 A_1 = B_1$, т.к. $B_1 \in A_1$, т.е. если книга есть в фонде, то её могут взять или нет.

$\Rightarrow P(\bar{A}_1 + B_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Если ни в одной $\rightarrow P\left((\bar{A}_1 + B_1)(\bar{A}_2 + B_2)(\bar{A}_3 + B_3)\right) = \frac{27}{64}$ ~ не возьмёт.

$1 - P = \frac{37}{64}$ ~ возьмёт.

Вероятнее всего возьмёт.

12.03.22.

2.19. $A_1, A_2, \dots, A_n$ - независ. в сов-ти

$P(A_k) = p_k$

$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) > \int_0^{\sum_{k=1}^n p_k} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\sum_{k=1}^n p_k} = 1 - e^{-\sum_{k=1}^n p_k} = 1 - \prod_{k=1}^n e^{-p_k}$

$1 - P(A_1 + \dots + A_n) < \prod_{k=1}^n e^{-p_k}$

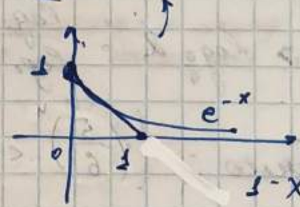
$P(\overline{A_1 + A_2 + \dots + A_n}) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) \overset{\text{незав.}}{=} P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n) =$

не происходит ни одно из них

$= (1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_n) < e^{-p_1} e^{-p_2} \dots e^{-p_n}$

$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) < \prod_{k=1}^n e^{-p_k}$

$e^{-x} > 1 - x$



доказано.

2.18. (Задача Чебышева)

$\frac{m}{n}$ - несократима, где m и $n \in \mathbb{N}$

Простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23...

При больших N число простых чисел примерно $\ln N$

A_2 - дробь не сокр.-ся на 2.

A_3 - дробь не сокр-ся на 3.

A_{p_i} - дробь не сокр-ся на p_i

B: $\frac{m}{n}$ – несократимая

$B = A_2 A_3 \dots A_{p_i} \dots$

$P(B) = P(A_2)\, P(A_3) \dots P(A_{p_i}) \dots = \prod_{p_i} \left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right)$

$P(A_2) = 1 - P(\bar{A}_2) = 1 - \underbrace{P(C_2 D_2)}_{\text{сокр. числ. на 2}} = 1 - P(C_2) P(D_2) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

сокр. знам. на 2.

аналогично $P(A_3) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

...

$P(A_{p_i}) = 1 - \left(\frac{1}{p_i}\right)^2$

2.22. (аналогично с задачей про морганизов. правилой из лекции).

Занятие 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема независимых испытаний.

Опр. Группа событий $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ – наз-ся полной группой попарно несовместных событий, если:

1) $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$

2) $H_i H_j = \varnothing$, $i \neq j$

Событие $A \in \mathcal{A}$, то $\boxed{P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A|H_k)}$ (1) – ф-ла полной вероятности.

Замечание: Если 1ое условие заменить:

1) $A \subseteq H_1 + \dots + H_n$ => ф-ла справедлива.

Формула Байеса: $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ – гипотезы.

A – опыт

$P(H_k)$ – априорные вер-ти (доопытные)

$$\boxed{P(H_k|A) = \frac{P(H_i)\, P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j) P(A|H_j)}} \quad (2)$$

апостериорные (послеопытные)

Ф-ла Бернулли:

A – наступление в опыте – "успех"

$\bar{A}$ – неудача

"n" испытаний в один. условиях.

$P(A) = p$ – одна и та же для $\forall$ испытания

(3) $\boxed{P_{k;n} = C_n^k\, p^k q^{n-k}}$, $q = 1 - p = P(\bar{A})$

Полиномиальная схема: „n" независ. испытаний.

$\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ - полная группа.

$$\boxed{P_{k_1,k_2,\ldots,k_n; n} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_n!} p_1^{k_1}\ldots p_n^{k_n}} \quad (4)$$

где $p_i = P(H_i)$; $k_1+\ldots+k_n = n$

3.1.

1 2

Какова вер-ть, что этот шар белый.

H_1 - выбран 1ый ящик.
H_2 - выбран 2ой ящик.
A - вынут белый шар.

$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$

$P(A|H_1) = \frac{2}{3}$; $P(A|H_2) = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30}$

3.3 Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Найти вероятность "стыковки" этих костей.

дупель

H_1 - вынули сначала дупель.
H_2 - вытащили первой не дупель.
A - кости стыкуются.

$P(A) = \frac{7}{28}\cdot\frac{6}{27} + \frac{21}{28}\cdot\frac{12}{27} = \frac{7}{27\cdot 4} + \frac{21}{4\cdot 9} = \frac{7}{18}$

3.13. Что вероятнее выиграть у равносильного противника:
а) три/четыр. или 5 из 8?
б) не менее 3х из 4х или не менее 5и из 8и?

а) $p = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$.

$P_{3;4} = C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4!}{3!}\cdot\frac{1}{16} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 16} = \frac{1}{4} = \frac{8}{32}$

$P_{5;8} = C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{2^3} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 32\cdot 8} = \frac{7}{32}$

б) $P_{4;4} = C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$.

$\Rightarrow P = P_{4;4} + P_{3;4} = \frac{5}{16}$.

$P_{6;8} = C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8!}{6!\,2!}\cdot\frac{1}{32\cdot 8} = \frac{7\cdot 8}{2\cdot 32\cdot 8} = \frac{7}{64}$.

$P_{7;8} = C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8}{32\cdot 8} = \frac{1}{32}$

$P_{8;8} = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$

$$P = \frac{7}{32}^{\,\cdot 8} + \frac{7}{64}^{\,\cdot 4} + \frac{1}{32}^{\,\cdot 8} + \frac{1}{256} = \frac{56+28+8+1}{256} = \frac{93}{256}$$

3.10. Два стрелка стреляют в одну мишень

$p_1 = 0{,}8$

$p_2 = 0{,}4$

A – в мишени 1 пробоина. Какова вер-ть, что попал 1ый стрелок?

H_1 – попадает первый стрелок.
H_2 – попадает второй стрелок.

$H_1 H_2$ – X
$\overline{H}_1 \overline{H}_2$ X
$H_1 \overline{H}_2$
$\overline{H}_1 H_2$

Полная группа, но нам подходят не все.

На ф-лу Байеса.

$$A = H_1\overline{H}_2 + \overline{H}_1 H_2$$

$$P(H_1\overline{H}_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$$
$$P(\overline{H}_1 H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08.$$

$$P(A \mid \overline{H}_1 H_2) = 1$$
$$P(A \mid H_1 \overline{H}_2) = 1$$

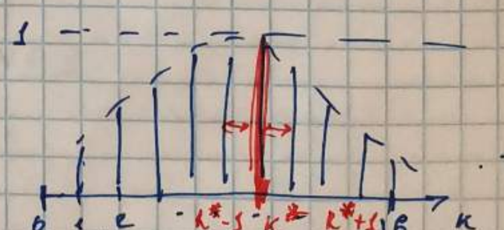
$$P(H_1\overline{H}_2 \mid A) = \frac{0{,}48 \cdot 1}{1 \cdot 0{,}48 + 1 \cdot 0{,}08} = \frac{48}{56} = \underline{\frac{6}{7}}$$

$$P(\overline{H}_1 H_2 \mid A) = \underline{\frac{1}{7}}$$

3.18 Игр. кость бросается 16 раз. Найти наивероятнейшее кол-во появлений числа очков, кратного трём.

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \; ; \; q = 1 - p = \frac{2}{3}$$

$$\underbrace{P_{k:16} = C_{16}^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{16-k}} \to \max \text{ по } k$$



примерно в середине

два нерав-ва → и сравниваем с соседними.

Д/З: 3.18 доп., ~~3.2~~, ~~3.6~~, ~~3.11~~, ~~3.15~~, ~~3.17~~*, 3.20*

Домашняя работа

3.2. В урне n - шаров. Последов. извлекаются k шаров, оказ. чёрными. Вер-ть, что все шары в урне чёрные?
а) Если шар после выемки опускается обратно.

$k = 0, 1, 2, \ldots, n$ - кол-во чёрных шаров

Извлеч. "k" шаров - чёрные - событие A

Строим гипотезы: H_i - в урне "i" чёрных шаров $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$

$\Rightarrow P(H_n|A) = ?$

$$P(H_n|A) = \frac{P(H_n)\,P(A|H_n)}{\sum\limits_{i=0}^{n} P(H_i)\,P(A|H_i)} =$$

$P(H_i) = \frac{1}{n+1}$, $\forall i$; а) $P(A|H_i) = \frac{i}{n} \cdot \frac{i}{n} \cdot \ldots = \left(\frac{i}{n}\right)^k$

$$= \frac{\left(\frac{n}{n}\right)^k}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k} = 1 \cdot \frac{n^k}{\sum\limits_{i=1}^{n} i^k}$$

б) $P(A|H_i) = \frac{i}{n} \cdot \frac{i-1}{n-1} \cdot \frac{i-2}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{i-k+1}{n-k+1} = \frac{i!\,(n-k)!\,k!}{(i-k)!\,n!\cdot k!} = \frac{C_i^k}{C_n^k}$,

$\frac{i-(k-1)}{n-(k-1)}$

$\underline{\underline{i \geq k}}$

$$P(H_n|A) = \frac{1}{\sum\limits_{i=k}^{n}\frac{C_i^k}{C_n^k}} = \frac{C_n^k}{\sum\limits_{i=k}^{n} C_i^k}, \quad i \geq k.$$

$P(A|H_i) = 0$, $i < k$

3.6. Найти вер-ть, что 100 лампочек, взятых из 1000 окаж. испр., если число непригодных на 1000 штук равновозможно от 0 до 5.

H_0 - все испр.

H_1 - неиспр 1 $\qquad P(H_i) = \frac{1}{6}$

H_2 - неиспр 2

$H \dots$

$\dots$

H_5 - неиспр 5

$n = C_{1000}^{100}$

Если H_i: $\Rightarrow C_{1000-k}^{100}$

$\Rightarrow P(A|H_i) = \frac{C_{1000-k}^{100}}{C_{1000}^{100}}$

$\rightarrow P(A) = \sum_{i=0}^{5} \frac{1}{6} \cdot \frac{C_{1000-k}^{100}}{C_{1000}^{100}}$

3.11. H_1 - попадает первый стрелок. $\quad P_1 = 0,2$

H_2 - попадает второй стрелок. $\quad P_2 = 0,4$

H_3 - попадает третий стрелок. $\quad P_3 = 0,6$

$H_1 H_2 H_3$ X - ибо. не может быть

$\bar{H}_1 \bar{H}_2 \bar{H}_3$ X

$H_1 \bar{H}_2 \bar{H}_3$

$\bar{H}_1 H_2 \bar{H}_3$ $\Rightarrow P(H_1 \bar{H}_2 \bar{H}_3) = 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,048$

$\bar{H}_1 \bar{H}_2 H_3$ $\quad P(\bar{H}_1 H_2 \bar{H}_3) = 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,128$

$P(\bar{H}_1 \bar{H}_2 H_3) = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,288$

$P(H_1 \bar{H}_2 \bar{H}_3 | A) = \frac{0,048 \cdot 1}{P(A)}$

$P(A)$; $A \in H_1 \bar{H}_2 \bar{H}_3 + \bar{H}_1 H_2 \bar{H}_3 + \bar{H}_1 \bar{H}_2 H_3$

$P(A) = 0,464$

$\Rightarrow P(H_1 \bar{H}_2 \bar{H}_3 | A) = \frac{0,048}{0,464} \approx 0,1$

$P(\bar{H}_1 H_2 \bar{H}_3 | A) \approx 0,28$

$P(\bar{H}_1 \bar{H}_2 H_3 | A) \approx 0,62$

3.15 $p = 0,8 \rightarrow \{H_1, H_2, \dots\}$

$q = 0,2$

$k = 20$

$\Rightarrow P_{k;n} = C_n^k \cdot 0,8^k q^{n-k} = C_n^{20}\, 0,8^{20} \cdot 0,2^{n-20} \rightarrow max.$

$C_n^{20} \cdot 0,8^{20} \cdot 0,2^{n-20} = f(n)$

$f(n) > f(n+1)$ $\quad C_n^{20}\cdot 0{,}8^{20}\cdot 0{,}2^{n-20} > C_{n+1}^{20}\cdot 0{,}8^{20}\, 0{,}2^{n-19}$

$f(n) < f(n+1)$

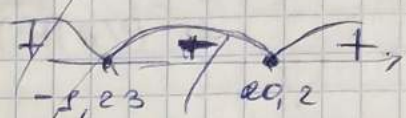
$$\frac{n!}{20!\,(n-20)!}\cdot 0{,}2^{-1} \geq \frac{(n+1)!}{20!\,(n-19)!}$$

$$\frac{5}{n-20} > \frac{n+1}{n-19} \qquad 5n - 95 \geq n+1$$

$$\cancel{\frac{5}{n-20} - \frac{n+1}{}} > 0 \qquad 4n \geq 96$$

$$\cancel{\frac{5-(n+1)(n-20)}{n-20}} > 0 \qquad n \geq 24$$

$$\cancel{\frac{5-n^2+20n-n+20}{n-20}} > 0$$



$n > 20$

$f(n-1) < f(n)$

$$C_{n-1}^{20}\, 0{,}8^{20}\, 0{,}2^{n-21} < C_n^{20}\cdot 0{,}8^{20}\, 0{,}2^{n-20}$$

$$\frac{(n-1)!}{20!\,(n-21)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} < \frac{n!}{20!\,(n-20)!}$$

$$5 < \frac{n}{n-20}$$

$$5n - 100 < n \rightarrow n \leq 25$$

$$\Rightarrow \quad 24 \leq n \leq 25$$

По-другому: $np - q \leq k \leq np + p$

$n\,0{,}8 - q \leq 20 \leq 0{,}8(n+1) \rightarrow n+1 \geq \frac{20}{0{,}8} = 25$

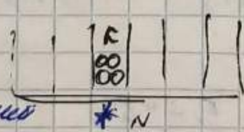
$n \geq 24$

$0{,}2(n4 - 1) \leq 20$

$4n - 1 \leq 100 \rightarrow n \leq 25.25$

$24 \leq n \leq 25$

3.17. N − лунок, m − шариков, число испытаний



по схеме бернулли

Успех − попадание шарика в лунку *

$p = \frac{1}{N}$, $q = 1 - \frac{1}{N}$

$P = C_m^k \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{m-k}$

26.03.22. Занятие 4. Случайные величины.

ξ - случайная величина

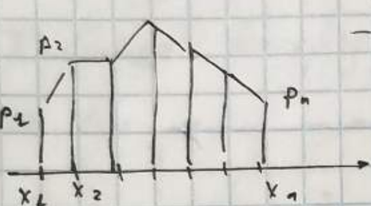
Если ξ принимает конечное или счётное число значений, то ξ - дискретная случ. величина.

Например: ξ - кол-во очков на верхней грани кубика,
$\xi = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

ξ	x_1	x_2	. .	.	x_n
p	p_1	p_2			p_n

ряд распределения случайной величины

$p_i = P(\xi = x_i)$



— многоугольник распределения

$\boxed{F_\xi(x) = P(\xi < x)}$ — функция распределения

$F_\xi(x)$ — абсолютно непрерывна, т.е.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$$, то ξ = непр. с.в.

$$\Rightarrow P(\xi = x_0) = 0$$

Если $P(a \le \xi \le b) = P(a < \xi < b] = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(t)\,dt$

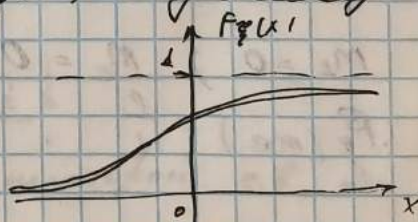
$\Rightarrow f_\xi(t)$ — плотность вероятности.

Основные св-ва: $F_\xi(x)$

1) Для $\forall x_1, x_2$: $x_1 < x_2$ $\to F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$ — неубывающая.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1$

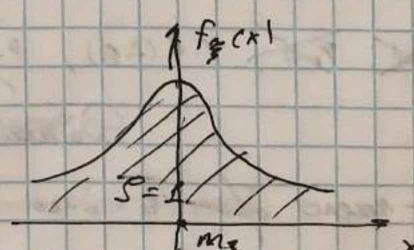
3) Непрер-ть слева: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$



Св-ва $f_\xi(x)$:

1) $f_\xi(x) \ge 0$ для $\forall x$

2) Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$



Мода - точки положения максимумов: m:

Медиана - me: $$\int_{-\infty}^{me} f_\xi(x)\,dx = \int_{me}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

4.1. ξ - число попаданий мячом в корзину при 4-х бросках.,
$p=0,3$ - в-ть попадания при одном броске.

