02.02.22.

Потенциальной системой называется такая механическая система, динамика которой полностью описывается функцией потенциальной энергии.

Система имеет одну степень свободы, если достаточно одной действительной величины, чтобы определить положение этой системы в пространстве.

Движение консервативных потенциальных систем с одной степенью свободы.

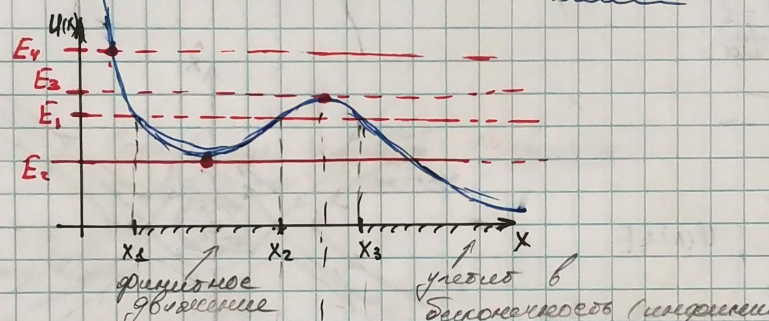
$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = -U'(x)$$

1. Аналитическое решение: $\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))} = \frac{dx}{dt} \to \int \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}} = \int dt \to \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} = t - t_0$$

2. Баланс энергии: $\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \geq 0 \Rightarrow E \geq U(x) \Rightarrow U(x) \leq E$

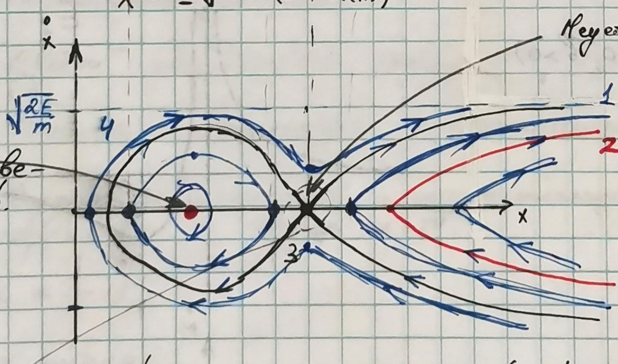
$U(x) \leq E$



3. Фазовая плоскость: $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}$

Неустойчивое равновесие.

Состояние равновесия типа центр.



~ Кривые, которые будут описывать состояние нашей системы в процессе движения.

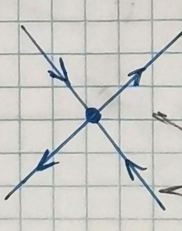
~ В трёхмерном пространстве — фазовое пространство

Совокупность всех фазовых траекторий — фазовый портрет.

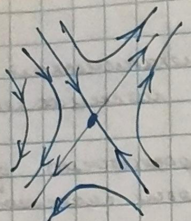
Всегда, если потенц. энергия имеет минимум, то в точке минимума наша система имеет состояние равновесия типа центр.

отдельно

5 траекторий



— Здесь нет пересечения траекторий! Есть траектория из одной точки и 4 куска траекторий, которые к ней стремятся асимптотически в прямом времени или в обратном времени



~ Состояние равновесия типа „седло“

Под максимумом $U(x)$ ~ сост. равн. типа седло.

Эти траектории, обр. как бы перекрестие смыкающиеся на седле называются „сепаратрисами“ (входящими и исходящими).

Домашняя работа: построить фазовые портреты систем с 1й ст. свободы.

а) $U(x) = x^2 - ax^4 \quad (a>0)$

$U(x) = 0 \rightarrow x^2 - ax^4 = 0$

$x^2(1 - ax^2) = 0$

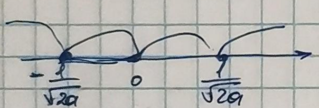
$x = 0$ или $ax^2 = 1$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$

$u'(x) = 2x - 4ax^3$

$2x(1-2ax^2) = 0$

$x = 0, \quad 2ax^2 = 1$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}}$

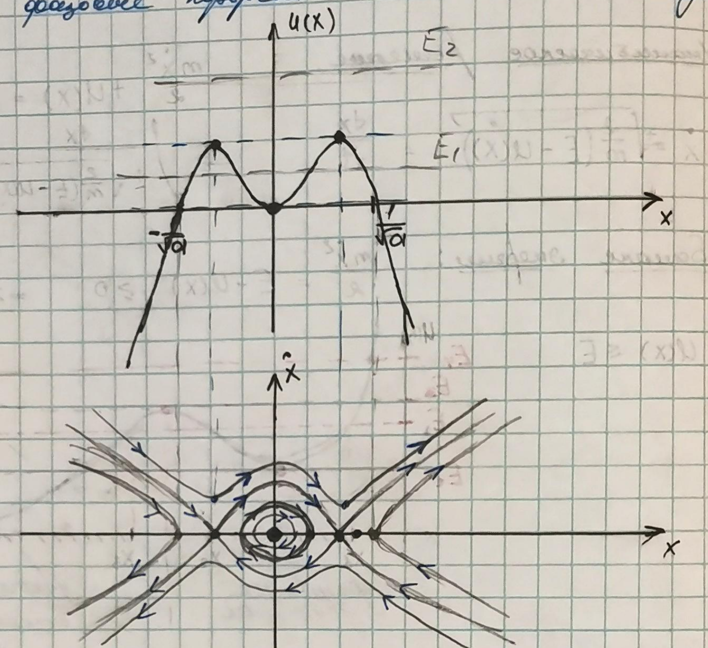


$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$; $U(x) \leq E$

$u''(x) = 2 - 12ax^2$

$u''(x) = 0 \quad 1 - 6ax^2 = 0$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{6a}}$



б) $U(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \quad (a>0,\ b>0)$

$u'(r) = +\frac{a}{r^2} - \frac{2b}{r^3} = \frac{ar - 2b}{r^3} \rightarrow u'(r) = 0$

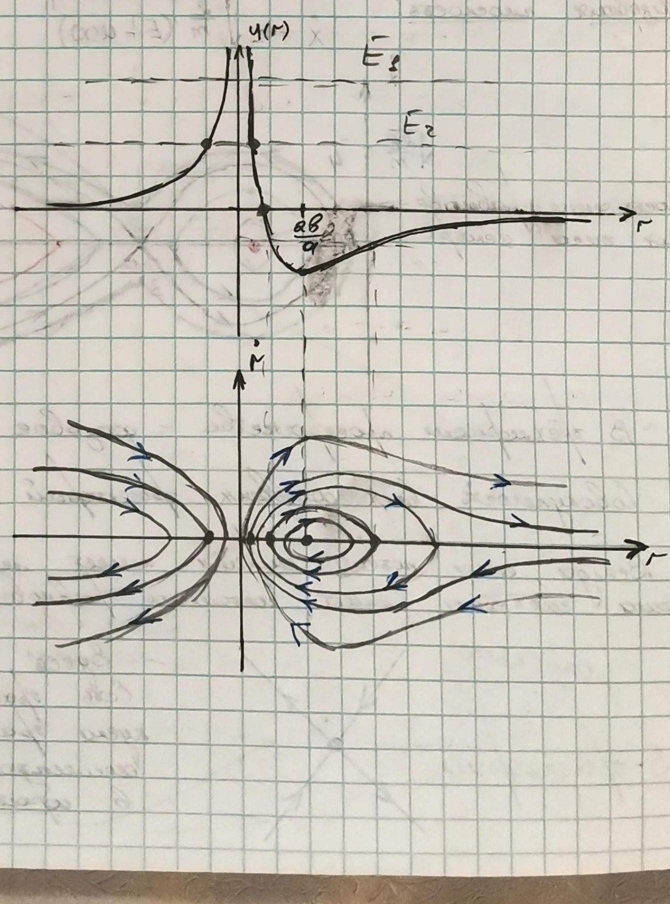
$r = \frac{2b}{a}$

$\lim\limits_{r\to 0+}(U(r)) = +\infty$

$\lim\limits_{r\to -0}(U(r)) = +\infty$

$\lim\limits_{r\to +\infty}(U(r)) = 0$

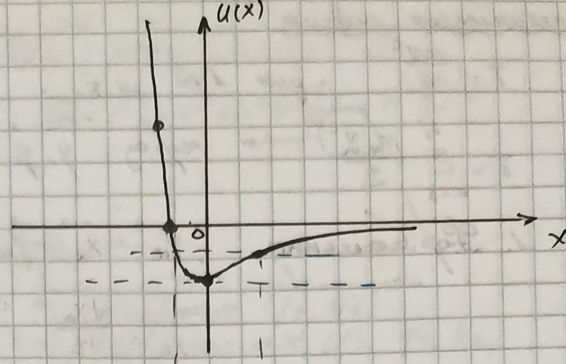
$u\left(\frac{2b}{a}\right) = -\frac{a^2}{2b} + \frac{ba^2}{4b^2} = -\frac{a^2}{2b} + \frac{a^2}{4b} = -\frac{a^2}{4b} < 0$

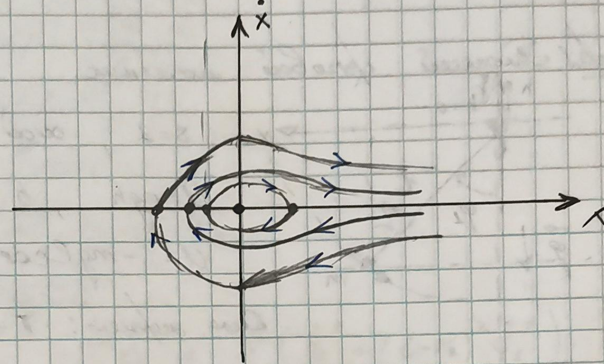


в) $U(x) = e^{-2ax} - 2e^{-ax}$ $\quad (a > 0)$

$U(x) = \frac{1}{e^{2ax}} - \frac{2}{e^{ax}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} U(x) = 0$





Составление функций Лагранжа потенциальных систем.

8.02.22.

$L = T - U = L(q, \dot{q}, t)$

кин. энергия; потенц. энергия.

$T = T(q, \dot{q}, t)$ ~ кинетическая энергия.

$U = U(q, t)$ ~ потенциальная энергия.

„Рецепт": 1. Ввести обобщённые координаты $\{q_i\}_{i=1}^{s}$, s - кол-во степ. своб.

2. Записать кинетическую и потенциальную энергию.

3. Выразить кинетическую и потенциальную энергию через обобщ. координаты и обобщ. ск-ти.

4. $L = T - U$

Потенциальная энергия:

$U = mgh$ ~ однор. грав. поле.

$\downarrow \vec{g}$ $\quad h \uparrow$ $\quad 0$

$U = \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$

l_0 - нерастянутая длина пружины. = const.

l - текущая длина пружины → выраж. через q

$U = \frac{e_1 \cdot e_2}{l_{12}}$ ← через обобщённые координаты.

Кинетическая энергия:

$T = \frac{mv^2}{2}$ — для 1-ой м.т.

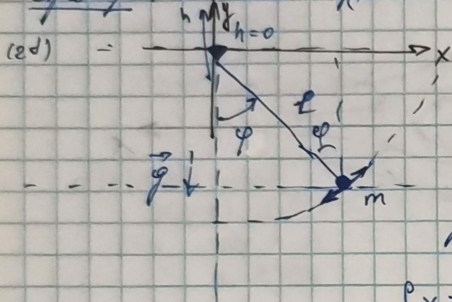
$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} \longrightarrow$ через $q, \dot q, t$

1. Формальный: $v_\alpha^2 = \dot x_\alpha^2 + \dot y_\alpha^2 + \dot z_\alpha^2 \quad \to \quad x_\alpha = x_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$
$y_\alpha = \dots, \quad z_\alpha = \dots$

$$\dot x_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \dot q_i$$

Пример 1. Плоский круговой маятник.

(2d)



$s = 1$, обоб. коорд: φ.

$U = mgh, \quad h = -l\cos\varphi$

$U = -mgl\cos\varphi$

Кин. энергия: $T = \frac{mv^2}{2}$; $v^2 = \dot x^2 + \dot y^2$

$$\begin{cases} x = l\sin\varphi \\ y = -l\cos\varphi \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} \dot x &= l\cos\varphi \cdot \dot\varphi \\ \dot y &= l\sin\varphi \cdot \dot\varphi \end{aligned}$$

$$v^2 = l^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 + l^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi^2 = l^2\dot\varphi^2$$

$$\Rightarrow v = l \cdot \dot\varphi$$

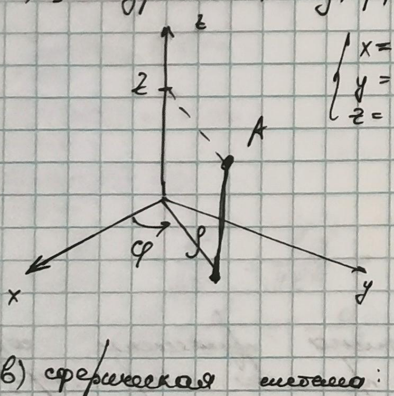
$$T = \frac{m l^2 \dot\varphi^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{m}{2} l^2 \cdot \dot\varphi^2 + mgl\cos\varphi.$$

2. Стандартные системы координат:

а) декартова $v_\alpha^2 = \dot x_\alpha^2 + \dot y_\alpha^2 + \dot z_\alpha^2$

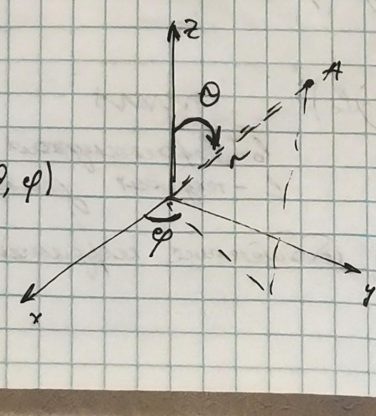
б) цилиндрическая (ρ, φ, z)



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Д/з** проделать как в прошлой задаче и получить: $\boxed{}$
$$v^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2$$

в) сферическая система: (r, θ, φ)



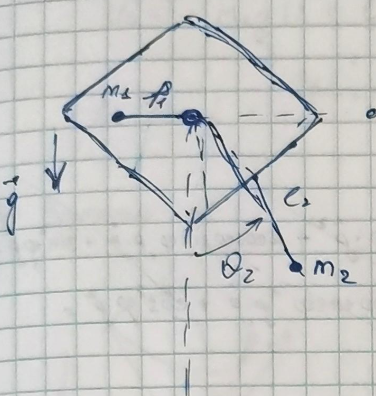
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Д/з** аналогично □

$$V^2 = \dot r^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + r^2\dot\theta^2$$

Пример 2. Стол с дыркой.

$l_1 + l_2 = l$ ~ связь.



Сист. коорд.: m_1 – полярная (ρ_1, φ_1)

m_2 – сферическая $(r_2, \varphi_2, \theta_2)$

Связь: $l_1 = \rho_1$; $l_2 = r_2$

$$\rho_1 + r_2 = l$$

$$\rho_1 = l - r_2$$

Обобщ. коорд: $(\varphi_1, r_2, \varphi_2, \theta_2)$

1. Потенц. энергия: $U = mgh_2 = -m_2 g r_2 \cos\theta_2$

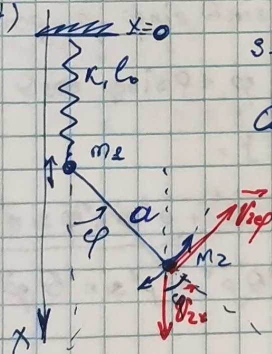
Кин. энергия: $T_1 = \frac{m_1}{2} v_1^2 = \frac{m_1}{2}(\dot\rho_1^2 + \rho_1^2\dot\varphi_1^2) = \frac{m_1}{2}(\dot r_2^2 + (l - r_2)^2\dot\varphi_1^2)$

$$T_2 = \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_2}{2}(\dot r_2^2 + r_2^2\sin^2\theta_2\dot\varphi_2^2 + r^2\dot\theta^2)$$

$$\Rightarrow \quad L = T_1 + T_2 - U$$

3. "Геометрический способ" (метод векторного сложения) для нахождения скорости.

