Литература: 1. Чистяков В.П., Курс ТВ, М: Наука, 1982. ✓ 05.02.22.

2. Боровков А.А. ТВ, М: Наука, 1976

3. Гнеденко Б.В., Курс ТВ, М: Наука, 1988.

4. Ширяев А.Н., Вероятность, М: Наука, 1980.

5. Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Теория вероятностей 1983

Краткий исторический очерк теории вероятностей.

1. XVII век ~ расцвет азартных игр, пытались рассчитать „на что ставить", „как ставить".

Якоб Бернулли, Муавр, Лаплас, Гаусс.

2. 1654 г. – переписка Паскаль - Ферма

3. Начало XVII века – Я. Бернулли – "Искусство догадок."

4. 1926 г. (XX век.) – зарождение квантовой механики.

Основы теории вероятностей

1.1. Основные понятия.

Опр Случайное явление – это любое явление в природе, исход которых однозначно предсказать невозможно.

Массовые случ. явления – явления, которые примерно в одинаковых условиях можно повторять много раз.
(устойчивость – „пример бросаем кубик много раз, вып. „6-ки" к числу бросков" ≈ постоянно).

Эксперимент (статист. экс-т) ~ явление, которое повторяется много раз.

↓

Испытание ~ каждое отдельное наблюдение (явления)

↓

Исход испытания ~ что произойдёт в результате испытания.

↓

$A, B, C, D, \ldots$ Событие ~ всякий факт, выполнение или невыполнение однозначно фиксируется в данном эксперименте.

(ω_i) Элементарное событие ~ любой неделимый исход испытания.

1. Однократное бросание монеты.

$\{\omega_г, \omega_р\}$ ~ два возможных исхода ~ „герб" и „решка"
- группа элементарных событий.

2. Однократное бросание игрального кубика 

$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ ~ взаимоисключ. исходы - вместе не наступают.

3. n-кратное бросание монеты.

$\omega_i = \underbrace{РГРРГР \ldots Г}_{n}$; 2^n ~ число элементарных событий.

④ Бросание монеты до выпадения первого герба.

$\omega_i = РР\ldots РРГ$

$\omega_1 = Г$

$\omega_2 = РГ$

$\omega_3 = РРГ$

$\ldots$

$\omega_n = \underbrace{РР\ldots Р}_{n-1}Г$

Счётное множество элементарных событий.

⑤ Распад радиоактивной частицы.

$\omega = t$ - время полураспада

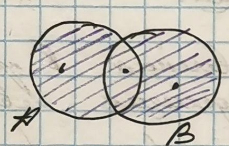
континуум ~ несчётное множество.

1.2. Алгебра событий.

$A = \{\omega_i, \omega_k, \omega_6\}$

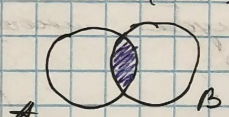
благоприятствующие исходы.

1. Сумма событий: $A+B$ $(A \cup B)$ ~ событие, происходит хотя бы одно из A и B.

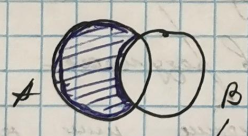


Диаграммы Эйлера-Венна

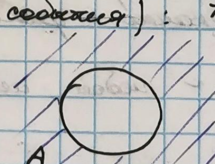
2. Произведение событий: AB $(A \cap B)$ ~ происходят A и B одновременно



3. Разность событий: $A \setminus B$ $(A-B)$ ~ происходит событие A, а B не происходит.



4. Противоположное событие (отрицание события): $\bar{A}$ – „не A"

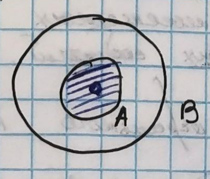


A - не происходит.

5. Причинно-следственная связь события: $A \subset B$ ~ из наступления A вытекает наступление B.

A - причина

B - следствие



6. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ ~ пространство элементарных событий (Ω - достоверное событие)

$\bar{\Omega}$ ~ невозможное событие (никогда не наступает)

$\bar{\Omega} = \{\ldots\} = \varnothing$

Свойства:

1. $A \cup B = B \cup A$

2. $AB = BA$

3. Если $A \subset B$ и $B \subset A \Rightarrow A = B$

4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

5) $(A \cup B) C = AC \cup BC$

6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

7. $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$$

Алгебра ($\mathcal{A}$) – система подмножеств пространства элементарных событий, замкн. относительно операций сложения, умножения и взятие против. события.

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Для $\forall A, B \in \mathcal{A}$: $A + B \in \mathcal{A}$
3. Для $\forall A, B \in \mathcal{A}$: $AB \in \mathcal{A}$
4. Для $\forall A \in \mathcal{A}$: $\overline{A} \in \mathcal{A}$

Пример: однократное бросание монеты. $\to \omega_г, \omega_р$.

$\Omega = \{\omega_г, \omega_р\}$

$\mathcal{A} = \{\omega_г, \omega_р, \Omega, \varnothing\}$ ~~– алгебра.~~

12.02.22.

$\mathcal{A}$ - алгебра событий

1. $\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing\}$ $\quad \Omega + \varnothing = \Omega$, $\Omega \varnothing = \varnothing$, $\overline{\Omega} = \varnothing$

минимальная алгебра

2. $\mathcal{A} = \{\omega_г, \omega_р, \Omega, \varnothing\}$ – однократное бросание монеты.

3. ~~„n" кратное бросание кубика.~~

~~$\mathcal{A} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$~~

3. „n" элементарных событий

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

$\mathcal{A} = \{\underbrace{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n}, \{\omega_i, \omega_j\}, \{\omega_i, \omega_j, \omega_k\}, \ldots, \Omega, \varnothing\}$

$\varnothing$

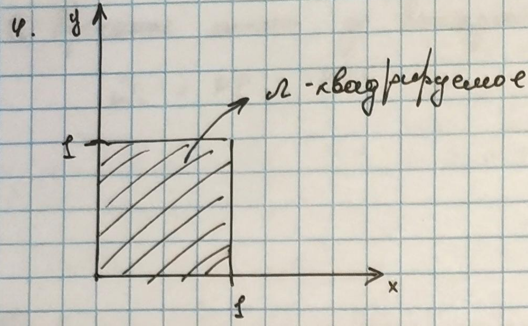
$N = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$

$C_n^0 = 1$

кол-во элементов

$\Rightarrow \boxed{N = 2^n}$

4.



$\mathfrak{A}$ - система квадрируемых подмножеств в Ω.

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k, \ \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \to \sigma$-алгебра: $\tilde{\mathfrak{U}}$:

1. $\Omega \in \tilde{\mathfrak{U}}$
2. $\forall A_i \in \tilde{\mathfrak{U}}: \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \tilde{\mathfrak{U}}$
3. $\forall A_i \in \tilde{\mathfrak{U}}: \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \tilde{\mathfrak{U}}$
4. $\forall A_i \in \tilde{\mathfrak{U}}: \bar{A}_i \in \tilde{\mathfrak{U}}$

$\{\Omega, \mathfrak{A}\}$
$\{\Omega, \tilde{\mathfrak{U}}\}$ - измеримое пространство

1.3. Статистическое (эмпирическое) определение вероятности.

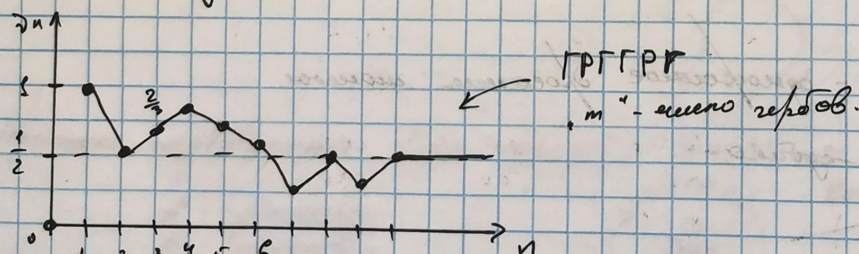
Проводится "n" опытов в статистическом эксперименте. Следим за неким событием A.

m - число появлений события A в „n" опытах.

$\boxed{\nu_n(A) = \frac{m}{n}}$ $\quad 0 \le m \le n$

- относительная частота события.

Обладает устойчивостью (при $n \to \infty$, $\nu_n \to$ к какому-то числу).



Под вероятностью события A понимается предел $\lim\limits_{n \to \infty} \nu_n(A)$ - эмпирическое опр-е вероятности.

Но нет привязывания к опыту. Условия:

1) $\nu_n(\Omega) = 1$

2) $\nu_n(\varnothing) = 0$

3) $0 \le \nu_n(A) \le 1$

4) $AB = \varnothing$, $\nu_n(A+B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = \nu_n(A) + \nu_n(B)$

1.4. Классическая схема исчисления вероятностей.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ - конечное число элем. событий

Все ω_i равновозможны (равноправны)

A - событие: $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$ $\omega_{i_1} \subset A$, $\omega_{i_2} \subset A$, $\omega_{i_k} \subset A$ - благоприятствующие исходы.

=> Тогда под вероятностью события A понимают:

$$\boxed{P(A) = \frac{k}{n}}$$ - классическое опр-е вероятности (XVII век)

Примеры для классической схемы:

1. Однократное бросание кубика:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

A - выпадание нечётного числа очков: $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Совпадение дней рождения в группе из „m" человек.

A = хотя бы у двух д/р „падают" на один и тот же день.

$$P(\bar{A}) = \frac{n-k}{n} = 1 - P(A)$$

$\bar{A}$ - д/р у всех разные

$$P(\bar{A}) = \frac{365 \cdot 364 \dots (365-(m-1))}{365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365-(m-1))}{365^m} =$$

„m" множ.

$$= 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-(m-1)}{365} = \frac{365-1}{365} \cdot \frac{365-2}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-m+1}{365} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{365}\right)$$

Считаем, что $\frac{m-1}{365} \ll 1$.

$$\underset{x \ll 1}{(1-x) \approx e^{-x}} \Rightarrow P(\bar{A}) \approx e^{-\frac{1}{365}} e^{-\frac{2}{365}} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{m-1}{365}} = e^{-\frac{(m-1) \cdot m}{2 \cdot 365}} =$$

$$= e^{-\frac{(m-1) \cdot m}{730}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) \approx 1 - e^{-\frac{m(m-1)}{730}}$$

Если $m = 10 \to P(A) \approx 0,12$

$m = 15 \to P(A) \approx 0,25$

$m = 20 \to P(A) \approx 0,4$

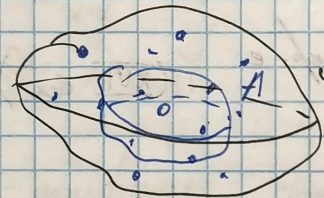
$m = 25 \to P(A) \approx 0,56$. Уже $> \frac{1}{2}$

Пусть $n \to \infty$?

1.5. Геометрическая схема определения вероятности.

Ω - содержит ∞ число элементарных событий (континуальное множество)

$\Omega \subset R^k$

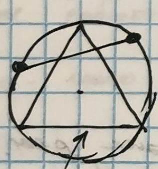


$A \in \Omega$

Тогда $P(A) = \dfrac{mes(A)}{mes(\Omega)}$ measure - измерение (эквивалентен объёму в R^3

Нужно ввести „k" параметров. → Её ввёл Бюффон.

Парадокс Бертрана

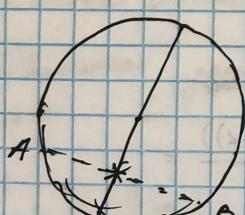


$R\sqrt{3}$

Какая вероятность, что хорда > стороны впис. треугольника.

$P\{l > R\sqrt{3}\}$ -?

1)

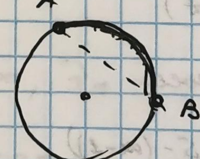


$m = 1$

$0 \le x \le 2R$

$P(A) = \frac{1}{2}$

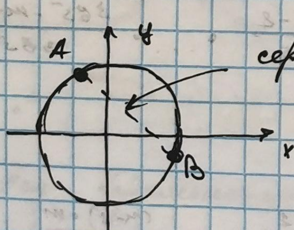
2)



$0 \le \ell \le 2\pi R$

$P(A) = \frac{1}{3}$

3)



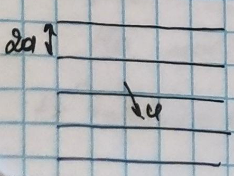
середина хорды

$m = 2$

$(x, y): x^2 + y^2 < \ell^2$

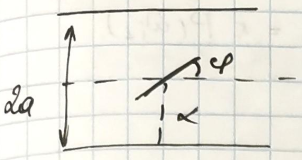
$P(A) = \frac{1}{4}$

Задача Бюффона.



A - игла пересекает ни одну из линий

$P(A)$ - ?



x - расстояние от центра иглы до ближ. линии.

$$0 \le x \le a$$

φ - угол наклона иглы по отношению к горизонтали.

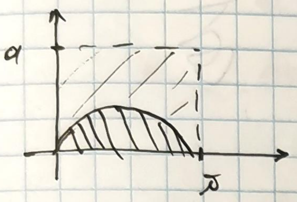
$\mathbb{R}^2$ $\quad 0 \le \varphi \le \pi$

$$l < a$$

$$P = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

$$A: 0 \le x \le l \sin\varphi$$

$$P = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi} l \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2l}{\pi a} \approx \nu_A = \frac{m}{N} \to$$



$$\to \pi = \frac{2ln}{am}$$

Вольф - $N = 5000$, $m = 2538$, $\frac{l}{a} = 0{,}8$.
$\pi \approx 3{,}1596$

1.8. Аксиоматика теор. вероятн. Вероятностное пространство по Колмогорову А.Н.