схема Бернулли:

ξ	0	1	2	3	4
p	$0,7^4$	0,4	0,3	0,08	0,0081

$0,7^4$
0,25

$P_{0;4} = C_4^0\, 0,3^0 \cdot 0,7^4 = 0,7^4 \approx 0,25$

$P_{1;4} = C_4^1\, 0,3^1 \cdot 0,7^3 = \frac{4!}{3!\cdot 1} \cdot 0,3 \cdot 0,7^3 =$

$= 4 \cdot 0,3 \cdot 0,7^3 \approx 0,4$

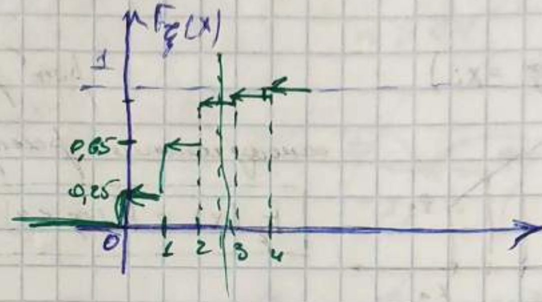
$P_{2;4} = 6 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^2 \approx 0,3$

$P_{3;4} = 4 \cdot 0,3^3 \cdot 0,4 \approx 0,08.$

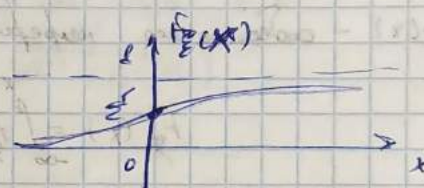
$P_{4;4} \approx 0,0081$

$\sum_{i=1}^{4} P_i = 1.$

$F_\xi(x) = P(\xi < x$



4.8. (4) Найти $f_\xi(x)$, m_e, m_i,

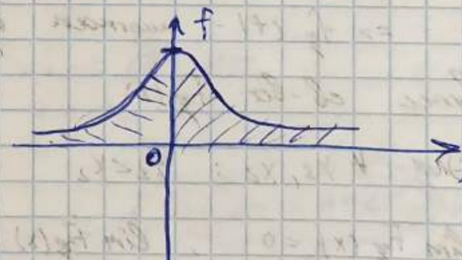


$F_\xi(x) = a + b\cdot\operatorname{arctg} x$, $a, b = ?$

$\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = a - \frac{b\pi}{2} = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = a + \frac{b\pi}{2} = 1$ $\Big\} +$ $a = \frac{1}{2}$
$b\pi = 1 \to b = \frac{1}{\pi}$

$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$

$f_\xi(x) = F_\xi'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+x^2)}$



$m_i = 0$; $m_e = 0$

$F_\xi(m_e) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$

$\operatorname{arctg} x = 0 \Rightarrow m_e = 0$

Д/з: ~~4.4~~, ~~4.5~~, 4.8 (2,3), ~~4.9 (1,4)~~, 4.11*

Домашняя работа.

4.2. ξ_i - число бросков i-го игрока ($i = 1, 2$) В - попал
П - промах

$p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,6$ $\to F_{\xi_i} - ?$

$p^1 = P(B_1) + P(\Pi_1\Pi_2 B_1) + P(\Pi_1\Pi_2\Pi_1\Pi_2 B_1) + \ldots =$

$= 0,4 + 0,6 \cdot 0,4^2 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + \ldots =$

$= 0,4 + 0,6 \cdot 0,4^2 + 0,6^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,4 + \ldots =$

$= 0,4 + 0,096 + 0,02304 + \dots$

Для 1го игрока, пусть ξ_n - число бросков 1го игрока

Рассмотрим шанс победить второго игрока

$$P^{?} = P(П_1 В_2) + P(П_1 П_2 П_1 В_2) + P(П_1 П_2 П_1 П_2 П_1 В_2) + \dots =$$

$$= 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + \dots$$

$$= 0,36 + 0,0864 + 0,020736 + \dots$$

Таблица распределения случ. величин.

Для 1го

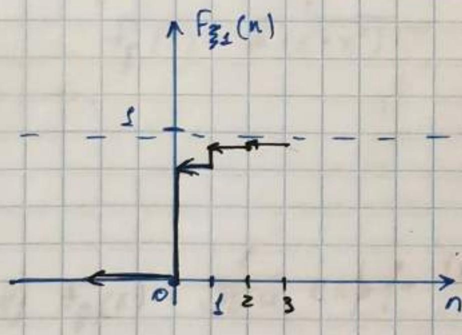
n	1	2	3	4	...	n
P	≈0,76	≈0,1824	0,044	≈0,0105	...	$0,6^{n-1} \cdot 0,4^{n} + 0,4^{n-1} \cdot 0,6^{n+1}$

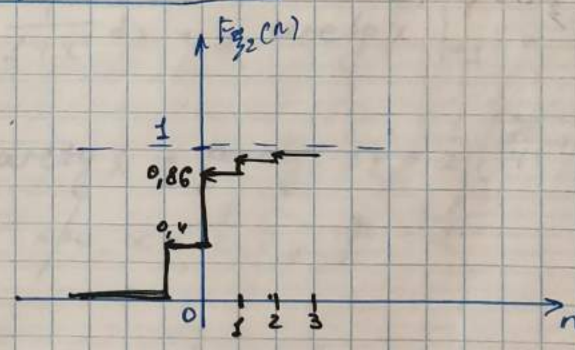
$+$

0
0

Для 2го

n	0	1	2	3	4	...	n
P	0,4	0,456	≈0,109	≈0,026	...	...	$0,6^{n+1} 0,4^{n-1} + 0,6^{n} \cdot 0,6^{n+1}$





4.5. Док-ть, что если $F(x)$ - ф-я распр-я некоторой с.в, то ф-я вида

$$\Phi_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)\, dt \qquad (h>0)$$

могут быть функциями распределения.

1) $F(t)$ - неубыв. и $0 < F(t) < 1$. - положительна

$$|\Phi_h(x)| = \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h} F(t)\, dt\right| \underset{\text{по т. о среднем}}{\le} \frac{1}{h} \cdot \left|F(t_0) \cdot (x+h-x)\right| \le F(t_0)$$

$\Rightarrow 0 < \Phi_h(x) \le 1$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi_h(x) \overset{?}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \lim\limits_{t \to -\infty} F(t)\, dt = 0 \sim x \to -\infty \Rightarrow F(x) \to 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_h(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} 1\,dt = \frac{1}{h}\cdot(x+h-x) = 1.$

4) Про непр-ть слева:

$\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$ => $\Phi_h(x)$ – возраст. ф-я, т.к. $F(x)$ ~ абсол. непрерывная => $\Phi_h(x)$ ~ непр. слева.

=> $\Phi_h(x)$ – выполн. все свойства ф-ии распределения., ч.т.д.

Пусть $x_1 \le x_2$.

=> $\Phi_h(x_1) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_1}^{x_1+h} F(t)\,dt$; $\Phi_h(x_2) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_2}^{x_2+h} F(t)\,dt$

Подинт. ф-я неубыв.-я => $\Phi_h(x_1) \le \Phi_h(x_2)$

4.8. 2) $F_\xi(x) = (a + b\arcsin x)\cdot 1_{[-1,1]}(x) + 1_{(1,\infty)}(x)$, $a, b = ?$

$\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) \overset{?}{=}$ неопределено.

$\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) \overset{?}{=}$ неопределена.

$\lim\limits_{x\to-1} F_\xi(x) = (a$

4.9. 1) $f_\xi(x) = \frac{\alpha}{1+x^2}$

$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\alpha}{1+t^2}\,dt = \alpha \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty}^{x} = \alpha\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = \alpha\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = \alpha\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \pi\alpha. \to 1$

$F_\xi(x)$ - ф-я распред-я при $\alpha = \frac{1}{\pi}$

$F_\xi(m_e) = \frac{1}{2} \to$

$\alpha\left(\operatorname{arctg} m_e + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\operatorname{arctg} m_e = \frac{1}{2\alpha} - \frac{\pi}{2} = \frac{1-\pi\alpha}{2\alpha}$

$m_e = \operatorname{tg}\left(\frac{1-\pi\alpha}{2\alpha}\right)$

при $\alpha = \frac{1}{\pi} \to m_e = 0$

Мода $m_0 = 0$

При $\alpha = \frac{1}{\pi} \to F_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1. \Rightarrow P = \int\limits_{-1}^{1} f_\xi(x)\,dx$

$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \Rightarrow P = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Ответ: при $\alpha = \frac{1}{\pi}$; $P = \frac{1}{2}$

4) $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$

$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha} e^{\frac{-t^2+2at-a^2}{2\sigma^2}}\,dt =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha}\left(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}t^2}\,dt}_{\text{не выраж. в элемент. ф-ях}} + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{at}{\sigma^2}}\,dt + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\,dt\right)$

~~чтое~~ $f_\xi(x)$ - распределение Гаусса.

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sigma = \frac{\sigma}{\alpha} \to 1$

$\Rightarrow F(x)$ ~ будет истинной ф-ей распр-я при $\alpha = \sigma$

Мода: $m_1 = a$

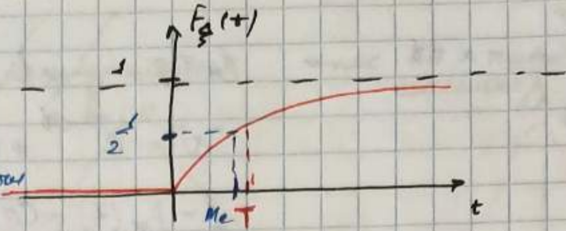
Медиана: m_e - ?

$$\int_{-\infty}^{m_e} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{m_e}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2}$$

... ? $\quad F(|\xi| < 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$ ~ только численно.

9.04.22.

4.11. $F_\xi(t) = (1 - e^{-t/T}) \cdot 1(t)$



ξ - время безотказной работы прибора.

Вер-ть безотказной работы прибора в теч. времени T?

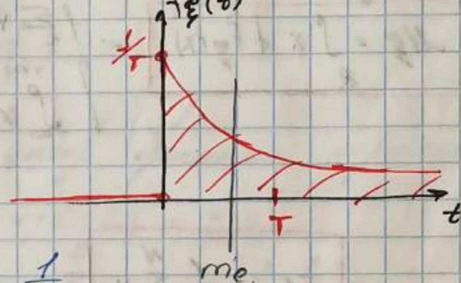
1) $P(\xi < T)$ и док-ть, что $P(t < \xi < s \mid \xi > t) = P(\xi < s - t)$, $t < s$

условная вер-ть

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

– объект без последействия

$$f_\xi(t) = \frac{d}{dt} F_\xi(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \cdot 1(t)$$



Мода: $m_1 = 0$

Медиана: ξ

$$P(\xi < m_e) = P(\xi > m_e) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = (1 - e^{-\frac{m_e}{T}}) = e^{-\frac{m_e}{T}} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{m_e}{T} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \underline{m_e = T \ln 2}$$

$$P(\xi < T) = F_\xi(T) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

2) $P(t < \xi < s \mid \xi > t) = P(\xi < s - t) = F_\xi(s-t)$, $t < s$

$$P(t < \xi < s \mid \xi > t) = \frac{P(t < \xi < s \cap \xi > t)}{P(\xi > t)} = \frac{P(t < \xi < s)}{1 - P(\xi < t)} = \frac{F_\xi(s) - F_\xi(t)}{1 - F_\xi(t)} =$$

$$\left. F_\xi(t) = P(\xi < t) \right| = \frac{(1 - e^{-s/T}) - (1 - e^{-t/T})}{e^{-t/T}} = 1 - e^{-\frac{s-t}{T}}$$

=> удовлетворяет условию последействия

$$\frac{F_\xi(s) - F_\xi(t)}{1 - F_\xi(t)} = F_\xi(s - t)$$

Пусть $s = t + \Delta t$ и $\Delta t \to 0$

$$F_\xi(t + \Delta t) - F_\xi(t) = F_\xi(\Delta t)\,[1 - F_\xi(t)] \quad \Big| \cdot \frac{1}{\Delta t}, \quad \Delta t \to +0$$

$$\frac{dF_\xi(t)}{dt} = [1 - F_\xi(t)] \cdot \alpha \qquad \lim_{\Delta t \to +0} \frac{F_\xi(\Delta t)}{\Delta t} = \alpha > 0$$

$$\frac{dF_\xi(t)}{1 - F_\xi(t)} = \alpha\, dt$$

$$\rightarrow \quad 1 - F_\xi(t) = W(t)$$

$$\frac{dW}{W} = -\alpha\,dt \quad \to \quad \ln W = -\alpha t + \ln C, \quad \alpha > 0$$

$$W = e^{-\alpha t} \cdot C$$

$$1 - F_\xi(t) = Ce^{-\alpha t} \quad \to \quad F_\xi(t) = 1 - Ce^{-\alpha t}$$

$$F_\xi(t \to +0) = 1 - C = 0 \quad \to \quad C = 1$$

$$F_\xi(t) = 1 - e^{-\alpha t}, \text{ что и т.д.}$$

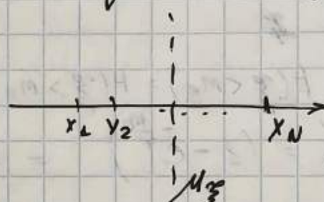
Занятие 5. Моментные характеристики случайных величин.

Математическое ожидание случайной величины (среднее значение)

$$\boxed{M\xi = \int_R x\, dF_\xi(x)} = \begin{cases} \sum_k x_k P(\xi = x_k) & \text{~ дискретная сл. вел.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx & \text{~ для непр. случ. величины.} \end{cases}$$

$$P(\xi = x_k) = \frac{1}{N}$$

$$\xi = x_1, x_2, \dots, x_N \quad \to \quad \boxed{M\xi = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k}$$



Начальный момент n-го порядка случайной величины:

$$\boxed{\alpha_n = \int_R x^n\, dF_\xi(x)}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

$$\alpha_1 = M\xi$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \sum_k x_k^n P(\xi = x_k) & \text{~ дискретная величина} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\xi(x)\, dx & \text{~ непр. с. в.} \end{cases}$$

Центральный момент n-го порядка:

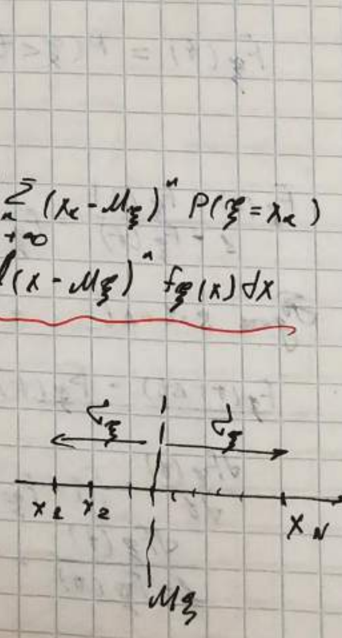
$$\mu_n = M(\xi - M\xi)^n = \int_R (x - M\xi)^n\, dF_\xi(x) = \begin{cases} \sum_k (x_k - M\xi)^n P(\xi = x_k) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^n f_\xi(x)\, dx \end{cases}$$

$\mu_2, \mu_3, \mu_4, \dots$

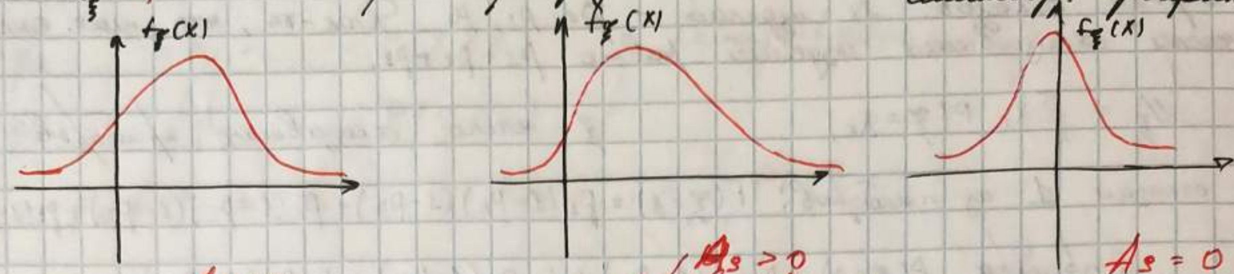
$\mu_1 = 0$ – всегда

$\boxed{\mu_2 = D\xi}$ – дисперсия случайной величины.

$\boxed{\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}}$ – средне-квадратичное отклонение



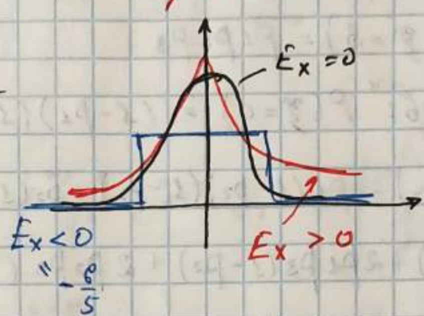
$\left\{ A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_\xi^3} \right\}$ – ассимметрия распределения ~ пок-ет насколько не симметр. график



$\left\{ E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} - 3 \right\}$ ~ эксцесс

$E_x \geq -2$

$\Rightarrow \frac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} \geq 1$



5.2. ξ – число очков, выпад. при однокр. бросании игральной кости

$1+2+3+4+5+6 = \frac{21}{6}$

$M\xi = \frac{1}{N}\sum_{k=1} x_k = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,5$

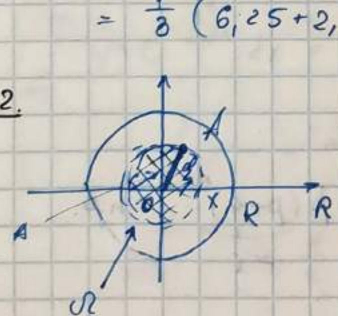
$D\xi = \sum_{k=1}^{6}(x_k - M\xi)^2 \cdot P(\xi = x_k) = \sum_{k=1}^{6}(x_k - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} =$

$= \frac{1}{6}\left((-2,5)^2 + (-1,5)^2 + (-0,5)^2 + (0,5)^2 + (1,5)^2 + (2,5)^2\right) =$

$= \frac{1}{6}(6,25 + 2,25 + 0,25 + 0,25 + 2,25 + 6,25) =$

$= \frac{1}{3}(6,25 + 2,25 + 0,25) = \frac{8,75}{3} \approx 2,92$

5.12.