Пример 3. (2т)



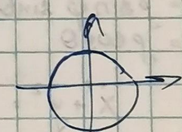
$s = 2$

Обобщ. коорд: (x, φ)

$U = \dots$ Д/з**

$T_1 = \frac{m_1 \dot x^2}{2}$

$T_2 = \frac{m_2}{2} v_2^2$



$\cos(\varphi + \frac{\pi}{2})$

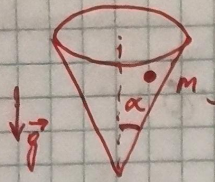
$$\vec V_2 = \vec V_{2x} + \vec V_{2\varphi} \quad \rightarrow \quad |\vec V_{2x}| = |\dot x|$$

$$|\vec V_{2\varphi}| = |a\dot\varphi|$$

$$V_2^2 = V_{2x}^2 + 2(\vec V_{2x}\cdot\vec V_{2\varphi}) + V_{2\varphi}^2 = \dot x^2 + a^2\dot\varphi^2 + 2a\dot x\dot\varphi\cdot\cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) =$$

$$= \dot x^2 + a^2\dot\varphi^2 - 2a\dot x\dot\varphi\sin\varphi.$$

Д/з: 1) V^2 для цилиндр. и сферич. с.к.
2) доделать пр. 3.
3)



L - ?

m – по стенке движется сфера. $\theta = \alpha$, $s = 2$

Домашняя работа.

① $\dot v$ для цилиндрических координат.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$\cancel{v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}$

$\cancel{\dot x = \dot\rho_\varphi \cos\varphi - \sin\varphi\,\rho}$

$\cancel{\dot y = \dot\rho_\varphi \sin\varphi + \cos\varphi\cdot\rho}$

$\cancel{\Rightarrow \dot x^2 + \dot y^2 = \cos^2\varphi\cdot\dot\rho^2 - 2\cos\varphi\sin\varphi\,\rho\cdot\dot\rho + \sin^2\varphi\,\rho^2 + \dot\rho^2\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\,\rho\cdot\dot\rho + \cos^2\varphi\,\rho^2 = \dot\rho^2 + \rho^2}$

$\cancel{\Rightarrow v^2 = \dot\rho^2 + \rho^2 + \dot z^2}$

$$\dot x = \dot\rho\cos\varphi - \sin\varphi\cdot\rho\cdot\dot\varphi$$
$$\dot y = \dot\rho\sin\varphi + \cos\varphi\cdot\rho\dot\varphi$$

$$\rightarrow \dot x^2 + \dot y^2 = \cos^2\varphi\,\dot\rho^2 - 2\sin\varphi\cos\varphi\,\rho\dot\rho\dot\varphi + \sin^2\varphi\,\rho^2\dot\varphi^2 + \dot\rho^2\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\,\rho\dot\rho\dot\varphi + \cos^2\varphi\,\rho^2\dot\varphi^2 =$$
$$= \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2$$

② $\dot v$ для сферических координат.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

Отдельно: $\dot x = \dot\rho\cos\varphi\sin\theta - \rho\sin\theta\sin\varphi\cdot\dot\varphi + \rho\cos\varphi\cos\theta\cdot\dot\theta$

$\dot y = \dot\rho\sin\varphi\sin\theta + \rho\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot\dot\varphi + \rho\sin\varphi\cos\theta\cdot\dot\theta$

$\dot x^2 + \dot y^2 =$ {останутся только квадраты слагаемых} =

$$= \dot\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\cdot\dot\varphi^2 + \rho^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\cdot\dot\theta^2 + \dot\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \ldots +$$
$$+ \rho^2\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2 + \rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\,\dot\theta = \sin^2\theta\,\dot\rho^2 + \rho^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + \rho^2\cos^2\theta\cdot\dot\theta + \ldots +$$

$$\dot z = \dot\rho\cos\theta - \rho\sin\theta\cdot\dot\theta$$

$$\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 = \dot\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\cdot\dot\varphi^2 + \rho^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\cdot\dot\theta^2 + \dot\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \ldots +$$
$$+ \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2 + \rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot\dot\theta + \ldots + \dot\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\cdot\dot\theta^2 + \ldots =$$
$$= \dot\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + \rho^2\cos^2\theta\cdot\dot\theta^2 + \dot\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\cdot\dot\theta^2 =$$
$$= \dot\rho^2 + \rho^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + \rho^2\dot\theta^2$$

$$\Rightarrow \dot v = \dot\rho^2 + \rho^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + \rho^2\dot\theta^2$$

③ Пример 8 (доделать.)

$V_{1x} = \dot{x}$; $T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2}$

$T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_2}{2}(\dot{x}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 - 2a\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi)$

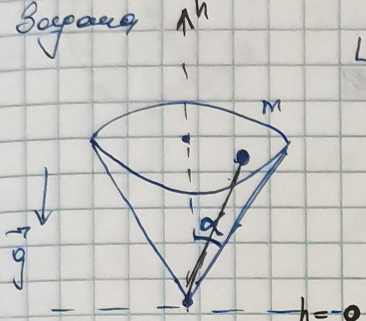
~~$U_1 = -m_1 g x$~~ $U_1 = \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{k}{2}(x - l_0)^2 = \frac{k}{2}(x - l_0)^2 + m_1 g\left(-\frac{x}{2}\right)$

у пружинки есть масса.

$U_2 = -m_2 g(x + l\cos\varphi)$

$L = T - U = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2}{2}(\dot{x}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 - 2a\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi) + m_1 g\frac{x}{2} - \frac{k}{2}(x + l_0)^2 + m_2 g(x + l\cos\varphi)$

④ Задача



L - ?

$S = 2$, Обобщ. координаты: φ, ρ

$U = mg\rho\cos\alpha$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \sin\alpha\cdot\rho\cos\varphi \\ y &= \sin\alpha\cdot\rho\sin\varphi \\ z &= \cos\alpha\cdot\rho \end{aligned}$$

$\dot{x} = \sin\alpha\cdot\dot{\rho}\cos\varphi - \sin\varphi\cdot\sin\alpha\,\rho\cdot\dot{\varphi}$

$\dot{y} = \sin\alpha\cdot\dot{\rho}\sin\varphi + \cos\varphi\cdot\sin\alpha\,\rho\cdot\dot{\varphi}$

$\dot{z} = \cos\alpha\cdot\dot{\rho}$

$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \underline{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\varphi\,\dot{\rho}^2} - \cancel{2\sin^2\alpha\cos\varphi\sin\varphi\,\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}} + \sin^2\alpha\sin^2\varphi\,\rho^2\dot{\varphi}^2 +$

$+ \underline{\sin^2\alpha\sin^2\varphi\,\dot{\rho}^2} + \cancel{2\sin^2\alpha\cos\varphi\sin\varphi\,\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}} + \sin^2\alpha\cos^2\varphi\,\rho^2\dot{\varphi}^2 + \cos^2\alpha\cdot\dot{\rho}^2 =$

$= \sin^2\alpha\,\dot{\rho}^2 + \sin^2\alpha\,\rho^2\dot{\varphi}^2 + (1 - \sin^2\alpha)\dot{\rho}^2 = \cancel{\sin^2\alpha\,\dot{\rho}^2} + \sin^2\alpha\,\rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 - \cancel{\sin^2\alpha\,\dot{\rho}^2} =$

$= \sin^2\alpha\,\rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2$

$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2}(\sin^2\alpha\,\rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)$

$\Rightarrow \underline{L} = T - U = \frac{m}{2}(\sin^2\alpha\,\rho^2\cdot\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2) - mg\rho\cos\alpha$ ✓

16.02. **Циклические переменные. Интегралы движения.**

(обобщ. коорд. если не входят L,) законы сохр.

Опр. Обобщённый импульс $\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = p_i$

Опр. q_i назыв. циклической, если $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Теорема.
~Если q_i циклич, то $p_i = const$

Док-во: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} p_i = 0$ ▨

Опр. Обобщённая энергия $H = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \dot q_i - L$

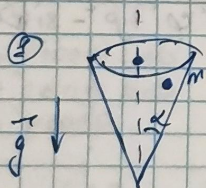
Теорема.
~Если t циклическая, то $H = const$

Док-во: в лекции

Теорема.
~Если $L = \underbrace{L_2}_{\sim(\dot q)^2} + \underbrace{L_1}_{\sim \dot q} + \overbrace{L_0}^{\sim \dot q^0 \text{ (без } \dot q)}$, то $H = L_2 - L_0$

Док-во: в лекции.

Пр. ③



$L = ?$ (r, θ, φ)

иссл. движ. методом циклич. перемен.

Ур-е конуса: $\theta = \alpha$.
Обоб. коорд.: (r, φ), $s = 2$

$$L = \underbrace{\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2 \sin^2\alpha\, \dot\varphi^2)}_{L_2} \underbrace{- mgr\cos\alpha}_{L_0}$$

Циклич. перемен: t и обоб. коорд.

φ - циклическая $\rightarrow P_\varphi = const$, $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2 \sin^2\alpha \cdot \dot\varphi = const$.

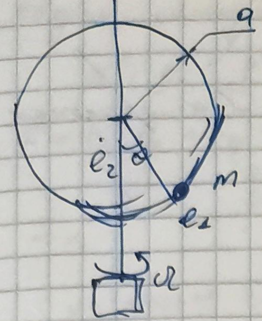
t - циклическая $\rightarrow H = const$, $H = L_2 - L_0 = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2 \sin^2\alpha \cdot \dot\varphi^2) + mgr\cos\alpha =$

Замечание в нашей задаче $H = E_k + E_n = T + U = const = E = const$.

Если все связи стацион. $\rightarrow$ обоб. энергия всегда будет давать $T + U$.

② $L = ?$

$\int$ движ. $= ?$



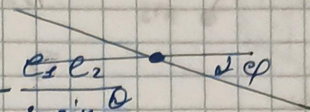
$g = 0$

Рассм. сф. ск. (r, φ, θ)

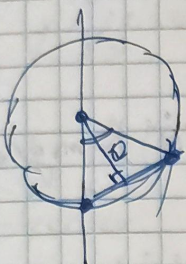
Связи: $r = a$ обобщ. коорд: θ

$\dot{\varphi} = \Omega$ $s = 1$

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0$$



$$L = \frac{m}{2}\left(a^2 \sin^2\theta\, \Omega^2 + a^2 \dot{\theta}^2\right) - \frac{e_1 e_2}{2a \sin\frac{\theta}{2}}$$



$\dot{\varphi} = \Omega$

t – циклич. $\to H = const$

$$\Rightarrow H = \frac{ma^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{ma^2 \sin^2\theta\, \Omega^2}{2} + \frac{e_1 e_2}{2a \sin\frac{\theta}{2}} = E = const.$$

$H \neq T + U$, но $H = const.$

③ Частица массы m в 3d под действ. пост. силы F.

Обоб. коорд: $\vec{r} \in R^3$

$$T = \frac{m v^2}{2}; \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

$$U = -(\vec{F} \cdot \vec{r}) \Longrightarrow L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + (\vec{F} \cdot \vec{r})$$

t – цикл: $H = \frac{m\vec{v}^2}{2} + (\vec{F} \cdot \vec{r}) = T + U = const.$

Введём декартову с.к. (x, y, z), так, чтобы

$Oz \uparrow\uparrow \vec{F}$, чтобы

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + F_x \cdot x + F_y \cdot y + F_z \cdot z$$

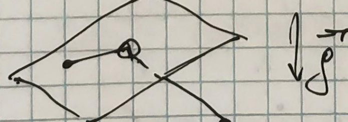
$F_z = |\vec{F}| = F$

$F_x = F_y = 0.$

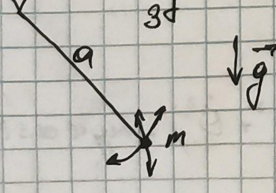
x - циклич. $\Rightarrow P_x = const$, $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

y ... $\Rightarrow P_y = const$, $p_y = m\dot{y}$

Д/з: 1) интегр?



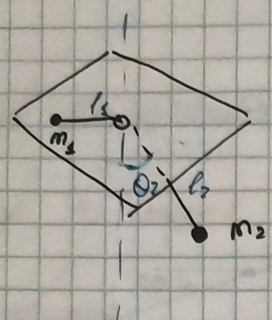
2)



$L = ?$
инт. дв. – ?

3) $U = -(\vec{F} \cdot \vec{r})$ в цилиндр. сист. коорд. + С/р

Домашняя работа.

① 

$l_1 + l_2 = l$

m_1 – полярная (ρ_1, φ_1)

m_2 – сферическая $(r_2, \varphi_2, \theta_2)$

Из 1-й практики.

Обобщ. коорд: $(\varphi_1, \underline{\underline{r_2}}, \varphi_2, \underline{\underline{\theta_2}})$

$$U = m_2 g h_2 = -m_2 g r_2 \cos\theta_2$$

$$T_1 = \frac{m_1}{2}\left(\dot r_2^2 + (l - r_2)^2 \dot\varphi_1^2\right)$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}\left(\dot r_2^2 + r_2^2 \sin^2\theta_2 \dot\varphi_2^2 + r^2 \dot\theta_2^2\right)$$

$$L = T_1 + T_2 - U = \frac{m_1}{2}\left(\dot r_2^2 + (l - r_2)^2 \dot\varphi_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot r_2^2 + r_2^2 \sin^2\theta_2 \dot\varphi_2^2 + r^2\dot\theta^2\right) + m_2 g r_2 \cdot \cos\theta_2$$

t – цикл. $\to H = const = L_2 - L_0$

$$L = \frac{m_1}{2}\dot r_2^2 + \frac{m_1}{2}\dot\varphi_1^2 (l - r_2)^2 + \frac{m_2}{2}\dot r_2^2 + \frac{m_2}{2} r_2^2 \sin^2\theta_2 \dot\varphi_2^2 + \frac{m_2}{2} r^2 \dot\theta^2 + m_2 g r_2 \cos\theta_2$$

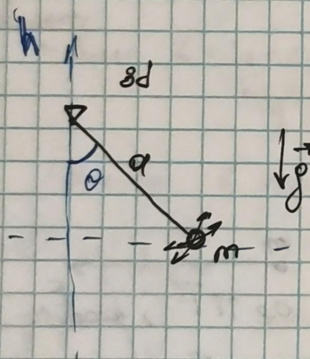
$$(1) \Rightarrow H = \frac{m_1}{2}\left(\dot r_2^2 + \dot\varphi_1^2 (l - r_2)^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot r_2^2 + r_2^2 \sin^2\theta_2 \dot\varphi_2^2 + r^2\dot\theta^2\right) - m_2 g r_2 \cos\theta_2 = const$$

φ_1 и φ_2 – циклич.:

$$(2) \quad p_{\varphi_1} = m_1 (l - r_2)^2 \dot\varphi_1 = const$$

$$(3) \quad p_{\varphi_2} = m_2 r_2^2 \sin^2\theta_2 \cdot \dot\varphi_2 = const$$

(1), (2), (3) – интегралы движения

② 

$L = ?$

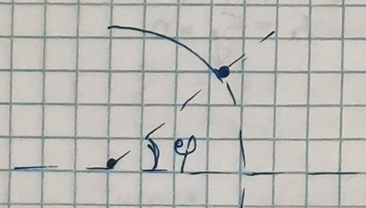
Инт. движ – ?

Связь $\to$ $r = a$.

Сферические (обобщённые) координаты: $r = a$, θ, φ

$s = 2 \quad (\theta, \varphi)$

$$T = \frac{m}{2}\left[a^2 \sin^2\theta \dot\varphi^2 + a^2\dot\theta^2\right] = \frac{m}{2}a^2\left(\sin^2\theta\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\right)$$



$$U = -mg\, a\cos\theta$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}a^2\left(\sin^2\theta\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\right) + mga\cos\theta$$

(1) φ – циклич.

$$\Rightarrow p_\varphi = ma^2 \sin^2\theta \dot\varphi = const$$

(2) t – циклич: $H = L_2 - L_0 = const$

$$H = T + U = \frac{m}{2}a^2\left(\sin^2\theta\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\right) - mga\cos\theta = const$$

③ Задача 3 из практики $U = -(\vec F \cdot \vec r)$ в цилиндр. коорд.