Вероятностью P события $A \in \mathcal{A}$ называется числовая функция, опр-на на мн-ве $\mathcal{A}$ и обладающая след. св-вами:

1) Для любого события $A \in \mathcal{A}$: $P(A) \ge 0$
2) Вероятность достоверного события $P(\Omega) = 1$
3) Аксиома конечной аддитивности:
   Для $\forall A, B \in \mathcal{A}$: $AB = \varnothing$: $P(A+B) = P(A) + P(B)$
4) $\{A_1, A_2, \dots, \}$ - счётная послед-ть событий для $\forall$ послед. событий $\in U$, таких что $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$ её $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, тогда
   $$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

Обоснованность аксиом:

1) $\nu_A = \frac{m}{n} \ge 0$
2) $\nu_A = \frac{n}{n} = 1$
3) $\nu_{A+B} = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = \nu_A + \nu_B$

$$\nu_A = \frac{m}{n}, \quad \nu_B = \frac{k}{n}$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_n}\}$$

$$A = \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_n}$$

$P(A) = P(\omega_{i1} + \omega_{i2} + \ldots + \omega_{ik}) = P(\omega_{i1}) + \ldots + P(\omega_{ik}) = k\, P(\omega_{i1})$

$P(\Omega) = P(\omega_1 + \ldots + \omega_n) = n \cdot P(\omega_1) = 1.$

$$\boxed{P(\omega_1) = \frac{1}{n}}$$

Вероятностное пр-во

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1.7. свойства вероятности вытекающих из аксиом.

1) Для $\forall A \in \mathcal{A}$ $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

Док-во: $A + \bar{A} = \Omega$

$A \cdot \bar{A} \neq \varnothing$

$P(A + \bar{A}) = P(\Omega)$, $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega)$

$P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, ч.т.д.

$P(\varnothing) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0$

2) Для $\forall A, B \in \mathcal{A}$: $A \subset B$, выполняется неравенство: $\boxed{P(A) \leq P(B)}$

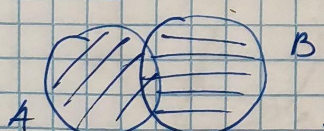
Док-во: $B = A + \bar{A}B$

$P(B) = P(A + \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B)$

$P(\bar{A}B) = P(B) - P(A) \geq 0$

3) Для $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,
$AB \neq \varnothing$

Док-во: $A + B = A + (B \setminus A)$



$B = AB + (B \setminus A)$

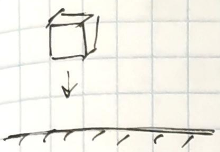
$$-\begin{cases} P(A+B) = P(A) + P(B/A) \\ P(B) = P(AB) + P(B/A) \end{cases}$$

$P(A+B) = P(B) + P(A) - P(AB)$

$\forall A, B \in \mathcal{A}$ 26.02.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad \Rightarrow \quad P(A+B) \leq P(A) + P(B)$$

1.8. Условная вероятность. Независимость событий.



A – выпадение 2х очков

B – выпадение чётного числа очков

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad ; \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

B – происходит. Как изменится вер-ть события A?

$$P(A|B) \neq P(A)$$

$$P(A|B) = 1/3$$

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

Событиям благоприятствуют: $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\} \quad \to P(A) = \frac{m}{n}$

$B = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\} \quad \to P(B) = \frac{k}{n}$

$\boxed{P(A|B) = \frac{r}{k}}$, r – число исходов, которые благоприятствуют и A, и B.

$$\boxed{P(A|B) = \frac{r/n}{k/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}} \sim \text{аксиома}.$$

Опр. (Условной вероятности)
Пусть задано вер-ное пр-во $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ и события $A, B \in \mathcal{A}$. Если $P(B) > 0$, то вер-ть события A при усл-ии наст. B опр-ся так:

$$\times P(B) \quad \boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$ ~ назыв. условной вер-тью. Для неё справедливы все аксиомы и св-ва.

P(A) ~ безусловная вер-ть.

Если $P(A|B) = P(A)$, то событие A прои-т независимо от B.
$\Rightarrow$ A и B – независимые события.

$AB = \varnothing \quad \to P(A|B) = 0$

несовместные события (жёсткая зависимость)

Опр. (независимости событий)
События A и $B \in \mathcal{A}$ назыв. независимыми, если:

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$$

Пример: A — герб выпал при первом бросании
B — выпала решка при втором бросании.

$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$

$P(AB) = \frac{1}{4}$) Из простой формулы док-ли независимость событий

Пример: Однократное бросание кубика:

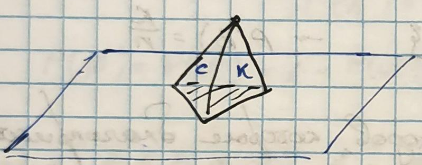
A — выпадение чётного числа очков;
B — выпадение числа очков, кратного 3

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow P(AB) = P(A)\cdot P(B)$ — независимые

$P(AB) = \frac{1}{6}$

Пример Бернштейна (показывает, что не всё так просто)



к — окрашена в красный цвет (1 грань)
с — в синий цвет (2 грань)
з — в зелёный цвет (3 грань)
к-с-з — окрашена в три цвета (4 грань)

К — тетраэдр упал на грань где красный цвет.

$P(К) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

С — // — синий цвет

$P(С) = \frac{1}{2}$.

З — // — зелёный цвет

$P(З) = \frac{1}{2}$

$P(КС) = \frac{1}{4} = P(К)\cdot P(С)$ — независимы.

$P(КЗ) = \frac{1}{4} = P(К)\cdot P(З)$

$P(СЗ) = \frac{1}{4} = P(С)\cdot P(З)$

Но! $P(КЗС) = \frac{1}{4} \neq P(К)\cdot P(З)\cdot P(С)$

$\Rightarrow$ Наше опр-е независимости недостаточно, если больше 2х событий

Опр. (Независимость в совокупности)
События $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ наз-ся независимыми в совокупности если для $i_1, i_2, \dots, i_k \in (1, 2, \dots, n)$ спр-вы соотношения:

$$\boxed{P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}\dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})}, \quad k \le n$$

1.9. Теорема сложения и умножения вероятностей.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(\underbrace{A+B}_{D}+C) = P(C+D) = P(C)+P(D) - P(CD) = P(C) + P(A+B) - P((A+B)\cdot C) =$$

$$= P(C) + P(A) + P(B) - P(AB) - P(AC+BC) =$$

$$= P(A)+P(B)+P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + \underset{P(ABC)}{\underset{\shortparallel}{P(ACBC)}}$$

$$\Rightarrow P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$\boxed{P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}\sum P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k}\sum\sum P(A_iA_jA_k) + \ldots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)}$$

~ Теорема сложения вероятностей
теорема сумм событий (док-ся методом мат. индукции.)

Для несовместных событий: $\underset{i\neq j}{A_iA_j} = \varnothing$, $i,j = \overline{1,n}$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(AB) = P(A|B)\cdot P(B) = P(A)\,P(B|A)$$

$$P(\underbrace{AB}_{D}C) = P(DC) = P(D)\,P(C|D) = P(AB)\,P(C|AB) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|AB)$$

Теорема умножения вероятностей:

$$\boxed{P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})}$$

Док-во (по мат. индукции):

$$P(A_1\ldots A_n\cdot A_{n+1}) = P(DA_{n+1}) = P(D)\,P(A_{n+1}|D) = P(A_1\ldots A_n)\,P(A_{n+1}|A_1\ldots A_n) =$$

$$= P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})\cdot P(A_{n+1}|A_1A_2\ldots A_n)$$

Частный случай: события $A_1, A_2, \ldots A_n$ — независимы в совокупности

→ тогда из опр-я: $\boxed{P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\ldots P(A_n)}$

Пример: задача о неорганизованных зрителях.

В зале "n" мест. Все билеты куплены. Зрители рассаживаются случайным образом.
Какова вер-ть, что ни один из зрителей не сядет на "своё" место?

B - ни один из зрителей не сядет на своё место.

A_i - i-ый зритель садится на свое место. , $i = \overline{1, n}$

Проще посчитать обратное событие:

Хотя бы 1н зритель сядет на своё место.

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$

$\bar{B} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ $\Rightarrow$ по теореме сложения.

$$P(\bar{B}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}\sum P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k}\sum\sum (A_iA_jA_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \ldots A_n)$$

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i$$

$$P(A_iA_j) = P(A_i)\,P(A_j | A_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \quad \text{для } \forall i, j$$

$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)\,P(A_j | A_i)\,P(A_k | A_iA_j) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}, \quad \forall i,j,k$$

$$\ldots$$

$$P(A_1 \ldots A_n) = \frac{1}{n!}$$

$$P(\bar{B}) = \frac{1}{n}\overbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}^{=n} - \frac{1}{n(n-1)}\overbrace{\sum_{i<j}\sum 1}^{C_n^2} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)}\overbrace{\sum_{i<j<k}\sum\sum 1}^{C_n^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} =$$

$$= 1 - \frac{C_n^2}{n(n-1)} + \frac{C_n^3}{n(n-1)(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} =$$

$$\frac{C_n^2}{n(n-1)} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!\,n(n-1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \quad ; \quad P(\bar{B}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}$$

при $n \to \infty$ $\quad P(\bar{B}) \to e^{-1} = \frac{1}{e}$;

$\quad P(B) \to 1 - \frac{1}{e}$

05.03.22

Ответ: $P(B) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \approx \frac{1}{e} \approx 0,37$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

при $n >> 1$

1.10. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Опр. Говорят, что события $\{H_1, H_2, \dots, H_n\} \in \mathcal{A}$ образуют полную группу попарно несовместных событий, если:

1) Сумма всех соб-ий есть достоверное: $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$

2) $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$

Теорема:

~ Пусть A - произвольное событие из алгебры, а $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ полная группа попарно несовместных событий.

Тогда,

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)}$$

~ формула полной вероятности. (теорема разложения)

Док-во:

$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$; $A = A\Omega$

$\Rightarrow P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)$

Замечание: $(A \subset H_1 + \dots + H_n)$ $H_1 + H_2 + \dots + H_n \neq \Omega$

теорема справедлива и при таком условии.

Пример: задача о стратегии сдачи экзамена.

Студент приходит на экзамен, выучив "m" билетов из "n".

Когда можно сдать выше, приходя 1-ым или 2-ым?

A_1 - студент сдаст экзамен, придя первым.

A_2 - студент сдаст экзамен, придя вторым.

...

A_k - студент сдаст экзамен придя "k"-ым.

$P(A_1) = \frac{m}{n}$

$P(A_2) = P(H) P(A_2|H) + P(\bar{H}) P(A_2|\bar{H}) =$

H - первый студент вытянул "нужный" билет

$\bar{H}$ - первый студент вытянул "ненужный" билет

$H\bar{H} = \varnothing$

$H + \bar{H} = \Omega$

$= \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} + \left(1 - \frac{m}{n}\right) \frac{m}{n-1} = \frac{m(m-1) + m(n-m)}{n(n-1)} = \frac{m(-1+m+n-m)}{n(n-1)} = \frac{m}{n}$

Формула Байеса.

Рассмотрим группу попарно несовместных событий $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$,

$H_i H_j = \varnothing$, $i \neq j$. H_i - гипотеза.

Берем событие $A \subset H_1 + H_2 + \dots + H_n$ (A - опыт)

Какая из гипотез самая вероятная:

$P(H_i)$ - априорные вероятности (до опыта)

$P(H_i|A)$ - апостериорные вероятности (после опыта)

$$P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A|H_k)}$$

$$\boxed{P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}}$$ – формула Байеса.

как задавать вер-ть?

1) $P(H_k) = \frac{1}{n}$

2) $P(H_k|A)$
$\;\;\; \| $
$\;\;\; P(\tilde{H}_k)$

1.11. Схема независимых испытаний Бернулли.

Последовательно проводится "n" испытаний, в каждом из которых событие A наступает, либо не наступает.

Опыты проводятся при данных усл-ях, т.е. рез-т предыдущего не влияет на следующий.

$P(A) = p$ – не зависит от номера испытаний.

$P(\bar{A}) = q = 1 - p$

Посл-ть указанных испытаний – схема Бернулли.

B_k – событие A появится ровно "k" раз в "n" испытаниях $(k = \overline{0, n})$

A – „успех"

$\bar{A}$ – „неудача"

Теорема

Для вероятности "k" успехов в n испытаниях Бернулли справедлива формула.

$$\boxed{P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$ – Биномиальный закон.

$k = \overline{0, n}$, $q = 1 - p$

Док-во:

Введём события S_i – успех в i-ом испытании. ; $i = 1, 2, \dots n$

F_j – неудача в j-м испытании.

$P(S_i) = P(A) = p$

$P(F_j) = P(\bar{A}) = q$

Элементарное событие: $\omega = S_1 F_2 F_3 S_4 \dots F_n$

k

$$\tilde{\omega} = \underbrace{S_{i_1} \dots S_{i_k}}_{k} F_{i_{k+1}} \dots F_{i_n}$$

$B_k = \bigcup S_{i_1} \dots S_{i_k} F_{i_{k+1}} \dots F_{i_n}$ $\quad (i_1, \dots, i_k) \in (1, 2, \dots, n)$

$$P(B_k) = P\left(\bigcup S_{i_1} \dots S_{i_k} F_{i_{k+1}} \dots F_{i_n},\ (i_1, i_k) - 0,1,2,n.\right) =$$

$$= \{\text{несовм. события}\} = \sum P(S_{i_1} \dots S_{i_k} F_{i_{k+1}} \dots F_n) =$$

$$= \sum_{(i_1, i_k) \in (\Omega, \nu)} p^k q^{n-k} = p^k q^{n-k} \sum 1 = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$(i_1, i_k) \in (1, 2, \dots, n)$$

$$C_n^k$$

$$\sum_{i=0}^{n} P(B_k) = P(\underbrace{B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n}_{\Omega}) = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Пример: бросание монеты "2m" раз. Найти в-ть выпадения герба m раз.

$$P_{m,2m} = C_{2m}^m \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-m} = \frac{(2m)!}{m! \cdot m! \cdot \dots} = \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} = \frac{(2m)!}{(m!)^2 2^{2m}}$$

Формула Стирлинга: (при $n \to \infty$)

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

при $m \to \infty$:

$$(2m)! \approx \sqrt{4\pi m} \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}$$

$$(m!)^2 = (2\pi m)\left(\frac{m}{e}\right)^{2m}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{4\pi m} \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{2\pi m \left(\frac{m}{e}\right)^{2m} 2^{2m}} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \to 0$$

12.03.22.

$$\boxed{P_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k}}$$ – биномиальный закон.