$f_\xi(x)$, $M\xi$

$F_\xi(x) = P(\underbrace{\xi < x}_{A}) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}$

$f_\xi(x) = \frac{2x}{R^2}$ $\quad x \in [0; R]$

$M\xi = \int_0^R \frac{2x^2}{R^2}\,dx = \frac{2}{3R^2} \cdot x^3 \Big|_0^R = \frac{2R^3}{3R^2} = \frac{2}{3}R$

Д/з: ~~5.1~~, ~~5.4~~, ~~5.7~~, 5.9, ~~5.14~~, 5.18*, 5.20*

\+ Док-ть: $A_s^2 \leq E_x + 2$

Домашняя работа.

5.1. Вер-ти отказов 3х изделий – p_1, p_2, p_3. Док-ть, что мат. ожидание числа отказавших изделий равно $p_1+p_2+p_3$.

$M\xi = \sum_k x_k P(\xi = x_k)$ $\quad$ ξ – число отказавших приборов

Если отказал 1 из приборов: $P(\xi=1) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + p_2(1-p_1)(1-p_3) + p_3(1-p_1)(1-p_2)$

2 прибора: $P(\xi=2) = p_1p_2(1-p_3) + p_1p_3(1-p_2) + p_2p_3(1-p_1)$

3 прибора: $P(\xi=3) = p_1p_2p_3$

0 приборов: $P(\xi=0) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

$$M\xi = \sum_{k=0}^{3} x_k P(\xi = x_k) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + p_2(1-p_1)(1-p_3) + p_3(1-p_1)(1-p_2) +$$
$$+ 2p_1p_2(1-p_3) + 2p_1p_3(1-p_2) + 2p_2p_3(1-p_1) + 3p_1p_2p_3 =$$
$$= p_1+p_2+p_3 + 3p_1p_2p_3 - \cancel{2p_1p_3} - \cancel{2p_1p_2} - \cancel{2p_2p_3} + 3p_1p_2p_3 +$$
$$+ \cancel{2p_1p_2} - 2p_1p_2p_3 + \cancel{2p_1p_3} - 2p_1p_2p_3 + \cancel{2p_2p_3} - 2p_1p_2p_3 = p_1+p_2+p_3$$

ч.т.д.

5.4. 40 – приобр. билетов. Вер-ть выигрыша – 0,05. Найти мат. ожидание.

Выигрыш для каждого билета равновероятен.

$p = 0{,}05 \quad \to \quad P(\xi = k) = C_{40}^k p^k (1-p)^{40-k}$

$P = C_n^k p^k q^{n-k}$

$m \cdot C_m^n = n \cdot C_{n-1}^{m-1}$

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = n \cdot p \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot p^{k-1} q^{n-k} = n \cdot p \underbrace{(p+q)^{n-1}}_{=1} = np.$$

$$\Rightarrow M\xi = 40 \cdot 0{,}05 = 2$$

5.7. Случайная величина ξ принимает только целые неотриц. значения. Док-ть, что
$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi \geq k\}, \quad \text{если } M\xi < +\infty$$

Док-во:

Пусть $p_n = P(\xi = n)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ – по условию

По опр-ю: $M\xi = \sum_{k} x_k P(\xi = k) = 0 \cdot p_0 + 1 p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n + \ldots$

Т.к. $M\xi < +\infty \to$ то ряд должен сходится.

Можно перегруппировать слагаемые.

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = P\{\xi \geq 1\}$$

$$\ldots$$

$$p_k + \ldots + p_n + \ldots = P\{\xi \geq k\}$$

$$p_2 + \ldots + p_n + \ldots = P\{\xi \geq 2\}$$

Складываем.

$$\Rightarrow p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k)$$

$$\Rightarrow M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k) \quad \text{, ч.т.д.}$$

5.14. $f_\xi(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot 1(x)$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot 1(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{2\sigma^2} = t \to x = \sigma\sqrt{2t} \\ \frac{\cancel{2}x\,dx}{\cancel{2}\sigma^2} = dt \to dx = \frac{\sigma^2 dt}{\cancel{2}\sigma\sqrt{2t}} = \\ = \frac{\sigma\,dt}{\cancel{2}\sqrt{2t}} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} 2t \cdot e^{-t} \cdot \frac{\sigma\,dt}{\sqrt{2}\sqrt{t}} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt = \left\{ \begin{array}{l} p-1 = \frac{1}{2} \\ p = \frac{3}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\sigma}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow M\xi = \frac{\sqrt{\pi}\,\sigma}{\sqrt{2}}$$

Медиана: $\int_{m_e}^{\infty} f_\xi(x) = \frac{1}{2}$

$$\int_m^{\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{2\sigma^2} \int_m^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,d(x^2) = \frac{1}{\cancel{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{\cancel{2\sigma^2}}{1}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_m^{\infty} =$$

$$= -\left(0 - e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}}\right) = e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{m^2}{2\sigma^2} = \ln\frac{1}{2} \to \frac{m^2}{2\sigma^2} = \ln 2 \to m^2 = 2\sigma^2 \ln 2$$

$$m_e = \sigma\sqrt{2\ln 2}$$

$M\xi \approx 0{,}8862\,\sigma$

$m_e \approx 1{,}1774.$ $\quad \to M\xi < m_e. \quad \Rightarrow$ нет

5.9 n независимых выстрелов. Вер-ти попадания равны: $p_1, p_2, \ldots, p_n$

$$\overline{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i$$

По $\overline{p}$ опр-т мат. ожидание и дисперсию числа попаданий. Справедлив ли такой подход?

По опр-ю: $M\xi =$

23.04.22.

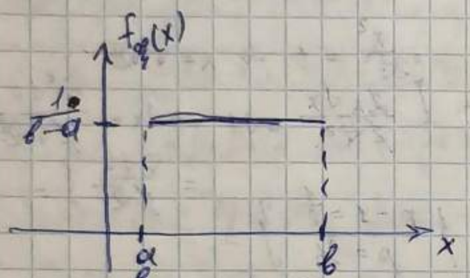
5.18 $\xi \in [a,b]$; $a \le M\xi \le b$

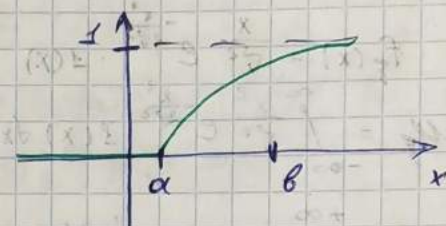
$D\xi \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ - ? $\quad 0 \le a \le b$

При помощи распр. $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF_\xi(x) = \int_a^b x\, dF_\xi(x)$

$$\int_a^b a\, \underbrace{dF_\xi(x)}_{\ge 0} \le \int_a^b x\, dF_\xi(x) \le \int_a^b b\, dF_\xi(x)$$

$$a(\underbrace{F_\xi(b) - F_\xi(a)}_{=1}) \le \underbrace{\int_a^b x\, dF_\xi(x)}_{=M\xi} \le b\,(F_\xi(b) - F_\xi(a))$$





$$D\xi = \frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$D\xi = \int_a^b (x - M\xi)^2\, dF_\xi(x) = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

5.9. $p_1, p_2, p_3, \dots p_n \to$ можно ли $\to \bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k$

ξ - число попаданий при „n" выстр.

$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \dots + \eta_n \to$ незав. велич.

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{попада в } i\text{-м выстр.} \\ 0, & \text{промах в } i\text{-м выстр.} \end{cases}$$

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} M\eta_i = \sum_{i=1}^{n} (1 \cdot p_i + 0 \cdot (1 - p_i)) = \sum_{i=1}^{n} p_i \quad \boxed{}$$

Если $\bar{p}$ $M\xi = n\bar{p} = \sum_{i=1}^{n} p_i$ ← одинак. знач-я! → совп.

$\bar{p}$ - можно.

при $\underline{\bar{p} : D\xi = n\bar{p}\bar{q} = n\bar{p}(1-\bar{p})}$

если не $\bar{p}$: $D\xi = \sum_{i=1}^{n} D\eta_i = \sum_{i=1}^{n} M(\eta_i - M\eta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [(1-p_i)^2 \cdot p_i +$
$+ (0 - p_i)^2 \cdot (1 - p_i)] = \sum_{i=1}^{n} (1 - p_i)(p_i(1-p_i) + p_i^2) =$
$= \sum_{i=1}^{n} (1 - p_i) p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$

=> результат не совпад → для дисперсии

$\bar{P}$ исп. нельзя.

Зан. 6 Случайный вектор.

$\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ - опред. на вероятн. пространстве $(\Omega, P, \mathcal{F})$

$F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = F_{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$ - ф-я распред. случ. вектора

Для независимых величин:

$$F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = P(\xi_1 < x_1) P(\xi_2 < x_2) \dots P(\xi_n < x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \dots F_{\xi_n}(x_n)$$

Для непрерывного вектора:

$$F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) \, dt_1 \dots dt_n$$

Для независимых величин

$$f_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2) \dots f_{\xi_n}(x_n)$$

пусть $\{\xi, \eta\}$ - дискретный вектор.

$P(\xi = x_i; \eta = y_j) = p_{ij}$; $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$. для незав. (при $\forall i, j$):

$$P(\xi = x_i; \eta = y_j) = P(\xi = x_i) P(\eta = y_j)$$

Начальный момент k-ого порядка:

$$\alpha_{k_1 \dots k_n} = M \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n}$$

Центральный момент k-ого порядка:

$$\mu_{k_1, k_2 \dots k_n} = M(\xi_1 - M\xi_1)^{k_1} (\xi_2 - M\xi_2)^{k_2} \dots (\xi_n - M\xi_n)^{k_n}$$

$$M(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j) = \mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

$\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_i) = D\xi_i$ ~ ковариация случайной величины

$\mathbb{K} = \{\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)\}$ - корреляц. матрица.

Коэфф-ты корреляции:

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)}{\sqrt{D\xi_i \cdot D\xi_j}} \leq 1$$

Для независимых величин $\rho_{ij} = 0$, но в общем случае если $\rho_{ij} = 0$, то это не значит, что величины незав.

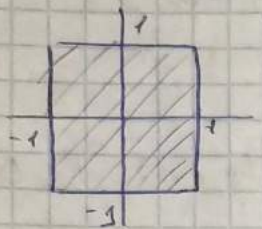
нез-ть $\equiv$ некорре-ть ~ при нормальных распр.

6.1. Случ. вектор распр. по з-ну:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \frac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$$

a - ?, явл. ли ξ, η - независ. -?

$P(-1 \le \xi \le 1,\ -1 \le \eta \le 1)$



$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\,dy$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\,dx$$

$$P((\xi,\eta)\in B) = \iint_B f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy$$

Нормировка: $\boxed{\iint_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy = 1}$

1) a:

$$a\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2+x^2y^2} = a\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2(1+x^2)} = a\iint_{-\infty} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1} = a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\cdot \operatorname{arctg} y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\cdot\pi^2 = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\pi^2}$$ - из условия нормировки.

2) $$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{a}{1+x^2}\pi = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\,dx}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{a}{1+y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

$f_{\xi\eta}(x) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$ - нез-ть док-на

3) $$P = a\left(\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}\right)^2 = \frac{1}{\pi^2}\left(-\operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1}\right)^2 = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

№6.7.

$\xi \backslash \eta$	-1	0
0	$1/4$	$5/12$
1	$1/8$	$1/6$

$\rho_{\xi\eta} = ?$

$P(\xi=0, \eta=-1) = \frac{1}{4}$

$P(\xi=0) = \frac{1}{4}+\frac{5}{12} = \frac{2}{3}$

$P(\eta=-1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{5}{12}$

$P(\xi=0)\,P(\eta=-1) = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 12} = \frac{5}{18}$ $\rightarrow$ зависимость есть

ξ	0	1
p	2/3	1/3

$=1-p$

η	-1	0
p	5/12	7/12

$=1-p$

$M\xi = 0\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$M\eta = -1\cdot\frac{5}{12} + 0\cdot\frac{7}{12} = -\frac{5}{12}$

$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 =$

$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = \left(0-\frac{1}{3}\right)\left(-1+\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{1}{4} + \ldots$

Д/з: 6.2, 6.4, 6.8*, 6.12, 6.15, 6.18.

Домашняя работа

6.18. $f_{\xi\eta}(x,y) = \{r=0\} = f_\xi(x)\, f_\eta(y)$ ~ нез-ть

т.е. факторизуется (см. формулу 6.5)

6.12. $f_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}$

Проверка условия нормировки:

$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$\rightarrow \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2 = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx}_{=1 \text{ усл. из гаус. распр.}}\right)^2\cdot 2\pi =$

$= 2$!

7.05.22

Зан. 7. Распределение функций от случайных величин

ξ - с.в. с ф-ей распр-я $F_\xi(x)$ - ф-я распределения.

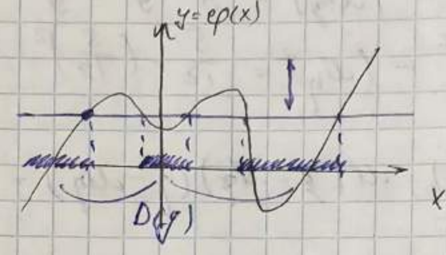
$\eta = \varphi(\xi)$ - новая случ. величина.

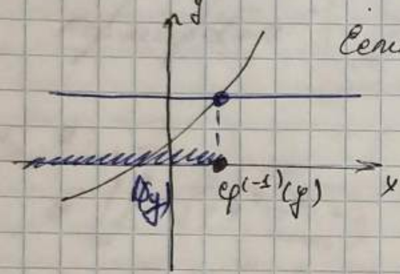
Требуется найти $\underline{F_\eta(y) = P(\eta<y)} = ?$

1) $F_\eta(y) = P(\eta<y) = P(\varphi(\xi)<y) =$

$= \int\limits_{D(y)} f_\xi(x)\,dx$

а $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$





Если монотонная:

$\varphi(x) = y$

$x = \varphi^{(-1)}(y) \quad \Rightarrow \quad F_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\varphi^{(-1)}(y)} f_\xi(x)\,dx$

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \left[\varphi^{(-1)}(y)\right]' f_\xi\left(\varphi^{(-1)}(y)\right) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{(-1)}(y))} f_\xi\left(\varphi^{(-1)}(y)\right) = \psi'(y)\cdot f_\xi(\psi(y))$$

$\psi'(y) > 0$

$\boxed{f_\eta(y) = |\psi'(y)|\, f_\xi(\psi(y))}$ монотонность.

$x = \psi(y)$ - неоднозначная

$\boxed{f_\eta(y) = \sum_i |\psi_i'(y)|\, f_\xi(\psi_i(y))}$ $\quad \psi_i(y)$ - ветви однозначности обр. ф-ии.

2) Пусть есть $\eta = \underbrace{\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}_{\varphi(\vec{\xi})}$ и задана $f_{\xi_1\ldots\xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$

Исходим из опр-я:

$$F_\eta(y) = P(\eta<y) = P(\varphi(\xi_1\ldots\xi_n)<y) = \int\limits_{D(y)}\!\ldots n\!\int f_{\xi_1\ldots\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

$D: \ \varphi(x_1,\ldots,x_n) < y$

3) $\vec{\eta} = \vec{\varphi}(\vec{\xi})$

В общем случае: $\vec{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$

$$\vec{\eta} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\} \qquad m \le n$$

$$\begin{cases} \eta_1 = \varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \eta_2 = \varphi_2(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \dots \\ \eta_m = \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{cases}$$

$$\boxed{F_{\vec{\eta}}(\vec{y}) = P(\eta_1 < y_1, \eta_2 < y_2, \dots, \eta_m < y_m) = \underset{D(y_1, \dots, y_m)}{\int \dots \int} f_{\vec{\xi}}(\vec{x})\, d\vec{x}}$$

$D(y_1, \dots, y_m)$: $\varphi_1(x_1, \dots x_n) < y_1 \cap \varphi_2(x_1, \dots, x_n) < y_2 \cap \dots \cap \varphi_m(x_1, \dots, x_n) < y_m$

Если $m = n$

$$f_{\vec{\eta}}(\vec{y}) = \left| \frac{D(\psi_1, \dots, \psi_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \right| f_{\vec{\xi}}(\vec{\psi}(\vec{y}))$$

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(y_1, \dots, y_n) \\ x_2 = \psi_2(y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ x_n = \psi_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$ – взаимно-однозначное преобразование

Если хотим $\eta = \xi_1 + \xi_2$

1) $F_\eta(y) = P(\xi_1 + \xi_2 < y)$

2) $\eta = \xi_1 + \xi_2$, $\zeta = \xi_1$ – вводим новую с.в. $\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \xi_1 = \zeta \\ \xi_2 = \eta - \zeta \end{matrix}}$

$$\begin{matrix} x_1 = y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{matrix}$$

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{\eta\zeta}(y_1, y_2) = f_{\xi_1\xi_2}(y_2, y_1 - y_2)}$$

$$\boxed{f_\eta(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta\zeta}(y_1, y_2)\, dy_2}$$