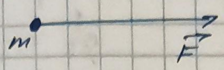
$$L = \frac{m\vec v^2}{2} + (\vec F \cdot \vec r)$$

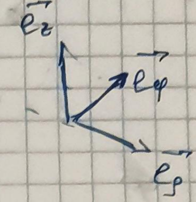
Введём цилиндрическую систему координат: (ρ, φ, z)

$Oz \uparrow\uparrow \vec{F}$

$$v^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2$$

$$\vec F = \underbrace{F_\rho}_{0} \cdot \vec e_\rho + \underbrace{F_\varphi}_{0} \cdot \vec e_\varphi + F_z \cdot \vec e_z = F_z \cdot \vec e_z = F_z \cdot \vec k$$





$\vec r =$

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$
$z = z$

$$\vec r = \rho\cos\varphi\,\vec i + \rho\sin\varphi\,\vec j + z\vec k$$

$$\Rightarrow (\vec F \cdot \vec r) = F_z \cdot z$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + F_z \cdot z$$

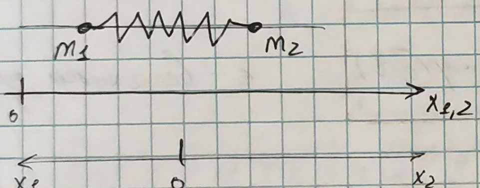
(1) φ – циклич.:
$$P_\varphi = m\rho^2\dot\varphi$$

(2) t – циклич. $\quad H = L_2 - L_0 = const$

$$L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - F_z \cdot z = const.$$

2.03.22

(1)



2 частицы – 2 координаты

$$T = \frac{m_1\dot x_1^2}{2} + \frac{m_2\dot x_2^2}{2}$$

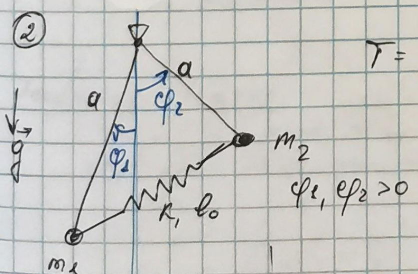
$$U = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$$

$$l = |x_2 - x_1|$$

$$l = |x_1 + x_2|$$

$$L = T - U = \frac{m_1\dot x_1^2}{2} + \frac{m_2\dot x_2^2}{2} - \frac{k}{2}(|x_2 - x_1| - l_0)^2$$

(2)



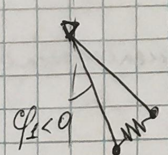
$\varphi_1, \varphi_2 > 0$

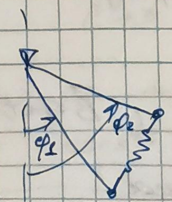
$$T = \frac{m_1}{2}(a\dot\varphi_1)^2 + \frac{m_2}{2}(a\dot\varphi_2)^2$$

$$U = mgh \; ; \; h_1 = -a\cos\varphi_1$$

$$U = -m_1 g a\cos\varphi_1 - m_2 g a\cos\varphi_2 + \frac{k}{2}\Big(\underbrace{2a\sin\frac{|\varphi_2+\varphi_1|}{2} - l_0}_{\text{отк. равновес. ор.}}\Big)^2$$

$$\Rightarrow L = T - U.$$



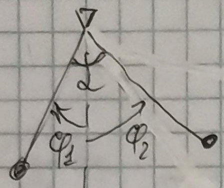


$$l = 2a\sin\frac{|\varphi_2 - \varphi_1|}{2}$$

(2) $\rightarrow$ (1)

$k \rightarrow \infty$

(2)



связь: $\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha$

$$\varphi_2 = \alpha - \varphi_1$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\dot{\varphi}_1$$

Из (2) $\rightarrow$ $\varphi \equiv \varphi_1$

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} a^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_1 g a \cos\varphi_1 + m_2 g a \cos(\alpha - \varphi_1)$$

Функция Лагранжа и интегралы движения заряженной частицы в заданном электромагн. поле.

Описание ЭМ поля:

1) напряжённость $\vec{E}$ и $\vec{B}$

2) потенциалы: $\varphi(\vec{r}, t)$

$\vec{A}(\vec{r}, t)$ – векторный потенциал

$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (CGSE), c – ск-ть света в вакууме

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

$$\Rightarrow \boxed{L = \underbrace{\frac{m\vec{v}^2}{2}}_{L_2} + \underbrace{\frac{e}{c}\left(\vec{A}(\vec{r}, t)\cdot\vec{v}\right)}_{L_1} \underbrace{- e\cdot\varphi(\vec{r}, t)}_{L_0}}$$, e – величина заряда

Обобщённый импульс.

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}}$$

Обозначение:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \nabla = \mathrm{grad}$$

Обобщённая энергия:

$$\boxed{H = L_2 - L_0 = \frac{m\vec{v}^2}{2} + e\varphi}$$

Задачник. Коткин, Сербо (задачи по классич. механике) изд. 1977 г.

4.16а $\varphi = 0$

$\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{b}\times\vec{r}]$; $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{b}$

Интегр. движения?

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{2c}\left([\vec{b}\times\vec{r}]\cdot\vec{v}\right)$$

t циклическая $\Rightarrow H = const$

$$E = \frac{m\vec{v}^2}{2} = const.$$

декартова с.к. $oz \uparrow\uparrow \vec{b}$

$$b_x = b_y = 0 \qquad b_z = |\vec{b}| = b$$

$$[\vec{b} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ 0 & 0 & b \\ x & y & z \end{vmatrix} = -yb\,\vec{x}^0 + xb\,\vec{y}^0$$

$$[\vec{b} \times \vec{r}] \cdot \vec{v} = -yb \cdot \dot{x} + xb\,\dot{y}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eb}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

z циклич. $\Rightarrow p_z = const$

$$p_z = \frac{\partial L}{\dot{z}} = m\dot{z} = const.$$

Вводим цилиндр. с.к. (ρ, φ, z)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \rho\cos\varphi(\dot{\rho}\sin\varphi - \rho\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) - \rho\sin\varphi \cdot (\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) =$$

$$= \cancel{\rho\dot{\rho}\cos\varphi\sin\varphi} - \rho^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi} - \cancel{\rho\dot{\rho}\cos\varphi\sin\varphi} +$$

$$\cancel{+\rho^2\sin^2\varphi\dot{\varphi} = \rho^2\dot{\varphi}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = -\rho^2\cos 2\varphi \cdot \dot{\varphi}}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eb}{2c}\rho^2\dot{\varphi}$$

$\Rightarrow \varphi, z$ – циклич. $+ t$ циклич.

$$p_\varphi = const = m\dot{\varphi} \cdot \rho^2 + \frac{eb}{2c}\rho^2 = \rho^2\left(m\dot{\varphi} + \frac{eb}{2c}\right)$$

$$p_z = const = m\dot{z}$$

__Теорема Нётер.__

Пусть действие системы S инвариантно относительно группы бесконечно малых преобразований:

$$\text{преобразн.} \begin{cases} q_i' = q_i + \varepsilon \cdot X_i(q, t) \\ t' = t + \varepsilon \cdot T(q, t) \end{cases}$$

где $X_i()$, $T()$ – заданные функции, а $\varepsilon \to 0$ – малый параметр.

Тогда

$$\boxed{\sum_{i=1}^{s} p_i X_i(q, t) - H \cdot T(q, t) = const}$$

интеграл движения.

Д/з*: 1) как в 1й задаче

а) $A_x = 0$, $A_y = xB$, $A_z = 0$ || $\varphi = 0$, $B \in R = const$

б) $A_x = -yB$, $A_y = A_z = 0$ || инт. движения по максимуму!

Домашняя работа.

а) $\vec{A} = xB\vec{y^0}$

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec{A}\cdot\vec{v}) - 0, \quad \varphi = 0$$

t - циклич., $H = const$ $\Rightarrow E = \frac{m\vec{v}^2}{2}$ - инт. движ.

• Декартова с.к. (x, y, z):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}\cdot xB\cdot\dot{y} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{c}\cdot x\dot{y}$$

$p_y = const$, $p_z = const$; y и z ~ циклич.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} p_y &= m\dot{y} + \frac{eB}{c}x = const \\ p_z &= m\dot{z} = const \end{aligned}\right\} \text{ инт. движ.}$$

• Цилиндрическая (ρ, φ, z)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Bigg\| \quad \begin{aligned} \dot{y} &= \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ x\dot{y} &= \rho\cos\varphi(\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi) = \rho\dot{\rho}\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi \end{aligned}$$

$$\vec{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{c}\cdot\rho\cos\varphi(\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi) =$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{c}\left(\frac{1}{2}\rho\dot{\rho}\sin2\varphi + \rho^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi\right)$$

$p_z = const$, ; z - циклич.

$p_z = m\dot{z} = const$ - инт. движ.

• Сферическая с.к. (ρ, φ, θ)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \Bigg\| \quad \begin{aligned} \dot{y} &= \dot{\rho}\sin\varphi\sin\theta + \rho\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot\dot{\varphi} + \rho\sin\varphi\cos\theta\cdot\dot{\theta} \\ x\dot{y} &= \rho\dot{\rho}\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\dot{\theta}\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

~ сложнее с циклич. коорд. (меньше)

б) $\vec{A} = -yB\vec{x^0}$

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec{A}\cdot\vec{v})$$

t - циклич., $H = const$ $\Rightarrow E = \frac{m\vec{v}^2}{2}$ - инт. движ.

• Декартова с.к. (x, y, z):

$$L = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - \frac{eB}{c}\cdot y\dot x$$

$p_x = const$, $p_z = const$: x и z - циклич.

$$\left.\begin{aligned} p_x &= m\dot x - \frac{eB}{c}\cdot y = const \\ p_z &= m\dot z \end{aligned}\right\} \text{инт. движ.}$$

• Цилиндрическая с.к. (ρ, φ, z)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \begin{aligned} \dot x &= \dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi \\ y\dot x &= \rho\sin\varphi(\dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi) \end{aligned}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - \frac{eB}{c}\cdot\rho\sin\varphi(\dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi) =$$
$$= \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - \frac{eB}{c}\left(\frac{1}{2}\rho\dot\rho\sin2\varphi - \rho^2\dot\varphi\sin^2\varphi\right)$$

z - циклич. коорд., $p_z = const$

$p_z = m\dot z = const.$ - инт. движения

• Сферическая с.к. (ρ, φ, θ)

- кроме $H = const$ нет инт. движ.

9.03.22.

4.12. Найти интегралы движ., если S инвар. отн. заданной группы беск. малых преобразований.

а) сдвига по обоб. координате q_{i_0}

$$\begin{cases} q_{i_0}' = q_{i_0} + \varepsilon\cdot 1 \\ q_{i\neq i_0}' = q_i + \varepsilon\cdot 0 \\ t' = t + \varepsilon\cdot 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad X_i = \begin{cases} 1, & i = i_0 \\ 0, & i \neq i_0 \end{cases} = \delta_{ii_0}$$

т. Нётер $\begin{cases} q_i' = q_i + \varepsilon X_i(q,t) \\ t' = t + \varepsilon\tau(q,t) \end{cases}$

символ Кронекера

$\tau = 0$

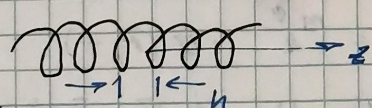
По теореме Нётер: $\sum_i p_i X_i - \underbrace{H\cdot\tau}_{0} = \sum_i p_i\delta_{ii_0} = p_{i_0} = const$

обобщенная коорд. => q_{i_0} - циклич.

б) сдвига по времени: $\begin{cases} q_i' = q_i + \varepsilon\cdot 0 \\ t' = t + \varepsilon\cdot 1 \end{cases}$ $\quad X_i = 0, \quad \tau = 1.$

$=> \sum_i p_i X_i - H\cdot\tau = -H = const$ (экв. цикличности времени)

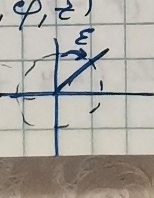
в) винтового сдвига:



$$\begin{cases} \rho' = \rho + \varepsilon\cdot 0 \\ \varphi' = \varphi + \varepsilon\cdot 1 \\ z' = z + \varepsilon\cdot\frac{h}{2\pi} \\ t' = t + \varepsilon\cdot 0 \end{cases}$$ - поворот на ε. Как изменится z?

В цилиндр. с.к. (ρ, φ, z)

сдвиг на h



(ε - угол поворота в радианах)

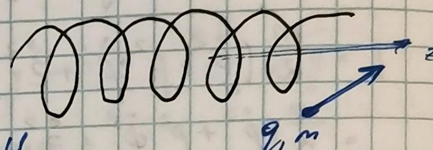
Будет наоборот ε-доля от полного оборота, тогда

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi + \varepsilon \cdot 2\pi \\ z' = z + \varepsilon \cdot h \end{cases}$$

$$X_\rho = 0, \quad T = 0, \quad X_\varphi = 2\pi, \quad X_z = h$$

$$\sum p_i X_i - H \cdot T = 2\pi p_\varphi + h p_z = const$$

① Пример: Движение заряж. частицы в поле равном. заряженной винт. линии. Найти интегралы движения.



Вводим цилиндр. с.к.:

$$L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - \underbrace{U(\rho,\varphi,z)}_{\text{инвар. отн. винт. сдвига}} = T - U$$

Инвариантность действия: требуем $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ не изменяется при преобр.

треб.: $L(q, \frac{dq}{dt}, t)\cdot dt = L(q', \frac{dq'}{dt'}, t')\,dt'$

В нашей задаче: $dt' = dt$

Кин. энергия $= \frac{m\bar v^2}{2}$ — инвариантно отн. винтового сдвига.

Потенц. энергия $U(\rho,\varphi,z)$ тоже инвариантна (т.к. создается винтом)

$\Rightarrow L\,dt$ — инвар. отн. винт. поворота.

$\Rightarrow$ т-ма Нётер выполн.

$$\Rightarrow \sum p_i X_i - H\cdot T = 2\pi p_\varphi + h p_z = const$$

Имеем след. инт. дв.: 1) t — циклич. $\Rightarrow H = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + U = E = const$

2) $2\pi p_\varphi + h p_z = const$

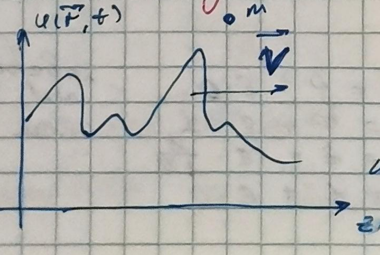
$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi, \quad p_z = m\dot z$$

$$2\pi\cdot m\rho^2\dot\varphi + hm\dot z = const$$

$$\Downarrow \quad 2\pi\rho^2\dot\varphi + h\dot z = const \quad \text{— инт. дв.}$$

---

②**: Найти инт. движ. в поле стационарно бегущей волны



$$L = \frac{m\bar v^2}{2} - U(\bar r, t)$$

$$U(\bar r, t) = U_0(\bar r - \bar V t)$$

или

$$U(x,y,z,t) = U_0(x, y, z - Vt, t)$$

Ищем инвар. преобр.: $\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + \varepsilon \cdot \vec{X} = ? \\ t' = t + \varepsilon \cdot \tau = ? \end{cases}$ Чтобы применить теорему Нётер.

(*) $\Downarrow$

$$\begin{cases} z' = z + \varepsilon X_z = ? \\ t' = t + \varepsilon \cdot \tau \end{cases}$$

Сведем до класса H-инвар., чтобы обеспеч. инв. $L \Rightarrow$ обеспеч. инвар. $U(\vec{r}, t)$.