Полиномиальный закон

Проводится "n" независимых испытаний; $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ – полная группа попарно несовместных событий,

т. е. 1) $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$

2) $H_i H_j = \varnothing,\ i \neq j$

и k_1 – число появл. H_1

k_2 – // – // – H_2

k ...

k_n – // – // – H_n

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = n$$

$$\underbrace{H_1 \dots H_1}_{k_1} \underbrace{H_2 \dots H_2}_{k_2} \dots \underbrace{H_n \dots H_n}_{k_n} \to p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$$ – по т. умножения

Учитываем перестановки внутри групп: $\frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!}$

$$\Rightarrow \boxed{P_{k_1,k_2,\dots,k_n;\,n} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2}\dots p_n^{k_n}}$$

Чтобы перейти к биномиальному з-ну:

$$\begin{matrix} A = H_1 \\ \bar{A} = H_2 \end{matrix} \quad \to \quad P_{k,\,n-k;\,n} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

1.12. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

Теорема (Пуассона для редких событий)

$p \ll 1$, а $n \to \infty$, $p \to 0$, $pn \to \lambda$ $(0<\lambda<\infty)$

~ Если вер. успеха в одном испытании $p \to 0$, а $n \to \infty$, причём $pn \to \lambda$ $(0<\lambda<\infty)$, то:

$$\boxed{P_{k,n} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

Док-во:

$$\lim_{n\to\infty} P_{k;n} = \lim_{n\to\infty} C_n^k p^k q^{n-k} \ominus, \text{ заменим } p = \frac{\lambda}{n}$$

$$\ominus \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \underbrace{1}_{1}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{1}\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\underbrace{\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}_{1}\cdot\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}_{1}} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad ■$$

Пример: игра в „русское лото"

Сколько раз нужно сыграть в „русское лото" (наверено) покупая по одному билету в каждом тираже, чтобы вер-ть выигрыша была больше α.

82 из 90

30 номеров зачёркивается.

$$p = \frac{C_{60}^{52}\cdot C_{30}^{30}}{C_{90}^{82}} \approx \frac{1}{30}$$ применяем схему Пуассона

Если $k=0$, т.е. мы ничего не выиграем $1-e^{-\lambda} > \alpha$

$$e^{-\lambda} < 1-\alpha$$

$$-\lambda \ln e < \ln(1-\alpha)$$

$$\lambda > -\ln(1-\alpha)$$

$$\lambda = np \Rightarrow \boxed{n > \frac{-\ln(1-\alpha)}{p}}$$

Бернулли

$$P_{0,n} = C_n^0 p^0 q^{n-0} = q^n$$

$$1 - q^n > \alpha \quad \Rightarrow q^n < 1 - \alpha$$

$$n \ln q < \ln(1-\alpha)$$

$$n > \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln q}$$

$q = 1 - p$; $p \ll 1 \Rightarrow \ln q = \ln(1-p) \approx -p.$

$$\Rightarrow \quad n > -\frac{\ln(1-\alpha)}{p}$$ ~ эквивалентно.

Например: $\alpha = 0.5$, $n > 21$, чтобы что-то выиграть.

$\alpha = 0,9$ $\quad n > 68$

Теорема (локальная теорема Муавра - Лапласа)

– Если $n \to \infty$, а вероятн. успеха постоянна "p", где $0 < p < 1$, величина

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$ равномерно ограничена по „k" и „n": $0 < a \le x_k \le b < \infty$,

то:

$$\boxed{P_{k;n} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2 \frac{1}{2}}}$$

Док-во:

$$P_{k;n} = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

по формуле Стирлинга $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$$\Rightarrow \ln n! = n \ln\left(\frac{n}{e}\right) + \ln\sqrt{2\pi n} = n(\ln n - 1) + \ln\sqrt{2\pi n}$$

$$\ln P_{k;n} = \ln n! - \ln k! - \ln(n-k)! + k \ln p + (n-k)\ln q$$

Из $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \to k = x_k \sqrt{npq} + np.$ $\to k \to \infty$ при $n \to \infty$

$n - k = n - np - x_k\sqrt{npq} = nq - x_k\sqrt{npq} \to \infty$ при $n \to \infty$

$$\ln n! - \ln k! - \ln(n-k)! \approx n(\ln n - 1) + \ln\sqrt{2\pi n} - k(\ln k - 1) - \ln\sqrt{2\pi k} -$$
$$- (n-k)[\ln(n-k) - 1] - \ln\sqrt{2\pi(n-k)} =$$
$$= \ln\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} + n\ln n - \cancel{n} - k\ln k + \cancel{k} - (n-k)\ln(n-k) + \cancel{(n-k)}$$

$$\ln P_{k;n} \approx \ln\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} + n\ln n - k\ln\frac{k}{p} - (n-k)\ln\frac{n-k}{q} \approx$$

$$\approx \ln\sqrt{\frac{n}{2\pi npnq}} + n\ln n - np\left(1 + x_k\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\cdot\ln n\left(1 + x_k\sqrt{\frac{q}{np}}\right) -$$
$$- nq\left(1 - x_k\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\ln n\left(1 - x_k\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{1}{2\pi npq}} + \cancel{n\ln n} - pn\left(1 + x_k\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\ln n - np\left(1 + x_k\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\ln\left(1 + x_k\sqrt{\frac{q}{np}}\right) -$$
$$- nq\left(1 - x_k\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\ln n - nq\left(1 - x_k\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\cdot\ln\left(1 - x_k\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) =$$

~~Х неверно~~

$$(1+z)\ln(1+z) \approx (1+z)\left(z - \frac{z^2}{2} + \dots\right) \approx 1+z+z^2-\frac{z^2}{2} \approx \cancel{1+}z+\frac{z^2}{2}$$

$z \ll 1$

$$\approx \ln\sqrt{\frac{1}{2\pi npq}} - np\left[1 + x_k\sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{x_k^2}{2}\cdot\frac{q}{np}\right] - nq\left[1 - x_k\sqrt{\frac{p}{nq}} + \frac{x_k^2}{2}\cdot\frac{p}{nq}\right] =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{1}{2\pi npq}} - np - nq - \cancel{x_k\sqrt{npq}} + \cancel{x_k\sqrt{npq}} - \frac{x_k^2}{2}(q+p)$$

19.03.22. $(1+z)\ln(1+z) \approx (1+z)\left(z-\frac{z^2}{2}\right) = z\left(1+z-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2}\right) \approx z\left(1+\frac{z}{2}\right)$

$$\ln P_{k,n} \approx \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} - np\left(1+x_k\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\ln\left(1+x_k\sqrt{\frac{q}{pn}}\right) - nq\left(1-x_k\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\ln\left(1-x_k\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \approx$$

$$\approx \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} - npx_k\sqrt{\frac{q}{np}}\left(1+\frac{x_k}{2}\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + nqx_k\sqrt{\frac{p}{nq}}\left(1-\frac{x_k}{2}\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) =$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} - x_k\sqrt{npq} - \frac{x_k^2}{2}q + x_k\sqrt{npq} - \frac{x_k^2}{2}\underbrace{p}_{1-q} = \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} - \frac{x_k^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{k,n} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}} \quad n\to\infty$$

$k \approx np$ – число успехов наиболее вероятно.

$P_{k;n} = C_n^k p^k q^{n-k}$ – нужно сравнить два соседних. → $\frac{P_{k+1,n}}{P_{k,n}} \le 1$ 1* и $\frac{P_{k,n}}{P_{k-1,n}} \ge 1$ 2*

1* $\Rightarrow \dfrac{C_n^{k+1}p^{k+1}q^{n-(k+1)}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \dfrac{p}{q}\,\dfrac{n!\,k!\,\overset{(n-k)}{\cancel{(n-k)!}}}{\cancel{(n-(k+1))!}\,\underset{(k+1)}{\cancel{(k+1)!}}\,n!} =$

$= \dfrac{p}{q}\,\dfrac{(n-k)}{(k+1)} \le 1$

$p(n-k) \le q(k+1)$

$pn - q \le k(p+q)$ → $\begin{cases} k \ge pn - q \\ k \le np+p \end{cases}$ – Наиболее вероятное число успехов нужно искать в диапазоне: $np-q \le k \le np+p$

2* $k-1 \le np-q$ →

Пример: бросание игральной кости 20 раз.

$n = 20$
$p = 1/6$ → $\frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3{,}33$ (выпадение например шестерки)

$\frac{5}{2} \le k \le \frac{7}{2}$ → 3.

Пример: 2m бросание монеты. Успех – выпадение герба?

$p = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$

$P_{k,2m} \approx \dfrac{1}{\sqrt{\pi m}}\, e^{-\frac{(k-m)^2}{m}}$ → $P_{max.}$ при $k = m$ – наиболее вероятно.

$$\boxed{P_{m,2m} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi m}}}$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

– Если вероятность успеха в "n" незав. испытаниях Бернулли постоянна $(0<p<1)$, то при $n \to \infty$:

$$P\left\{a \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2}\,dt$$

равномерно на "a" и "b"

$(-\infty < a \le b < \infty)$, k – число успехов.

Док-во:

$$X_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

$$P\{a \le X_k \le b\} = \sum_{x_k \in [a,b]} P_{k,n} \qquad n \to \infty$$

$$P\{a \le X_k \le b\} \underset{n\to\infty}{\simeq} \sum_{x_k \in [a,b]} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x_k \in [a,b]} e^{-\frac{x_k^2}{2}} \Delta x_k$$ ~ инт. Римана.

$$X_{k+1} - X_k = \frac{k+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} = \Delta x_k$$

$$\Rightarrow P \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \quad \blacksquare$$

$$P\left\{a \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \underset{n\to\infty}{\simeq} \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$ ~ интеграл ошибок.

Пример: $\nu_n(A) = \frac{m}{n}$ ~ отн. частота события.

$p = P(A)$, $n \to \infty$

Оценить $P\{|p - \nu_n(A)| \le \Delta\}$, $n \to \infty$

$m = k$

$$P\{|p-\nu_n(A)| \le \Delta\} = P\left\{-\Delta \le p - \frac{k}{n} \le \Delta\right\} = P\left\{-\Delta \le \frac{k-np}{n} \le \Delta\right\} =$$

$$= P\left\{-\Delta\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le \Delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} = \Phi\left(\Delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\Delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

~ т.к. ф-я нечётная

Вер-ть откл. отн. частоты события

$$\Rightarrow P\{|p - \nu_n(A)| \le \Delta\} = 2\Phi\left(\Delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$$

Глава 2. Случайные величины.

$\omega \to$ б – язык исходов замен. на числа.

2.1. Функция распределения случайных величин.

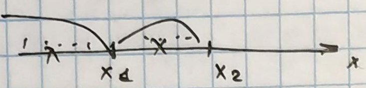
Опр. Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$. Случайной величиной ξ называется ф-я $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, такая что для $\forall x \in R$ $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$

$A = \{\xi(\omega) < x\} \in \tilde{\mathfrak{F}}$

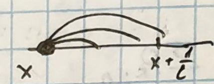
$\bar{A} = \{\xi(\omega) \geq x\} \in \tilde{\mathfrak{F}}$

$B = \{x_1 \le \xi(\omega) < x_2\}$

$\{\xi(\omega) < x_1\} + \{x_1 \le \xi(\omega) < x_2\} = \{\xi(\omega) < x_2\}$



$C = \{\xi(\omega) = x\} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \{x \le \xi(\omega) < x + \frac{1}{i}\} \in \tilde{\mathfrak{F}}$



Опр. Ф-я распределения случайной величины ξ называется вероятность

$$\boxed{F_\xi(x) = P\{\xi < x\}}$$

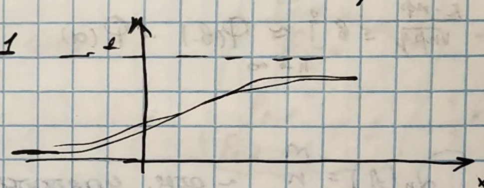
Св-ва ф-ии распределения:

Теорема

Функция распределения $F_\xi(x)$ обладает следующими св-вами:

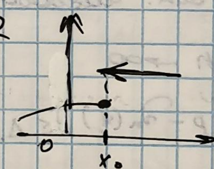
1) $F_\xi(x)$ – неубывающая, т.е. для $\forall x_1 < x_2$: $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$



3) $F_\xi(x)$ – непрерывна слева.

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

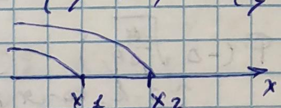


Д-во: 1) $A \subset B \quad P(A) \le P(B)$

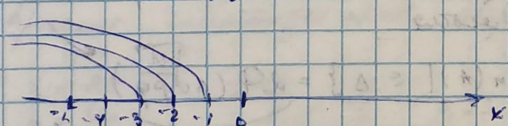
26.03.22.