7.2. $\xi_1 + \xi_2 = 10\eta_2 + \eta_1$

ξ_1, ξ_2 $(0, 1, 2, \dots, 9)$ – независимы и равн-но распред-ы

ξ_1	0	1	...	9
P	$1/10$	$1/10$	...	$1/10$

$\eta_2 = 0, 1$; $\eta_1 = 0, 1, 2, \ldots 9$

$$P(\eta_2=0) = \underbrace{\underset{P(\xi_1=0)P(\xi_2=0)}{\underset{\parallel}{P(\xi_1=0,\xi_2=0)}} + P(\xi_1=0,\xi_2=1) + \ldots + P(\xi_1=0,\xi_2=9)}_{\frac{1}{100}\cdot 10} +$$

$$+ \frac{1}{100}\cdot 9 + \ldots + \frac{1}{100}\cdot 1 = \frac{1}{100}(1+2+\ldots+10) = \frac{1}{100}\cdot\frac{10\cdot 11}{2} = \frac{11}{20}$$

$$P(\eta_2=1) = \frac{9}{20}$$

η_2	0	1
P	$11/20$	$9/20$

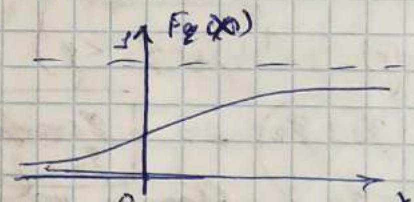
$$P(\eta_1=0) = \frac{1}{100}\cdot 10 = \frac{1}{10}$$
$$P(\eta_1=1) = \frac{1}{100}\cdot 10 = \frac{1}{10}$$

η_1	0	1	...	9
p	$1/10$	$1/10$	...	$1/10$

$$P(\eta_1=7, \eta_2=1) = P(\xi_1=8,\xi_2=9) + P(\xi_1=9,\xi_2=8) = \frac{1}{100}\cdot 2 = \frac{1}{50}$$

$$P(\eta_1=7) = \frac{1}{10}$$
$$P(\eta_2=1) = 9/20 \quad \to \frac{9}{200} \quad \Rightarrow \eta_1 \text{ и } \eta_2 \text{ зависимы}$$

7.3 ξ - непр. с.в. с $F_\xi(x) = P(\xi<x)$



$\boxed{\eta = F_\xi(x)}$

$f_\eta(y) = ?$

$\xi = \psi(\eta)$

$$f_\eta(y) = |\underset{>0}{\psi'(y)}|\, f_\xi(\psi(y)) = \frac{1}{\underset{\underset{f_\xi(\psi(y))}{\parallel}}{F'_\xi(\psi(y))}} f_\xi(\psi(y)) = 1, \quad y\in[0,1]$$

$$\begin{cases} y = F_\xi(x) \\ x = \psi(y) \end{cases}$$

RND

Теперь нужно получить величину $F_0(x) = P(\xi<x)$

Для примера: $f_\xi(x) = \dfrac{a}{\pi(a^2+x^2)}$

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{a}{\pi(a^2+t^2)}\,dt = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,{}^{t}/_{a}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + \frac{1}{2}$$

зад. 7.9

$\xi = F_\xi^{(-1)}(RND)$ → из датчика обратно.

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}$$

$$x = a\,\mathrm{tg}\left[\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right] = -a \cdot \mathrm{ctg}\,\pi y$$

$\Rightarrow \xi = -a\,\mathrm{ctg}\,\pi(RND)$ для распр. Коши.

Но не работает для Гауссова распр-я.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} \to F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$ – не беру.

$f_\xi(x) \longleftrightarrow f_\eta(y)$?

$f_\xi(x) \to RND$ и всё

Д/з: 7.1, 7.4, 7.7, 7.10, 7.16, 7.19*

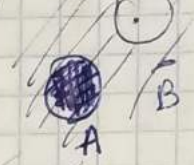
Готовимся к экзамену

Зан. 2. Независимость. Условная вероятность

классн: 2.2, 2.4, 2.6, 2.11, 2.20, +2.8, 2.10

Д/З: 2.5, 2.7, 2.9, 2.12, 2.16*, 2.19, 2.22*, +2.18

2.2. A и B – незав. будут ли незав. $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

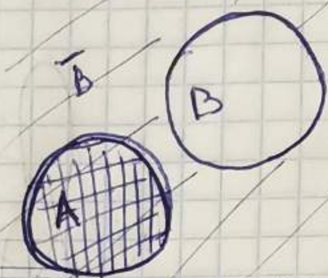


а) A и $\bar{B}$ $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ $P(A\bar{B}) = P(A)\cdot P(\bar{B}) = P(A)\cdot(1 - P(B)) =$
$= P(A) - P(A)\cdot P(B)$

$P(A\bar{B}) = P(\bar{B})\, P(A|\bar{B})$

$A\bar{A} = \varnothing$ $B\bar{B} = \varnothing$; $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$



$A\times \mid B + \bar{B} = \Omega \Rightarrow AB + A\bar{B} = A\cdot\Omega = A$

$P(AB + A\bar{B}) = P(A)$

$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$

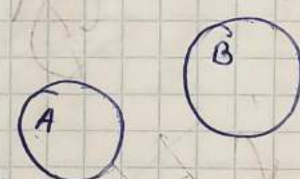
По аксиоме Колмогорова:

$P(AB + A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) - P(A\cdot AB\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) - \underbrace{P(AB\bar{B})}_{P(AB)} =$

$= P(A)\cdot P(B) + P(A) - P(A)\cdot P(B) = P(A)$

$AB = \varnothing$, $A\bar{B} = A$ $\underbrace{P(AB\cdot A\bar{B})}_{=0}$ $AB = \varnothing$

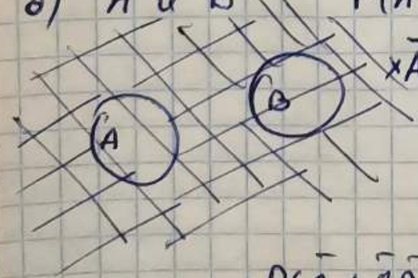
$P(AB + A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$

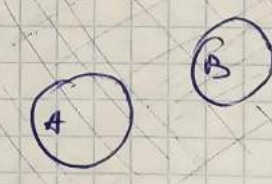


$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)\cdot P(B) =$

$= P(A)\cdot P(\bar{B})$ ~ независимы

б) $\bar{A}$ и $\bar{B}$ $P(\bar{A}\bar{B}) = ?$





$\times\bar{A} \mid \bar{A} + \bar{B} = \Omega$

$\underbrace{\bar{A}\bar{A}}_{\bar{A}} + \bar{A}\bar{B} = \Omega\bar{A} = \bar{A}$

$P(\bar{A} + \bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})$

$P(\bar{A} + \bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{A}\bar{B}) =$

?

$= 1 - P(A) + \cancel{P(\bar{A}\bar{B})} - \cancel{P(\bar{A}\bar{B})}$ $P(\bar{A}) + P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})$

$P(\bar{A}\bar{B}) = 0$

$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - P(A) - P(B) + \underbrace{P(A)\cdot P(B)}_{P(AB)} =$

$= 1 - P(A+B) = P(\overline{A+B})$

2.4 Студент знает 20 из 25 вопросов. Задали 3 вопроса. P — что студент знает все вопросы.

~~A - студент знает вопрос~~
~~$\bar{A}$ - не знает билет~~

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

A_1 - студент знает 1 вопрос
...
A_3 - студент знает 3 вопрос.
B - студент знает 3 вопроса.

$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) =$

$= \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115} < 0,5$

Классической схемой на языке перестановок:

$$P = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = \frac{57}{115}$$

3 из нужных
3 вообще возможных

2.5. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона. Вероятность, что ему придется звонить не более, чем в три места?

0, 1, 2, 3 ... — 10 цифр.

Угадал сразу: $P_1 = \frac{1}{10}$

Угадал со второго раза: $P_2 = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9}$

—//— третьего; $P_3 = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8}$

$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

2.6. 52 карты. Вынимается одна
A - появление туза
B - появление карты красной масти.
C - появление бубнового туза
D - появление десятки

Зависимы или нет пары: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

а) A и B

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{26}$ или $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{26} = \frac{1}{26}$

$P(A) = \frac{4}{52}$; $P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

=> нет.

б) A и C

$P(AC) = P(C) \cdot P(A|C) = \frac{1}{52} \cdot 1$

$P(AC) = P(A) \cdot P(C) = \frac{4}{52} \cdot \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{52}$ $\Rightarrow$ да

в) B и C.

$P(B) = \frac{1}{2}$ $P(C) = \frac{1}{52}$

$P(BC) = \cancel{\frac{P(B|C)}{P(C)}} =$ $P(BC) = P(C) \cdot P(B|C) = 1 \cdot \frac{1}{52}$ $\to$ да

г) B и D

$P(B) = \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{4}{52}$

$P(BD) = P(D) \cdot P(B|D) = \frac{4}{52} \cdot \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ нет.

д) C и D

$P(C) = \frac{1}{52}$; $P(D) = \frac{4}{52}$

$P(CD) = P(D) \cdot P(C|D) = \frac{4}{52} \cdot 0 = 0$ $\Rightarrow$ да

2.7. – аналогично в ~~дз~~

2.8. Доля „счастливых" билетов в полной катушке $p \approx 0{,}053$. Какова вероятность иметь хотя бы один такой билет из двух купленных, если а) билеты соседние; б) билеты с разных рейсов.

53/1000 – счастливые.

б) A_1 – билет попался
A_2 – билет несчаст. $\Rightarrow P = P(A_1) \cdot P(A_2) = p(1-p)$

A_1 – счаст. $\to P \approx p^2$
A_2 – счаст.

$\Rightarrow P_\Sigma = p - \cancel{p^2} + \cancel{p^2} + p - p^2 = 2p - p^2$

A_1 – несч. $\to P \approx (1-p)p$.
A_2 – счаст.

а) $\cancel{P = \frac{53}{1000} \cdot \frac{52}{999} + \frac{53}{1000}\left(1 - \frac{52}{999}\right) + \left(1 - \frac{53}{1000}\right) \cdot \frac{52}{999} =}$

$\cancel{= \frac{53}{1000} \cdot \frac{52}{999} + \frac{53}{1000} - \frac{53}{1000} \cdot \frac{52}{999} + \frac{52}{999} - \frac{53 \cdot 52}{1000 \cdot 999} =}$

$\cancel{= p + \frac{52}{999}(1-p)}$

Здесь 1 автобус $\to$ покупаем билет 2 раза
вер-ть счаст. $\approx p$ и в том и в другом случае

$\Rightarrow P = p + p = 2p$

2.9 Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появл. хотя бы одной шестерки было вер-ть.
а) большую 0,5.

Вер-ть выпадания 6ки $\rightarrow p = \frac{1}{6}$, n незав. испытаний.

A_i - выпала 6ка
B_i - невыпала 6ка

$P(B_i) = \frac{5}{6}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.5$

$n < \log_{\frac{5}{6}} \frac{5}{10}$

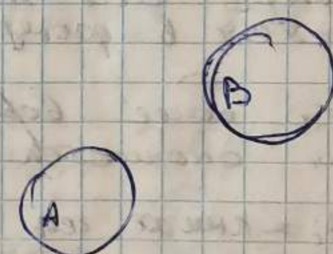
$\cancel{n > \log_{\frac{6}{5}} \frac{10}{5} = \frac{\log_2 \frac{1}{2}}{\log_2 1,2}}$ $\quad n > \log_{\frac{6}{5}} 2 = \frac{1}{\log_2 1,2}$

б) всё аналогично:
большую 0,8. $\quad \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,2 \Rightarrow n > \log_{\frac{6}{5}} 5 = \frac{1}{\log_5 1,2}$

2.10. Док-ть, что из условия

$P(B|\bar{A}) = P(B|A) \rightarrow A$ и B - незав.

$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(BA)}{P(A)}$ $\qquad P(AB) = P(A)\cdot P(B)$



$P(AB) = \frac{P(A)}{P(\bar{A})} P(B\bar{A}) = \frac{P(A)\cdot P(B\bar{A})}{1 - P(A)}$

$P(B\bar{A}) = \frac{(1-P(A))\,P(BA)}{P(A)} = \underbrace{\frac{P(BA)}{P(A)}}_{P(B|A)} - P(BA)$

$A\bar{A} = \varnothing \quad B\bar{B} = \varnothing$

$P(BA) = P(A)\cdot P(B|A) = P(A)\cdot P(B|\bar{A})$

2.11. A_1, A_2, A_3 – равновер., незав. события ~~max ∑ суммы вер~~ max вер-ть суммы этих событий?

$$P(A_1+A_2+A_3) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3) =$$

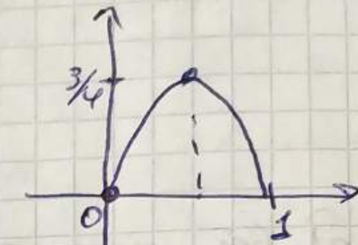
$$\cancel{=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}$$

попарно несовм.! $P(A_1A_2A_3)=0$

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=p$$

$$= 3p-p^2-p^2-p^2 = 3p-3p^2 \Rightarrow 3p(1-p)$$

$$p=\frac{1}{2} \Rightarrow P_{max} = 3\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$



Если снять усл. равновер. вероятности:

$$\Rightarrow P(A_1+A_2+A_3) = p_1+p_2+p_3-p_1p_2-p_2p_3-p_1p_3$$

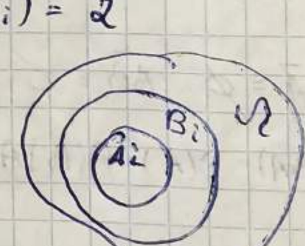
~ иссл. через локальные экстремумы.

2.12. Разыскивая спец. книгу, студент решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинак. вер.: есть книга в фонде или нет (= p). В том случае, когда книга имеется в фонде, одинак. вер. – взята она читателем или нет.
Что более вероятно – достанет студент книгу или нет? Фонды библиотек компл. независимо друг от друга.

A_i – книга есть в i-й библ. $p(A_i)=\frac{1}{2}$

B_i – студент возьмёт книгу в i-й библ. $P(B_i)=\frac{1}{2}$

$$P(B_i|A_i) = \frac{P(B_iA_i)}{P(A_i)} = \frac{1/2\cdot 1/2}{1/2} = \frac{1}{2}$$



Вер-ть, что студент не получит книгу.

1) В i-й библ. нет книги; $p_i = 1/2$

Либо в i-й есть книга, но её забрали: $p_i = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$p_{i\Sigma} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ т.к. 3х библ. независимы эти исходы.

$\Rightarrow p' = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$ ~ вер-ть, что не возьмёт.

$\Rightarrow p = 1-p' = \frac{37}{64}$ ~ вер-ть, что возьмёт.

2.16. Определить вероятность того, что написанная наудачу простая дробь m/n несократима.

Простые числа: 2, 3, 5, 7, 11...

При больших N число простых чисел примерно $\ln N$

A_2 – дробь не сократится на 2.
A_3 – дробь не сократится на 3.
...
A_{p_i} – дробь не сократится на p_i

B_i – $\frac{m}{n}$ несократима

$B = A_2 A_3 \dots A_{p_i} \dots$

$$P(B) = P(A_2)P(A_3)\dots P(A_{p_i})\dots = \prod_{p_i}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right)$$

$$P(A_2) = 1 - P(\bar{A}_2) = 1 - P(\underbrace{C_2}_{\text{сокр. знам. на 2.}} \underbrace{D_2}_{\text{сокр. числ. на 2.}}) = 1 - P(C_2)\cdot P(D_2) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

аналогично $P(A_3) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$
...
$P(A_{p_i}) = 1 - \left(\frac{1}{p_i}\right)^2$

$$\Rightarrow P = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\left(\frac{1}{p_i}\right)^2\right)\cdot\ldots = \frac{6}{\pi^2}$$

2.18. Радиолокационная станция ведёт наблюдение за k объектами. За время наблюдения i-ый объект может быть потерян с вероятностью p_i $(i = 1, 2, \dots, k)$. Найти вероятность следующих событий:

1) A – ни один объект не будет потерян. $P(A_i|A_j) = P(A_i)$ – события ~~несовместны~~ независимы

A_i – объект вышел из строя.

$$\cancel{P(A) = P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \dots) = \sum_{i=1}^{k} P(\bar{A}_i) = \sum_{i=1}^{k}(1 - P(A_i)) = \sum_{i=1}^{k}(1 - p_i)}$$

$$P(A) = \prod_{i=1}^{k}(1 - p_i)$$

2) B – будет потеряно не менее одного объекта.

A_1 – вышел из строя, а другие нет.

$A_1 A_2$ – вышли из строя, а остальные нет.

$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\dots\bar{A}_i \rightarrow p = p_1(1-p_2)(1-p_3)\dots$
$A_1A_2\bar{A}_3\dots\bar{A}_i \rightarrow p = p_1p_2(1-p_3)\dots$
...
$A_1A_2A_3\dots A_i \rightarrow p = p_1p_2\dots p_i$

$\Sigma \Rightarrow P(B)$

3) C - будет потеряно не более одного объекта.

$$\overline{A_1} A_2 A_3 \dots A_i \longrightarrow p = p_1 \sum_{i=2}^{k} (1-p_i)$$

$$A_1 \overline{A_2} A_3 \dots A_i$$

$$A_1 A_2 \dots \overline{A_i}$$

$$\overline{A_1} A_2 \dots A_k \longrightarrow p = \sum_{i=1}^{k} (1-p_i)$$

$\nparallel \Rightarrow$ сложить.

2.20 Трое игроков поочерёдно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет "герб". Опр-ть вероятности выигрыша для каждого из игроков.