Надо записать $\vec{X}$ и τ (или X_z и τ) таким образом, чтобы конструкция $(\vec{r} - \vec{V}t)$ (или $z - Vt$) не изменялась под действием преобр. (*)

$$U(x, y, z) = U_0(x, y, z - Vt, t)$$

$$\begin{cases} x' = x + \varepsilon \cdot 0 \\ y' = y + \varepsilon \cdot 0 \\ z' = z + \varepsilon \cdot X_z \\ t' = t + \varepsilon \cdot \tau \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} X_z = V \\ \tau = 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} z' = z + \varepsilon \cdot V \\ t' = t + \varepsilon \cdot 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_z \cdot V - H = const \Leftarrow p_z \cdot V \cdot \tau - H\tau = const$$

$$L = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} - U(x, y, z, t) = \frac{m\dot{z}^2}{2} - U(x, y, z, t)$$

$$U(x, y, z, t) = U_0(x, y, z - Vt, t) = U_0(x', y', z' - \varepsilon V, t' - \varepsilon)$$

$$\cancel{U(\vec{r}' - \vec{V}t') =}$$

$$\cancel{\vec{r}' = \{x', y', z'\} (=}$$

Должно выполняться $z - Vt = z' - Vt'$

$$z - Vt = z + \varepsilon \cdot V - V \cdot (t + \varepsilon)$$

$$z - Vt = z + \varepsilon V - Vt - V\varepsilon$$

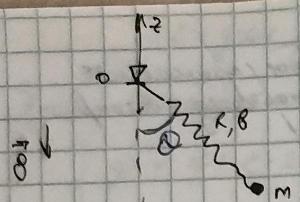
$$z - Vt = z - Vt \quad \text{— выполняется.}$$

$$p_z \cdot V - H = const$$

$$p_z = m\dot{z} \Rightarrow m\dot{z}V - H = const$$

$$H = L_2 - L_0 = \frac{m\dot{z}^2}{2} + U_0(x, y, z - Vt, t)$$

$$\Rightarrow m\dot{z}V - \frac{m\dot{z}^2}{2} + U_0(x, y, z - Vt, t) = const. \checkmark$$

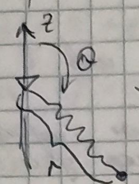


Дек. (x, y, z)

$$L = \underbrace{\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}_{T} - \underbrace{\left(mgz + \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - l_0\right)^2\right)}_{U}$$

Сферич (r, φ, θ) | t цикличн $\to H = const$, $H = T + U$

$z = -r\cos\theta$ | $H = L_2 - L_0$, $L = L_2 + L_1 + L_0$



$\to z = r\cos\theta$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \left(mgr\cos\theta + \frac{k}{2}(r - l_0)^2\right)$$

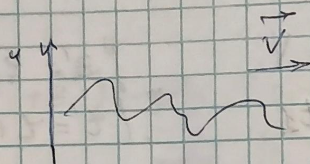
t цикл. $\to H = const$

φ - цикл. $\to$ $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}$

Д/З:

$U(\vec{r}, t) = U_0(\vec{r} - \vec{V}t)$

$L = \dfrac{m\vec{v}^2}{2} - U_0(\vec{r} - \vec{V}t)$



Найти группу беск. малых преобр., обесп. инвариантность L $\forall t$

$\vec{r}' = \vec{r} + \varepsilon\cdot V$

$t' = t + \varepsilon\cdot 1$

Ищем преобр. в классе $t' = t + const \to dt' = dt$

Треб. инвариантности L: $\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{d\vec{r}'}{dt}\right)^2 - U_0(\vec{r}' - \vec{V}t') = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - U_0(\vec{r} - \vec{V}t)$

$\vec{r}' - \vec{V}t' = \vec{r} + \varepsilon\vec{V} - \vec{V}(t + \varepsilon) \underset{\text{треб.}}{=} \vec{r} - \vec{V}t$ — обесп. инвар. потенц. эн.

$d\vec{r}' = d\vec{r} \Rightarrow \dfrac{m\vec{v}'^2}{2} = \dfrac{m\vec{v}^2}{2}$ → требование инвариантности выполнено

Инт.-дв. $\sum p_i X_i - H\tau = const$

$\vec{X} = \vec{V}$, $\tau = 1$.

$\vec{p}\vec{V} - H = const$

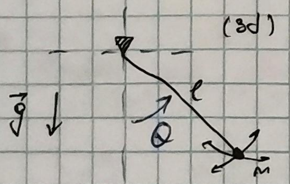
$\vec{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v}$; $H = \dfrac{m\vec{v}^2}{2} + U_0(\vec{r} - \vec{V}t)$

$m(\vec{v}\cdot\vec{V}) - \dfrac{mv^2}{2} - U_0(\vec{r} - \vec{V}t) = const$

16.03.22

Интегрир. в квадратурах для мех. систем с 2 ст. своб., цикличн. временем и цикличн. коорд. (метод "эффективной потенц. энергии")

Пр.



Сфер. ск. (r, θ, φ), связь $r = l$, обобщ. коорд. (θ, φ), $s = 2$

$$L = \frac{m}{2}(l^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta$$

φ и t – цикличн.

$\Rightarrow p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = const$

$H = const$

$$H = L_2 - L_0 = T + U = \frac{m}{2}\left(l^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2 + l^2 \dot\theta^2\right) - mgl\cos\theta$$

$$H = \frac{ml^2}{2}\dot\theta^2 + \frac{ml^2}{2}\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 - mgl\cos\theta = E = const$$

Из $p_\varphi = ml^2\sin^2\theta\,\dot\varphi \rightarrow \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}$

$$\Rightarrow H = \frac{ml^2}{2}\dot\theta^2 + \underbrace{\frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta}_{U_{эф.}(\theta)} = E = const$$

$U_{эф.}(\theta)$ ~ куда не входит скорость

$$\dot\theta = \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{ml^2}\left(E - U_{эф}(\theta)\right)}$$

$$t = \int dt = \pm\int \frac{\sqrt{\frac{ml^2}{2}}\cdot d\theta}{\sqrt{E - U_{эф}(\theta)}}$$ ~ решение в квадратурах.

"Провокация"

$$L_{?} = \underbrace{\frac{ml^2}{2}\dot\theta^2}_{L_2} + \underbrace{\frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta}}_{L_0} + \underbrace{mgl\cos\theta}_{L_0} \rightarrow H = L_2 - L_0 \neq \text{как в 1 случае}$$

– Неверно!

По опр-ю L - зависит только через обобщ. коорд.

→ не явл ф-ей Лагранжа

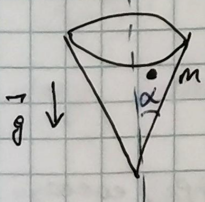
Честная $$L_{эф} = \frac{ml^2}{2}\dot\theta^2 - U_{эф}(\theta) \rightarrow H = L_2 - L_0 = \frac{ml^2}{2}\dot\theta^2 + U_{эф}(\theta)$$

~ ф-я Лагранжа одномерного движения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta} \rightarrow d\varphi = \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}dt \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi = \pm\dfrac{p_\varphi}{ml^2}\cdot\sqrt{\dfrac{ml^2}{2}}\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E - U_{эф}(\theta)}} \\ t = \pm\displaystyle\int\frac{\sqrt{\frac{ml^2}{2}}\cdot d\theta}{\sqrt{E - U_{эф}(\theta)}} \end{cases}$$

Д/З: То же самое для конического ведра. реш. в квадр.



Сферич. с.к. (r, θ, φ)

Обобщ. коорд. (r, φ)

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot\varphi^2\right) - mgr\cos\alpha$$

φ циклич. $\rightarrow p_\varphi = const$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = mr^2\sin^2\alpha\cdot\dot\varphi = const \rightarrow \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\alpha}$$

$$H = const = L_2 - L_0 = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot\varphi^2\right) + mgr\cos\alpha$$

$$H = \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\sin^2\alpha\cdot\frac{p_\varphi^2}{m^2r^4\sin^4\alpha} + mgr\cos\alpha =$$

$$= \frac{m\dot r^2}{2} + \underbrace{\frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha}_{U_{эф}(r)} = \frac{m\dot r^2}{2} + U_{эф}(r) = E = const$$

$$\frac{m\dot r^2}{2} = E - U_{эф}(r)$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}(E - U_{эфф}(r))$$

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф}(r))}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эфф}(r))}$$

$$dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dr}{\sqrt{(E - U_{эфф}(r))}} = \pm\frac{\sqrt{m}\,dr}{\sqrt{2(E - U_{эфф}(r))}}$$

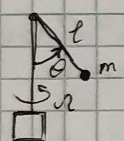
$$\Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\cdot\int\frac{dr}{\sqrt{E - U_{эфф}(r)}} \quad ✓$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\alpha} \quad \to \quad d\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\alpha}dt$$

$$✓ \begin{cases} \varphi = \pm\dfrac{p_\varphi}{\sqrt{2m}\,\sin^2\alpha}\displaystyle\int\frac{dr}{\sqrt{E - U_{эфф}(r)}\cdot r^2} \\ t = \pm\sqrt{\dfrac{m}{2}}\displaystyle\int\frac{dr}{\sqrt{E - U_{эфф}(r)}} \end{cases}$$

22.09.22

① Сферич. коорд. (r, φ, Θ)



$r = \ell$, $\dot{\varphi} = \Omega$, $\varphi = \Omega t + \varphi_0$; обобщ. коорд: Θ $(s=1)$

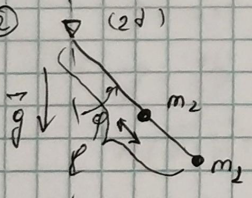
$$T = \frac{m}{2}(\ell^2\sin^2\Theta\cdot\Omega^2 + \ell^2\dot{\Theta}^2)$$

$U = mgh$, $h = -\ell\cos\Theta$

$$L = \frac{m}{2}(\ell^2\sin^2\Theta\cdot\Omega^2 + \underbrace{\ell^2\dot{\Theta}^2}_{L_2}) + mg\ell\cos\Theta$$

t циклич $\Rightarrow H = const$, $H = L_2 - L_0 = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\Theta}^2 - \frac{m}{2}\ell^2\sin^2\Theta\cdot\Omega^2 - mg\ell\cos\Theta$

② (2d) Полярные координаты: $\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2$



связи: $\rho_1 = \ell$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

Обобщ. коорд: (ρ_2, φ) $(s=2)$

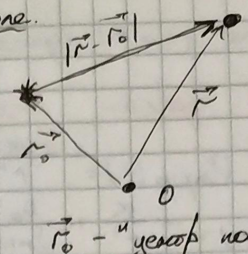
$$L = \frac{m_1}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2}(\rho_2^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}_2^2) + (m_1 g\ell + m_2 g\rho_2)\cos\varphi$$

t-циклич. $\Rightarrow H = const$, $H = L_2 - L_0 = T + U$

Движение в центральном поле.

Опр. Центральное поле $U(\vec{r}) = U(|\vec{r} - \vec{r}_0|)$, $\vec{r}_0$ — const

Не нарушая общности можем положить $\vec{r}_0 = 0$



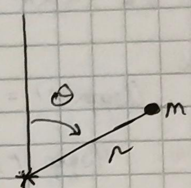
$\vec{r}_0$ — "центр поля"

Используется сферическая с.к.: (r, φ, θ)

$$|\vec{r}| = r \Rightarrow U = U(r)$$

Движение плоское → можем оставить 2 коорд. → (r, θ), $\varphi = const$.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$



θ цикл. $\Rightarrow p_\theta = const$, $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$

t цикл. $\Rightarrow H = const$

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{p_\theta^2}{2mr^2} + U(r)}_{U_{эф}(r)} = E \quad ; \quad U_{эф}(r) = U(r) + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{эф}(r))}$$

$$t = \int dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dr}{\sqrt{E - U_{эф}(r)}} \quad \checkmark$$

$$\theta = \int d\theta = \int\frac{p_\theta}{mr^2}dt = \pm\frac{p_\theta}{\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{эф}(r)}} \quad \checkmark$$

Пример.

2.8 $U = -\frac{\alpha}{r^n}$ 1) Возможно ли падение на центр?

$\alpha > 0$, $n > 0$

Замечание: при $n = 1$ — Ньютон.

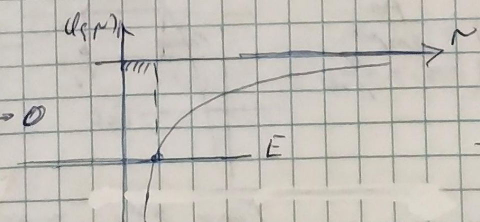
$$U_{эф}(r) = -\frac{\alpha}{r^n} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$$ | достижимо ли значение r_{ρ}?

"метод баланса энергии" $\underbrace{T}_{\geq 0} + U = E \Rightarrow U_{эф}(r) \leq E \Rightarrow$ достижимое значение r

0) $p_\theta = 0$, $U_{эф}(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$

$\Rightarrow$ да, достижимо $r \to 0$

$\Rightarrow$ "лобовое падение"



$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = 0$

— летит прям в Солнце.

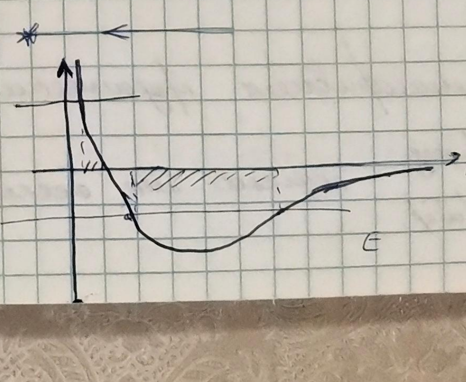
$\dot{\theta} = 0$, $\theta = const$

Далее $p_\theta \neq 0$

1) $0 < n < 2$; $U_{эф}(r) = -\frac{\alpha}{r^n} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$

$$U(r \to +\infty) \approx -\frac{\alpha}{r^n}$$

$$U(r \to +0) \approx \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$$

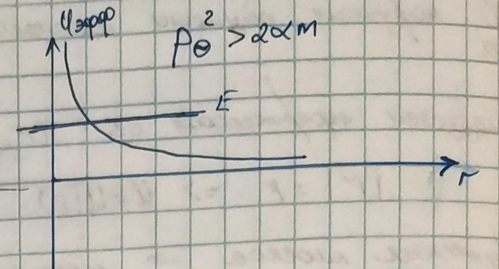


Центр поля ($r \to 0$) недостижим ни при каких конечных E.

Д/З: доделать пункты $n=2$, $n>2$

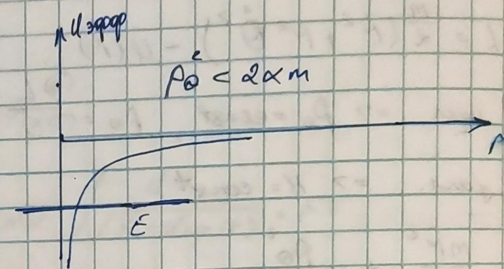
2) $n=2$. $U_{эфф}(r) = -\frac{\alpha}{r^n} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$

$\to U_{эфф}(r) = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} = \frac{p_\theta^2 - 2\alpha m}{2mr^2}$



не может

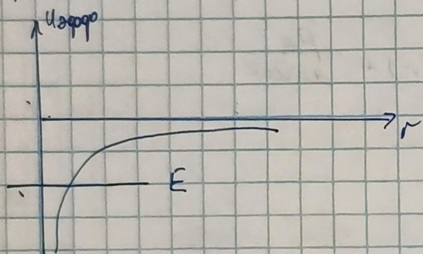
Если $p_\theta^2 < 2\alpha m \to r \to 0$ может



3) $n>2$.

$U_{эфф.}(r) = -\frac{\alpha}{r^n} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$

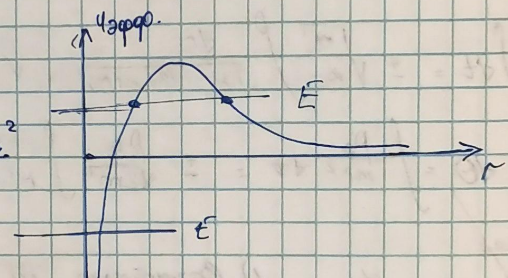
$p_\theta = 0$: $U_{эфф.}(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$



$r \to 0$ может быть

$p_\theta \neq 0$: $U_{эфф}(r) = -\frac{\alpha}{r^n} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$

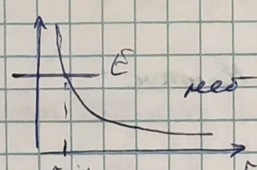
Пример $n=3$: $-\frac{\alpha}{r^3} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} = \frac{-\alpha \cdot 2mr + p_\theta^2}{2mr^3}$



$\lim\limits_{r\to+\infty} U_{эфф} = 0$: $r \to 0$ может быть.

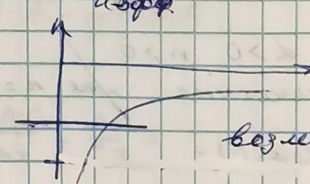
30.03.22. 2) $n=2$

$U_{эфф.} = \underbrace{\left(\frac{p_\theta^2}{2m} - \alpha\right)}_{\beta} \frac{1}{r^2}$



нет

$\beta > 0$



возможно.