$(\xi < x_1) \subset (\xi < x_2) \Rightarrow P(\xi < x_1) \le P(\xi < x_2)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\|}{F_\xi(x_1)} \quad\quad \overset{\|}{F_\xi(x_2)}$



2)



Рассм. события

$(\xi < -1) \supset (\xi < -2) \supset (\xi < -3) \supset \dots$

$\dots \supset (\xi < -n) \supset$

$\Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\xi < -n) = \varnothing$

Из аксиом АЧ:

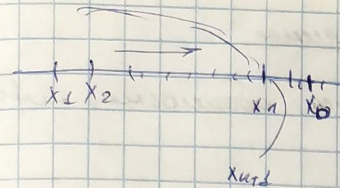
$\lim\limits_{n \to \infty} P(\xi < -n) = P(\varnothing) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$

Второй предел док-ся аналогично $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$

3) $\{x_n\}$ – возрастающая посл-ть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

$\Rightarrow (\xi < x_n) \subset (\xi < x_{n+1})$



$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\xi<x_n) = (\xi<x_0)$$

$$\Rightarrow P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\xi<x_n)\Big) = P(\xi<x_0) = F_\xi(x_0)$$

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\xi<x_n)\Big) = \lim_{x\to x_0-0} F_\xi(x)$$

2.2. Дискретные случайные величины.

Опр. Случ. велич. приним. конечное или счётное число значений назыв. дискретной.

Хар-ся таблицей:

ξ	x_1	x_2	...		x_n
p	p_1	p_2			p_n

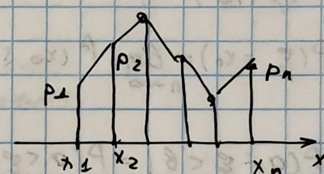
$\xi = x_1, x_2, \dots, x_n$

$p_i = P(\xi = x_i)$

Основное св-во: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$

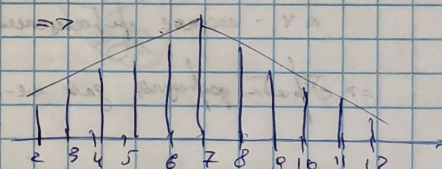
ряд распределения

Многоугольник распр-я



Пример: бросается две игральные кости.
ξ - число очков выпавш. при бросках.

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$



"Успех" - происхождение события B.
ξ - номер испытания, при котором "успех" появляется первый раз.

B_n - "успех" появл-ся при "n"-ом испытании

$B_n = (\xi = n) = \bar{B}\cdot\bar{B}\dots\bar{B}\cdot B$

p - вер-ть "успеха" в одном испытании.

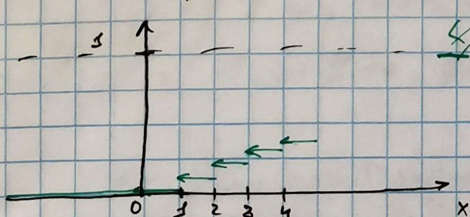
$P(\xi=n) = P(\underbrace{\bar{B}\dots\bar{B}}_{n-1}\cdot B) = p^{n-1}(\bar{B})\cdot P(B) = q^{n-1}\cdot p.$ $(q = 1-p)$

геометрический закон

Проверка $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p = p + qp + q^2p + q^3p + \dots = p(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+\dots) =$
$= p\cdot\frac{1}{1-q} = 1$

ξ	1	2	3	...
p	p	qp	q^2p	...

$F_\xi(x) = P(\xi<x)$



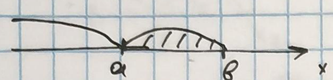
$P(\xi<1.5) = P(\xi<1) = p$

2.3. Непрерывные случайные величины.

Опр. Случ. величина ξ называется непрерывной, если $F_\xi(x)$ явл-ся абсолютно непрерывной, т.е.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt,$$

где $f_\xi(x)$ – плотность распределения вероятностей (плотность вероятности)



$$P(a \le \xi < b) = P(\xi < b) - P(\xi < a) \circeq$$

$$(\xi < b) = (\xi < a) + (a \le \xi < b)$$

$$P(\xi < b) = P(\xi < a) + P(a \le \xi < b)$$

$$\circeq F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

$$\Rightarrow P(a \le \xi < b) = \int_{-\infty}^{b} f_\xi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f_\xi(t)\,dt = \int_{a}^{b} f_\xi(t)\,dt$$

$P(\xi = x_0) = ?$

$$P(\xi = x_0) = \lim_{n\to\infty} P\left(x_0 \le \xi < x_0 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} f_\xi(t)\,dt = 0$$

$$P(a \le \xi < b) = P(a < \xi < b) = P(a < \xi \le b) = P(a \le \xi \le b)$$

$$P(x < \xi < x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f_\xi(t)\,dt = f_\xi(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

Δx – малое приращение.

$\Rightarrow$ Приблиз. формула для пл-ти вер-ти: $\boxed{f_\xi(x) \approx \dfrac{P(x < \xi < x+\Delta x)}{\Delta x}}$

Св-ва плотности вер-ти:

① Для $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f_\xi(x) \ge 0$

② $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$ – условие нормировки

③ в точках непр-ти $f_\xi(x)$: $\boxed{f_\xi(x) = \dfrac{d}{dx} F_\xi(x)}$

Док-во. ① $F_\xi(x)$ – неубывающая

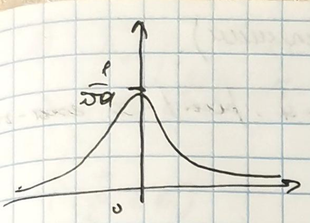
$F'_\xi(x) \ge 0$

② $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = F_\xi(+\infty) = 1$

③ $F_\xi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt \to f_\xi(x) = F'_\xi(x)$

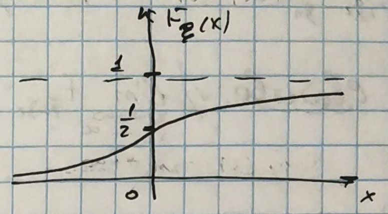
Распределение Коши:

$$f_\xi(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \qquad (a > 0)$$



$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{a}{\pi(a^2+t^2)}\,dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\Big|_{-\infty}^{x} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$



Примеры дискретных случайных величин:

1. Биномиальное распределение: $\xi = 0, 1, 2, \ldots, n$ — число успехов

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

2. Пуассоновско распределение $\xi = 0, 1, 2, 3.$

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

3. Геометрическое распределение $\xi = 1, 2, 3,$

$$P(\xi = n) = q^{n-1} p$$

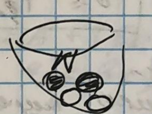
4. Гипергеометрическое распределение: ~ двухцветная схема

$$P(\xi = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad \xi = 0, 1, 2, \ldots, \min\{M, n\}$$

n - извлекаемое шаров

ξ - число извлеченных (белых)

M



Примеры непр. распределений:

1. Нормальное распр-е:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0,\ a \in \mathbb{R}$$

2. Показательное распределение:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \alpha e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{1}(x).$$

3. Равномерное распределение:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < \xi < b \\ 0, & \xi < a,\ \xi > b. \end{cases} = \frac{1}{b-a} \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}}$$

индикаторная ф-я мн-ва.

2.4. Совместные распределения случайных величин.

$(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, P)$ - заданы

$\xi_1 = \xi_1(\omega), \ \xi_2 = \xi_2(\omega), \ \ldots, \ \xi_n = \xi_n(\omega)$

Задание случ. вектора $\vec{\xi}(\omega)$ (совокупность случайных величин).

$F_{\xi_1,\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)$ – совм. ф-я распр-я сово-ти с.в.

<u>Свойства</u>: 1) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\ x_2\to+\infty\\ x_n\to+\infty}} F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$

2) $\lim\limits_{x_k\to-\infty} F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ при $\forall k = \overline{1, n}$

3) $\lim\limits_{x_n\to+\infty} F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_{n-1} < x_{n-1}, \underline{\xi_n < +\infty}) =$

$= P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_{n-1} < x_{n-1}) = F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_{n-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$

Следствие: Ф-я распределения

$$F_{\xi_1}(x_1) = \lim\limits_{\substack{x_2\to+\infty\\ \ldots\\ x_n\to+\infty}} F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

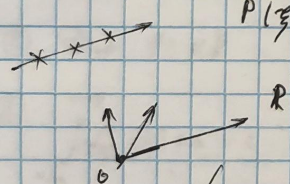
4) $F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – монотонная неубыв. по каждому из аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$

5) Для $\forall x_1, x_2, \ldots x_n$

$$\boxed{0 \le F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 1}$$

<u>Опр.</u> По определению случайным вектором дискретного типа наз-ся вектор, имеющий конечное или счётное мн-во точек (значений) $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}\ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ с заданными вероятностями:

$$P(\xi_1 = x_{k_1}, \xi_2 = x_{k_2}, \ldots, \xi_n = x_{k_n}) = \underline{p_{k_1k_2\ldots k_n}}$$



$$\sum_{(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots x_{k_n})} p_{k_1k_2\ldots k_n} = 1$$

<u>Опр.</u> По определению, если $\exists f_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такая, что

$$F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{x_n} d(t_n) \cdot f_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

то $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ – непр. случ. вектор, а

$f_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(t_1, t_2, \ldots t_n)$ – плотность вероятности случ. вектора.

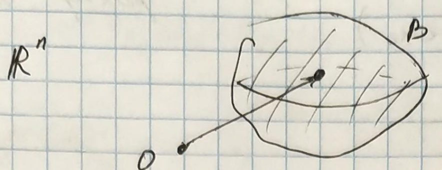
<u>Св-ва</u> $f_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

1) Для $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{n}{\dots}\int f_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = 1$ ~ условие нормировки

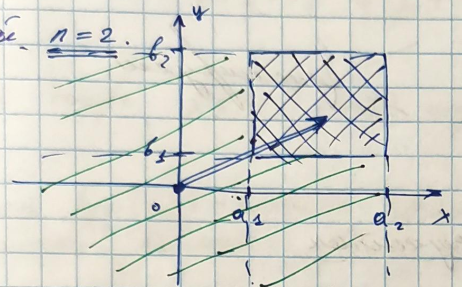
$P(\vec{\xi}\in B)$



Вер-ть попадания вектора в область B.

$$P(\vec{\xi}\in B)=\int_B\overset{n}{\dots}\int f_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1dx_2\dots dx_n.$$

Случай $n=2$.



$B=[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$

Вер-ть, что вектор попадёт в область.

$P(a_1\le\xi_1<a_2,\ b_1\le\xi_2<b_2)=$

$F_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)=P(\xi_1<x_1,\ \xi_2<x_2)$

Рассмотрим событие A: $A=\{a_1\le\xi_1<a_2,\ b_1\le\xi_2<b_2\}$

Рассмотрим событие → вектор. $(\xi_1<a_2,\ \xi_2<b_2)=A+(\xi_1<a_1,\ \xi_2<b_2)+$
$+(a_1\le\xi_1<a_2,\ \xi_2<b_1)$

События несовместны.

$F_{\xi_1\xi_2}(a_2,b_2)=P(A)+F_{\xi_1\xi_2}(a_1,b_2)+P(a_1\le\xi_1<a_2,\ \xi_2<b_1)$

$(\xi_1<a_2,\ \xi_2<b_1)=(\xi_1<a_1,\ \xi_2<b_1)+(a_1\le\xi_1<a_2,\ \xi_2<b_1)$

$F_{\xi_1\xi_2}(a_2,b_1)=F_{\xi_1\xi_2}(a_1,b_1)+P(a_1\le\xi_1<a_2,\ \xi_2<b_1)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| $

$F_{\xi_1\xi_2}(a_2,b_1)-F_{\xi_1\xi_2}(a_1,b_1)$

$$\Rightarrow \boxed{P(A)=F_{\xi_1\xi_2}(a_2,b_2)+F_{\xi_1\xi_2}(a_1,b_1)-F_{\xi_1\xi_2}(a_1,b_2)-F_{\xi_1\xi_2}(a_2,b_1)}$$

~ двумер формула (непр. дискретного вектора).

$$\boxed{P(A)=\int_{a_1}^{a_2}dx_1\int_{b_1}^{b_2}dx_2\,f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)}$$

$$F_{\xi_1}(x_1)=P(\xi_1<x_1,\ \xi_2<+\infty)=\int_{-\infty}^{x_1}dt_1\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\,f_{\xi_1\xi_2}(t_1,t_2)}_{\text{непр.}}=\int_{-\infty}^{x_1}f_{\xi_1}(t_1)\,dt_1$$

$$f_{\xi_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_2$$

$f_{\xi_2}(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)\,dx_1$. — Это как найти ф-ию распр. компон. непрер. вектора.

Ф-я распр. 2ой компон.: $F_{\xi_2}(x_2) = P(\xi_1 < +\infty, \xi_2 < x_2)$

В дискретном случае:

$\underline{p_{ij} = P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)}$ — матрица

$P(\xi_1 = x_i) = ?$

$P(\xi_2 = y_j) = ?$

$P(\xi_1 = x_i) = \sum_j P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = \underline{\sum_j p_{ij}}$ — суммируем.

$P(\xi_2 = y_j) = \sum_i p_{ij}$

2.5. Независимость случайных величин.

$P(AB) = P(A)P(B)$ — попарная нез-ть

$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$ — нез-ть в совокупности.

Опр. (незав-ть случ. величин)

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ наз-ся независимыми в сов-ти, если:

$$F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)\ldots F_{\xi_n}(x_n)$$, говорят, что ф-я факторизуется.

$$P(\underbrace{\xi_1 < x_1}_{A_1}, \underbrace{\xi_2 < x_2}_{A_2}, \ldots, \underbrace{\xi_n < x_n}_{A_n}) = P(\xi_1 < x_1)P(\xi_2 < x_2)\ldots P(\xi_n < x_n)$$

~ видна связь с незав. событий

~~Опр~~

$$\boxed{P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \ldots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2)\ldots P(\xi_n \in B_n)}$$

где $B_1, B_2, \ldots B_n$ — некоторые мн-ва. ~ эквивалентное опр-е

Теорема.