A_1 - выигрывает первый

$$A_1 = \Gamma_1 + P_1 P_2 P_3 \Gamma_1 + P_1 P_2 P_3 P_1 P_2 P_3 \Gamma_1 + \dots$$

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ несовместны.

$$P(A_1) = P(\Gamma_1) + P(P_1 P_2 P_3 \Gamma_1) + P(\dots) =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1/2}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{2 \cdot 7} = \frac{4}{7}$$

A_2 - выигрывает второй

$$P(A_2) = P_1 \Gamma_2 + P_1 P_2 P_3 P_1 \Gamma_2 + \dots$$

$$P(A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots = \frac{1/4}{1-1/8} = \frac{8}{4 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1 \Rightarrow P(A_3) = \frac{1}{7}$$

2.22. Аспирант написал n писем и в спешке запечатал конверты, не подписав их. Не имея средств на приобретение новых конвертов, он решил подписать конверты "на авось". Какова вероятность, что хотя бы один адресат получит своё письмо? Оценить эту вер-ть для больших n.

~~Ищем обратную вер-ть, что ни один не получит своё письмо (В)~~

B - хотя бы 1н адресат получит своё письмо.

A_i - i-ый получатель получит своё письмо.

По теореме сложения: $B = A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}\sum P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k}\sum\sum P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_i \dots A_n)$$

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \ \forall i$$

$$P(A_i A_j) = P(A_i) P(A_j | A_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}, \ \forall i, j$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)\, P(A_j | A_i)\, P(A_k | A_i A_j) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}, \quad \forall\, i, j, k.$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=n} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \underbrace{\sum\sum_{i<j} 1}_{=C_n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \underbrace{\sum\sum\sum_{i<j<k} 1}_{=C_n^3} + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot C_n^2 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} =$$

$$= 1 - \frac{1 \cdot n!}{n(n-1)\,(n-2)!\,2!} + \frac{1 \cdot n!}{n(n-1)(n-2)\,(n-3)!\,3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} =$$

$$\frac{n!}{n(n-1)(n-2)!\,2!} = \frac{(n-1) \cdot n}{n(n-1)\,2!} = \frac{1}{2!}$$

$$\frac{n!}{n(n-1)(n-2)(n-3)!\,3!} = \frac{(n-2)(n-1)n}{n(n-1)(n-2)\,3!} = \frac{1}{3!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (-1)^n}{n!}$$ при

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - \frac{1}{e}$$ при $n \to \infty$

Зан. 3. Формула полной вер. Теорема Байеса

кл: ~~3.1~~, ~~3.3~~, ~~3.13~~, ~~3.10~~, + 3.5, 3.7, 3.8, 3.9, 3.14, 3.16, 3.19

д/з: ~~3.2~~, ~~3.6~~, ~~3.11~~, ~~3.15~~, 3.17*, ~~3.20*~~, ~~3.18~~ дорем

3.1 $\begin{bmatrix} 2б \\ 1ч \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1б \\ 4ч \end{bmatrix}$ Наудачу выбирают один из ящиков и вынимают из него шар. Какова вероятность, что шар белый.

Ф-ла полной вер-ти:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A|H_i)$$

A - вытаскиваем белый шар. $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} =$

H_1 - выбрали 1 ящик

H_2 - выбрали 2й ящик $= \frac{13}{30}$

3.2. В урне n шаров, причём все предположения о кол-ве чёрных шаров равновероятно. Последовательно извлечены k шаров оказавшиеся чёрными. Какова вероятность, что все n шаров чёрные, если шар ~~тоже~~ вынули:

а) опускается обратно: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A|H_i)$

A - извлечены k чёрных шаров.

H_i - в ящике i чёрных шаров. ~гипотезы

Формула Байеса: $P(H_k|A) = \dfrac{P(H_k)\cdot P(A|H_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)\, P(A|H_j)}$

$P(H_i) = \frac{1}{n}$ ~все равновероятны по условию $\rightarrow P(H_i) = P(H_j)$

$\Rightarrow P(H_n|A) = \dfrac{P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|H_j)}$; $P(A|H_i) = \frac{i}{n}\cdot\frac{i}{n}\cdot\ldots = \left(\frac{i}{n}\right)^k$

$P(A|H_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^k = 1^k = 1$

$$P(H_n|A) = \frac{\left(\frac{n}{n}\right)^k}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k} = \frac{n^k}{\sum_{i=1}^{n} i^k}$$

б) обратно не опускаются:

$$P(A|H_i) = \frac{i}{n}\cdot\frac{i-1}{n-1}\cdot\frac{i-2}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{i-(k-1)}{n-(k-1)} = \frac{i!\,(n-k)!\,k!}{(i-k)!\,n!\,k!} = \frac{C_i^k}{C_n^k}$$

$$P(H_n|A) = \frac{C_n^k/C_n^k}{\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i^k}{C_n^k}} = \frac{C_n^k}{\sum_{i=1}^{n} C_i^k}$$

3.3. Из полного набора домино наудачу берутся две кости. Найти вероятность стыковки этих костей.

H_1 - вынули сначала дупель.

H_2 - вытащили первым не дупель.

A - кости стыкуются.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A|H_i)$$

$$P(A) = \frac{7}{28}\cdot\frac{6}{27} + \frac{21}{28}\cdot\frac{12}{27} = \frac{7}{18}$$

3.5. Студент делает 1 шаг к аудитории с вер-но p, и шаг от неё с вероятностью $1-p$. Какова вероятность, что он будет присутствовать на лекции, если до аудитории остался:

$$P_{k;n} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

а) 1 шаг.

A ~ студент присутствует на лекции.
H_1 ~ студент сделает 1 шаг вперед.
H_2 ~ студент делает 1 шаг назад → 2 вперёд.
H_3 ~ —//— 2 шага назад → 3 вперёд.
...
H_n ~ студент делает $k-1$ шаг назад → k вперёд.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(H_i)\, P(A|H_i)$$

$$\Rightarrow P(A) = p\cdot 1 + p^2(1-p)\cdot 1 + p^3(1-p)^2 + \ldots + p^c(1-p)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p^c (1-p)^{k-1}$$

?

Геом. прогрессия с $q = p(1-p)$

б) n шагов → n по 1 шагу (кол-)

$$\Rightarrow P = (P_1)^n$$

3.6. Найти вероятность того, что 100 ламп, взятых наудачу из 1000, окажутся исправленными, если число непригодных на 1000 штук равновозможно от 0 до 5.

A - взяли 100 испр. лампочек.
H_0 ~ в 1000 → 0 неиспр.
H_1 ~ —//— 1 неиспр.
...
H_5 ~ —//— 5 неиспр.

По ф-ле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{5} P(H_i)\, P(A|H_i)$$

$P(H_0) = P(H_1) = \ldots = P(H_5) = \frac{1}{6}$ ~ равновозможны.

$P(A|H_0) = C_{1000}^{100} / C_{1000}^{100}$

$P(A|H_1) = \dfrac{C_{1000-1}^{100}}{C_{1000}^{100}}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{5} \frac{C_{1000-k}^{100}}{C_{1000}^{100}}$$

3.7. Из чисел 1, 2, …, n одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что разность между первым и вторым выбранными числами будет не меньше m (m>0)

Формула Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\,P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)\,P(A|H_i)}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A|H_i)$$
~ ф-ла полной вероятности

A – числа отличаются не меньше чем на m.
H_1 – первым выбрано число 1.
H_2 – первым выбр. 2.
…
H_m – // – число m
H_{m+1} – // – m+1
…
H_n – первым выбрали число n

$$P(H_i) = \frac{1}{n} \quad ; \quad P(A|H_i) = \frac{n-(m+i-1)}{n}$$

$$\frac{n-m}{n^2}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{1}{n} \cdot \frac{n-(m+i)}{n} = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{n-(m+i)}{n^2} = \frac{n-(m+1)}{n^2} + \frac{n-(m+2)}{n^2} + \ldots + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \{\text{Арифмет. прогрессия}\} =$$

$$n-m,\ n-m-1,\ n-m-2 \Rightarrow \frac{1+n-m}{2} \cdot (n-m) = S$$

$$= \frac{1+n-m}{2} \cdot \frac{(n-m)}{n^2}$$

3.8. Из партии в 5 изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Какая гипотеза о кол-ве бракованных изделий в партии наиболее правдоподобна?

A – взято бракованное изделие
H_1 – в 5 изд. → 1 неиспр.
H_2 – в 5 изд. → 2 неиспр.
…
H_5 – в 5 изд. → 5 неиспр.

Ф-ла Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\,P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{} P(H_k)\,P(A|H_k)}$$

$$P(H_1) = P(H_2) = \ldots = P(H_k) \Rightarrow P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|H_k)}$$

$$P(A|H_1) = 1/5 \ ; \ P(A|H_2) = 2/5 \ ; \ P(A|H_5) = 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{5} P(A|H_k) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\Rightarrow P(H_1|A) = \frac{1}{15} \ \ldots \ P(H_5|A) = \frac{1}{3}.$$

⇒ наиболее вероятно, что все изд. неисправны

3.9. Определить вероятность отсутствия бракованных лампочек в партии из 1000 штук, если среди взятых 100 все оказались исправными. Если число непригодных на 1000 штук равновозможно от 0 до 5.

A – взяли 100 испр. лампочек.
H_0 – в 1000 ламп. → 0 брак.
...
H_5 – в 1000 ламп. → 5 брак.

$$P(H_0|A) = \frac{P(H_0)P(A|H_0)}{\sum_{i=0}^{5} P(H_i)P(A|H_i)}$$ ← по ф-ле Байеса

$P(H_0) = P(H_1) = \ldots = P(H_5) = \frac{1}{6}$ – равновозможны

$$\Rightarrow P(H_0|A) = \frac{P(A|H_0)}{\sum_{i=0}^{5} P(A|H_i)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{5} P(A|H_i)}$$

$P(A|H_0) = 1.$

$$P(A|H_1) = \frac{C_{1000-1}^{100}}{C_{1000}^{100}} \Rightarrow P(H_0|A) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{5} \frac{C_{1000-k}^{100}}{C_{1000}^{100}}} = \frac{C_{1000}^{100}}{\sum_{k=0}^{5} C_{1000-k}^{100}}$$

3.10. Два стрелка независимо друг от друга совершают по одному выстрелу в общую мишень. Вероятность попадания в мишень для 1го → 0,8, для 2го – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Вероятность, что попал 1ый стрелок?

A – есть пробоина.
H_1 – попал 1ый стрелок.
H_2 – попал 2ой стрелок.

→ Стреляли оба ⇒ возможные события:

$\overline{H_1}H_2$ – промазал 1ый, попал 2ой

$H_1\overline{H_2}$ – попал 1ый, промазал 2ой

По ф-ле Байеса:
$$P(H_1\overline{H_2}|A) = \frac{P(H_1\overline{H_2})\cdot P(A|H_1\overline{H_2})}{P(H_1\overline{H_2})\cdot P(A|H_1\overline{H_2}) + P(\overline{H_1}H_2)\cdot P(A|\overline{H_1}H_2)}$$

$P(H_1\overline{H_2}) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$
$P(\overline{H_1}H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$

$$\Rightarrow P(H_1\overline{H_2}|A) = \frac{0{,}48}{0{,}48 + 0{,}08} = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}$$

$P(A|H_1\overline{H_2}) = 1$

3.11 Трое охотников одн. выстрелили по кабану, но 1 пуля попала. Найти вер-ти, что зверь убит 1ым, 2ым и 3им охотником, если вер. попадания → 0,2; 0,4; 0,6.

$H_1\overline{H_2}\overline{H_3}$
$\overline{H_1}H_2\overline{H_3}$

→ Аналогично 3.10, только больше вариантов. на ф-лу Байеса.

$\overline{H_1}\overline{H_2}H_3$

→ см. в 8/3.

3.13. Что вероятнее выиграть у равносильного противника:
а) три партии из четырёх или пять из восьми?

$p = \frac{1}{2} \rightarrow q = 1 - p = \frac{1}{2}$

$$P_{3:4} = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4!}{3!\,1!} = \frac{1}{2}$$

$$P_{5:8} = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{256} \cdot \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{256 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7}{32}$$

$\Rightarrow \frac{3}{4}$

б) не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти из 8?

т.е. можно выиграть 3 или 4 партии. можно выиграть 5, 6, 7, 8.

$P_1 = P_{3:4} + P_{4:4} = \frac{5}{16}$

$P_2 = P_{5:8} + P_{6:8} + P_{7:8} + P_{8:8} = \frac{93}{256}$. $\Rightarrow$ 5/8

3.14. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0.1. Какова вероятность того, что в сообщении из 10 знаков а) нет искажений б) ровно три искажения в) не более 3х искажений?

схема Бернулли

а) $p = 0,1$; $q = 1 - p = 0,9$

$P_{0:10} = \underset{1}{C_{10}^{0}}\, 0,1^{0} \cdot 0,9^{10} = \frac{10!}{1!\,10!} = \underline{\underline{0,9^{10}}}$

б) $P_{3:10} = C_{10}^{3} \cdot 0,1^{3}\, 0,9^{7} = \frac{10!}{7!\,3!}\, 0,1^{3} \cdot 0,9^{7}$

в) $P = \sum_{k=0}^{3} C_{10}^{k} (0,1)^{k} (0,9)^{10-k}$.

3.15. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий равнялось 20?

$p = 0,8$, $q = 1 - p = 0,2$, пусть производится n - выстрелов

схема Бернулли:

$P_{20:n} = C_n^{20}\, 0,8^{20} \cdot 0,2^{n-20} \to max. = f(n)$

Пишем два неравенства: $f(n) \geq f(n+1)$

$f(n) \geq f(n-1)$

$C_n^{20} \cancel{0,8^{20}} \cdot 0,2^{n-20} \geq C_{n+1}^{20} \cancel{0,8^{20}} \cdot 0,2^{n+1-20}$

$\frac{n!}{20!\,(n-20)!} \cdot 0,2^{n-20} \geq \frac{(n+1)!}{20!\,(n-19)!}\, 0,2^{n-19}$

$5 = 0,2^{-1} \geq \frac{n+1}{n-19}$

$5n - 95 \geq n+1 \to 4n \geq 96 \Rightarrow n \geq 24$

$\frac{n!}{20!\,(n-20)!} \cdot 0,2^{n-20} \geq \frac{(n-1)!}{20!\,(n-21)!}\, 0,2^{n-21}$

$\frac{n}{n-20} \geq 5 \to 5n - 100 \leq n$
$4n \leq 100 \to n \leq 25$

$\Rightarrow \underline{\underline{24 \leq n \leq 25}}$

3.18. Игральная кость бросается 16 раз. Найти вероятнейшее число появлений числа очков, кратного трём.

$1, 2, 3, 4, 5, \underline{6}.$

Схема Бернулли $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $q = 1 - p = \frac{2}{3}$

$C_{k;16} = C_{16}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{16-k}$ → max по k. аналогично с 3.15.

3.16. Игрок получает 6 колец и бросает их до первого попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо окажется неиспользованным, если вероятность попадания при каждом броске 0.1.

H_1 - попал с 1го раза. → $P_1 = 0,1$
H_2 - попал со 2го раза. $P_2 = 0,9 \cdot 0,1$
H_3 - ...
...
...
H_5 - попал с 5го раза → $P_5 = 0,9^4 \cdot 0,1$

$P = 0,1 \left(1 + 0,9 + 0,9^2 + \ldots + 0,9^4\right) = 0,1 \cdot \frac{1 - 0,9^5}{1 - 0,9} \approx 0,41.$

3.17. Имеется N лунок, по которым случайным образом разбрасываются M шариков. Найти вероятность того, что в данную лунку попадёт ровно k шариков.

$p = \frac{1}{N}$ ~ шарик попадёт в какую-то конкретную лунку.

$q = 1 - \frac{1}{N}$. => по схеме Бернулли:

$P_{k:M} = C_M^k \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{M-k}$

3.19 Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадёт в „яблочко" мишени, равна 0,2, а в остальную часть мишени – 0,5. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах четыре пули окажутся в „яблочке" и 4 – в остальной части мишени.

Через полиномиальный закон

Промах $p_3 = 0,3$.

$P_{4;4,2:10} = \frac{10!}{4!\,4!\,2!} 0,2^4\, 0,5^4\, 0,3^2 \approx 0,028.$

3.20 Карпов   Каспаров
5 : 3 $p_1 = p_2 = p = \frac{1}{2}$ до 6 побед.

Вероятность победить Карпову: (осталось максимум 3 партии)
A - выиграл Карпов.
H_1 ~ выиграл Каспаров 1 раз
H_2 ~ выиграл Каспаров 2 раза
H_0 ~ выиграл Каспаров 0 раз.

По ф-ле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{1} P(H_i)\, P(A|H_i)$$

$P(H_0) = 1/2$,

$P(H_1) =$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} =$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, что выиграет Карпов.

То, что выиграет Каспаров: $\to \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

$\Rightarrow$ Приз делить как $7 : 1$
Карпов Каспаров.

Зан. 5. Моментные хар-ки случайных величин.

Кл.: ~~5.2~~, ~~5.12~~, 5.3, 5.5, 5.6, 5.8, 5.10,

Д/З: ~~5.1~~, ~~5.4~~, ~~5.7~~, 5.9, 5.14, 5.18*, 5.20*, 5.11, ~~5.13~~

д/р.

5.1. Произв. незав. исп. 3х изделий, вероятности отказов — p_1, p_2, p_3. Док-ть, что мат. ожид. числа отказ. изделий равно $p_1+p_2+p_3$.

$M\xi = \sum x_k\, p(\xi = x_k)$ $\quad \xi$ ~ число отказавших приборов.