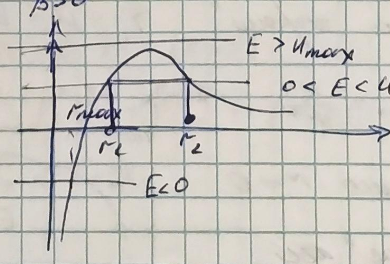
$\beta < 0$

$p_\theta^2 > 2m\alpha$

3) $n>2$.

$U_{эфф.}(r \to +\infty) \approx \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$

$U_{эфф.}(r \to +0) \approx -\frac{\alpha}{r^n}$



$r_{нач.} > r_2$ ~ нет падения.

$r_{нач.} < r_1$ ~ есть падение.

Рассматриваем продолжение этой задачи:

2.9. $t_{пад}$

$N_{обор.}$ конечно или бесконечно?

б)

$p_\theta = 0$ ⟶ * $t_{пад.}$ конечно
$N_{обор.} = 0$

1) $0 < n < 2$ — нет падения (не имеет смысла.)

2) $n = 2$: $U_{эф.}(r) = \frac{\beta}{r^2}$; $\beta = \frac{p_\theta^2}{2m} - \alpha$

Падение на центр: $\beta < 0$

$$t_{кон} - t_{нач} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{нач}}^{r_{кон}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{эф}(r)}}$$

$t_{нач.} = 0$; $t_{кон} = t_{пад}$
$r_{нач} = r_0$; $r_{кон} = 0$

$$t_{пад} = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0>0}^{0} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{эф}(r)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{E - \beta/r^2}}.$$

Рассм. случай $\frac{\beta}{r^2} >> E$
$0 < r < r_0$ => если $\frac{|\beta|}{r_0^2} >> E$, то выполнено для всех r под интегралом:

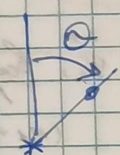
$r_0^2 << \frac{\beta}{E_{r_0}}$ – т.е. стартуем близко к центру поля.

$$=> t_{пад} \approx \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0 \frac{r\,dr}{\sqrt{-\beta}} = \sqrt{\frac{m}{2|\beta|}} \cdot \frac{r_0^2}{2}$$

~ для старта близко к центру – конечная велич.

=> для $\forall r_0$ – добир. до ц. конечн. время.

Число оборотов: $N_{об} = ?$



$$N_{об} = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

$$\underbrace{\theta_{кон} - \theta_{нач}}_{\Delta\theta = 2\pi N_{об}} = \pm \frac{p_\theta}{m}\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{нач}}^{r_{кон}} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{эф}(r)}}$$

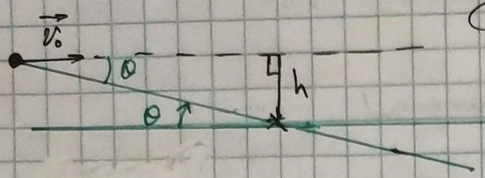
$$N_{обор.} = \frac{1}{2\pi} \frac{p_\theta}{\sqrt{2m}} \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{Er^4 - \beta r^2}}$$

$|\beta| r^2 >> E r^4$

$$N_{об} \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{p_\theta}{\sqrt{2m}\,|\beta|} \int_0^{r_0} \frac{dr}{r} = const \cdot (\ln r_0 - \underbrace{\ln 0}_{-\infty}) = +\infty$$

Д/з: При $n > 2$ разобраться.

Задача рассеяния



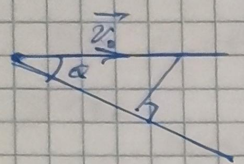
Дано: $r_{max} = \infty$

$|\vec{v}_0|$

h — прицельный параметр.

$p_\theta = m r^2 \dot{\theta}$; $\sin\theta = \frac{h}{r}$ $| \cdot d$ → $\cos\theta \, d\theta = -\frac{h}{r^2} dr$

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

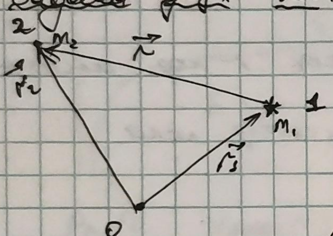


$dr = -v_0 \, dt \cos\theta$ ("−" приближается)

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h v_0}{r^2}$

$p_\theta = m|\vec{v}_0| h$

Задача двух тел:



Пот. энергия $U = U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$

$$L = \frac{m_1}{2}\vec{v}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2^{\,2} - U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$$

Переход в СО ЦМ

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Вводим $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

замена $(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \to (\vec{R}, \vec{r})$

$\vec{r}_{1,2}$, $\vec{v}_{1,2}$ выразить через $\vec{R}, \vec{r}$

$$(m_1+m_2)\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2(\vec{r} + \vec{r}_1) = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r} + m_2\vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r} = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

Обозн. $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}\right)^2 - U(|\vec{r}|) =$$

$$= \underbrace{\frac{m_1+m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2}_{L_R} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\vec{v}^{\,2} - U(|\vec{r}|)}_{L_r}$$

Ф-ии L_R и L_r по отдельности описывают невзаимодейств. подсистемы, (т.к. зависят от разных обобщённых координат.

1) $L_R = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\vec{R}}$

ур. Лагранжа $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_R}{\partial \dot{\vec{R}}}\right) - \left(\frac{\partial L_R}{\partial \vec{R}}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial L_R}{\partial \vec{R}}\right) = 0$

$$\frac{\partial L_R}{\partial \dot{\vec{R}}} = (m_1+m_2)\dot{\vec{R}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L_R}{\partial \dot{\vec R}}\right) = (m_1+m_2)\ddot{\vec R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec R(t) = \vec R_0 + \vec V t$$

сист. центра масс.

~ движение центра масс.

2) $L_r = \left\{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \mu\right\} = \frac{\mu}{2}\dot{\vec r}^2 - U(|\vec r|)$ ~ эквив. по форме ф-ии Лагранжа в центральном поле.

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ ~ приведённая масса.

Ф-я L_r описывает (относительное) движение частицы 2 в СО, привязанной к частице 1. (неинерциальной!)

Неинерциальность изменяет массу; μ вместо исходной m_2

Если $m_1 \gg m_2$

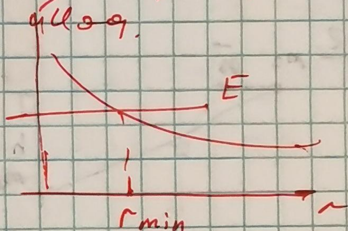
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + \cancel{m_2}} \approx m_2 \text{ (совп. с исходной)}$$

2.11. Частица массы m_2 налетает из $-\infty$ на изнач. покоящ-ся частицу m_1. Дано: v_0, h (прицельный параметр)

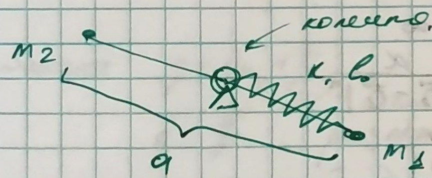
Найти: r_{min} ~ миним. расстояние между ними

Исп. все преобр-я.

$(v_0, h) \to E, p_\alpha \to U_{эф}(r)$. (учётом μ!) $\to$ min

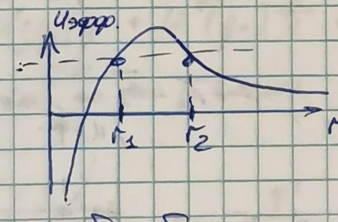


+ Доп.: (2д)
с.р.



L = ?
Ист. движ. – ?
Решение в квадр.?

№1. $t_{пад}$ – ? при $n > 2$.
$N_{об}$ – ?



$$U_{эфф}(r) = -\frac{\alpha}{r^n} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

Рассматриваем $r_{нач} < r_1$, чтобы было падение.

$t_{нач} = 0 \to t_{кон} = t_{пад}$.

$$t_{пад} = -\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{0}\frac{dr}{\sqrt{E + \frac{\alpha}{r^n} - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{r_0}\frac{dr}{\sqrt{E + \underbrace{\left(\frac{\alpha}{r^n} - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}\right)}_{g(r)}}} =$$

$$= \{g(r) \gg E\} \approx \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{r_0}\frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{r^n} - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}\right)}} \approx \{\text{Рассматриваем малые, когда } \frac{\alpha}{r^n} \gg \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

т.е. $r \to 0\} \approx$

$$\approx \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\int_0^{r_0} r^{\frac{n}{2}}\,dr = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\cdot\frac{r^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1}\Bigg|_0^{r_0} \to \text{получили конечное число.}$$

$t_{под}$ – конечное.

$$\Theta_{кон} - \Theta_{нач} = \pm \frac{p_\theta}{m}\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{r_{нач}}^{r_{кон}} \frac{dr}{r^2\sqrt{E + \frac{\alpha}{r^4} - \frac{p_\theta^2}{2mr^2}}}$$

$$\Delta\Theta = 2\pi N_{об}$$

$$N_{обор} = \frac{1}{2\pi}\frac{p_\theta}{\sqrt{2m}} \int\limits_0^{r_0} \frac{dr}{r^2\sqrt{E + \frac{\alpha}{r^4} - \frac{p_\theta^2}{2mr^2}}} = \frac{1}{2\pi}\frac{p_\theta}{\sqrt{2m}} \int\limits_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{Er^4 + \alpha \cdot r^{4-n} - \frac{p_\theta^2}{2m}r^2}}$$

=> 1) Если $n = 4 \;\rightarrow\; N_{об} \rightarrow +\infty$

2) Если $2 < n < 4$ $\quad Er^4 + \alpha \cdot r^{4-n} - \frac{p_\theta^2}{2m} r^2 > 0$

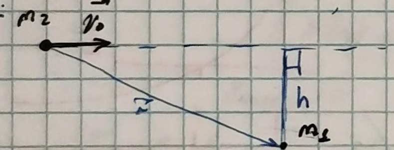
$$\alpha r^{4-n} \geq Er^4 - \frac{p_\theta^2}{2m} r^2$$

$$N_{обор} \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{p_\theta}{\sqrt{2m\alpha}} \int\limits_0^{r_0} r^{\frac{n-4}{2}} dr = \frac{p_\theta}{2\pi\sqrt{2m\alpha}} \cdot \frac{r^{\frac{n-2}{2}}}{n-2}\Bigg|_0^{r_0} \text{ – конечное}$$

3) Если $n > 4$

$$N_{обор} \simeq \frac{1}{2\pi}\frac{p_\theta}{\sqrt{2m}} \int\limits_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\alpha r^{4-n}}} = \frac{p_\theta}{2\pi\sqrt{2m\alpha}} \cdot \frac{r^{\frac{n-2}{2}}}{n-2}\Bigg|_0^{r_0} \text{ – конечное.}$$

№2.



Дано: $\vec{v}_1(t = -\infty) = 0$, h

$|\vec{v}_2(t = -\infty)| = v_0$

$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|\big|_{t=-\infty} = +\infty$

$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = + \frac{\alpha}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^n}$

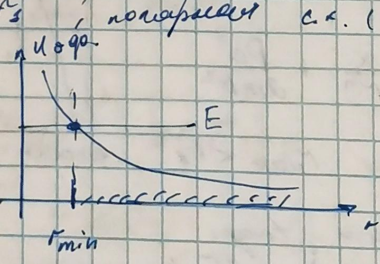
Найти: $r_{min} = ?$

$r_{min} = \min|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

Задача двух тел.

$L_{отн} = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, полярная с.к. (r, θ), $|\vec{r}| = r$

$U_{эфф.} = U(r) + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2}$



r_{min} – реш. ур-ния $U_{эф}(r) = E$

$p_{отн} = \mu r^2\dot{\theta} = \mu\, v_{отн}\, h_{отн}$ $\quad = h$

$|\vec{v}_{отн\,нач.}| = v_0$

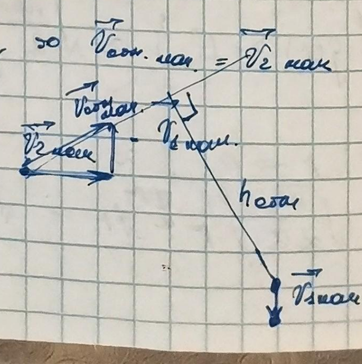
$U_{эф}(r) = E_{отн}.$

Вобщем случае:

$\vec{v}_{отн} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1$

$\vec{v}_{отн\,нач} = \vec{v}_{2нач} - \vec{v}_{1нач.}$, если $\vec{v}_{1нач.} = 0$, то $\vec{v}_{отн.нач} = \vec{v}_{2нач}$

$E_{отн} = \frac{\mu}{2}\vec{v}_{нач}^{отн\,2} + U_{эф}(\vec{r}_{нач}) \neq E_{исходной\ задачи}!$



$|\vec{v}_{нач}^{отн}| = v_0$, $r_{нач} = |\vec{r}_{2нач} - \vec{r}_{1нач.}| = +\infty$

$U_{эф.}(r_{нач}) = 0$

$$\Rightarrow E_{отн} = \frac{\mu v_0^2}{2}$$

$$\underbrace{\frac{\alpha}{r^n} + \frac{(\mu v_0 h)^2}{2\mu r^2} = \frac{\mu v_0^2}{2}}$$ → решаем отн. r $\Rightarrow r_{min}$.

6.04.22.

Малые колебания в автономных потенциальных системах с 1 степенью свободы.

Потенциальная система: $L = T - U$ ($U = U_0$ не содержит ск-ей)

Автономная $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_1 = 0$, $T_0 = 0 \Rightarrow T = T_2$.

$$\Rightarrow L = T_2 - U_0$$

С одной 1й ст. св.:

$$\underbrace{L(q, \dot q) = \frac{1}{2} a(q) \cdot \dot q^2 - U(q)}$$

Опр. Мал. колеб.: финитное движение в окрестности устойчивого полож. равновесия, описываемое линеаризованными ур-ями движения.

Анализ малых колебаний:

1. Положение равновесия → $U'(q) = 0 \Rightarrow q_0$
   $(\min U(q))$

Замена $q = q_0 + \xi$ — откл. от q_0

$\dot q^2 = \dot\xi^2$ разложение по степеням ξ

$$U(q) = U(q_0 + \xi) = \underset{\text{const (ни на что не влияет)}}{U(q_0)} + \underbrace{U'(q_0)}_{=0}\xi + U''(q_0)\frac{\xi^2}{2} + \ldots$$

$$a(q) = a(q_0 + \xi) = a(q_0) + \ldots$$

$$\checkmark \quad L(\xi, \dot\xi) = \underbrace{\frac{1}{2} a(q_0)\dot\xi^2 - U''(q_0)\frac{\xi^2}{2}} + O(\xi^3, \xi\dot\xi^2)$$

функция Лагранжа малых колеб-ий (м.к.)

Ур-е Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{мк}}{\partial \dot\xi}\right) - \frac{\partial L_{мк}}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial L_{мк}}{\partial \dot\xi} = a(q_0)\dot\xi \quad ; \quad \frac{\partial L_{мк}}{\partial \xi} = -2U''(q_0)\cdot\xi$$

$$\boxed{a(q_0)\ddot\xi + U''(q_0)\cdot\xi = 0} \cdot \frac{1}{a(q_0)}$$

→ ур-е движ-е малых колеб-ий.

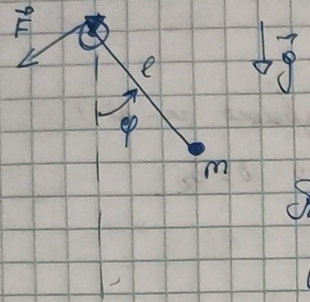
$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 , \qquad \boxed{\omega_0^2 = \frac{U''(q_0)}{a(q_0)}}$$

$$\xi(t) = \underline{C}\cos(\omega_0 t + \underline{\varphi_0})$$

$$\xi(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

Пример: Круговой маятник с внешним моментом

(2d)



Обобщ. коорд.: φ

$$T = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 , \quad U = -mgl\cos\varphi - M\varphi$$

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - U(\varphi)$$

Положение равновесия:

$$U'(\varphi) = mgl\sin\varphi - M = 0$$

$$\sin\varphi = \frac{M}{mgl} \equiv \gamma$$

Выбираем φ так, что пусть $M \geq 0$ ~ без нарушения общности.