~ Если случ. велич. ξ_1 и ξ_2 — независимы,

$$F_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2), \text{ то}$$

$$P(a_1 \le \xi_1 < a_2, b_1 \le \xi_2 < b_2) = P(a_1 \le \xi_1 < a_2)P(b_1 \le \xi_2 < b_2)$$

Док-во:

$P(a_1 \le \xi_1 < a_2, b_1 \le \xi_2 < b_2) = F_{\xi_1\xi_2}(a_2, b_2) + F_{\xi_1\xi_2}(a_1, b_1) - F_{\xi_1\xi_2}(a_1, b_2) - F_{\xi_1\xi_2}(a_2, b_1) = \{$ дк-см, что ф-ия факторизуется!

$$= F_{\xi_1}(a_2)F_{\xi_2}(b_2) + F_{\xi_1}(a_1)F_{\xi_2}(b_1) - F_{\xi_1}(a_1)F_{\xi_2}(b_2) - F_{\xi_1}(a_2)F_{\xi_2}(b_1) =$$

$$= F_{\xi_2}(b_2)\left[F_{\xi_1}(a_2) - F_{\xi_1}(a_1)\right] - F_{\xi_2}(b_1)\left[F_{\xi_1}(a_2) - F_{\xi_1}(a_1)\right] =$$

$$= \left[F_{\xi_1}(a_2) - F_{\xi_1}(a_1)\right] \times \left[F_{\xi_2}(b_2) - F_{\xi_2}(b_1)\right] = P(a_1 \le \xi_1 < a_2) \cdot P(b_1 \le \xi_2 < b_2)$$

09.04.22. **Дискретный случай**

$\{\xi, \eta\}$ $\qquad P(\underbrace{\xi = x_i}_{A}, \underbrace{\eta = y_j}_{B})$, $\quad i, j = 1, 2, \ldots$

$P(AB) = P(A)P(B)$

$$\Rightarrow P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)\, P(\eta = y_j) \quad \forall i, j$$

~ только тогда они будут независимы.

Пусть теперь $\{\xi, \eta\}$ — непр. случ. вектор.

Теорема

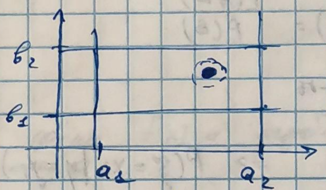
~ Пусть $f_{\xi\eta}(x, y)$ — плотность вероятности случайного вектора $\{\xi, \eta\}$. Случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x)\, f_\eta(y)$$

в точках непр-ти функции.

Док-во: Необх-ть: $P(a_1 \le \xi < a_2, b_1 \le \eta < b_2) = P(a_1 \le \xi < a_2)\, P(b_1 \le \eta < b_2)$

$$\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f_{\xi\eta}(x, y)\, dy = \int_{a_1}^{a_2} f_\xi(x)\, dx \int_{b_1}^{b_2} f_\eta(y)\, dy$$



$$\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} \underset{0}{\underset{*}{\left[f_{\xi\eta}(x, y) - f_\xi(x)\, f_\eta(y)\right]}}\, dy = 0$$

Используем непр-ть ф-ии, если скобка $\neq 0$ $\to$ интеграл будет иметь ненулевое значение, противоречие.

$$\Rightarrow \quad f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x)\, f_\eta(y)$$

Достаточность: $\quad f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x)\, f_\eta(y)$

$$\Downarrow$$

$$P(a_1 \le \xi < a_2, \; b_1 \le \eta < b_2) = P(a_1 \le \xi < a_2) \cdot P(b_1 \le \eta < b_2)$$

$\Rightarrow$ ч. т. д.

Пример?

$$f_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(x_n - a_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$f_{\xi_i}(x_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int}_{n-1} f_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}} dx_2 \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_n - a_n)^2}{2\sigma_n^2}} dx_n :$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_i - a_i)^2}{2\sigma_i^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} e^{-\frac{(x_i - a_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

Отделено ;

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,dx_1 = \left\{ \begin{aligned} \frac{x_1-a_1}{\sigma_1} &= y \\ dx_1 &= \sigma_1\,dy \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = 1$$

интеграл Пуассона $=\sqrt{2\pi}$

$$f_{\xi_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} e^{-\frac{(x_i-a_i)^2}{2\sigma_i}}$$ ~ Гауссово распределение

$$F_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(x_k)$$ – нез-сть компонент случ. вектора, проверили на примере ?

* Закончилась черн. ручка

Многомерное нормальное распределение.

$$f_{\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\det B}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$, где

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(x_i-a_i)(x_j-a_j)\ ,\quad \boxed{B = \{B_{ij}\}}$$

Условные функции распределения.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$ $\qquad P(\xi = x_i \mid \eta = y_j)$

усл. вер-ть

$\{\xi, \eta\}$ – дискретный случайный вектор

$$\Rightarrow P(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = \frac{P(\xi = x_i \cap \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)}$$

Для независимых величин: $\qquad P(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = P(\xi = x_i)$
(сл. вектор.)

Для непрерывных величин $P(\eta = y_j) = 0$ ~ возникает вопрос, что делать с непр. вел.

Опр. Условная ф-я распределения случ. величины ξ отн-но события B наз-ся:

$$F_\xi(x \mid B) = P(\xi < x \mid B)$$

$F_\xi(x \mid \eta = y) = P(\xi < x \mid \eta = y)$ ~ как строить такую ф-ю?

$P(\xi < x \mid y_1 \le \eta < y_2)$

$y_1 \qquad y \qquad y_2$

Будем рассм-ть интервал и сужать по y.

$$F_\xi(x \mid \eta = y) = P(\xi < x \mid \eta = y) = \lim_{y_1, y_2 \to y} P(\xi < x \mid y_1 \le \eta < y_2)$$

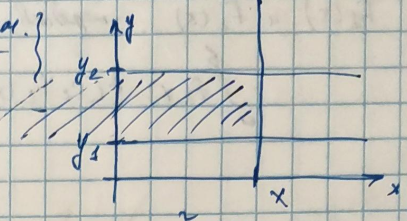
Теорема
~ Пусть для $\forall y$ существует и непрерывна функция:
$f_\eta(y)$ и $\frac{\partial}{\partial y} F_{\xi\eta}(x, y)$

Тогда

$$\boxed{F_\xi(x \mid \eta = y) = \frac{1}{F_\eta(y)} \frac{\partial}{\partial y} F_{\xi\eta}(x, y)}$$

Док-во:

$$F_\xi(x \mid \eta = y) = \lim_{y_1, y_2 \to y} P(\xi < x \mid y_1 \le \eta < y_2) = \lim_{y_1, y_2 \to y} \frac{P(\xi < x,\ y_1 \le \eta < y_2)}{P(y_1 \le \eta < y_2)}$$



$$= \lim_{y_1, y_2 \to y} \frac{F_{\xi\eta}(x, y_2) - F_{\xi\eta}(x, y_1)}{F_\eta(y_2) - F_\eta(y_1)} = \left\{ \begin{array}{c} \text{исп. ф-лу конечн.} \\ \text{приращений} \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{y_1, y_2 \to y} \frac{\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} F_\xi(x, \tilde{y})\, (y_2 - y_1)}{F'_\eta(y_0)(y_2 - y_1)} = \frac{\frac{\partial}{\partial y} F_{\xi\eta}(y)}{\underbrace{F'_\eta(y)}_{= f_\eta(y)}}$$

по y_0

$y_1 < \tilde{y} < y_2$

$y_1 < y_0 < y_2 \longrightarrow y_0, \tilde{y} \to y$

Следствие:

1) $f_\xi(x \mid \eta = y) = \frac{\partial}{\partial x} F_\xi(x \mid \eta = y) = \frac{1}{f_\eta(y)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y).$

условная п-ть вероятн.

$$\Rightarrow f_\xi(x \mid \eta = y) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_\eta(y)}$$

2) Обладают всеми св-вами обычных ф-ий п-ти вероятностей по опр-ию.

3. Числовые характеристики случайных величин.

3.1. Интеграл Стильтьеса.

Предположим, что в интервале (a, b) определены ф-ии $f(x)$ и неубыв. ф-я $F(x)$ с ограниченной вариацией и $F(x)$ непр-на слева.

Разобьем инт-л (a, b) на "n" частей:

$$\overset{x_0}{a} < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} \le b = x_n$$

и построим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k) \left[F(x_k) - F(x_{k-1}) \right] = J, \quad \text{где } x_{k-1} \le \tilde{x}_k < x_k$$

$$\Delta x = x_k - x_{k-1} \to 0$$

$$\Rightarrow J = \int_a^b f(x)\, dF(x) \quad \text{— интеграл Стильтьеса}$$

$$dF(x) \ge 0$$

Основные св-ва интеграла Стильтьеса:

① Пусть $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)\, dF(x) = \int_a^c f(x)\, dF(x) + \int_c^b f(x)\, dF(x)$$

② $\int_a^b c \cdot f(x)\, dF(x) = c \int_a^b f(x) \cdot dF(x)$, где $c = const$

③ $\int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, dF(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(x)\, dF(x)$

④ Если $f(x)\geq 0$ и $a<b$, то
$$\int_a^b f(x)\,dF(x)\geq 0$$

⑤ Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – неубыв. ф-ии с огранич. гр-ми, то
$$\int_a^b f(x)\,d[c_1F_1(x)+c_2F_2(x)] = c_1\int_a^b f(x)\,dF_1(x)+c_2\int_a^b f(x)\,dF_2(x),$$
c_1, c_2 – const

⑥ Если $f(x)=1$,
$$\int_a^b dF(x) = F(b)-F(a)$$

3.3. Дисперсия.

Опр. Дисперсия с.в. называется число $\boxed{D_\xi = M(\xi - M_\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-M_\xi)\,dF_\xi(x)}$;

$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$ – среднеквадратичное отклонение (мера рассеяния)

$D_\xi = M(\xi^2 - 2\xi M_\xi + (M_\xi)^2) = M\xi^2 - 2M_\xi M_\xi + M(M_\xi)^2 = M\xi^2 - (M_\xi)^2$

Для дискрет. с.в. $\boxed{D_\xi = \sum_k (x_k - M_\xi)^2 p_k}$

Для непр. с.в. $\boxed{D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-M_\xi)^2 f_\xi(x)\,dx}$

Теорема о св-вах дисперсии

Дисперсия с.в. обладает св-вами:
1) Для $\forall$ с.в. $D_\xi > 0$
2) Если $c=\text{const}$, то $D_c = 0$
3) Если $C=\text{const}$, то $D(C\xi) = C^2 D_\xi$
4) Если с.в. ξ_1 и ξ_2 – независимы, то $D(\xi_1+\xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$.

Док-во: 4) $D(\xi_1+\xi_2) = M[\xi_1+\xi_2 - M(\xi_1+\xi_2)]^2 = M[(\xi_1 - M\xi_1) + (\xi_2 - M\xi_2)]^2 =$
$= M[(\xi_1 - M\xi_1)^2 + 2(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2) + (\xi_2 - M\xi_2)^2] = M(\xi_1 + \ldots$
$+ 2M(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2) + M(\xi_2 - M\xi_2)^2 = D\xi_1 + D\xi_2 +$

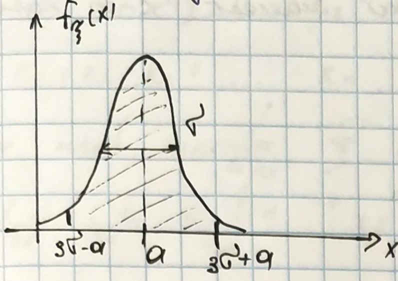
Примеры:

Гаусс. распред.:

1. $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ $\qquad a = M_\xi$

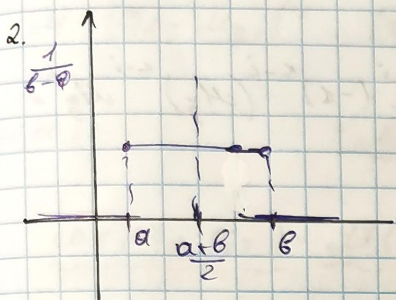
$$D_\xi = M(\xi - M_\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left\{\begin{matrix}\frac{(x-a)}{\sigma} = y\\ \frac{dx}{\sigma} = dy\end{matrix}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,d\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right) = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[y e^{-y^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right] =$$
$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy}_{\text{Пуассона } = \sqrt{2\pi}} = \sigma^2$$

σ - средн. квадр. отклонение



~ правило 3σ

2.



$M\xi = \frac{a+b}{2}$ равномерн. распред.

$$D\xi = \int_a^b \frac{1}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{3(b-a)}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left[\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}\right] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3. Пуассоновское распр-е.

$\xi = 0, 1, 2 \ldots$

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$M\xi = \lambda$$

$$D\xi = \sum_{k=0}^{\infty} (k - M\xi)^2 P(\xi = k)$$

$$M\xi(\xi-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda^2$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$M\xi(\xi-1) = M\xi^2 - M\xi = \lambda^2$$

$$M\xi = D\xi$$

4. Число успехов в „n" незав. испыт. Бернулли.

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \qquad \eta_i = \begin{cases} 1, & \text{удача в } i\text{-том исп.} \\ 0, & \text{неудача в } i\text{-том исп.} \end{cases}$$

n незав. с.в.

$$D\xi = D\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D\eta_i = npq$$

$$D\eta_i = M(\eta_i - M\eta_i)^2 = (1 - M\eta_i)^2 p + (0 - M\eta_i)^2 q = q^2 p + p^2 q$$

$$M\eta_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

3.4. Начальный и центральный момент.

Моментом k-го порядка с.в. ξ наз-ся число

$$\nu_k(a) = M(\xi - a)^k, \text{ где } a \in R$$

$a = 0$

$\alpha_k = \nu_k(0) = M\xi^k$ - начальный момент k-го порядка.

$$\alpha_1 = M\xi$$

$a = M\xi$

$\mu_k = \nu_k(M\xi) = M(\xi - M\xi)^k$ – центральный момент k-го порядка.