$\xi = 1$ ~ отказал. 1: $P(\xi = x_1) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + p_2(1-p_1)(1-p_3) + p_3(1-p_2)(1-p_1)$

$P(\xi = x_2) = p_1p_2(1-p_3) + p_1p_3(1-p_2) + p_2p_3(1-p_1)$

$P(\xi = x_3) = p_1p_2p_3$.

$\Rightarrow M\xi = \sum_{k=1}^{3} x_k\, P(\xi = x_k) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + p_2(1-p_1)(1-p_2) + p_3(1-p_2)(1-p_1)$
$+ 2p_1p_2(1-p_3) + 2p_1p_3(1-p_2) + 2p_2p_3(1-p_1) + 3p_1p_2p_3 =$
$= \{$после преобр.$\} = p_1+p_2+p_3$

5.2. $M\xi$ и $D\xi$ — ? числа очков, вып. при бросании однот игральной кости.

$p(\xi = x_k) = \frac{1}{6}$.

$\Rightarrow M\xi = \sum_{i=1}^{6} x_k\cdot p(\xi = x_k) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} =$
$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_k (x_k - M\xi)^2 p(\xi = x_k) =$
$= \left[(1-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2 + (4-3{,}5)^2 + (5-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2\right]\cdot\frac{1}{6} =$
$= \left[(2{,}5^2) + 1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2\right)\cdot\frac{1}{6} +$
$= \frac{1}{3}(2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2) = \frac{8{,}75}{3}$

5.3 Мн-во возможных значений с.в. ξ сост. из 2х чисел a и b. Для какого ряда распред. величины ξ, $D\xi \to max$?

x_k	a	b
p_k		

$$D\xi = \sum_k (x_k - M\xi)^2 p_k.$$

$$M\xi = \sum_k x_k p_k = a p_a + b p_b$$

$$D\xi = (a - ap_a - bp_b)^2 p_a + (b - ap_a - bp_b)^2 p_b \to max.$$

$$(a - ap_a - bp_b)(a - ap_a - bp_b) = a^2 - a^2p_a - abp_b - a^2p_a + a^2p_a^2 + abp_ap_b -$$

$$- bp_b \cdot a + abp_ap_b + b^2p_b^2 = a^2 + a^2p_a^2 + b^2p_b^2 - 2a^2p_a - 2abp_b + 2abp_ap_b$$

$$(b - ap_a - bp_b)^2 = \dots$$

и т.д. $\quad D\xi(p_a, p_b) \to max. \quad \Rightarrow P(\xi = a) = P(\xi = b) = \frac{1}{2}$

5.4 Найти мат. ожидание числа выигрышных лотерейных билетов из 40 приобретенных, если вер-ть выигрыша равна 0,05.

$p = 0,05. \to P_{k:n} = C_n^k p^k q^{n-k}$; $\xi \equiv k$ – число выигр. билетов.

Схема Бернулли: $\quad \xi_k = \begin{cases} 1, & \text{событие появл.} \\ 0, & \text{событие не произ.} \end{cases}$

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} x_k p_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = np. \quad \text{~ лучше доказать.}$$

$$\Rightarrow M\xi = n \cdot p = 2.$$

5.5. Из сосуда, содерж. m белых и n чёрных шаров последов-но извлекают шары до появл. белого шара. Найти мат. ожидание и дисперсию числа вынутых чёрных шаров, если каждый шар после извлечения, возвращается в сосуд.

ξ – число вынутых шаров.

$\xi = 1: \quad P(\xi = 1) = \frac{m}{m+n}.$

$$P(\xi = 2) = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n}$$

$$P(\xi = 3) = \left(\frac{n}{m+n}\right)^2 \cdot \frac{m}{m+n}.$$

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{n}{m+n}\right)^{k-1} \cdot \frac{m}{m+n} = \frac{m}{m+n} + 2 \cdot \frac{nm}{(m+n)^2} + 3 \cdot \frac{n^2 m}{(m+n)^3} + \dots =$$

$$= \frac{m}{m+n}\left(1 + \frac{2n}{(m+n)} + \frac{3n^2}{(m+n)^2} + \dots\right) \circleddash \text{ В нашем случае: }$$

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \qquad x = \frac{n}{(m+n)}$$

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{n}{m+n}\right)^2} = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{(m+n)^2}{m^2} = \frac{m+n}{m}$$

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M\xi)^2 P(\xi = x_k)$$ или по-другому.

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p(\xi = x_k)$$

$$D\xi = \left(1 - \frac{m+n}{m}\right)^2 \cdot \frac{m}{m+n} + \left(2 - \frac{m+n}{m}\right)^2 \cdot \frac{nm}{(m+n)^2} + \left(3 - \frac{m+n}{m}\right)^2 \cdot \frac{n^2 m}{(m+n)^3} + \ldots =$$

$$= \left(\frac{n}{m}\right)^2 \cdot \frac{m}{m+n} + \left(1 - \frac{n}{m}\right)^2 \cdot \frac{nm}{(m+n)^2} + \left(2 - \frac{n}{m}\right)^2 \cdot \frac{n^2 m}{(m+n)^3} + \ldots =$$

$$= \frac{m}{m+n}\left(\left(\frac{n}{m}\right)^2 + \left(1-\frac{n}{m}\right)^2 + \left(2 - \frac{n}{m}\right)^2 + \ldots\right) \to$$ и т.д.

5.7. Смотри д/р.

5.8. Из урны, в которой находятся два белых и три черных шара, вынимаются сразу два шара. Найти мат ожидание и $D\xi$ числа появившихся при этом белых шаров.

Всего шаров → 5

$\boxed{\begin{matrix} 2б \\ 3ч \end{matrix}}$

ξ - число белых шаров. → $\xi = 0, 1, 2$.

$$P(\xi=0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$P(\xi=1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

$$P(\xi=2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow M\xi = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}8$$

$$D\xi = \sum_{k=0}^{3} (x_k - M\xi)^2 p(\xi = x_k) = (0-0{,}8)^2 \cdot \frac{3}{10} + (1-0{,}8)^2 \cdot \frac{6}{10} + (2-0{,}8)^2 \cdot \frac{1}{10} =$$

$$= \frac{0{,}64 \cdot 3 + 0{,}04 \cdot 6 + 1{,}44}{10} = 0{,}36$$

5.11 Определить условия, при которых третий центральный момент биномиальной с.в. равен нулю.

$M\xi = np$. - для биномиального закона.

$$\mu_n = M(\xi - M\xi)^n \quad \to \mu_3 = M(\xi - M\xi)^3$$

$$M_3 = \sum_{k=1}^{n} (\xi - M\xi)^3 p_k = \sum_{k=}^{n} (1-np)^3 \cdot p + (0-np)^3 \cdot (1-p) =$$

$$= \sum_{n=1}^{n} (1 - 3np + 3n^2p^2 - n^3p^3)\, p - n^3p^3(1-p) =$$

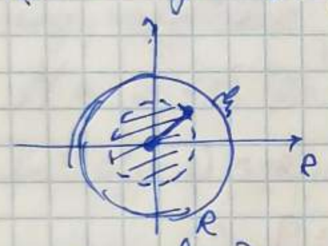
?

$$= \sum_{k=1}^{n} p - 3np^2 + 3n^2p^3 - \cancel{n^3p^4} - n^3p^3 + \cancel{n^3p^4} =$$

$$= n + n(p - 3np^2 + 3n^2p^3 - n^3p^3) = np(1 - 3np + 3n^2p^2 - n^3p^2) =$$

$$= np($$

5.12. Точка A бросается наудачу внутрь круга радиуса R. Найти пл-ть вероятности мат ожидание с.в. ξ — расстояния от A до центра круга.



$$F_\xi(x) = P(\underbrace{\xi < x}_{A}) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow f_\xi(x) = \frac{2x}{R^2}$$

$$M\xi = \int_0^R x f_\xi(x) \cdot dx = 2\int_0^R \frac{x^2}{R^2} dx = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^R = \frac{2R^3}{3R^2} = \frac{2}{3}R$$

5.13. $$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \mathbb{1}_{(-a,a)}(x) \qquad D\xi - ?$$

$$M\xi = \int_{-a}^{a} \frac{x}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \frac{dx^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx^2 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{1/2}\Big|_{-a}^{a} = -\frac{1}{\pi}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_{-a}^{a} = -\frac{1}{\pi}\left(\sqrt{a^2-a^2} - \sqrt{a^2-a^2}\right) = 0$$

$$D\xi = \int_{-a}^{a} (x - \underbrace{M\xi}_{=0})^2 f_\xi(x)\, dx = \int_{-a}^{a} \frac{x^2\, dx}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} = \left\{\begin{array}{l} x = a\sin u \\ u = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \\ dx = a\cos(u)\, du \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{a^3 \cos(u)\sin^2(u)}{a\sqrt{1-\sin^2(u)}} du = \frac{1}{\pi} a^2 \int_{-a}^{a} \sin^2 u\, du = \ldots = \{\text{на калькуляторе}\}$$

$$= \frac{a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - ax\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{2\pi}\Big|_{-a}^{a} = \frac{a^2}{2}$$

5.14 Смотри д/р.

5.9. По некоторой цели производят n независимых выстрелов. Вероятности попадания в цель для этих выстрелов равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Для упрощения вычисл. эти вер-ти усредняют,

$$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$$

По $\bar{p}$ определяют $M\xi$ и $D\xi$. Справедлив ли такой упрощённый подход? ξ - число попаданий.

$$P(\xi=0) = (1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$$

$$P(\xi=1) = p_1(1-p_2)\cdots(1-p_n) + (1-p_1)p_2(1-p_3)\cdots(1-p_n) + \ldots$$

$$P(\xi=n) = p_1 p_2 \cdots p_n$$

Аналогично с 5.1 $M\xi = \sum_{k=1}^{n} p_k$.

Если $\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \rightarrow M\xi = \sum_{k=1}^{n} p_k = n\bar{p}$ ~ справедливо.

для $D\xi = \sum_{k=1}^{n}(x_k - M\xi)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n}(k - n\bar{p})^2 p_k$

Зан. 1 На геометрическую схему

~~1.11~~, 1.12, ~~1.13~~, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, ~~1.21~~, 1.22, 1.23, ~~1.24~~.

1.11 Опр-ть вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинак. цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом начиная с 00001.

Всего вариантов $\to 10^5 - 1$.

x x x x x

10 9 8 7 6

0 0 0 0 1

6 7 8 9 10

$$P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5 - 1} \approx 0{,}3$$

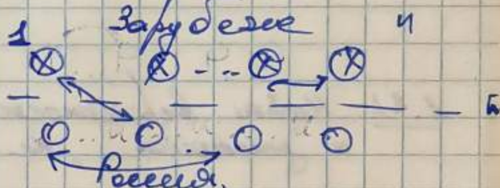
$$P(A) = \frac{A_{10}^5}{10^5 - 1}$$ ~ размещ. комб. для 5 элементов и 10 цифр, отличных друг от друга.

1.12. В эфир одновременно выходят 2n радиолюбителей, n-российских и n зарубежных. Какова вероятность полного международного диалога.

$$N = (2n-1)\cdot(2n-3)\ldots = (2n-1)!!$$

$$K = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

$$\Rightarrow P = \frac{K}{N} = \frac{n!}{(2n-1)!!}$$?



1.13. Студент, присутств. на занятии, знает второй вопрос из 3х зад. преподам. Какова вер-ть получения "двойки" при опросе, если в классе 25 человек, по каждому вопр. спрашивается только один студент ...?

Не получит 2ку, если его не вызовут или вызовут вторым:

$$P_1 = \frac{24}{25} \cdot \frac{23}{24} \cdot \frac{22}{23} \quad ; \quad P_2 = \frac{24}{25} \cdot \frac{1}{24} \cdot 1.$$

$$P(A) = 1 - P_1 - P_2 = 1 - \frac{1}{25} - \frac{22}{25} = 1 - \frac{23}{25} = \frac{2}{25} = 0{,}08$$

1.16. В зале, насчитывающем (n+k) мест, случайным образом занимают места n человек. Опр-ть вер-ть того, что будут заняты опр-ые $m \le n$ мест.

$$P = \frac{C_{n+k-m}^{n-m}}{C_{n+k}^{n}}$$

1.16. Из отрезка натурального ряда $\{1, 2, ..., N\}$ по схеме случайного выбора с возвращением выбираются два числа m и n. Пусть p_N — вер-ть события $m^2+n^2 \le N^2$. Найти p_3 и $\lim\limits_{N\to\infty} p_N$

$\{1, 2, 3\} \to m^2+n^2 \le 3^2 = 9$

1, 2
1, 1
2, 2.
2, 1

$P = \frac{4}{9} = \frac{4}{3^2}$

1,1   2,1   3,1
1,2   2,2   3,2
1,3   2,3   3,3

4, 8, 15

$\{1, 2, 3, 4\}$

$m^2+n^2 \le 16$

$P = \frac{8}{16}$

1,3 и 3,1
2,3 и 3,2

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $m^2+n^2 \le 25$

$P = \frac{15}{25}$

3,3 ;
4,1 , 1,4
4,2 , 2,4
4,3 , 3,4

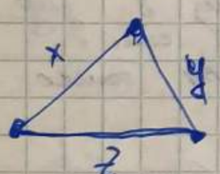
$\{1, 2\} \to m^2+n^2 \le 4$

1,2 , 2,1

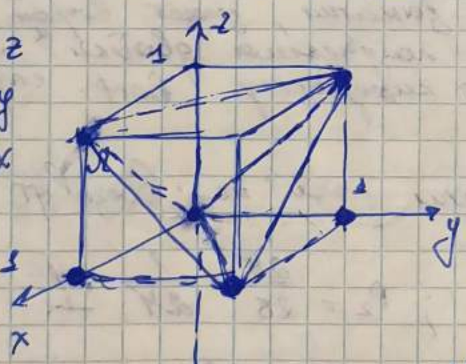
1.21. Найти вероятность того, что из трёх наудачу взятых отрезков с длинами, не превосх. 1, можно составить треугольник.

Пусть x, y, z — коорд. соотв. точек.

Чтобы составить треугольник $x+y>z$
$x+z>y$
$y+z>x$



$\begin{cases} x+y>z \\ x+z>y \\ y+z>x \end{cases}$



$x+y-z=0 \to z = x+y$
$x+z-y=0 \quad z = y-x$
$z = x-y$

$\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$V(\Omega) = 1.$

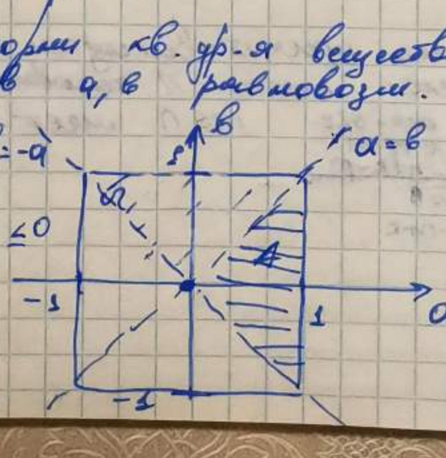
$V(A) = 1 - \frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{1}{2} \to P = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{1}{2}$

1.23. Найти вер-ть того, что корни кв. ур-я вещественны, если значения коэффициентов a, b равновозм. в квадрат $-1 \le a < 1$, $-1 \le b < 1$.

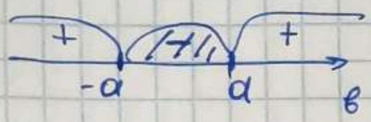
$x^2 + 2ax + b = 0$

$D = 4a^2 - 4b^2 \ge 0$

$4(a^2-b^2) \ge 0$
$(a-b)(a+b) \ge 0$



$(b-a)(a+b)\le 0$



$\Rightarrow P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{1}{4}$

Билеты: 2 – ~~2~~,3 ; 2 – ~~2~~,3 другой

4 – 2,3

8 – ~~2~~,3

9 – ~~2~~,3

6 – ~~2~~,3

25 – ~~2~~,3

30 – ~~2~~,3

49 – ~~2~~,3

40 – ~~2~~,3.

46 – ~~2~~,3

др. – ~~2~~,3

др. – ~~2~~,3

др. – 2,3

Решение задачи другие

Билет 8.

8-2. Двое бросают монету по n раз каждый. Какова вероятность того, что у них выпадет одинаковое число гербов?

Испытания независимы: $\underbrace{ГРР\ldots ГГ}_{n}$ ~ пусть выпало k гербов.

Схема Бернулли:

$P_{k:n} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ ~ вер-ть выпадения k гербов

$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + \ldots P(A_n)$

A_0 - выпало 0 гербов у 1го и 2го

A_1 - выпало по 1 гербу у 1го и 2го

...

A_n - выпало по n гербов у 1го и 2го

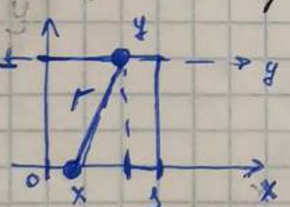
$$\Rightarrow P(A_0) = \underbrace{C_n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{1\text{ый бросает}} \cdot \underbrace{C_n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{2\text{ой бросает}} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \left(C_n^0\right)^2$$

$$P(A_1) = C_n^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot C_n^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{2n}} \left(C_n^1\right)^2$$

...

$$P(A_n) = \frac{1}{2^{2n}} \left(C_n^n\right)^2 \quad \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$$

8-3. На противоположные стороны единичного квадрата $[0,1] \times [0,1]$ случайным образом и независимо друг от друга наносят точки X и Y. Каждая из них имеет в пределах соответствующей стороны равномерное распределение. Найти математическое ожидание расстояния между точками X и Y.