Если $\gamma < 1$, то $\varphi_1 = \arcsin\gamma$, $\varphi_2 = \pi - \arcsin\gamma$ $\qquad \varphi \in (-\pi; \pi)$

Если $\gamma = 1$, то $\varphi_{1,2} = \frac{\pi}{2}$

Если $\gamma > 1$, с.р. нет

Рассм. φ_1. Замена $\varphi = \varphi_1 + \xi$

Сравн. с $L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q)$

$q \to \varphi \qquad a(q) = ml^2$

$$\omega_0^2 = \frac{U''(q_0)}{a(q_0)} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{U''(\varphi_1)}{ml^2}$$

$$U''(\varphi) = mgl\cos\varphi = mgl\left(\pm\sqrt{1-\gamma^2}\right)$$

$$U''(\varphi_1) = mgl\sqrt{1-\gamma^2}$$

$\varphi_1 = \arcsin\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\varphi_1 \geq 0 \Rightarrow$ берём „+"

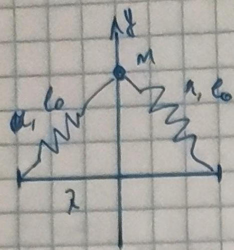
$$\omega_0^2 = \frac{mgl\sqrt{1-\gamma^2}}{ml^2} = \frac{g}{l}\sqrt{1-\gamma^2}$$

$$U''(\varphi_2) = -mgl\sqrt{1-\gamma^2}$$

$\omega_0^2 = -\frac{g}{l}\sqrt{1-\gamma^2} < 0$ ~ мнимая частота. ~ неустойчивое положение равновесия. → колебаний нет

Д/З: Исследовать малые колебания в системе.

Домашняя работа.



$y=0$? $\quad L = \frac{m}{2}\dot{y}^2 - U(y)$

$$U(y) = 2\cdot\frac{k}{2}\left(\sqrt{y^2+\lambda^2} - l_0\right)^2$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{y}^2 - k\left(\sqrt{y^2+\lambda^2} - l_0\right)^2$$

Положение равновесия:

$$U'(y) = 2k\left(\sqrt{y^2+\lambda^2} - l_0\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+\lambda^2}} = 0$$

$$2k\left(\sqrt{y^2+\lambda^2} - l_0\right)\cdot y = 0$$

$$y_0^2 + \lambda^2 = l_0^2 \to y_0^2 = l_0^2 - \lambda^2$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{l_0^2 - \lambda^2}$$

1) $\lambda < l_0$ → неустойчивое полож. равновесия.

2) $\lambda \geq l_0$ – устойчивое полож. равновесия.

$$U'(y) = 2ky - \frac{2kl_0 y}{\sqrt{y^2+\lambda^2}}$$

$$U''(y) = 2k - 2kl_0\left(\frac{\sqrt{y^2+\lambda^2} - y\frac{y}{\sqrt{y^2+\lambda^2}}}{y^2+\lambda^2}\right) = 2k - 2kl_0\left(\frac{\lambda^2}{(y^2+\lambda^2)^{3/2}}\right) =$$

$$= 2k\left(1 - \frac{l_0\lambda^2}{(y^2+\lambda^2)^{3/2}}\right)$$

Сравниваем с $L = \frac{1}{2}a(q)\cdot\dot{q}^2 - U(q)$

$$a(q) = m$$

а) $\lambda = l_0 \to y_0 = 0$

$$\Rightarrow U''(0) = 2k\left(1 - \frac{l_0^3}{(l^2)^{3/2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{U''(0)}{m} = 0$$

б) $\lambda > l_0$

$$\Rightarrow y_0 = \sqrt{l_0^2 - \lambda^2} \to y_0^2 = l_0^2 - \lambda^2$$

$$U''(y_0) = 2k\left(1 - \frac{l_0\lambda^2}{(l_0^2 - \lambda^2 + \lambda^2)^{3/2}}\right) = 2k\left(1 - \frac{l_0\lambda^2}{l_0^3}\right) = 2k\left(1 - \frac{\lambda^2}{l_0^2}\right)$$

$$\omega_0^2 = \frac{U''(y_0)}{m} = \frac{2k}{m}\left(1 - \frac{\lambda^2}{l_0^2}\right)$$

13.04.22. К матем. маятнику из прошлой практики

Если $\omega_0^2>0$ м.к. уст.

$\omega_0^2<0$ м.к. неуст.

$$\omega_0^2=\frac{U''(q_0)}{a(q_0)}$$

$$\omega_0^2=0 \to U'(q_0)=0$$

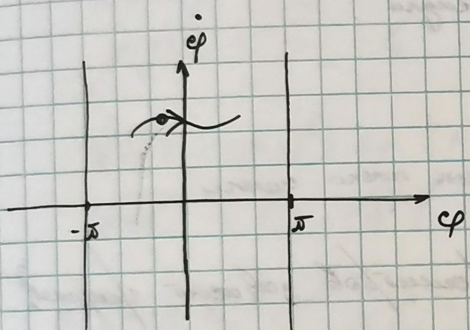
$$U(q_0+\xi)=\underbrace{U(q_0)}_{const}+\underbrace{U'(q_0)}_{0}\xi+\frac{1}{2}U''(q_0)\xi^2$$

$\omega_0^2=0$ — движение определяется следующими членами разложения $U(\xi)$ (старше ξ^2), колеб. малой амплитуды могут быть или не быть, но линеаризованными ур-ями (в рамках теории МК) они не описываются.

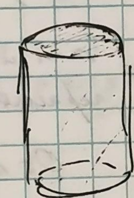
Круговой маятник с внешним моментом: фаз. плоскость:

$$L(\varphi,\dot\varphi)=\frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2-U(\varphi),\qquad U(\varphi)=-mgl\cos\varphi-M\varphi$$

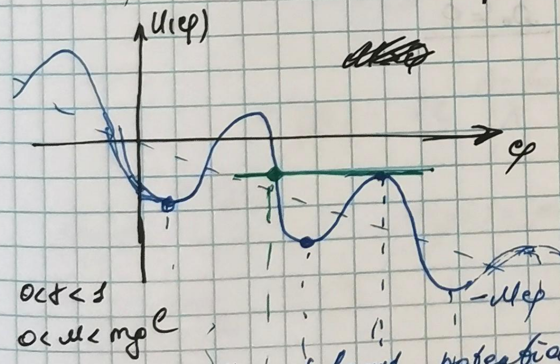
$H=const$ / $\frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2+U(\varphi)=E$ — рассм. как ур-ния кривых на плоскости $(\varphi,\dot\varphi)$ — фазовое пространство.



~ Фазовый цилиндр.



Построим семейство кривых и расставим стрелки

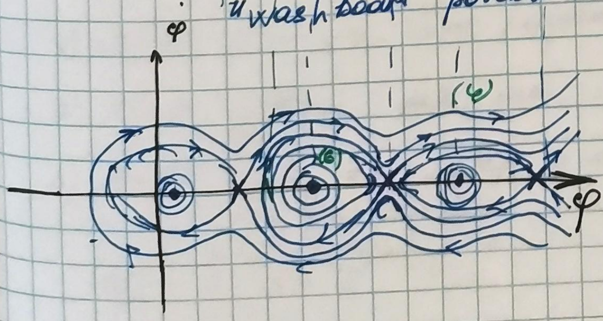


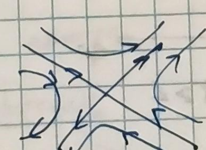
1) $\min U$ → с.р. „центр"
$\max U$ → с.р. "седло"
2) симметр. отн. оси абсцисс
3) $U(\varphi)\to\min \Rightarrow |\dot\varphi|\to\max$ и наоборот.
4) верхняя полупл-ть $\dot\varphi>0 \Rightarrow \varphi(t)$ возрастает — стрелки вправо, аналогично в нижней — влево

$0<\delta<1$

$0<M<mgl$

"washboard potential"





Период обращения $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$

Типы движений:

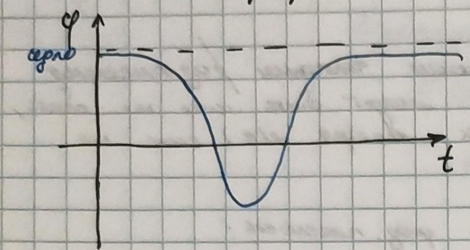
1) с.р. „центр" — устойчивое равновесие

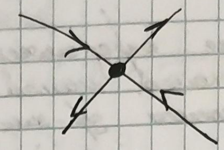
2) с.р. „седло" — неустойчивое

3) Замкн. траект. - колебания.

4) Инфинитное вращение.
Немонотонное ∠ ск-ть → ∞

5) Петля сепаратрисы. ~ полное время прохожд. = ∞





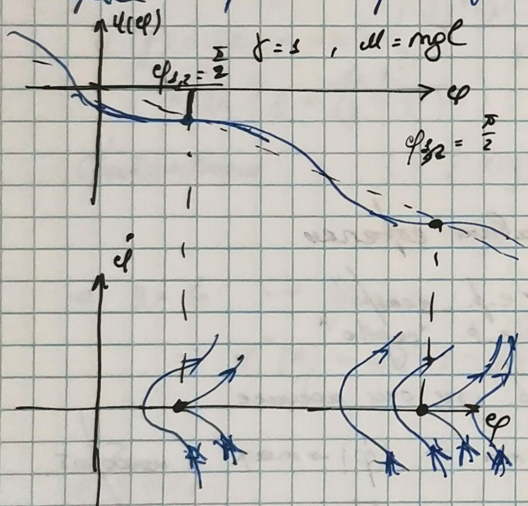
— 5 траекторий.

$\varphi_1 = \arcsin\gamma$ — "центр", $\omega_0^2 > 0$, $U''(\varphi_1) > 0$, $U \to min$

$\varphi_2 = \pi - \arcsin\gamma$ — "седло", $\omega_0^2 < 0$, $U''(\varphi_2) < 0$, $U \to max$

из $U'(\varphi) = 0$ => точки "подозрительные на экстремум".

Другой вариант: (промежуточный)



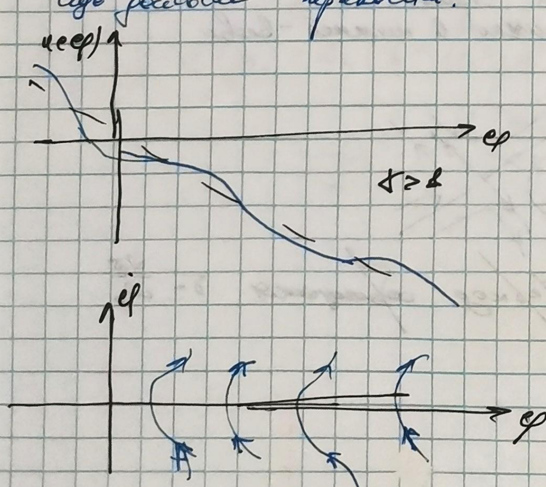
min и max нет, есть только точки перегиба

От каких параметров зависит график?

$$U''(\varphi_{1,2}) = U''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

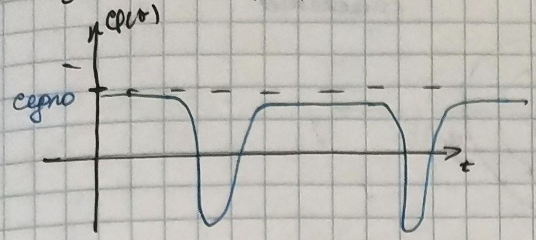
$\omega_0^2 = 0$

Ещё раньше перевесим:



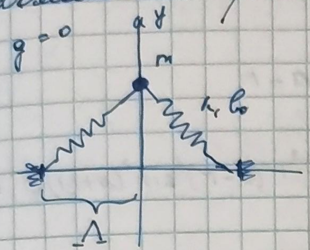
$M > mgl$

в) Близкая к сепаратрисе.



Несимметричное сильно нелинейное колебание.

Домашняя работа.



$$L(y,\dot y) = \frac{m\dot y^2}{2} - U(y)$$

$$U(y) = 2\cdot\frac{k}{2}\left(\sqrt{\Lambda^2+y^2}-l_0\right)^2$$

Полож. равнов. $U'(y)=0$

Ограничимся $y_0 = 0$ $\to y = y_0 + \xi$

$$U(y) = k(\sqrt{\dots}-l_0)^2 = k\left((\Lambda - l_0) + \frac{1}{2}\frac{y^2}{\Lambda} + o(y^4)\right)^2 =$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac12} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots$$

$$\sqrt{\Lambda^2+y^2} = \Lambda\left(1+\frac{y^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac12} = \Lambda\left(1+\frac{1}{2}\frac{y^2}{\Lambda^2} + o(y^3)\right) = \Lambda + \frac{1}{2}\frac{y^2}{\Lambda}$$

$$= k\left((\Lambda-l_0)^2 + \frac{\Lambda-l_0}{\Lambda}y^2 + o(y^4)\right)$$

$$U(y) = U(y_0) + \underbrace{U'(y_0)y}_{=0} + \frac{1}{2}U''(y_0)y^2 + o(y^4)$$

$$U''(y_0) = 2k\frac{\Lambda - l_0}{\Lambda}$$

$$\omega_0^2 = \frac{U''(y_0)}{a(y_0)}, \quad a(y_0) = m$$

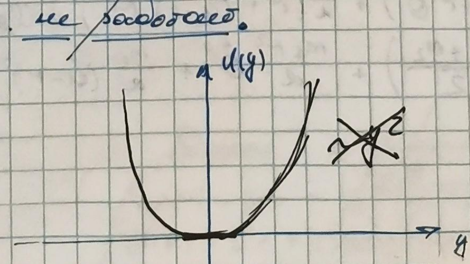
$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m}\frac{\Lambda - l_0}{\Lambda}$$

1) $\Lambda > l_0$, $\omega_0^2 > 0$ п.р. уст. (пружина натянута.)

2) $\Lambda < l_0$, $\omega_0^2 < 0$ п.р. неуст. (пружина сжата.)

3) $\Lambda = l_0$, $\omega_0^2 = 0$ метод м.к. не работает.

$$U(y) \overset{\Lambda = l_0}{=} k\left(\sqrt{l_0^2+y^2}-l_0\right)^2$$

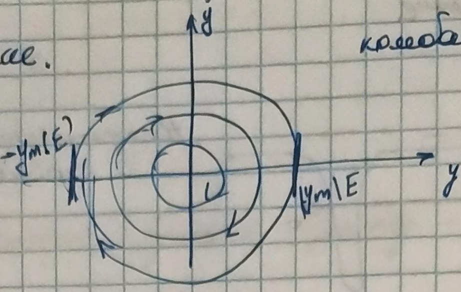


1) $y = 0$ - min

2) $U''(y=0) = 0$ - неквадратичный min

Колебания - негармонические.

$$T = 2\int_{-y_m(E)}^{+y_m(E)} \frac{\sqrt{m}\, dy}{\sqrt{2}\sqrt{E - U(y)}}$$ — период.



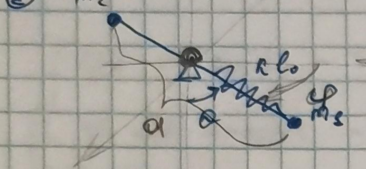
Д/З: задача с шариком.
+ для других полож. равнов. $y_{1,2} = \pm\sqrt{l_0^2 - 1^2}$ для $l_0 > 1$

Домашняя работа.

$r_2 = a - r$

31.