$\mu_1 = M(\xi - M\xi) = 0$

$\mu_2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – полностью задают с.в.

μ_2, μ_3

$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k = M[\sum_{i=0}^{k} C_k^i \xi^i (-M\xi)^{k-i}] = \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-1)^{k-i} (M\xi)^{k-i} M\xi^i =$

$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^{k-i} \alpha_i \alpha_1^{k-i}$ – ф-ла связи

Абсолютный момент „k"-го порядка.

$\mu_k = M(\xi - a)^k$

Связь моментов:

$$M\left[\sum_{i=0}^{n} t_i (\xi - a)^i\right]^2 \geq 0$$

$t_i \in \mathbb{R}$ ← конст.

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} t_i t_j M(\xi - a)^{i+j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \nu_{i+j}(a) t_i t_j \geq 0$$

Неотриц. опр-ль квадр. формы

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} \nu_0(a) & \nu_1(a) & \dots & \nu_n(a) \\ \nu_1(a) & \nu_2(a) & \dots & \nu_{n+1}(a) \\ - & - & - & - \\ \nu_n(a) & \nu_{n+1}(a) & \dots & \nu_{2n}(a) \end{vmatrix} \geq 0$

$n = 1$: $\alpha = M\xi$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D\xi \end{vmatrix} \geq 0 \rightarrow D\xi \geq 0$

$n = 2$: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & D\xi \\ 0 & D\xi & \mu_3 \\ D\xi & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} \geq 0 \rightarrow D\xi \cdot \mu_4 - \mu_3^2 - (D\xi)^3 \geq 0$

$$\boxed{\mu_4 \geq \frac{\mu_3^2}{D\xi} + (D\xi)^2}$$

$\mu_1 \leq \mu_2^{1/2} \leq \mu_3^{1/3} \leq \dots \leq \mu_n^{1/n} \leq \dots$

Смешанные моменты
(моменты сл. вектора).

Начальным моментом k-ого порядка сл. вект.
$\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ назыв. число $M\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n}$,
$k = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$.

Центральным моментом k-ого пор-ка случ. вект. $\vec{\xi}$ называется число:

$$M(\xi_1 - M\xi_1)^{k_1}(\xi_2 - M\xi_2)^{k_2}\dots(\xi_n - M\xi_n)^{k_n}$$

$k = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$

Для непр. вектора $\vec{\xi}$ с пл-ю вероятности $f_{\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n}(x_1, x_2 \dots x_n)$

$$M\xi_1^{k_1}\dots\xi_n^{k_n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\overset{n}{\dots}\int x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n} f_{\xi_1\dots\xi_n}(x_1\dots x_n)\,dx_1\dots dx_n.$$

$$M(\xi_1 - M\xi_1)^{k_1}\dots(\xi_n - M\xi_n)^{k_n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\overset{n}{\dots}\int (x_1 - M\xi_1)^{k_1}\dots(x_n - M\xi_n)^{k_n}\,dx_1\dots dx_n$$

30.04.22.

Ковариация. Коэффициент корреляции.

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2) = M\xi_1\xi_2 - M\xi_1 M\xi_2 = M\mathring{\xi}_1\mathring{\xi}_2$$

~ ковариация.

~ простейший из центральных моментов совокупности.

Следствия:

$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\xi_1\xi_2 - M\xi_1 M\xi_2.$

$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1) = M(\xi_1 - M\xi_1)^2 = D\xi_1 \geq 0$ ~ даёт дисперсию

$\operatorname{cov}(\xi_2, \xi_1) = \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$

В общем случае формула дисперсии:

$$\boxed{D(\xi_1 + \xi_2) = M(\xi_1 + \xi_2 - M(\xi_1 + \xi_2))^2 = M[(\xi_1 - M\xi_1) + (\xi_2 - M\xi_2)]^2 = D\xi_1 + D\xi_2 + 2\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}$$

Теорема.

~ Если для с.в. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ $\exists \underbrace{\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)}_{=\sigma_{ij}}$; $i, j = \overline{1, n}$, то при любых $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ справедливо:

$$\boxed{D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \sigma_{ij}}$$

обычно обозначают $\underset{n\times n}{K} = \{\sigma_{ij}\}$ - корреляционная матрица.

Док-во: введём новую с.в. $\eta = \sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i$ $\Rightarrow \eta - M\eta = \mathring{\eta} = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathring{\xi}_i$

из св-в мат. ожидания $M\eta = M\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i M\xi_i$

$$D\eta = M(\eta - M\eta)^2 = M\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \mathring{\xi}_i\mathring{\xi}_j\right] = \text{по св-ву мат. ожид. относительно суммы} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j M\mathring{\xi}_i\mathring{\xi}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \sigma_{ij}$$ ☒

Следствие:

Поскольку $D\eta \geq 0$ (дисперсия любой с.в. ≥ 0) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \sigma_{ij} \geq 0$ ~ квадратичная форма неотриц. определена.

квадр. форма неотриц. матрицы

→ тогда наклад. жёсткие условия на ~~константы~~ ковариации.

Т.е. это справедливо тогда и только тогда, когда все главные миноры K - неотриц.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ - & - & - & - \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{vmatrix} \geq 0 \quad \text{для} \quad m = \overline{1, n}$$

При $m=1$: $\sigma_{11} \geq 0 \Rightarrow D\xi_1 \geq 0$

$m=2$: $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 \geq 0$

$\Rightarrow \operatorname{cov}^2(\xi_1, \xi_2) \leq D\xi_1 D\xi_2$

Вводят <u>коэффициент корреляции</u> (для применения на практике):

$$\boxed{\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 D\xi_2}}} \quad \Rightarrow |\rho(\xi_1, \xi_2)| \leq 1$$

Когда коэф. корреляции $=0$?

$\Rightarrow$ если $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0 \Rightarrow \rho(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Для незав. с.в.:

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\overset{\circ}{\xi}_1 \overset{\circ}{\xi}_2 = M\overset{\circ}{\xi}_1 \cdot M\overset{\circ}{\xi}_2 = 0$$

т.е. некоррелируемость, если $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$

Независимость с.в.

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

Некоррелируемость

<u>Св-ва коэффициента корреляции:</u>

① $|\rho(\xi_1, \xi_2)| \leq 1$.

② Если ξ_1 и ξ_2 - независимые, то $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$

③ Если $\xi_2 = A\xi_1 + B$, $A, B \in \mathbb{R}$, то

$$|\rho(\xi_1, \xi_2)| = 1.$$

<u>Док-во</u> 3°: Пусть $M\xi_1 = a$, $D\xi_1 = \sigma^2$, тогда считаем

$M\xi_2 = M(A\xi_1 + B) = Aa + B$

$\overset{\circ}{\xi}_2 = \xi_2 - M\xi_2 = A\overset{\circ}{\xi}_1$

Находим дисперсию и [illegible] ковариацию.

$D\xi_2 = M\overset{\circ}{\xi}_2^2 = A^2 M\overset{\circ}{\xi}_1^2 = A^2\sigma^2$

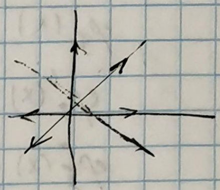
$cov(\xi_1, \xi_2) = M\overset{0}{\xi_1}\overset{0}{\xi_2} = MA\overset{0}{\xi_1}^2 = A\sigma^2$

Подставляем в коэфф-т корреляции:

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{A\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 \cdot A^2\sigma^2}} = \frac{A}{|A|} \Rightarrow |\rho(\xi_1, \xi_2)| = 1$$ ▨

Следствие: $\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{A}{|A|}$ → Положит. корреляция при $A > 0$

→ Отрицат. корреляция при $A < 0$



3.5. Производящие и характеристические ф-ции.

Опр. Производящая ф-я.

~Пусть имеется целочисленная дискретная с.в. $\xi = 0, 1, 2, \dots$ и заданы вер-ти $p_k = P(\xi = k)$, $\sum_{k=0} p_k = 1$

Производящей функцией целочисл. с.в. наз-ся матем. ожидание

$$\boxed{\varphi_\xi(x) = Mx^\xi}$$

или

$$\boxed{\varphi_\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k}$$

Теорема о производящей ф-ции.

~Пусть $\varphi_\xi(x)$ - производ. ф-я целочисл. с.в., тогда выполняются след. св-ва:

1°. $\varphi_\xi(x)$ опр-на в каждой точке отрезка $[-1, 1]$

2°. Значение $\varphi_\xi(1) = 1$.

3°. Между $\varphi_\xi(x)$ и ф-ей распр-я $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ существует взаимнооднозначное соответствие.

Док-во: 1°. $-1 \quad 0 \quad 1 \quad x$ Сх-ся ли ряд?

$$|\varphi_\xi(x)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |x^k| p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

$x \in [-1, 1]$

=> сх-ся абсолютно на этом отрезке.

2°. $\varphi_\xi(1) = M1^\xi = M1 = 1$

3°. Если будем считать, что у $\varphi_\xi(x)$ есть разложение в ряд Тейлора

$$\varphi_\xi(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k$$

$$\Rightarrow \boxed{p_k = \frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{k!}}$$ ~вероятности

Пример: ξ - число "успехов" в "n" незав. исп. Бернулли.

$\xi = 0, 1, 2, \dots, n$.

$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$$\varphi_\xi(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(px)^k q^{n-k}=(px+q)^n$$

Удобно исп-ть для вычисления моментов.

$M\xi(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-k+1)$ ~ факториальный момент k-го порядка

$\varphi_\xi(x)=Mx^\xi$

$\varphi_\xi'(x)=M\xi x^{\xi-1}$

$\varphi_\xi''(x)=M\xi(\xi-1)x^{\xi-2}$

....

$\varphi_\xi^{(k)}(x)=M\xi(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-k+1)x^{\xi-k}$

$$\Rightarrow \boxed{M\xi(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-k+1)=\lim_{x\to 1-0}\varphi_\xi^{(k)}(x)}$$

$M\xi(\xi-1)=M\xi^2-M\xi=\alpha_2-\alpha_1$

$M\xi=\varphi_\xi'(1-0)=\alpha_1$.

Пример: ξ - число "успехов" в схеме Пуассона $(p\to 0,\ n\to\infty)$

$\xi=0,1,2,\dots$

$$p(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$\varphi_\xi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k p_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}e^{\lambda x}=e^{\lambda(x-1)}$$

$$\Rightarrow M\xi(\xi-1)\dots(\xi-k+1)=\varphi_\xi^{(k)}(1-0)=\lambda^k$$

Характеристическая ф-я.

Опр. Комплекснозначной случ. велич. $\xi(\omega)=\xi_1(\omega)+i\xi_2(\omega)$

По соглашению: $M\xi(\omega)=M\xi_1+iM\xi_2$

Все св-ва мат. ожидания сохраняются.

Опр. Характеристической ф-ей с.в. ξ наз-ся:

$$\boxed{\Theta_\xi(u)=Me^{iu\xi}=M\cos(u\xi)+iM\sin(u\xi)},\ \text{где } u\in\mathbb{R}$$

Для дискретн. случ. величины: $(\xi=x_1,x_2,\dots,x_n)$

$$\boxed{\Theta_\xi(u)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{iux_k}p(\xi=x_k)}$$

Для непрер. случ. величины с плотностью $f_\xi(x)$

$$\boxed{\Theta_\xi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_\xi(x)\,dx}$$ ~ обычное преобр. Фурье.

7.05.24.

Теорема (о характ. ф-ии)

~ Пусть $\Theta_\xi(u)$ ~ хар. ф-я с.в. ξ. Тогда:

1° $\Theta_\xi(u)$ определена для $\forall u \in \mathbb{R}$;

2° $\Theta_\xi(0) = 1$, $|\Theta_\xi(u)| \le 1$;

3° Если $\eta = a\xi + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, то $\Theta_\eta(u) = e^{iub}\Theta_\xi(ua)$

4° Соотв-е $\Theta_\xi(u)$ и $F_\xi(u)$ – взаимнооднозначное.

Док-во: 1° $\Theta_\xi(u) = Me^{iu\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\,dF_\xi(x)$

2° $|\Theta_\xi(u)| = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{iux}\,dF_\xi(x)\right| \le \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|e^{iux}|}_{1 \text{ для } \forall u \in \mathbb{R}}\,dF_\xi(x) = \underbrace{F_\xi(+\infty)}_{1} - \underbrace{F_\xi(-\infty)}_{0} = 1$

$\Theta_\xi(0) = Me^{i0x} = M\cdot 1 = 1$

$\Theta_\xi(u) = Me^{iu\xi} = M\cos u\xi + iM\sin u\xi$, $u \in \mathbb{R}$

3° $\Theta_\eta(u) = Me^{iu\eta} = Me^{iu(a\xi+b)} = e^{iub} M\cdot e^{iua\xi} = \underline{e^{iub}\Theta_\xi(ua)}$

4° ξ – непрерывная с.в.

$\Theta_\xi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f_\xi(x)\,dx$

$F'_\xi(x) = f_\xi(x)$ прямое преобр. Фурье

обр. преобр.: $\boxed{f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_\xi(u) e^{-iux}\,du}$

Пример: ξ – распр-на по нормальному закону с пар-ми $(0, 1)$

$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $a = 0$, $\sigma^2 = 1$

$\Rightarrow \Theta_\xi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\cos ux + \underbrace{i\sin ux) e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{нечетн.} \int = 0}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos ux\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

$\Theta'_\xi(u) \overset{?}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sin ux\, e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sin ux}_{u}\, \underbrace{d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}_{dv} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\sin ux \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u\cos ux\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right] = -u\Theta_\xi(u)$

$\Rightarrow \Theta'_\xi(u) = -u\Theta_\xi(u)$

$$\int \frac{d\Theta_\xi(u)}{\Theta_\xi(u)} = -\int u\, du$$

$$\ln \Theta_\xi(u) = -\frac{u^2}{2} + \ln C \quad \to \Theta_\xi(u) = C\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$\Theta_\xi(0) = 1 \to C = 1. \quad \Rightarrow \boxed{\Theta_\xi(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}}$$

η - с.в. с нормальным законом с пар-ми (a, σ^2)

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$\Theta_\xi(u) = ?$ Заменой $\xi = \frac{\eta - a}{\sigma}$ $\quad D\xi = \sigma^2$.

