Основные формулы комбинаторики

1) Факториал (произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно)

$1!=1$
$2!=1\cdot 2=2$
$3!=1\cdot 2\cdot 3=6$
$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$
$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$
$6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$
$7!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=5040$
...
$(n-1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)$
$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)n$
$(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)n(n+1)$
...
Кроме того: $0!=1$

2) Перестановки, сочетания и размещения без повторений

<u>Участники действий</u>: множество, состоящее из n **различных** объектов *(либо объектов, считающихся в контексте той или иной задачи различными)*

Формула количества перестановок: $P_n=n!$

Типичная смысловая нагрузка: *«Сколькими способами можно переставить n объектов?»*

Формула количества сочетаний: $C_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$

Типичная смысловая нагрузка: *«Сколькими способами можно выбрать m объектов из n?».* *Поскольку выборка проводится из множества, состоящего из n объектов, то справедливо неравенство $0\le m\le n$*

Формула количества размещений: $A_n^m=(n-m+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n$

Типичная смысловая нагрузка: *«сколькими способами можно выбрать m объектов (из n объектов)* ***и в каждой*** *выборке переставить их местами (либо распределить между ними какие-нибудь уникальные атрибуты)»*

Исходя из вышесказанного, справедлива следующая формула:

$C_n^m\cdot P_m=A_n^m$

И в самом деле:

$$C_n^m\cdot P_m=\frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}\cdot m!=\frac{n!}{(n-m)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-m)(n-m+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-m)}=(n-m+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n=A_n^m$$

3) Бином Ньютона и треугольник Паскаля

Под ***биномом Ньютона*** чаще всего подразумевают формулу возведения двучлена $(a+b)$ в целую неотрицательную степень n:

$(a+b)^0 = \mathbf{1}$

$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = \mathbf{a+b}$

$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 b^2 = \mathbf{a^2+2ab+b^2}$

$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 b^3 = \mathbf{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 b^4 = \mathbf{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$

$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b^1 + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 b^5 = \mathbf{a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$

…

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n =$

…

Биномиальные коэффициенты C_n^m можно рассчитать по стандартной формуле (см. пункт 2), но удобнее воспользоваться так называемым ***треугольником Паскаля***, который представляет собой бесконечную таблицу биномиальных коэффициентов. По бокам этого треугольника расположены единицы, а каждое внутреннее число равно сумме двух ближайших верхних чисел *(красные метки)*:

0:	1										
1:	1	1									
2:	1	2	1								
3:	$\boxed{1+3}$		3	1							
4:	1	4	6	4	1						
5:	1	5	10	$\boxed{10+5}$		1					
6:	1	6	15	20	15	6	1				
7:	1	7	21	$\boxed{35+35}$		21	7	1			
8:	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9:	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10:	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Так, например, для возведения двучлена в 6-ю степень следует руководствоваться общей формулой бинома, после чего сразу записать числа из строки № 6 треугольника Паскаля:

$$(a+b)^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5 b^1 + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a^1 b^5 + C_6^6 b^6 =$$
$$= \mathbf{a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$$

Кроме того, данная таблица позволяет быстро находить отдельно взятые биномиальные коэффициенты (например, в целях проверки вычислений по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$):

C_6^2 – находим строку № 6 и ***(внимание!)*** 2 + 1 = 3-й элемент слева *(зелёный кружок)*: $C_6^2 = 15$;

C_9^5 – находим строку № 9 и выбираем 5 + 1 = 6-й элемент слева *(малиновый кружок)*: $C_9^5 = 126$;

C_{10}^3 – находим строку № 10 и выбираем 3 + 1 = 4-й элемент слева *(коричневый кружок)*: $C_{10}^3 = 120$.

4) Комбинаторное правило суммы и комбинаторное правило произведения

Если объект A можно выбрать из некоторого множества объектов m способами, а другой объект B – n способами, то выбор объекта A **или** объекта B (без разницы какого) возможен $m+n$ способами.

Если объект A можно выбрать из некоторого множества объектов m способами **и** после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то упорядоченная пара объектов $(A; B)$ может быть выбрана mn способами.

Данные принципы справедливы и для бОльшего количества объектов.

Важная содержательная часть правил состоит в том, знак «плюс» понимается и читается как союз **ИЛИ**, а знак «умножить» – как союз **И**.

5) Перестановки, сочетания и размещения с повторениями

Участники действий: множество, состоящее из объектов, среди которых есть одинаковые *(либо считающиеся таковыми по смыслу задачи)*

Формула количества перестановок с повторениями: $P_{n\,(повт)} = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot\ldots\cdot n_k!}$,

где $n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k=n$

Типичная смысловая нагрузка: «Количество способов, которыми можно переставить n объектов, среди которых 1-й объект повторяется n_1 раз, 2-й объект повторяется n_2 раз, 3-й объект – n_3 раз,…, k-й объект – n_k раз»

Следует отметить, что в подавляющем большинстве задач в совокупности есть и уникальные (не повторяющиеся) объекты, в этом случае соответствующие значения n_i равны единице, и в практических расчётах их можно не записывать в знаменатель.