Равном. распр. на отрезке $[a,b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a,b] \\ 0, & \text{если } x \notin [a,b] \end{cases}$$

$f_x = 1$; $f_y = 1$. $r = 1^2 + (y-x)^2$

$\xi = 1 + (y-x)^2$

4-2. Игральная кость бросается n раз. Какое событие более вероятно: A - сумма выпавших очков чётна, B - сумма выпавших очков - нечётна?

Используем ф-лу полной вероятности, смотрим, что будет после n-го броска

$$P_n(\text{чётн}) = \underbrace{P_{n-1}(\text{чётн.})}_{\text{если после } n-1 \text{ сумма чётн.}} \cdot \frac{3}{6} + P_{n-1}(\text{нечётн}) \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{6}\Big(P_{n-1}(\text{чётн}) + P_{n-1}(\text{нечётн.})\Big) = \frac{3}{6} \cdot P(\Omega) = \frac{1}{2}$$

~ но это не точно.

$$p_{\text{чётн}} = \underbrace{p_ч \cdot \ldots \cdot p_ч}_{n} \quad \text{или} \quad \underbrace{p_н}_{2a} \cdot \underbrace{p_ч}_{n-2a}, \text{ где } p_н = p_ч = \frac{1}{2}$$

~это если чётное число бросков $\Rightarrow P_{\text{чётн}} = \sum_{a=0}^{n/2} C_n^{2a} p_н^{2a} p_ч^{n-2a}$

$$C_n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + C_n^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} + \ldots + C_n^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 =$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i) \qquad A \in H_1 + H_2 + \ldots + H_n$$

2-2. Найти вероятность того, что при случайной расстановке двух ладей на шахматной доске они будут угрожать друг другу.

Шахматное поле 8×8. Пусть стоит где-то $Л_1$

Из свободных 63 клеток $Л_2$ будет угрожать $Л_1$ в 14 позициях. $\rightarrow \frac{14}{63}$

Первую ладью $Л_1$ можно поставить в 64 клетки.

Всего вариантов постановки ладей $64 \cdot 63$

$$P(A) = \frac{64 \cdot 14}{64 \cdot 63} = \frac{2}{9}$$

9-2. Из сосуда, содержащего N шаров, вынуто $m+k$ шаров, из которых m шаров белого цвета. Найти вероятность того, что до изъятия в сосуде было M шаров белого цвета.

Ф-ла Байеса: $$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\,P(A|H_i)}{\sum\limits_{k=0}^{n} P(H_k)\,P(A|H_k)}$$

A - вынули $m+k$ шаров (m - белых.)

H_i - в сосуде i белых шаров.

$\boxed{N}$ 1) Вынимаем и кладём обратно.

$$P(H_i) = \frac{i}{N}; \quad P(H_M) = \frac{M}{N}; \quad P(A|H_M) = \underbrace{\frac{M}{N}\cdot\frac{M}{N}\cdots\frac{M}{N}}_{m}\underbrace{\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdots}_{k} = \left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^k$$

$P(A|H_0) = 0$

? Если $P(H_i)$ равновер. $= \frac{1}{N}$, то

$$P(A|H_i) = \left(\frac{i}{N}\right)^m\left(1-\frac{i}{N}\right)^k$$

...

$$P(A|H_{N-k}) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^m\left(1-\frac{N-k}{N}\right)^k$$

$$\Rightarrow P(H_m|A) = \frac{\frac{M}{N}\cdot\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^k}{\sum\limits_{i=1}^{N-k}\left(\frac{i}{N}\right)^m\left(1-\frac{i}{N}\right)^k} = \frac{\left(\frac{M}{N}\right)^{m+1}\left(1-\frac{M}{N}\right)^k}{\sum\limits_{i=1}^{N-k}\left(\frac{i}{N}\right)^m\left(1-\frac{i}{N}\right)^k}$$

2) Шары не кладём обратно: $$P(A|H_i) = \frac{C_i^m\,C_{N-i}^k}{C_N^{m+k}}$$

$$P(A|H_M) = \frac{C_M^m\,C_{N-M}^k}{C_N^{m+k}}$$

$$\Rightarrow P(H_m|A) = \frac{\frac{M}{N}\cdot\frac{C_M^m\,C_{N-m}^k}{C_N^{m+k}}}{\sum\limits_{i=m}^{N-k}\frac{C_i^m\,C_{N-i}^k\cdot i}{C_N^{m+k}\,N}} = \frac{M\cdot C_M^m\,C_{N-M}^k}{\sum\limits_{i=m}^{N-k} C_i^m\,C_{N-i}^k\cdot i}$$

6-2. Из ящика, содерж. N пронумер.-х шаров, извлекают послед-но N шаров. Какова вероятность, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: $1, 2, \ldots, N$, если: а) шар возвращается, б) шар не возвращается

$\boxed{N}$ а) Шар возвращается: Сначала вынуть нужного.

1й $\to \frac{1}{N}$

потом 2й $\to \frac{1}{N}$ ...

$$\Rightarrow P = \underbrace{\frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} \cdots \frac{1}{N}}_{N} = \frac{1}{N^N}$$

б) Шар не возвращается $\to$ аналогично

$$P = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \cdot \frac{1}{N-2} \cdots = \frac{1}{N!}$$

30-2. Фокусник предлагает трем зрителям задумать любое число от 1 до 10. Считая, что выбор каждым из зрителей равновозможен, найти вер-ть того, что у кого-то из них задуманные числа совпадут.

Проще, что они загадали разные (как в задаче о неорганизованных зрителях.) $\to$ обратное событие.

$$P(\bar{A}) = \frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0{,}72.$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}28.$$

46-2. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вер-ть того, что разность между первым и вторым выбранными числом будет не меньше m $(m>0)$??

$1, 2, \ldots, n$ A - числа отлич. не меньше чем на m.

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)$ - ф-ла полной вер-ти

H_i - выбрали первым какое-то число

$$\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n-m, \ldots}_{n}$$

$$P(H_i) = \frac{1}{n} \to P(A|H_i) = \frac{n-(m+i-1)}{n}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{1}{n} \cdot \frac{n-(m+i-1)}{n} = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{n-(m+i-1)}{n^2} =$$

$n - i - m + 1.$

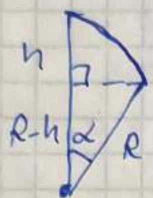
$$= \frac{n-m}{n^2} + \frac{n-(m+1)}{n^2} + \ldots + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{n-m}{n^2}}{2}(n-m) =$$

$$= \frac{(n+1-m)(n-m)}{2n^2}$$

2-2 На пов-ти шара берут наудачу две точки и соединяют меньшей дугой большого круга. Найти вероятность того, что дуга не превзойдет α.

в этом шаровом сегменте все точки удовл. условию задачи.

$$\Rightarrow S_{шара} = 4\pi R^2 \ ; \ S_{сегм.} = 2\pi Rh$$



$$R\cos\alpha = R - h \to h = R(1-\cos\alpha) = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2\pi R h}{4\pi R^2} = \frac{4\pi R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\pi R^2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

40-2 У рыбака имеется три излюбленных места для рыбной ловли, которые он посещает с равной вер-ю. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1, на втором $- p_2$, на третьем $- p_3$. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, 3 раза закинул удочку и рыба клюнула 1 раз. Найти вер-ть, что он удил на первом месте.

A ~ рыба клюнула 1 раз (закинул 3 раза)
H_1 ~ клюнуло в 1 месте
...
H_3 ~ клюнуло в 3 месте.

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_k)}$$

$$P(H_i) = \frac{1}{3} \ ; \quad \begin{aligned} P(A|H_1) &= p_1(1-p_1)^2 \\ P(A|H_2) &= p_2(1-p_2)^2 \\ P(A|H_3) &= p_3(1-p_3)^2 \end{aligned}$$

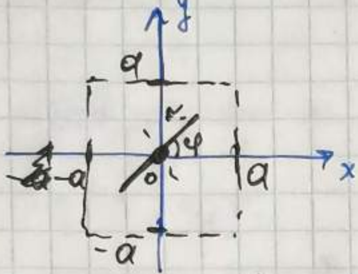
$$\Rightarrow P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{3}p_1(1-p_1)^2}{\frac{1}{3}(p_1(1-p_1)^2 + p_2(1-p_2)^2 + p_3(1-p_3)^2)}$$

49-2 Какова вероятность получить каждую грань дважды при бросании 12 игральных костей

Полиномиальный закон, $P_{k_1:k_2,k_3,\dots k_n:n} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$

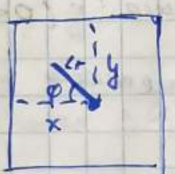
$$P_{2:2:2:2:2:2:12} = \frac{12!}{2^6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \ldots = \frac{12!}{2^6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{12}$$

25-2. На бесконечную шахматную доску со стороной клетки 2a наудачу бросается игла длины $2r < 2a$. Найти вер-ть того, что игла попадет целиком внутрь одной клетки.



$$y = r\sin\varphi \qquad \rightarrow \qquad |x| \le r\cos\varphi$$
$$x = r\cos\varphi \qquad\qquad |y| \le r\sin\varphi$$

$$0 \le \varphi \le \pi \qquad -r\cos\varphi \le x \le r\cos\varphi$$
$$-r\sin\varphi \le y \le r\sin\varphi$$



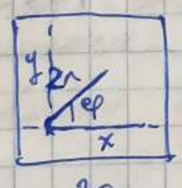
$y < 2r\sin\varphi$; $V(\Omega) = 4\pi a^2$

$x < 2r\cos\varphi$

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ т.к. $x \ge 0$ должен быть.

$$\Rightarrow V(A) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2r\cos\varphi} dx \int_0^{2r\sin\varphi} dy = 2r^2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, d\varphi =$$
$$= 2r^2\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = -r^2(-1-1) = 2r^2$$

Но игла может смотреть в другую сторону.



$$\Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{2V(A)}{V(\Omega)} = \frac{4r^2}{4a^2\pi} = \frac{r^2}{\pi a^2}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{r^2}{\pi a^2}$$

* Общество, состоящее из 5 мужчин и 10 женщин, разбивается на 5 групп по 3 человека. Найти вероятность того, что в каждой группе будет по одному мужчине.

Формируем группы отдельно:

1) $\dfrac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3}$

2) $\dfrac{C_4^1 C_8^2}{C_{12}^3}$

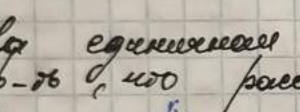
3) $\dfrac{C_3^1 C_6^2}{C_9^3}$

4) $\dfrac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3}$

5) $\dfrac{C_1^1 C_2^2}{C_3^3}$

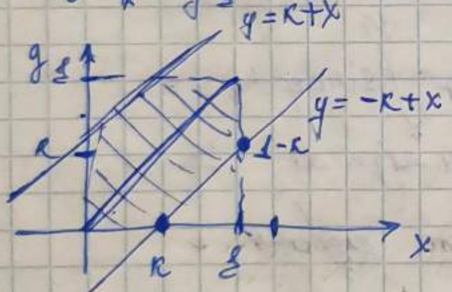
Или $\Rightarrow P = \prod\limits_{k=0}^{4} \dfrac{C_{5-k}^1 \cdot C_{10-2k}^2}{C_{15-3k}^3}$

* На единичном отрезке наудачу выбраны две точки. Какова вер-ть, что расстояние между ними будет меньше k $(0<k<1)$?



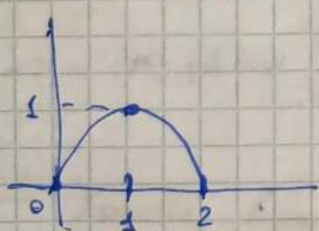
$|y-x| < k$ Геометрическая схема.

$\Rightarrow$ $y > -k+x$
$y < k+x$

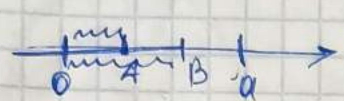


$\dfrac{1}{2} - \dfrac{(1-k)^2}{2} = \dfrac{1-(1-k)^2}{2} = \dfrac{\cancel{1}-\cancel{1}+2k-k^2}{2}$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{2\cdot\dfrac{2k-k^2}{2}}{1} = 2k-k^2 = k(2-k)$



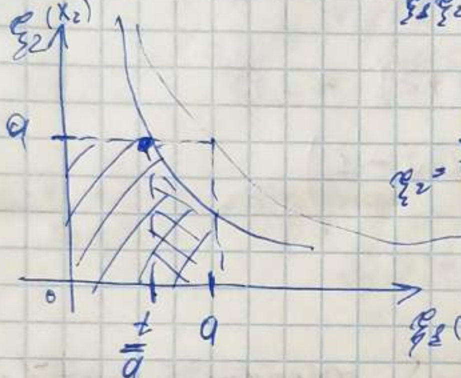
4-3. На отрезок $[0,a]$ наудачу бросают две точки A и B. Из отрезков OA и OB сост. прямоугольник.
Найти ф-ю распределения и п-ть вероятности случайной площади фигуры.



$$f_{\xi_1}(x_1) = \frac{1}{a}\,\mathbb{1}_{[0,a]}(x_1)$$
$$f_{\xi_2}(x_2) = \frac{1}{a}\,\mathbb{1}_{[0,a]}(x_2)$$
независимы.

$\Rightarrow S = \xi_1 \xi_2$ – площадь. (вверху новую с.в.)

$$F_S(t) = P(S<t) = \iint\limits_{\xi_1\xi_2<t} f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^{t/a} \frac{1}{a}\,dx_1 \int_0^a \frac{1}{a}\,dx_2 + \int_{t/a}^{a} \frac{1}{a}\,dx_1 \int_0^{t/x_1} \frac{1}{a}\,dx_2 =$$



$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{t}{a}\cdot a + \frac{1}{a^2}\int_{t/a}^{a} \frac{t}{x_1}\,dx_1 = \frac{t}{a^2} + \frac{t}{a^2}\ln\left(\frac{a^2}{t}\right) =$$

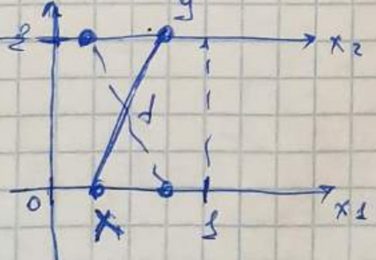
$$= \frac{t\left(1+\ln\left(\frac{a^2}{t}\right)\right)}{a^2}$$

$t_{max} = a^2$

$$\Rightarrow F_S(t) = \begin{cases} 0, & t<0,\ t>a^2 \\ \dfrac{t\left(1+\ln\left(\frac{a^2}{t}\right)\right)}{a^2}, & t\in[0;a^2] \end{cases}$$

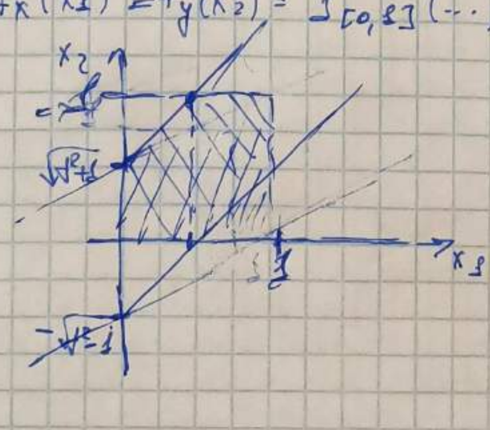
$f_S(t) = F_S'(t) \longrightarrow$ и т.д.

8-3. На противоположн. сторонах единичного квадрата $[0,1]\times[0,1]$ случ. образом и незав. друг от друга падают точки X и Y. Каждая из них имеет равном. распред-е.
Найти мат ожидание расстояния между точками X и Y.



$d^2 = 1 + (x_2-x_1)^2 \rightarrow |x_2 - x_1| = \sqrt{d^2-1}$

$f_X(x_1) = f_Y(x_2) = \mathbb{1}_{[0,1]}(\ldots)$



$x_2 = x_1 + \sqrt{d^2-1}$
$(x_2 > x_1)$

и $x_2 = x_1 - \sqrt{d^2-1}$
$(x_2 < x_1)$

ξ — новая с.в. — расст. между точками.

$\Rightarrow$ По площадям: $F_\xi(t) = P(\xi < t) = 1 - 2\cdot\frac{(1-\sqrt{t^2-1})^2}{2} =$

$= 1 - 1 - (t^2-1) + 2\sqrt{t^2-1} = -t^2+1+2\sqrt{t^2-1}$.

$\Rightarrow f_\xi(t) = -2t + \frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}$

$$M\xi = \int_1^{\sqrt2} x\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} - 2x\right)dx \approx 1{,}1.$$

$$\int_1^{\sqrt2}\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = 2\int_1^{\sqrt2}\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_1^{\sqrt2}\sqrt{x^2-1}\,dx - \int_1^{\sqrt2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$

$= \{$кр-ч. как-то сосчит$\} = \frac{\sqrt2}{2} + \frac{2}{2}\ln(\sqrt2+2) \approx 1{,}15$

$$-2\int_1^{\sqrt2}x^2\,dx = -\frac{2}{3}x^3\Big|_1^{\sqrt2} = \ldots -\frac{2}{3}\left(2\sqrt2-1\right) \approx \ldots$$

$\Rightarrow$

6-9. Найти ковариацию числа выпадений единицы и шестёрки при n бросаниях игральной кости.

$cov\{\eta_1, \eta_6\} = M\eta_1\eta_6 - M\eta_1 M\eta_6$

Кубик симметричен.