$M\eta = a$ $\quad$ Сравниваем с прошлым примером

$D_\eta = \sigma^2 D_\xi = \sigma^2 \quad ; \eta = a + \xi\sigma$

$$\Theta_\eta(u) = e^{iua}\,\Theta_\xi(\sigma u) = e^{iua - \frac{u^2\sigma^2}{2}}$$

Теорема.
Если существует k-ый абс. момент с.в. ξ: $M|\xi|^k < \infty$, то

$$\boxed{M\xi^k = \alpha_k = \frac{1}{i^k} \frac{d^k\Theta_\xi(u)}{du^k}\Big|_{u=0}}$$

Док-во:

$$|M\xi^k| = \left|\int_R x^k dF_\xi(x)\right| \le \int_R |x|^k dF_\xi(x) = M|\xi|^k < \infty$$

$$\Theta_\xi(u) = \int_R e^{iux} dF_\xi(x)$$

$$\Theta'_\xi(u) \overset{?}{=} \int_R e^{iux}\cdot ix\cdot dF_\xi(x) \quad \Rightarrow \Theta'_\xi(0) = \int_R ix\, dF_\xi(x) = iM\xi$$

$$\Rightarrow M\xi = \frac{1}{i}\frac{d\Theta_\xi(u)}{du}\Big|_{u=0}$$

Аналогично док-ся остальные (берутся произв. до k-го порядка)

$$\Theta^{(k)}_\xi(u) = \int_R (ix)^k e^{iux} dF_\xi(x)$$

$$\Theta^{(k)}_\xi(0) = i^k M\xi^k \quad \text{и т.д.}$$

Кумулянты

$$\boxed{\varkappa_n = \frac{1}{i^n}\frac{d^n}{du^n}\ln\Theta_\xi(u)\Big|_{u=0}}$$

Если $\exists$ произв. любого порядка от $\Theta_\xi(u)$ и от $\ln\Theta_\xi(u)$, то справедливы разложения:

$$\boxed{\Theta_\xi(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!}(iu)^k}, \quad \alpha_k = M\xi^k$$

$$\boxed{\ln \theta_\xi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varkappa_k}{k!}(iu)^k}$$

$$\theta_\xi(u) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varkappa_k}{k!}(iu)^k\right\}$$

Если сравнить с $\theta_\xi(u) = e^{iua - \frac{u^2\sigma^2}{2}}$ ~ норм. распр.

$$\varkappa_1 = M\xi = a$$

$$\varkappa_2 = \sigma^2 = D\xi$$

$\varkappa_n = 0$ для $n \geq 3$

Теорема (Марцинкевича)
~ Не существует других распределений, для которых будет конечное число кумулянт, кроме Гауссового.

Теорема
~ Если случ. величн. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - независимы, то

$$\theta_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}(u) = \theta_{\xi_1}(u)\,\theta_{\xi_2}(u)\dots\theta_{\xi_n}(u)$$ ~ факторизуется

Док-во: $\eta = \xi_1 + \xi_2$

$\theta_\eta(u) = Me^{iu(\xi_1+\xi_2)} = Me^{iu\xi_1}e^{iu\xi_2} = M(\cos u\xi_1 + i\sin u\xi_1)(\cos u\xi_2 + i\sin u\xi_2) = M[(\cos u\xi_1 \cos u\xi_2 - \sin u\xi_1 \cdot \sin u\xi_2) + i(\cos u\xi_1 \sin u\xi_2 + \sin u\xi_1 \cdot \cos u\xi_2)] = \underbrace{M(\cos u\xi_1 \cos u\xi_2}_{M\cos u\xi_1 M\cos u\xi_2} - \sin u\xi_1 \sin u\xi_2) + iM(\cos u\xi_1 \sin u\xi_2 + \sin u\xi_1 \cos u\xi_2)$

$\theta_\xi(u) = M\cos u\xi_1 M\cos u\xi_2 \overset{i^2}{-} M\sin u\xi_1 M\sin u\xi_2 + iM\cos u\xi_1 M\sin u\xi_2 + iM\sin u\xi_1 M\cos u\xi_2 = \{1 \text{ c } 3,\ 2 \text{ c } 4\} =$

$= M\cos u\xi_1 \cdot Me^{iu\xi_2} + iM\sin u\xi_1\, Me^{iu\xi_2} = Me^{iu\xi_2}\,Me^{iu\xi_1}$

$\Rightarrow \theta_{\xi_1+\xi_2}(u) = \theta_{\xi_1}(u)\,\theta_{\xi_2}(u)$ и т.д. для n слагаемых строгого док-ся

■

Характеристическая ф-я многомерных случайных величин (случайного вектора)

Пусть $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ - сов-ть сл. величин, заданных на одном и том же вер. пр-ве $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$

$$\boxed{\theta_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = Me^{i\sum_{k=1}^{n} u_k\xi_k} = Me^{i(u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \dots + u_n\xi_n)}}$$

, где $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$

Св-ва:

1° $\Theta_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(0,0,\ldots,0)=1$

2° $\left|\Theta_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(u_1,u_2,\ldots,u_n)\right| \le 1$

3° $\Theta_{\xi_1\ldots\xi_n}(-u_1,-u_2,\ldots,-u_n) = \Theta^{*}_{\xi_1\ldots\xi_n}(u_1,u_2,\ldots,u_n)$

4° $\Theta_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(0,0,\ldots 0,u_k,0,\ldots,0) = Me^{iu_k\xi_k} = \Theta_{\xi_k}(u_k)$

5° Для незав. компонент $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$:

$$\Theta_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(u_1,u_2,\ldots,u_n) = \Theta_{\xi_1}(u_1)\,\Theta_{\xi_2}(u_2)\ldots\Theta_{\xi_n}(u_n)$$ ~ факторизуется

6° $$M\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\ldots\xi_n^{k_n} = \frac{1}{i^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}\Theta_{\xi_1\ldots\xi_n}(u_1,\ldots,u_n)}{\partial u_1^{k_1}\partial u_2^{k_2}\ldots\partial u_n^{k_n}}\Bigg|_{u_1=u_2=\ldots=u_n=0}$$

14.02.22.

3.6. Распределение функций от случайных величин.

Задана с.в. ξ, опр. на вер пространстве $(\Omega, \tilde{\mathfrak{F}}, P)$ и функция $y=\varphi(x)$, которая переводит ξ в η:

$$\boxed{\eta=\varphi(\xi)}$$

При этом $F_\xi(x)=P(\xi<x)$ ~ известно

$F_\eta(y)=P(\eta<y)=?$

По определению: $F_\eta(y) = P(\varphi(\xi)<y) = P(\xi<\varphi^{(-1)}(y))$

$y=\varphi(x)$

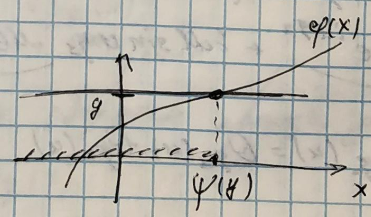
$x=\psi(y)=\varphi^{(-1)}(y)$? ~ непр.? одн. опр-на?

1. Монотонность $\varphi(x)$

а) $\varphi(x)$ – монотонно возраст.

$y=\varphi(x)$

$x=\psi(y)$ – обратная



$$\boxed{F_\eta(y) = P(\xi<\psi(y)) = F_\xi(\psi(y))}$$

В случае непрерывной ξ: $f_\eta(y) = F'_\eta(y)$

$$f_\eta(y) = F'_\xi(\psi(y))\cdot\psi'(y) = f_\xi(\psi(y))\underbrace{\psi'(y)}_{>0}$$

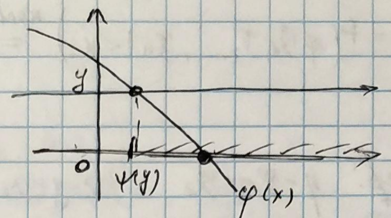
б) $\varphi(x)$ – монотонно убывающая

$$F_\eta(y) = P(\varphi(\xi)<y) = P(\xi>\psi(y)) = 1 - P(\xi<\psi(y))$$

В случае непр. ξ:

$$P(\xi > \psi(y)) = 1 - P(\xi < \psi(y))$$

$$f_\eta(y) = -f_\xi(\psi(y))\psi'(y)$$



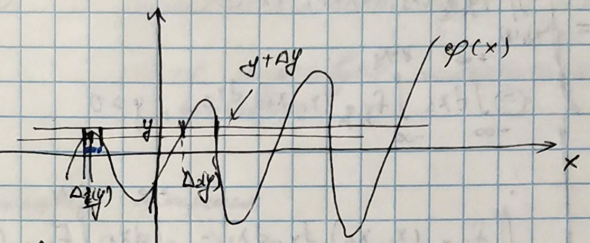
=> В монотонном случае:

$$\boxed{f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y))\,|\psi'(y)|}$$

2. $\varphi(x)$ ~ немонотонная ф-я

$x = \psi(y)$ ~ неоднозначная

=> $x_i = \psi_i(y)$ - однозначные ветви исходной ф-ии



$$P(y < \eta < y + \Delta y) = \sum_i P(\xi \in \Delta_i(y)) = \sum_i \int_{\Delta_i(y)} f_\xi(x)\,dx \approx \sum_i f_\xi(x_i)\,\Delta_i(y)$$

$\approx f_\eta(y)\,\Delta y$

$$f_\eta(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i f_\xi(\psi_i(y)) \left|\frac{\Delta_i(y)}{\Delta y}\right|$$

$$|\Delta_i(y)| = |\psi_i(y+\Delta y) - \psi_i(y)|$$

$$=> \boxed{f_\eta(y) = \sum_i f_\xi(\psi_i(y))\,|\psi_i'(y)|}$$

Если ветвь одна $f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y))|\psi'(y)|$

Пример: ξ - нормально распределённая случайная величина с параметрами $(0, 1)$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\eta = A\xi + B$, $A, B \in \mathbb{R}$

$y = Ax + B \rightarrow x = \frac{y - B}{A} = \psi(y)$

$$\psi'(y) = \frac{1}{A}$$

$$f_\eta(y) = f_\xi\left(\frac{y-B}{A}\right) \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|A|} e^{-\frac{(y-B)^2}{2A^2}}$$

норм. закон с параметрами $(B, |A|)$

Более сложный случай, когда задан случайный вектор

$$\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

И мы хотим задать (также) зависимость $\eta = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

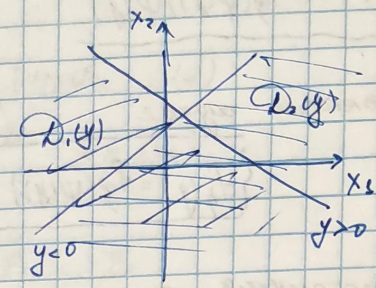
$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$F_\eta(y) = P(\eta < y)$?

$$F_\eta(y) = P(\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)<y) \overset{\text{непрер}}{=} P(\vec{\xi}\in D(y)) = \int\limits_{D(y)}\!\cdots\!\int f_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n$$

Пример: $\eta = \xi_1+\xi_2 \Rightarrow y = x_1+x_2$

$F_\eta(y),\ f_\eta(y) = ?$



$x_1+x_2 = y$

$$F_\eta(y) = P(\xi_1+\xi_2<y) = \begin{cases} \iint\limits_{D_1(y)} f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_2, & y\geq 0 \\ \iint\limits_{D_2(y)} f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_2 & y<0 \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx_1\, f_{\xi_1\xi_2}(x_1, y-x_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1\xi_2}(x_1, y-x_1)\,dx_1}$$ — двух с.в.

Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимы

$$\Rightarrow \boxed{f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x_1)\, f_{\xi_2}(y-x_1)\,dx_1}$$ — „свёртка"

4. Последовательность незав. с.в. Предельные теоремы.

4.1. Неравенство Чебышева

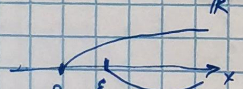
Теорема 1.

Пусть $\xi = \xi(\omega)\geq 0$, если $\exists M\xi<\infty$, то для $\forall\varepsilon>0$ выполняется неравенство:

$$\boxed{P(\xi\geq\varepsilon)\leq\frac{M\xi}{\varepsilon}}$$

Док-во:

$$M\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x\,dF_\xi(x) = \int\limits_0^\infty x\,dF_\xi(x) \geq \int\limits_\varepsilon^\infty x\,dF_\xi(x) \geq \int\limits_\varepsilon^\infty \varepsilon\,dF_\xi(x) = \varepsilon\cdot P(\xi\geq\varepsilon)$$



∎

Теорема 2. (Чебышева)

Если с.в. ξ имеет конечную дисперсию $D\xi$, то для $\varepsilon\geq 0$ справедливо неравенство:

$$\boxed{P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}}$$

Док-во: Расс-м новую величину $\eta = |\xi - M\xi|^2 \geq 0$

по теореме 1 $\rightarrow P(\eta \geq \varepsilon^2) \leq \frac{M\eta}{\varepsilon^2} = \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ ⊠

Пример. n независимых измерений величины a.

Пусть $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta$ — ошибки при измерении: $M\delta_k = 0$, $k = \overline{1,n}$, т.е. может + ошибка или − (как погрешн.)

$$D\delta_k = \sigma^2$$

=> т.е. отсутствует систематическая ошибка.