(2)



Сферическая с.к. (θ, φ, r)

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{r}^2 + (a-r)^2\sin^2(\pi+\theta)\,\dot{\varphi}^2 + (a-r)^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$U = \frac{k}{2}(l_0 - r)^2 - m_1 g r\cos\theta - m_2 g \overset{(a-r)}{\cancel{r}}\cos(\pi+\theta)$$

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{r}^2 + (a-r)^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + (a-r)^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$U = \frac{k}{2}(l_0 - r)^2 - m_1 g r\cos\theta + m_2 g(a-r)\cos\theta$$

$$L = T - U$$

φ - циклич.: $p_\varphi = const.$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m_1 r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} + m_2(a-r)^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = const$$

t - циклич.: $H = L_2 - L_0 = const = T + U$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{(m_1 r^2 + m_2(a-r)^2)\sin^2\theta}$$

$$H = T + U = E = const$$

$$H = \frac{m_1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \underbrace{\frac{m_1 r^2\sin^2\theta}{2}\cdot\frac{p_\varphi^2}{(m_1 r^2 + m_2(a-r)^2)^2\sin^4\theta}} + \frac{m_2}{2}\left(\dot{r}^2 + (a-r)^2\dot{\theta}^2\right) +$$

$$+ \underbrace{\frac{m_2(a-r)^2\sin^2\theta}{2}\cdot\frac{p_\varphi^2}{(m_1 r^2 + m_2(a-r)^2)^2\sin^4\theta} + \frac{k}{2}(l_0 - r)^2 - m_1 g r\cos\theta + m_2 g(a-r)\cos\theta}$$

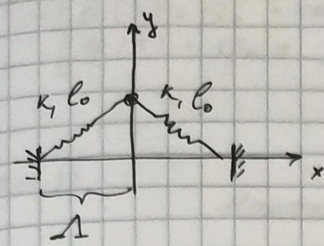
?

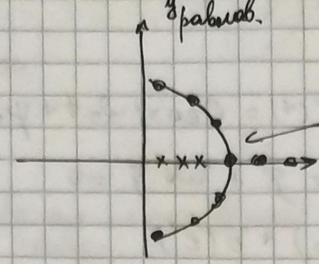
$$= U_{эф}(r)$$

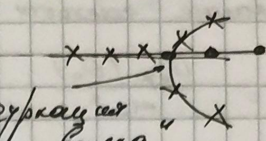
$$H = \frac{m_1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{r}^2 + (a-r)^2\dot{\theta}^2\right) + U_{эф}(r) = E$$

$$\dot{r}^2\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) + \frac{m_1 r^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2}(a-r)^2\dot{\theta}^2 = E - U_{эф}(r)$$

20.04.22. тоже м.б.







в $l_0 = \Lambda$ – п/р. – устойч.:

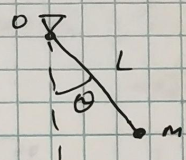
— × — неустойч. п/р.

— • — устойч. п/р.

Метод малых колебаний в применении к системам, сводящимся к 1 степ. свободы.

„Движение, близкое к окр-ти".

Пример: (3Д)



Обобщ. коорд: (θ, φ) $s=2$

Сфер. (r, θ, φ)

связь: $r = L$ $(\dot r = 0)$

$$L = \frac{mL^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) + mgL\cos\theta$$

φ-циклич $\to p_\varphi = mL^2\sin^2\theta\,\dot\varphi = const$

t-циклич: $M = L_2 - L_0 = \frac{mL^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) - mgL\cos\theta = \frac{mL^2}{2}\dot\theta^2 + \underbrace{\frac{p_\varphi^2}{2mL^2\sin^2\theta} - mgL\cos\theta}_{U_{эфф.}(\theta)} = E$

=> Перепишем ф-цию Лагранжа: $L_{1,1}(\theta, \dot\theta) = \frac{mL^2\dot\theta^2}{2} - U_{эфф}(\theta)$

t-цикл. => равно тот же з-н сохр. энергии → то же движение $\theta(t)$, что и нех L (перепис-е справедливо)

Применим метод МК с $L_{1,1}$,

сравн. с $L = \frac{1}{2}a(q)\dot q^2 - U(q)$

$q \mapsto \theta$, $a(q) \mapsto mL^2$, $U(q) \to U_{эф}(\theta)$

1) Положе-е равнов: $U'_{эф}(\theta) = 0 \to \theta_0$

↳ вернёмся к исход. системе

$\theta(t) = \theta_0 = const$

$\to \dot\varphi(t) = \frac{p_\varphi}{mL^2\sin^2\theta_0}$

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{p_\varphi t}{mL^2\sin^2\theta_0} \\ \theta = \theta_0 = const \end{cases}$$

Близкое к окружности

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{p_\varphi t}{mL^2\sin^2\theta_0} \\ \theta(t) = \theta_0 + C\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \end{cases}$$ ‼ !

} движе-е по окр-ти.

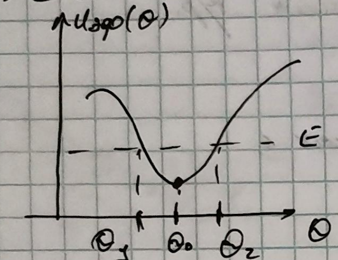
2) Отыскание частоты МК:

$$\omega_0^2 = \frac{U''_{эф}(\theta_0)}{mL^2}, \qquad \xi(t) = C\cos(\omega_0 t + \psi_0)$$

замена $\theta = \theta_0 + \xi \quad \to \ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$

$$\theta(t) = \theta_0 + C\cos(\omega_0 t + \psi_0) + O(C^2)$$

<u>Замечание</u>:

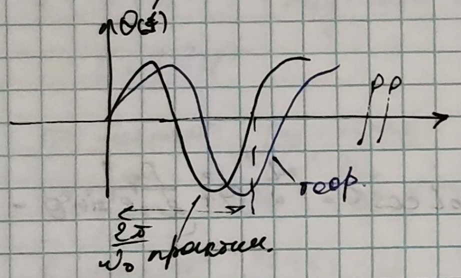


период колеб-ий -?

$$T = 2\sqrt{\frac{mL^2}{2}}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\sqrt{E - U_{эф}(\theta)}}$$

$U(\theta_1, \theta_2) = E \Rightarrow T = T(E)$

но в гармон. осцилл.: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$



$O(C)$ — уже не явл. малой велич.

$$\varphi(t) = \int \frac{p_\varphi}{mL^2\sin^2\theta(t)}dt = \int f(\theta(t))dt$$

$\theta(t) = \theta_0 + C\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$\theta(t) = \theta_0 + \xi(t)$

$f(\theta(t)) = f(\theta_0 + \xi(t)) = f(\theta_0) + f'(\theta_0)\cdot\xi(t) + O(\xi^2)$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \int[f(\theta_0) + f'(\theta_0)C\cos(\omega_0 t + \psi_0) + O(C^2)]dt = \varphi_0 + f(\theta_0)t + f'(\theta_0)\cdot\frac{C}{\omega_0}\sin(\omega_0 t + \psi_0) + \underline{O(C^2)} \ominus$$

↳ равномерно не всегда?

$$\ominus\ \varphi_0 + \frac{p_\varphi}{mL^2\sin^2\theta_0}t - \overbrace{\frac{2p_\varphi\cos\theta}{mL^2\sin^3\theta_0}}^{f'(\theta_0)}\cdot\frac{C}{\omega_0}\sin(\omega_0 t + \psi_0) + O(C^2)$$

$\theta(t) = \underbrace{\theta_0 + \ldots}_{\text{движ-е по окружности}}$; $\quad C\cos(\omega_0 t + \psi_0) + O(C^2)$

возмущение ~~вокр~~ движ-я по окр-ти

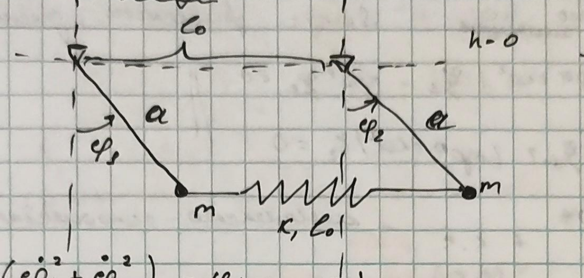
$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 = const \\ \varphi(t) = \varphi_0 + \dfrac{p_\varphi}{m\ell^2 \sin^2\theta_0} \end{cases}$$

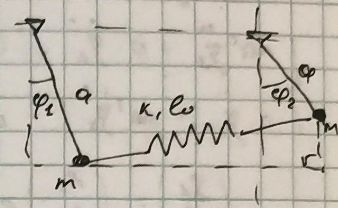
?

27.04.22.

Малые колебания с несколькими степенями свободы.

Пример: (2.1) $\vec{g}\downarrow$





$$L(\varphi_{1,2}, \dot\varphi_{1,2}) = \frac{ma^2}{2}\left(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2\right) - U(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = -mga(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) + \frac{k}{2}\left(\sqrt{(l_0 + a(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1))^2 + a^2(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)^2} - l_0\right)^2$$

Положение равновесия: $\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \varphi_1^0 = 0 \\ \varphi_2^0 = 0 \end{matrix}$ Зам. — есть и другие полож. равновесия.

Вводим отклонения: ξ_1 и ξ_2: $\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}^0 + \xi_{1,2}$.

Кин энергия $T = \frac{ma^2}{2}\left(\dot\xi_1^2 + \dot\xi_2^2\right)$

$\cos\xi = 1 - \frac{\xi^2}{2} + \ldots$

$\sin\xi = \xi + O(\xi^3)$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$

Разложение U в ряд по степеням ξ_1, ξ_2.

$$U(\xi_1, \xi_2) = -mga\left(1 - \frac{\xi_1^2}{2} + 1 - \frac{\xi_2^2}{2} + O(\xi^4)\right) + \ldots$$

$$\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 = \xi_2 - \xi_1 + O(\xi^3)$$

$$\left(l_0 + a(\xi_2 - \xi_1) + O(\xi^3)\right)^2 = l_0^2 + 2l_0 a(\xi_2 - \xi_1) + O(\xi^2)$$

$$(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)^2 = \left(-\frac{\xi_2^2}{2} + \frac{\xi_1^2}{2} + O(\xi^4)\right)^2 = O(\xi^4)$$

$$\sqrt{l_0^2 + 2l_0 a(\xi_2 - \xi_1) + O(\xi^2)} = l_0\sqrt{1 + 2\frac{a}{l_0}(\xi_2 - \xi_1) + O(\xi^2)} = l_0\left(1 + \frac{a}{l_0}(\xi_2 - \xi_1) + O(\xi^2)\right)$$

$$\Rightarrow U(\xi_1, \xi_2) = -mga\left(2 - \frac{\xi_1^2}{2} - \frac{\xi_2^2}{2} + O(\xi^4)\right) + \frac{k}{2}\left(a(\xi_2 - \xi_1) + O(\xi^2)\right)^2 =$$

$$= \cancel{const} + \frac{1}{2}mga(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{ka^2}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2) + O(\xi^3)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}\dot\xi_i\dot\xi_j, \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{ij} k_{ij}\xi_i\xi_j$$

$$\Rightarrow m_{ij} = \begin{pmatrix} ma^2 & 0 \\ 0 & ma^2 \end{pmatrix}$$

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} mga + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & mga + ka^2 \end{pmatrix}$$

$$L_{мк} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\,\dot\xi_i\,\dot\xi_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}\,\xi_i\,\xi_j$$

Ур-е движения (следуют из ур. Лагранжа): $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\xi_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0$

$$\left\{ \sum_j \left(m_{ij}\,\ddot\xi_j + k_{ij}\,\xi_j\right) = 0 \right. \quad \text{для каждого } i = 1, \dots, s$$

↓ идём построчно по матрицам ~ s штук уравнений, элементарный порядок системы $= 2s$.

$$\begin{cases} ma^2\ddot\xi_1 + 0\cdot\ddot\xi_2 + (mga + ka^2)\xi_1 - ka^2\xi_2 = 0 \\ 0\cdot\ddot\xi_1 + ma^2\ddot\xi_2 - ka^2\xi_1 + (mga + ka^2)\xi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix} e^{i\omega t} + \underset{(c.c.)}{к.с.}$$ — комплексно-сопряжённое

$$\begin{cases} -ma^2\omega^2 A_1 + (mga + ka^2)A_1 - ka^2 A_2 = 0 \\ -ma^2\omega^2 A_2 - ka^2 A_1 + (mga + ka^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

Чтобы было не 0-е решение $\underline{\Delta = 0}$

$|-m_{ij}\omega^2 + k_{ij}| = 0$ ~ характеристическое ур-е (ур-е собственных частот)

$$\begin{vmatrix} -ma^2\omega^2 + mga + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & -ma^2\omega^2 + mga + ka^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-ma^2\omega^2 + mga + ka^2)^2 = (ka^2)^2 \Rightarrow (-ma^2\omega^2 + mga + ka^2) = \pm ka^2$$

$$ma^2\omega^2 = mga + ka^2 \pm ka^2$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{a} \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{a} + \frac{2k}{m}$$ — собственные частоты.

Собственные векторы: $\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix} = ?$ ~ из той же системы

$\underline{\omega = \omega_1}$
$$\begin{cases} (-mga + mga + ka^2)A_1 - ka^2A_2 = 0 \\ -ka^2A_1 + ka^2A_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A_1 = A_2 \\ A_1 = A_2 \end{matrix}$$

↓ номер отн. к частоте

$\vec{A}^1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ~ для определённости

$\underline{\omega = \omega_2}$ $\quad (-mga - 2ka^2 + mga + ka^2)A_1 - ka^2A_2 = 0$

↓ $\quad A_1 = -A_2$

$\vec{A}^2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

<u>Общее решение:</u>

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = C_1\vec{A}^1 e^{i\omega_1 t} + C_2\vec{A}^2 e^{i\omega_2 t} + к.с. \;=$$

где $C_{1,2} \in \mathbb{C}$, $C_{1,2} = \frac{b_{1,2}}{2} e^{i\varphi_{1,2}}$ ($b_{1,2}$ — амплитуда, $\varphi_{1,2}$ — фаза)

$$= \frac{b_1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} + \frac{b_2}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)} + к.с. =$$

$$= b_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + b_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) =$$

$$= b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t + \psi_1\right) + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a} + \frac{2k}{m}}\, t + \psi_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \xi_1(t) = b_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t + \psi_1\right) + b_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a} + \frac{2k}{m}}\, t + \psi_2\right)$$

$$\xi_2(t) = b_1 \cos(\ldots) - b_2 \cos(\ldots)$$

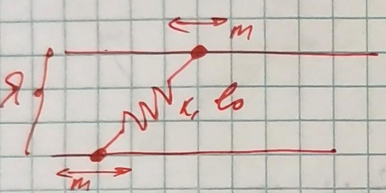
Д/З: 1) Найти частные решения: $b_{1,2}$ и $\psi_{1,2}$ – конст. интегр. для н.у.:

$$\xi_1(0) = C \qquad \dot\xi_{1,2}(0) = 0$$
$$\xi_2(0) = 0$$

Зам. $\psi_{1,2} = 0$, $b_{1,2} = ?$

+ получить решение в виде биений.

2) + аналогично 1уно часть как графике.



$\vec g = 0$; $\lambda > l_0$ → пружина всегда натянута.

~ решение до матриц m_{ij} – ? и k_{ij} – ?

положе. равнов. $x_1 = 0$
$x_2 = 0$

№1

н.у.: $\xi_1(0) = C$, $\xi_2(0) = 0$, $\dot\xi_{1,2}(0) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} \xi_1(t) = b_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t + \psi_1\right) + b_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a} + \frac{2k}{m}}\, t + \psi_2\right) \\ \xi_2(t) = b_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t + \psi_1\right) - b_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a} + \frac{2k}{m}}\, t + \psi_2\right) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(0) &= b_1 \cos\psi_1 + b_2 \cos\psi_2 = C \\ \xi_2(0) &= b_1 \cos\psi_1 - b_2 \cos\psi_2 = 0 \end{aligned}\right\} *$$

$$2b_1 \cos\psi_1 = 2b_2 \cos\psi_2 = C \quad \rightarrow \quad 2b_1 = 2b_2 = C \quad \rightarrow \quad b_1 = b_2 = \frac{C}{2}$$

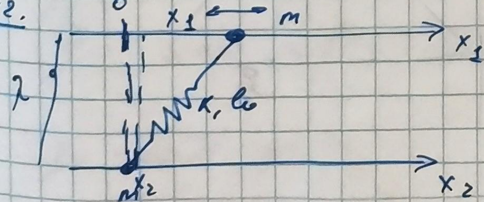
$$\left.\begin{aligned} \dot\xi_1(0) &= -b_1 \sqrt{\frac{g}{a}} \sin\psi_1 - b_2 \sqrt{\frac{g}{a} + \frac{2k}{m}} \sin\psi_2 = 0 \\ \dot\xi_2(0) &= -b_1 \sqrt{\frac{g}{a}} \sin\psi_1 + b_2 \sqrt{\frac{g}{a} + \frac{2k}{m}} \sin\psi_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow -2b_1 \sqrt{\frac{g}{a}} \sin\psi_1 = 0 \quad \text{и} \quad -2b_2 \sqrt{\frac{g}{a} + \frac{2k}{m}} \sin\psi_2 = 0$$

$$b_1, b_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_1, \psi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 = \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1(t) = \frac{C}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t\right) + \frac{C}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a} + \frac{2k}{m}}\, t\right) \\ \xi_2(t) = \frac{C}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t\right) - \frac{C}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a} + \frac{2k}{m}}\, t\right) \end{cases}$$

№2.