Формула количества сочетаний с повторениями: $C^m_{n\,(повт)} = C^m_{n+m-1} = \dfrac{(n+m-1)!}{(n-1)!\cdot m!}$

Типичная смысловая нагрузка: «Для выбора предложено n множеств, каждое из которых состоит из одинаковых объектов. Сколькими способами можно выбрать m объектов?»

То есть, здесь в выборке могут оказаться одинаковые объекты, и если $m>n$, то совпадения точно будут. По умолчанию предполагается, что исходная совокупность содержит не менее m объектов ***каждого вида***, и поэтому выборка может полностью состоять из одинаковых объектов.

Формула количества размещений с повторениями: $A^m_{n(повт)} = n^m$

Типичная смысловая нагрузка: «Дано множество, состоящее из n объектов, при этом любой объект можно выбирать ***неоднократно****. Сколькими способами можно выбрать m объектов, если* ***важен порядок их расположения*** *в выборке? »*

Для бОльшей ясности здесь удобно представить, что объекты извлекаются последовательно (хотя это вовсе не обязательное условие). В частности, возможен случай, когда из n имеющихся объектов m раз будет выбран какой-то один объект.

Основные формулы теории вероятностей

Сводный справочный материал раздела «Теория вероятностей»

Часть первая. Случайные события

1. Классическое определение вероятности Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение $P(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, а m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A.
2. Геометрическое определение вероятности Вероятность наступления события A в испытании равна отношению $P(A)=\frac{g}{G}$, где G – геометрическая мера (длина, площадь, объем), выражающая общее число всех возможных и равновозможных исходов данного испытания, а g – мера, выражающая количество благоприятствующих событию A исходов.
3. Статистическое определение вероятности Вероятность наступления некоторого события A – есть относительная частота $W(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число фактически проведённых испытаний, а m – число испытаний, в которых появилось событие A.
4. Полная группа событий Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, образующих полную группу, равна единице: $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)=1$
5. Теорема сложения вероятностей противоположных событий Сумма вероятностей противоположных событий $A, \overline{A}$ равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$
7. Теорема сложения вероятностей несовместных событий Вероятность появления одного из двух несовместных событий A или B (без разницы какого), равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$ Аналогичный факт справедлив и для бОльшего количества несовместных событий, например, для трёх: $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$
8. Теорема сложения вероятностей совместных событий Вероятность появления *хотя бы одного* из двух совместных событий A, B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

9. Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:
$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Данный факт справедлив и для бОльшего количества событий, например, для трёх:
$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

10. Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность другого события:
$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$, где $P_A(B)$ – вероятность появления события B при условии, что событие A уже произошло.

Данный факт справедлив и для бОльшего количества событий, например, для трёх:
$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$, где $P_{AB}(C)$ – вероятность появления события C при условии, что события A и B уже произошли.

11. Формула полной вероятности

Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие условные вероятности события A:
$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$

12. Формулы Байеса

Пусть в результате осуществления одной из гипотез $B_1, B_2, B_3, .., B_n$ событие A произошло. Тогда:

$P_A(B_1) = \dfrac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_1;

$P_A(B_2) = \dfrac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_2;

$P_A(B_3) = \dfrac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_3;

…

$P_A(B_n) = \dfrac{P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_n.

13. Формула Бернулли

$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, где:

n – количество независимых испытаний;
p – вероятность появления события A в каждом испытании и $q = 1 - p$ – непоявления;
P_n^m – вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз.
(C_n^m – биномиальный коэффициент)

14. Формула Пуассона

$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$, где:

n – количество независимых испытаний;
p – вероятность появления события A в каждом испытании;
P_m – вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз,
при этом количество испытаний должно быть достаточно велико *(сотни, тысячи и больше)*, а вероятность появления события в каждом испытании весьма мала *(сотые, тысячные и меньше)*, в противном случае приближение к точному результату P_n^m (см. п. 13) будет плохим.

15. Локальная теорема Лапласа

Пусть проводится достаточно большое (> 50-100) количество n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p. Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно m раз, приближённо равна:

$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса, а $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ $(q = 1 - p)$.

Значения функции Гаусса можно найти напрямую, с помощью таблицы либо в MS Excel.

Теорема обеспечивает хорошее приближение к точному результату P_n^m (см. п. 13) при условии $npq > 10$ *(*≈ 10*)*, в противном случае значение $P_n(m)$ будет далеко от истины.

16. Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p появления случайного события A в каждом независимом испытании постоянна, то вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит не менее m_1 и не более m_2 раз, приближённо равна:

$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где:

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$

Значения функции Лапласа можно найти с помощью таблицы либо в MS Excel.