$\eta = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n}{n}$ ~ суммарная ошибка измерения.

Найдём её дисперсию: $M\eta = 0 = M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\delta_k = 0$

$D\eta = D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\delta_k = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Нужно добиться такой суммарной ошибки, чтобы $\boxed{\eta < \Delta}$

=> $P(|\eta| < \Delta) \geq 0{,}99$ => $P(|\eta| > \Delta) \leq 1 - 0{,}99 \leq 0{,}01$

=> Можем оценить по неравенству Чебышева

$$P(|\eta| > \Delta) \leq \frac{D\eta}{\Delta^2} = \frac{\sigma^2}{n\Delta^2}$$

$$\frac{\sigma^2}{n\Delta^2} \leq 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n \geq \frac{100 \cdot \sigma^2}{\Delta^2}}$$

4.2. Сходимость посл-ти случайных величин.

$\{a_n\}$ — числовая послед-ть.

$\lim_{n \to \infty} a_n = A$; $a_n \in \mathbb{R}$

Пусть $\{\xi_n\}$ - посл-ть с.в., заданных на одном вер-ом пространстве.

$\{\xi_n\} \xrightarrow[n \to \infty]{} \eta$

Опр. Последовательность случ. величин $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случ. величине η, если для $\forall \varepsilon > 0$:

$$P(|\xi_n - \eta| > \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

обозначается: $\boxed{\xi_n \xrightarrow[P]{} \eta}$ при $n \rightarrow \infty$

Опр. Послед-ть случ. величины $\{\xi_n\}$ сходится к случ. величине с вероятностью 1. (или почти наверное), если $\xi_n(\omega) \rightarrow \eta(\omega)$, при $n \rightarrow \infty$ для всех $\omega \in \Omega$, за исключением некоторых ω из мн-ва $N \subset \Omega$ нулевой вероятности.

$$\boxed{\xi_n \xrightarrow[\text{п.н.}]{} \eta} \quad n\to\infty$$

Опр. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится в среднем r-го порядка к случ. величине η, если:

$$M|\xi_n-\eta|^r \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

обознач. : $\boxed{\xi_n \xrightarrow[r]{} \eta}$, $n\to\infty$

при $r=1$ ~ сходимость в среднем: $\boxed{\xi_n \xrightarrow[M]{} \eta \quad , n\to\infty}$

при $r=2$ ~ сходимость в среднеквадратическом: $\boxed{\xi_n \xrightarrow[\text{с.к}]{} \eta \quad , n\to\infty}$

Соотношения между ними:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{r} \eta \;\Rightarrow\; \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \eta \\ \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} \eta \;\Rightarrow\; \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \eta \end{array}\right\} \Rightarrow \text{сходимость по вероятности самая слабая.}$$

$$P(|\xi_n-\eta|>\varepsilon) \le \frac{M|\xi_n-\eta|}{\varepsilon}$$

$$0 \le P(|\xi_n-\eta|^2>\varepsilon^2) \le \frac{M|\xi_n-\eta|^2}{\varepsilon^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

4.3. Закон больших чисел (ЗБЧ)

Опр. Последовательность с.в. $\{\xi_n\}$ подчиняется ЗБЧ, если.

$$\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n}\right\}$$

Последовательность с.в. $\{\xi_n\}$ подчиняется усиленному ЗБЧ, если

$$\boxed{\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \frac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n}}$$

Теорема Маркова

Для того, чтобы посл-ть с.в. $\{\xi_n\}$ с конечными дисперсиями удовлетворяла ЗБЧ достаточно выполнения условия:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij} = 0}$$

где $k_{ij} = cov(\xi_i, \xi_j)$

Док-во: Рассмотрим $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - M\xi_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\xi}_i$

$$M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\xi}_i\right]^2 = \frac{1}{n^2}M\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overset{\circ}{\xi}_i\overset{\circ}{\xi}_j = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{M\overset{\circ}{\xi}_i\overset{\circ}{\xi}_j}_{k_{ij}=cov(\xi_i,\xi_j)} \to 0 \text{ при } n\to\infty$$

$$\underset{\text{при } n\to\infty}{M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\xi}_i\right]^2 \to 0} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\xi}_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i}_{\text{ЗБЧ}}$$

Следствие 1.
Теорема Чебышева
~ Если с.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - некоррелируемы и имеют равномерно ограничен. дисперсии: $D\xi_n \le C$ для $\forall k$, то $\{\xi_n\}$ удовлетворяют ЗБЧ.

Док-во: Проверяем условие Маркова:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij} = \sum_{i=1}^{n} R_{ij} \overset{\text{=}}{=} \left\{ \begin{array}{l} cov(\xi_i;\xi_j)=0 \\ \text{для } i\ne j \end{array}\right.$$

$$\overset{\text{=}}{=} \sum_{i=1}^{n} D\xi_i \le C\cdot n$$

$$0 \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij} \le \frac{C}{n} \to 0 \text{ при } n\to\infty \to \text{ вып. усл. Маркова.}$$ ☒

Следствие 2.
Теорема Бернулли
~ Если μ_n - число появлений события A в "n" незав. испытаниях, то

$$\boxed{\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} p}$$

, где $p = P(A)$ ~ вер-ть появления события в отд. испытании.

Док-во:

$$\mu_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \text{ где } \xi_n = \begin{cases} 1, & \text{событие появляется} \\ 0, & \text{событие не происходит} \end{cases}$$

и все $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - независимы

$$M\mu_n = M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} M\xi_k = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = np$$

$$\frac{\mu_n}{n} = \frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{np}{n} = p \text{ ~ нужно док-ть}$$

Из независимости => некоррелируемость. исп. теорему Чебышева.

$$D\xi_k = M(\xi_k - M\xi_k)^2 = (1-p)^2\cdot p + (0-p)^2(1-p) = p(1-p)\cdot 1 =$$
$$= p - p^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$$

=> по теореме Чебышева вып. ЗБЧ. ☒

28.05.22. УЗБЧ ~ усиленный

$$\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \frac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n}$$

Теорема Колмогорова
~ Последовательность одинаковых распр. и незав. с.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ с конечными $M\xi_k < \infty$ удовлетворяет УЗБЧ.
~ без док-ва.

Как следствие это справедливо для Бернулли.

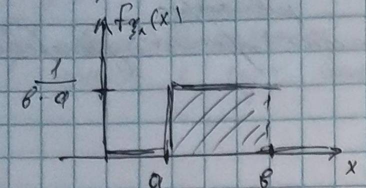
$$\boxed{\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} p(A)}$$

Понятие о методах статистических испытаний. (Метод Монте-Карло)

Например хотим сосчитать $\int_a^b g(x)\,dx$

Строим послед-ть $\{\xi_n\}$ - послед-ть незав. и одинак. распределённых с.в.

равномерно в интервале $[a, b]$



$$\eta_k = g(\xi_k)$$

$$M\eta_k = M g(\xi_k) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{\xi_k}(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx = (b-a)\,M\eta_k = (b-a)\frac{M\eta_1 + M\eta_2 + \ldots + M\eta_n}{n}$$

Применяем ЗБЧ:
$$\int_a^b g(x)\,dx \approx (b-a)\frac{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n}{n} = (b-a)\cdot\frac{g(\xi_1)+g(\xi_2)+\ldots g(\xi_n)}{n}$$

4.4. Предельные теоремы

Вспомним интегральную теорему Муавра-Лапласа.
$$P\left\{a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

$\mu_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$, ξ_k - число появлений A в каком-то испытании ($\xi_k = \overline{0,1}$)

$M\sum_{k=1}^{n}\xi_k = np$ ~ мат. ожид.

$D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = npq$ ~ дисперсия. => подставим

$$\boxed{P\left\{a \le \frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \sum_{k=1}^{n}M\xi_k}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}} \le b\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz}$$

=> сумма отклонений распред. по Гауссовому закону.

Центральная предельная теорема (ЦПТ)

Форма Линдеберга-Леви

Опр. Послед-ть $\{\xi_k\}$ с.в. подчиняется ЦПТ, если
$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \sum_{k=1}^{n}M\xi_k}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \quad \text{~ ЦПТ.}$$

Теорема Линдеберга-Леви (одна из форм ЦПТ)
- Послед-ть независимых и одинаково распределённых случ. величин $\{\xi_k\}$ с конечными дисперсиями подчиняется ЦПТ.

Док-во:
$$B_n^2 = D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{D\xi_k}_{\sigma^2} = n\sigma^2 \quad \text{~ сумма дисперсий}$$

$$\sum_{k=1}^{n}M\xi_k = na \quad \text{~ аналогично с мат. ожиданием.}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - na}{\sqrt{n}\,\sigma} = \eta \quad \to \text{попытаемся найти характеристическую ф-ю.}$$

$$\Theta_\eta(u) = Me^{iu\eta} = Me^{iu\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\mathring{\xi}_k} = \text{, где } \mathring{\xi}_k = \xi_k - a$$

$= M\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\overset{\circ}{\xi}_k}$ = {нез. независ. → произв. мат ожиданий} =

$= \prod_{k=1}^{n} M e^{\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\overset{\circ}{\xi}_k}$

$$\Theta_\eta(u) = \prod_{k=1}^{n} \Theta_{\xi_k}\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \{\text{все хар-ие ф-ии одинаковы}\} = \Theta_\xi^{\,n}\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Возьмём логарифм:

$$\ln\Theta_\eta(u) = n\ln\Theta_\xi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Раз-ем разложение через кумулянты:

$$(\ln\Theta_{\overset{\circ}{\xi}}(u)) \to \ln\Theta_\xi(u) = iu\underset{0}{\varkappa_1} + \frac{(iu)^2}{2!}\underset{\text{дисперсия}}{\varkappa_2} + \frac{(iu)^3}{3!}\varkappa_3 + \dots = -\frac{u^2}{2}\sigma^2 + o(u^2)$$

$$\ln\Theta_\eta(u) = \left[-\frac{u^2}{2\sigma^2 n}\sigma^2 + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right]\cdot n = -\frac{u^2}{2} + o(1/\sqrt{n})$$

Возьмём предел при $n\to\infty$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\Theta_\eta(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (q.e.)$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\eta<x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \text{ ч.т.д.}$$

4.5. Устойчивые и безгранично делимые распределения

Опр. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - независимые и одинаково распределенные с.в. с ф-ей распределения $F(x) = P(\xi_k < x)$. Распределение $F(x)$ называется устойчивым, если

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\xi_k \overset{d}{=} c_n\xi_k + b_n}, \quad c_n, b_n \in \mathbb{R}$$

d - distribution (имеют одинак. распр-е.)

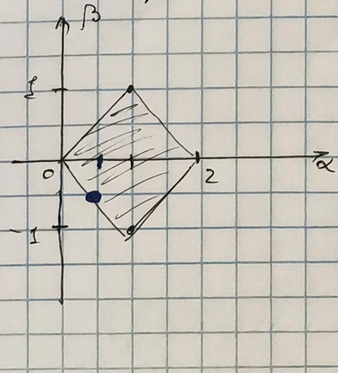
Следствие: $D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = D(c_n\xi_k + b_n)$

$$\sum_{k=1}^{n} D\xi_k = c_n^2 D\xi_k$$

$\boxed{nD\xi_k = c_n^2 D\xi_k}$, когда $D\xi_k < \infty$ → $c_n = \sqrt{n}$ → это рас. Гауссово распр-е.

Но если $D\xi_k = \infty$ => распределения Леви.

$W_{\alpha,\beta}(x)$



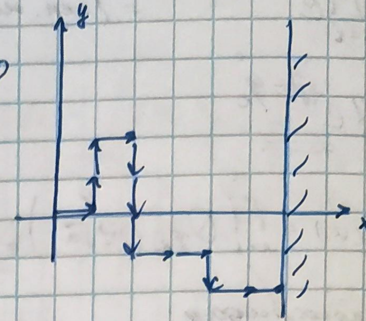
Если $\alpha = 2$, $\beta = 0$ → Гаус.

α - параметр Леви

β - параметр асимметрии.

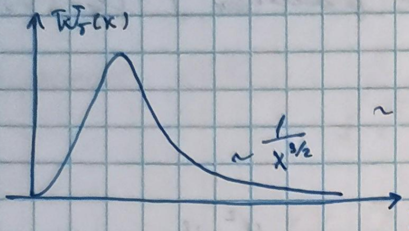
Примеры:

① Точка шагает по м-ти (в 4х напр-х — равновероятно) на границе поглощ.



Распределение T — время до поглощ-я?

$$W_T(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x^3}}\, e^{-\frac{1}{4x}}, \quad x \geq 0$$



~ со степенными хвостами.

$\alpha = \frac{1}{2}$

$\beta = -\frac{1}{2}$

② Распределение Коши:

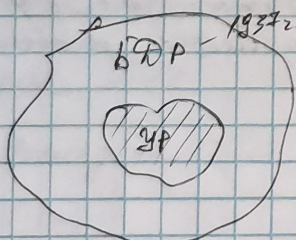
$$\underbrace{W_{1,0}(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}}$$ для него ЦПТ не выполняется.

Опр. Вероятн. распределение $F(x)$ назыв. безгранично делимым, если для $\forall n \in N$ $(n \geq 2)$ выполняется:

$$F(x) = \underbrace{F_n(x) \circledast F_n(x) \circledast \ldots \circledast F_n(x)}_{n}, \quad n \text{ - любое } N$$

Следствие: $\xi = \xi_{1n} + \xi_{2n} + \ldots + \xi_{nn}$ ⇐ отсюда вытекает смысл безгр. делимости, т.е. можно разбить на сумму частиц с одинак. распределением.

$F_n(x)$ $F_n(x)$



Пример: распр. Пуассона, Гаусса...

$W(x) \sim \frac{1}{ch(x)}$ ~ распр.-е обратного гиперб. косинуса