$nM\eta_1 = M(\eta_1\cdot \overset{(\eta_1+\ldots+\eta_6)}{n}) = M\eta_1^2 + 5M\eta_1\eta_6 = \frac{n^2}{6}$

$M\eta_1 = M\eta_6 = \frac{n}{6}$

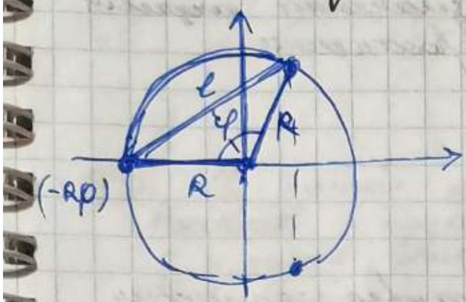
$M\eta_1^2 - M\eta_1 M\eta_1 = D\eta_1 = npq = \frac{5n}{36}$

$M\eta_1^2 = \frac{5n}{36} + \frac{n^2}{36}$

$\rightarrow \frac{5n}{36} + \frac{n^2}{36} + 5M\eta_1\eta_6 = \frac{n^2}{6}$

$\Rightarrow$ и т.д.

25-3 На окружности радиуса R с центром в нач. коорд. длины наудачу бросена точка. Найти плотн-сть распред-я хорды, соед. точку попадания $(-R, 0)$



$$l = 2R\sin\frac{\varphi}{2} \to \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{l}{2R} \to \varphi = 2\arcsin\left(\frac{l}{2R}\right)$$

На окружности 2 точки могут давать одинак. длину хорды.

$$\Rightarrow P(\varphi) = \frac{2\varphi}{2\pi} = \frac{\varphi}{\pi} \quad \text{при } \varphi = [0;\pi].$$

$$f_\xi(l) = \frac{\varphi'(l)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\,\frac{1/2R}{\sqrt{1-\left(\frac{l}{2R}\right)^2}}$$

$$F_\xi(l) = \frac{\varphi(l)}{\pi} = \frac{2\arcsin\left(\frac{l}{2R}\right)}{\pi} \to F_\xi(2R) = 1.$$ так и должно быть.

30-3. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное распр-е Коши:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$ Вычислить: $M\{\min(\xi, 1)\}$

$M(\min\{\xi,1\}) =$

49-3. По сторонам прямого угла XOY скользят концами линейка AB длины l, занимая случайное положение в данный момент времени. Найти мат. ожидание расстояния от начала коорд. до линейки, считая все значения абсциссы ξ конца A линейки на оси OX равновероятными.

40-3. Дискр. с.в. ξ и η независимы и распред. по закону Пуассона с параметром λ. Найти ряд распр-я случ. величины $\zeta = \xi + \eta$

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$P(\eta = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \qquad \zeta = \xi + \eta$$

0+0; 1+0, 0+1; 2+0, 0+2, 1+1; 3+0, 2+1, 1+2, 0+3; n+0, (n-1)+1, ..., 1+(n-1), 0+n

ζ	0	1	2	3	...	n
P	$e^{-2\lambda}$	$2\lambda e^{-2\lambda}$				

$$P(\zeta = 0) = P(\xi = 0)\cdot P(\eta = 0) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} = 2e^{-\lambda}$$

$$P(\zeta = 1) = 2\lambda e^{-\lambda} e^{-\lambda}$$

$$P(\zeta = n) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda} + \ldots +$$

$$+ \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda} = e^{-2\lambda}\left(\frac{\lambda^n}{n!} + \frac{\lambda^n}{(n-1)!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{k!(n-k)!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!}\right) =$$

$$= \lambda^n e^{-2\lambda}\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{k!(n-k)!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) =$$

$$= \lambda^n e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!} = n!\,\lambda^n e^{-2\lambda}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k}}_{\text{бином}} = n!\,\lambda^n e^{-2\lambda}\cdot(1+1)^n =$$

$$= n!\,(2\lambda)^n e^{-2\lambda}$$

40-3. Дискретные с.в. ξ и η независимы и распределены по закону Пуассона с параметром λ. Найти ряд распределения суммарной величины.

?

18-3. Из полной колоды карт (52) одновр. извлекают две. Рассматр. случайные вел. ξ - число вынутых тузов, η - число вын. карт красной масти.
Зависимы ли η и ξ?

ξ	0	1	2
p	$\frac{4}{13}\cdot\frac{47}{27}$	$\frac{8\cdot 48}{52\cdot 51}$	$\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}$

$0 - \frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51} = \frac{4}{27}\cdot\frac{47}{13}$

$P(\xi=2, \eta=0) = \frac{2}{52}\cdot\frac{1}{51} = \frac{1}{26}\cdot\frac{1}{51}$

η	0	1	2
p	$\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{51}$	$26/51$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{51}$

$P(\xi=2)\,P(\eta=0) = \frac{1}{13}\cdot\frac{3}{51}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{51} = \frac{1}{51}\cdot\frac{25}{2\cdot 17\cdot 13}$

$\Rightarrow$ зависимы.

Автоматическая линия при нормальной настройке выпуск. брак-ое изделие с вер-ю 0,001. Переналадка линии проводится после выпуска каждого брак. изделия.
1) Чему равно среднее число изделий, выпуск. между 2мя послед. переналадками линии?
2) какова вероятность того, что между соседними переналадками линии выпуск-равно 1000 изделий?

1) ξ - число изделий между 2мя переналадками. $p=0{,}001$, $q=1-p$.

ξ	1	2	3	...	n	...
$P_{\xi=x}$	p	pq	q^2p		$q^{n-1}p$	

$M_\xi = 1\cdot p + 2\cdot pq + 3pq^2 + 4pq^3 + \ldots = p(1+2q+\ldots+nq^{n-1}+\ldots) =$

$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots = \frac{1}{1-q}$

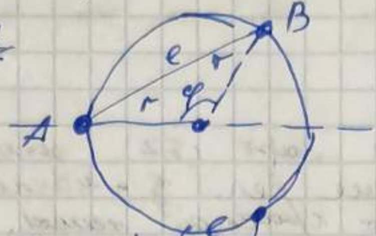
$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \left(\frac{1}{1-q}\right)'_q = \frac{1}{(1-q)^2}$

$= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} = 1000$

2) $P(\xi=1000) = q^{999}p = (1-p)^{999}p \approx e^{-p999}p \approx \frac{1}{1000\cdot e} \approx \frac{p}{e}$

2-8. Через произвольную точку A на окружности радиуса r случайным образом проводится хорда AB так, что все её направления одинаково вероятны. Найти среднее значение длины хорды AB.

Аналогично с 25-2



$$l = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{l}{2R}$$

$$\varphi = 2\arcsin\left(\frac{l}{2R}\right)$$

$$P(\varphi) = \frac{2\varphi}{2\pi} = \frac{\varphi}{\pi}$$

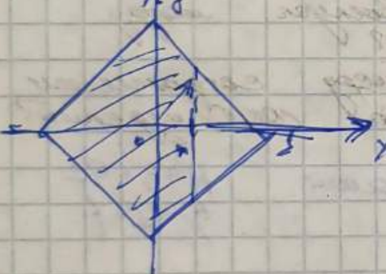
$$\Rightarrow F_\xi(l) = \frac{\varphi(l)}{\pi} = \frac{2\arcsin\left(\frac{l}{2R}\right)}{\pi}.$$

$$\Rightarrow f_\xi(l) = \frac{1}{\pi r\left(1-\left(\frac{l}{2R}\right)^2\right)}$$

$$M_\xi = \int_0^{2r} \frac{l}{\pi r}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{l}{2r}\right)^2}}\,dl = \frac{4r^2}{2\pi r}\int_0^{4r}\frac{d\left(\frac{l^2}{4r^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{l^2}{4r^2}}} = -\frac{2r}{\pi}\int_0^1\frac{d(1-\tau)}{\sqrt{1-\tau}} =$$

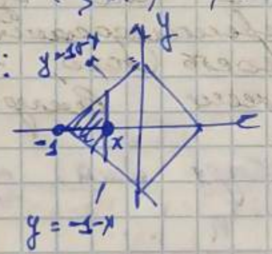
$$= -\frac{2r}{\pi}\cdot 2\sqrt{1-\tau}\,\Big|_0^1 = \frac{4r}{\pi}$$

Случайная точка (ξ, η) равном. распред. внутри квадрата $(|x|+|y|<1)$. Найти закон распределения её абсциссы.



$F_\xi(x) = P(\xi < x)$, как геометрическая схема.

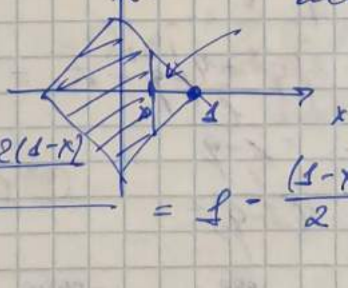
$x<0$:



$y = -1-x$

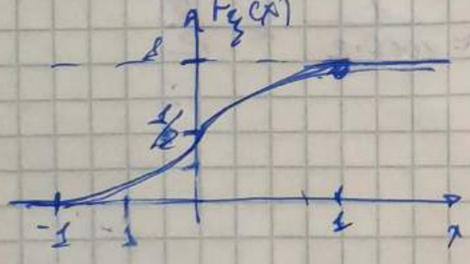
$$F_\xi(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2(1+x)(1+x)}{2} = \frac{(1+x)^2}{2}, \quad -1<x<0$$

$x \geq 0$



можно просто отнять

$$\Rightarrow F_\xi(x) = \frac{2 - \frac{(1-x)\cdot 2(1-x)}{2}}{2} = 1 - \frac{(1-x)^2}{2}, \quad 0<x<1$$



Консультация. Начало в 9:00 в 511

40. Если $D\xi_i < \infty$ → гауссово распр-е. $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \stackrel{+}{=} c_n \xi_n + b_n$.

даже это и следует отсюда

$\frac{\sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{\xi_i}}{\sqrt{D \sum_i \xi_i}}$ → стремится к Гауссовому $e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

Устойчивые: $\underbrace{\underset{\text{уст.}}{\xi_1} + \xi_2 + \ldots + \xi_n}_{\text{уст.}}$ → Леви ~ опис. только хар-ми функциями.

$\Theta_\xi(u) = e^{iua - d|u|^\alpha}$ ~ для них не сущ-т никаких моментов.

$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_\xi(u) e^{-iux}\, du \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$ α ~ индекс Леви. $(0 < \alpha < 2)$

$\Rightarrow \Theta_\eta(u) = M e^{iu(\xi_1 + \ldots + \xi_n)} = \Theta_{\xi_1}(u)\Theta_{\xi_2}(u)\ldots\Theta_{\xi_n}(u) = \Theta^n_{\xi_i}(u)$

Устойчивость - при суммировании с.в. → распределение не меняется. β - параметр асимметрии.

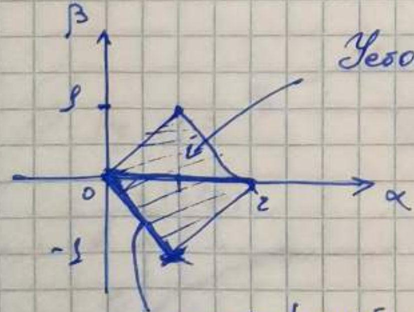
Например $\alpha = 1$: $f_\xi(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$ ~ распр. Коши.

Безгранично делимые: F - БД, если для $\forall n \in N$:

$F = \underbrace{F_n \circledast F_n \circledast \ldots \circledast F_n}_{n \text{ раз}}$ →

$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \stackrel{d}{=} \xi$

независимые.



Устойчивые распределения

на этой границе односторонние распределения $(\beta = \pm 1)$

Для БДР: $\ln \Theta_\xi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} \rho(x)\, dx$, где $\rho(x) \geq 0$

$\rho(x) = \delta(x)$ → получим Гауссово.

$$f(x) = \frac{a}{|x|^{\alpha-1}} \rightsquigarrow \text{Леви.}$$

$\xi = \xi_1 + i\xi_2.$

$$\boxed{M\xi = M\xi_1 + iM\xi_2}$$

$\xi = 0, 1, 2, 3\ldots$

$$\varphi_\xi(x) = Mx^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p(\xi = k)$$

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} x^k p(\xi = k)\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{1-|x|} \Rightarrow |x| < 1. \qquad x \in [-1; 1]$$

т.е. $\lim\limits_{x \to 1-0} \varphi_\xi(x)$

слева, монотонно

$$\varphi_\xi^{(k)}(x) = M\xi(\xi-1)\cdots(\xi-k+1)\,x^{\xi-k} \Rightarrow x \to 1-0$$

---

4 аксиому Колмогорова можно обосновать по геометрич. смысле.

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

Задача 1. 52 карты. Достают 10 карт без возвращения.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, В, Д, К, Т

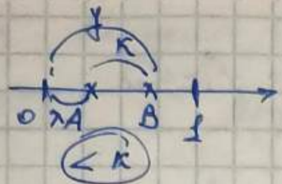
Какова вер-ть, что все они разных значений?

$$P(A) = \frac{(C_4^1)^{10} \cdot C_{13}^{10}}{C_{52}^{10}}$$

$$P(A) = \frac{52}{52} \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{44}{50} \cdot \ldots \cdot \frac{16}{43} = \frac{4^{10} \cdot 13 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 11 \cdots 4}{52 \cdot 51 \cdots 43} = 4^{10}\,\frac{\frac{13!}{3!\,10!}}{\frac{52!}{42!\,10!}} =$$

$$= 4^{10}\,\frac{C_{13}^{10}}{C_{52}^{10}}$$

Задача 2.



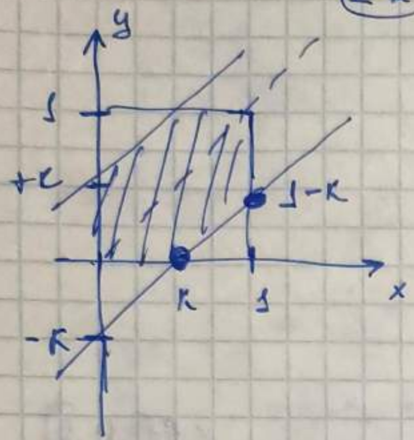
$0 < k < 1$

$\Omega: \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1$

$A: \ |x - y| < k$

$x > y: \ x - y < k \Rightarrow y > x - k$

$x < y: \ y - x < k \Rightarrow y < x + k$

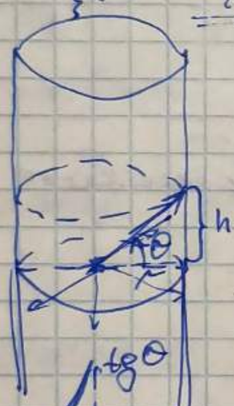


$$P = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Задача 3.

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$ или $M\eta = ?$

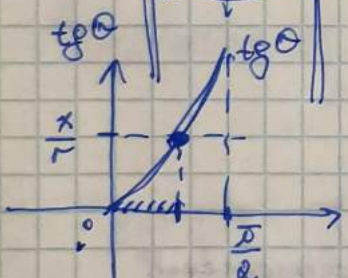
7.7.



Сферическая с.к. (φ, θ, r) роль не играет

$h = r\,tg\,\theta$

$F_h(x) = P(h < x) = P(r\,tg\,\theta < x) = P(\theta < arctg\frac{x}{r}) =$
$= F_\theta(arctg\frac{x}{r})$



$\Omega = 4\pi$ – телесный угол.

$f_\Omega = \frac{1}{4\pi}$ $\quad d\Omega = \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$

$f_\Omega = f_{\theta,\varphi} = \frac{\cos\theta}{4\pi}$

$f_\theta(\theta) = \int_0^{2\pi} f_{\theta,\varphi} \cos\theta \, d\varphi = \frac{\cos\theta}{2}$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} f_\Omega \cos\theta \, d\theta \, d\varphi = 1$$

$$F_\theta(\theta) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \cos\psi \, d\psi = \frac{1}{2}\sin\psi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} = \frac{1}{2}(\sin\theta + 1)$$

$$\Rightarrow F_h(x) = \frac{1}{2}\left(\sin(arctg\frac{x}{r}) + 1\right)$$

Проверить нормировку.

№4. 52 карты.

обр. сторона.

Снимаем сверху по одной, до появл. туза

На каком месте в среднем может появиться туз.

$\xi = 1, \ldots, 49.$ — место появл.

$$M\xi = \sum_{k=1}^{49} k\, P(\xi = k) \approx 10,6.$$

$$P(\xi = k) = \underbrace{\frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51}\cdot\ldots\cdot\frac{48-k+1}{52-k+1}}_{k-1}\cdot\underbrace{\frac{4}{52-k}}_{k}$$

ещё не вытащ туз.

По-другому: посмотрим на колоду с боку:

ξ_1 - кол-во карт от начала колоды до 1го туза.

...

ξ_2 - от 1го до 2го туза.

...

...

ξ_5 - от 4го туза до конца.

$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = 48$ (тузы не считаем.)

$M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_5 = 48.$ — нет кому-то предпочтения.

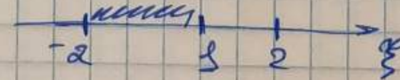
$5M\xi_1 = 48.$

$\rightarrow M\xi_1 = \frac{48}{5} \approx 9,6$ => примерно на **10 месте!!**

№5. $x^2 - 2x + \xi = 0$, $\xi \in [-2, 2]$ — равном. распр.

$D = 4 - 4\xi \geq 0 \Rightarrow \xi \leq 1$

Геом. схема.



$P = \frac{3}{4}$