Теорема применима при тех же условиях: количество испытаний должно быть достаточно велико ($n > 50$-100) и произведение $npq > 10$ *(*≈ 10*)*. В противном случае точность приближения будет неудовлетворительной.

Точное значение можно рассчитать по формуле:
$P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_n^{m_1} + P_n^{m_1+1} + P_n^{m_1+2} + \ldots + P_n^{m_2-1} + P_n^{m_2}$, где $P_n^{m_i} = C_n^{m_i} p^{m_i} q^{n-m_i}$ (см. п. 13)

Часть вторая. Случайные величины

17. Математическое ожидание

а) дискретной случайной величины:

$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, где:

x_i – все возможные значения случайной величины и p_i – соответствующие вероятности.

б) непрерывной случайной величины:

$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$, где $f(x)$ – функция плотности распределения этой случайной величины.

18. Свойства математического ожидания

$M(C) = C$ – математическое ожидание константы равно этой константе.

$M(CX) = CM(X)$ – постоянный множитель можно вынести за знак матожидания.

$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$ – матожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Для независимых случайных величин справедливо свойство:
$M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$

19. Дисперсия

$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right]$ – есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.

а) Дисперсию дискретной случайной величины можно рассчитать по определению:

$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right] = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + ... + (x_n - M(X))^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i$

либо по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$

б) и аналогичные способы для непрерывной случайной величины:

$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$ либо $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

20. Свойства дисперсии

$D(C) = 0$ – дисперсия постоянной величины равна нулю.

$D(CX) = C^2 D(X)$ – константу можно вынести за знак дисперсии, возведя её в квадрат.

$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + \mathrm{cov}(X;Y)$, где $\mathrm{cov}(X;Y)$ – коэффициент ковариации *(см. ниже)* случайных величин X, Y. Если случайные величины независимы, то $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

и для независимых случайных величин:
$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + D(-1 \cdot Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y)$

21. Среднее квадратическое (стандартное) отклонение

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

22. Вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка $P(a<X<b)$, $P(a\le X<b)$, $P(a<X\le b)$ либо $P(a\le X\le b)$ рассчитывается по единой формуле:

$F(b)-F(a)$, где $F(x)$ – функция распределения данной случайной величины.

Для непрерывной случайной величины эти вероятности можно найти и другим способом – с помощью интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – функция плотности распределения.

23. Распространённые виды распределений и их числовые характеристики

а) дискретные:

Название распределения	Формула расчёта вероятностей	Возможные значения m	Математическое ожидание	Дисперсия
Биномиальное	$P_n^m=C_n^m p^m q^{n-m}$	$0, 1, 2, 3, \ldots, n$	np	npq
Пуассона	$P_m=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$	$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$	λ	λ
Геометрическое	$P_m=q^{m-1}p$	$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Гипергеометрическое	$P_m=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	$0, 1, \ldots, \min(M, n)$	$\frac{M}{N}\cdot n$	$\frac{M(N-M)n(N-n)}{N^2(N-1)}$

б) непрерывные:

Название распределения	Функция плотности $f(x)$	Математическое ожидание	Дисперсия
Равномерное	$\frac{1}{b-a}$ на промежутке от a до b и 0 вне этого промежутка	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Показательное	$\lambda e^{-\lambda x}$, если $x\ge 0$ и 0, если $x<0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Нормальное	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<x<+\infty$	a	σ^2

24. Коэффициент ковариации (совместной вариации) случайных величин

$\operatorname{cov}(X;Y) = M\left[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M(X))(y_j - M(Y))p_{ij}$ – математическое ожидание произведения линейных отклонений случайных величин от соответствующих математических ожиданий.

Данный коэффициент удобно вычислять по формуле:

$\operatorname{cov}(X;Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$, где $M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}$ для дискретной и

$M(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$ – для непрерывной случайной величины.

Значение коэффициента не превосходит по модулю $\left|\operatorname{cov}(X;Y)\right| \le \sqrt{D(X) \cdot D(Y)}$, где $D(X), D(Y)$ – дисперсии случайных величин.

Если случайные величины независимы, то $\operatorname{cov}(X;Y) = 0$, обратное в общем случае неверно.

25. Коэффициент линейной корреляции

$r_{xy} = \dfrac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$, где $\sigma(X), \sigma(Y)$ – стандартные отклонения случайных величин.

Данный коэффициент принимает значения из промежутка $-1 \le r_{xy} \le 1$

26. Неравенство Чебышева

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем:

$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, где $D(X)$ – дисперсия этой случайной величины.

27. Теорема Чебышева

Если $X_1, X_2, X_3, \ \ldots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, причём дисперсии их равномерно ограничены (не превосходят постоянного числа C), то, как бы ни было малО положительное число ε, вероятность неравенства $\left|\dfrac{X_1 + X_2 + \ \ldots + X_n}{n} - \dfrac{M(X_1) + M(X_2) + \ \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon$ будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико. Иными словами:

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$