$\lambda > l_0$; m_{ij} и k_{ij} – ?

Положе. равновесия: $x_1 = 0$
$x_2 = 0$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot x_1^2 + \dot x_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(\sqrt{\lambda^2 + (x_1 - x_2)^2} - l_0\right)^2$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} m_{ij}\,\dot\xi_i\,\dot\xi_j \longrightarrow m_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\lambda\sqrt{1+\left(\frac{\xi_1-\xi_2}{\lambda}\right)^2} \approx \lambda\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1-\xi_2}{\lambda}\right)^2\right) + o(\xi^3) =$$

$$\approx \lambda\left(1+\frac{\xi_1^2}{2\lambda^2} - \frac{\xi_1\xi_2}{\lambda^2} - \frac{1}{2}\frac{\xi_2^2}{\lambda^2}\right) + o(\xi^3) =$$

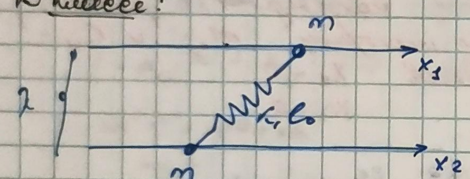
$$= \lambda + \frac{\xi_1^2}{2\lambda} - \frac{\xi_1\xi_2}{\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\xi_2^2}{\lambda} + o(\xi^3)$$

$$\frac{\kappa}{2}\left(\lambda + \frac{\xi_1^2}{2\lambda} - \frac{\xi_1\xi_2}{\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\xi_2^2}{\lambda} + o(\xi^3)\right)^2 \quad ?$$

$$\Rightarrow k_{ij} = ($$

4.05.22.

В классе:



$\lambda > l_0$

$$L(x_{1,2}, \dot x_{1,2}) = \frac{m}{2}(\dot x_1^2 + \dot x_2^2) - U(x_1, x_2),$$

$$U(x_1, x_2) = \frac{\kappa}{2}\left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+\lambda^2} - l_0\right)^2$$

Полож. равновесия: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ Любое положение $x_1 = a$, $x_2 = a$. явл. полож. равновес.

Рассм. полож. равн. при $a = 0$

Замена $x_{1,2} = \overset{\circ}{x}_{1,2} + \xi_{1,2}$

$$L(\xi_{1,2}, \dot\xi_{1,2}) = \frac{m}{2}(\dot\xi_1^2 + \dot\xi_2^2) - U(\xi_1, \xi_2), \quad U(\xi_1, \xi_2) = \text{то же самое}$$

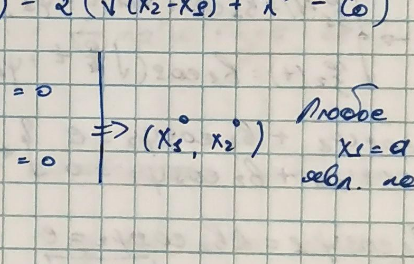
$$U(\xi_1, \xi_2) = \frac{\kappa}{2}\cdot\frac{\lambda - l_0}{\lambda}\cdot(\xi_2 - \xi_1)^2 + o(\xi^4) + \cancel{const}$$

$$U_{кв}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\kappa}{2}\cdot\frac{\lambda - l_0}{\lambda}\left(\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2\right)$$

$$m_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}; \quad k_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\kappa\,\frac{\lambda - l_0}{\lambda}$$

Второй путь решения: выделить движение центра масс заранее

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi + \eta \\ \xi_2 = \xi - \eta \end{cases} \quad \text{в некоторой } L$$



$$\Rightarrow L(\xi, \eta, \dot\xi, \dot\eta) = L_{цм}(\xi, \dot\xi) + L_{колеб.}(\eta, \dot\eta)$$

Нормальные колебания.

Теорема.
~ любая ф-я $L_{мл} \to L_{мк}(\eta, \dot\eta) = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\dot\eta_k^2}{2} - \frac{\omega_k^2\eta_k^2}{2}\right)$

→ s шт. невзаимодейств. подсистем.

замена $\xi \to \eta$.

$$\vec\xi = \sum \vec A^k \eta_k$$

$\{\eta_k\}_{k=1}^{s}$ - нормальные координаты.

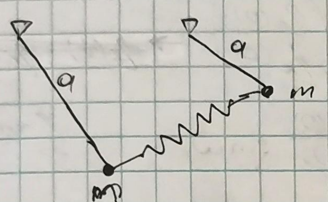
$\{\vec A^k\}$ - собств. векторы задачи.

при условии, что $\{\vec A^k\}_{k=1}^{s}$ - ортонорм. базис, т.е. $(\vec A^k, \vec A^l) = \delta_{kl}$

в терминах специального скалярного произведения

$$\boxed{(\vec A^k, \vec A^l) = \sum_{i,j=1}^{s} m_{ij} A_i^k A_j^l}$$

Пример:



Из прошлого: $\omega_1^2 = \frac{g}{a}$ $\qquad \omega_2^2 = \frac{g}{a} + \frac{2k}{m}$

$\vec A^1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \vec A^2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Скалярное произведение: $m_{ij} = \begin{pmatrix} ma^2 & 0 \\ 0 & ma^2 \end{pmatrix}$

$$(\vec A^k, \vec A^l) = m_{11} A_1^k A_1^l + m_{12} A_1^k A_2^l + m_{21} A_2^k A_1^l + m_{22} A_2^k A_2^l =$$
$$= ma^2 (A_1^k A_1^l + A_2^k A_2^l)$$

1. Ортогональность $(\vec A^1, \vec A^2) = 0$?

$\omega_1 \neq \omega_2$ → ортогональность выполнена автоматически.

Проверим: $(\vec A^1, \vec A^2) = ma^2(1\cdot 1 + 1\cdot(-1)) = 0$

2. Нормировка: $\vec A^{н} = \frac{\vec A^{обычн.}}{\|\vec A\|}$, где $\|\vec A\| = \sqrt{(\vec A, \vec A)}$

$\|\vec A^1\| = \sqrt{(\vec A^1, \vec A^1)} = \sqrt{ma^2(1^2+1^2)} = \sqrt{2ma^2}$

$\|\vec A^2\| = \sqrt{ma^2(1^2+(-1)^2)} = \sqrt{2ma^2}$

ОНБ: $\vec A^{1н} = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \vec A^{2н} = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Преобразование: $\xi = \sum \vec A^k \eta_k$

$$\vec\xi = \vec A^{1н}\eta_1 + \vec A^{2н}\eta_2$$

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\eta_2$$

$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}(\eta_1 + \eta_2)$

$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}(\eta_1 - \eta_2)$ → если подставить в $L_{мл}(\xi, \dot\xi) \to L_{мк}$ опр-ого вида.

По построению, (т.е. можно не выражать)

$$L_{нк} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\dot\eta_k^2}{2} - \frac{\omega_k^2\eta_k^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow L_{нк} = \frac{\dot\eta_1^2}{2} - \frac{g}{l}\frac{\eta_1^2}{2} + \frac{\dot\eta_2^2}{2} - \left(\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}\right)\frac{\eta_2^2}{2}$$

Решение задач с нач. условиями.

Без НК: общ. решение: $\vec\xi(t) = \sum_k b_k \vec A^k \cos(\omega_k t + \psi_k)$

Нач. усл. $\begin{cases}\xi_i(0) = c_i \\ \dot\xi_i(0) = v_i\end{cases}$ $\xrightarrow{подст}$ система из 2s ур-ий отн. 2s неизв. $\to$ реш. $\{b_k, \psi_k\}_{i=1}^{s}$

2s констант

частное решение

С помощью НК: $\begin{cases}\xi_i(0) = c_i \\ \dot\xi_i(0) = v_i\end{cases}$ $\xrightarrow{\eta \text{ через } \xi}$ $\begin{pmatrix}\eta_k(0) \\ \dot\eta_k(0)\end{pmatrix}$

$\to \eta_k(t) = \eta_k(0)\cdot\cos\omega_k t + \frac{\dot\eta_k(0)}{\omega_k}\sin\omega_k t \xrightarrow{\xi \text{ через } \eta}$

$\to \xi_i(t)$ частное решение.

Прямое преобраз.: $\vec\xi = \sum_{k=1}^{s}\vec A^k\eta_k$

Обратное: выраж. η_k через $\vec\xi$

Из линейной алгебры: $\eta_k = (\vec\xi, \vec A^k) = \sum_{i,j} m_{ij}\xi_i A_j^k$

Для нашей задачи:

$$\eta_k = (\vec\xi, \vec A^k) = \sum_{i,j} m_{ij}\xi_i A_j^k = m_{11}\xi_1 A_1^k + m_{12}\xi_1 A_2^k + m_{21}\xi_2 A_1^k + m_{22}\xi_2 A_2^k$$

$$m_{ij} = \begin{pmatrix} ma^2 & 0 \\ 0 & ma^2\end{pmatrix}, \quad \vec A^1 = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec A^2 = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

η через ξ:

$$\Rightarrow \begin{cases}\eta_1 = ma^2\left(\xi_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2ma^2}} + \xi_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\right) = \sqrt{\frac{ma^2}{2}}(\xi_1+\xi_2) \\ \eta_2 = \sqrt{\frac{ma^2}{2}}(\xi_1 - \xi_2)\end{cases}$$

Д/З: 1) Убедиться, что η через ξ найдено правильно (сравнить с ф-ой выше)

√2) Решить задачу с нач. усл. из прошлой д/з через нормальные координаты.

3) Найти норм. координаты из домашней задачи + перейти к Н.К. исходной ф-ии Лагранжа L $\to$ отделить движение ц.м. от колеб. движ. $\to$ с 1 ст. своб. $\to$ свелось к известной

Домашняя работа.

① Из прошлого решения: $\xi_1(t) = b_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \psi_1\right) + b_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{2k}{m}}\,t + \psi_2\right)$

$$\xi_2(t) = b_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \psi_1\right) - b_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{2k}{m}}\,t + \psi_2\right)$$

$$\begin{cases} \eta_1 = \sqrt{\frac{ma^2}{2}}(\xi_1 + \xi_2) \\ \eta_2 = \sqrt{\frac{ma^2}{2}}(\xi_1 - \xi_2) \end{cases}$$

Прямое преобразование: $\xi = \sum\limits_{k=1}^{2} A^k \eta_k$

② Пусть $\begin{cases} \xi_1(0) = c \\ \xi_2(0) = 0 \\ \dot\xi_{1,2}(0) = 0 \end{cases}$ найти ч.р. через н.к.

$$\eta_1(t) = \sqrt{\frac{ma^2}{2}}(\xi_1(0)+\xi_2(0))\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \sqrt{\frac{ma^2}{2}}(\dot\xi_1(0)+\dot\xi_2(0))\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{2k}{m}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{ma^2}{2}}\cdot c\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$$

$$\eta_2(t) = \sqrt{\frac{ma^2}{2}}(\xi_1(0)-\xi_2(0))\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{2k}{m}}\,t\right) + \sqrt{\frac{ma^2}{2}}\cdot(\dot\xi_1(0)-\dot\xi_2(0))\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{2k}{m}}}\cdot\sin\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{2k}{m}}\,t =$$

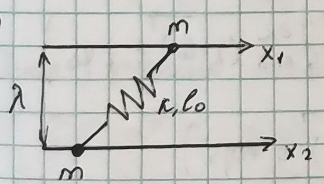
$$= \sqrt{\frac{ma^2}{2}}\cdot c\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{2k}{m}}\,t\right)$$

Частные решения: $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}(\eta_1+\eta_2) = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\left(\sqrt{\frac{ma^2}{2}}\cdot c\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \sqrt{\frac{ma^2}{2}}\cdot c\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{2k}{m}}\,t\right)\right) = \frac{c}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \frac{c}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{2k}{m}}\,t\right)$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}(\eta_1-\eta_2) = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\left(\sqrt{\frac{ma^2}{2}}\cdot c\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t - \sqrt{\frac{ma^2}{2}}\cdot c\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{2k}{m}}\,t\right)\right) =$$

$$= \frac{c}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t - \frac{c}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{2k}{m}}\,t\right)$$

③



Из практики:

$$m_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} k\frac{\lambda-l_0}{\lambda} & -k\frac{\lambda-l_0}{\lambda} \\ -\frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda} & k\cdot\frac{\lambda-l_0}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$L_{мк} = \frac{m}{2}(\dot\xi_1^2 + \dot\xi_2^2) - \frac{k}{2}\cdot\frac{\lambda-l_0}{\lambda}(\xi_1-\xi_2)^2$$

Ур-я движения: $\begin{cases} m\ddot\xi_1 + 0\cdot\ddot\xi_2 + \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}\xi_1 - \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}\xi_2 = 0 \\ 0\cdot\ddot\xi_1 + m\ddot\xi_2 - \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}\xi_1 + \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}\xi_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + к.с.$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 + \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}A_1 - \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}A_2 = 0 \\ -m\omega^2 A_2 - \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}A_1 + \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}A_2 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda} - m\omega^2\right) & -\frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda} \\ -\frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda} & \left(\frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda} - m\omega^2\right) \end{vmatrix} = \left(\frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda} - m\omega^2\right)^2 - \frac{k^2(\lambda-l_0)^2}{\lambda^2} =$$

$$= \cancel{\frac{k^2(\lambda-l_0)^2}{\lambda^2}} - \frac{2m\omega^2 k(\lambda-l_0)}{\lambda} + m^2\omega^4 - \cancel{\frac{k^2(\lambda-l_0)^2}{\lambda^2}} = \omega^2 m\left(\omega^2 m - \frac{2k(\lambda-l_0)}{\lambda}\right) = 0$$

$$\omega \neq 0 \to \omega^2 m = \frac{2k(\lambda-l_0)}{\lambda} \to \omega_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2k}{m\lambda}(\lambda-l_0)}$$

Через уравнение собственных частот: $|-m_{ij}\omega^2 + k_{ij}| = 0$

$$\left| -m\omega^2 + \cancel{\frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}} - m\omega^2 - \cancel{\frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}} \right| = 0 \to \omega = 0$$

?

$$\left| -m\omega^2 - \cancel{\frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}} + \cancel{\frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}} - m\omega^2 \right| = 0 \to \omega = 0$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{2k}{m\lambda}(\lambda-l_0)$$

Подставляем в систему:

$$\begin{cases} -\cancel{m}\cdot\frac{2k}{\cancel{m}\lambda}(\lambda-l_0)\cdot A_1 + \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}A_1 - \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}A_2 = 0 \\ -m\frac{2k}{m\lambda}(\lambda-l_0)A_2 - \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}A_1 + \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}A_2 = 0 \end{cases} \Big/ : \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda}$$

$$\begin{cases} -2A_1 + A_1 - A_2 = 0 \\ -2A_2 - A_1 + A_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -A_1 - A_2 = 0 \\ -A_1 - A_2 = 0 \end{cases} \to A_1 = -A_2$$

Для определённости: $\vec{A^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{A^2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\omega > 0$

$$\to \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m\lambda}(\lambda-l_0)}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = C_1\vec{A^1}e^{i\omega_1 t} + C_2\vec{A^2}e^{i\omega_2 t} + \text{кс}.$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m\lambda}(\lambda-l_0)}\,t + \psi_1\right) + b_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m\lambda}(\lambda-l_0)}\,t + \psi_2\right)$$

$$\xi_1 = \xi_2 = b_1\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m\lambda}(\lambda-l_0)}\,t + \psi_1\right) - b_2\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m\lambda}(\lambda-l_0)}\,t + \psi_2\right)$$

Скалярное произведение: $m_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, $k_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda} & -k\cdot\frac{\lambda-l_0}{\lambda} \\ -\frac{k(\lambda-l_0)}{\lambda} & k\cdot\frac{\lambda-l_0}{\lambda} \end{pmatrix}$

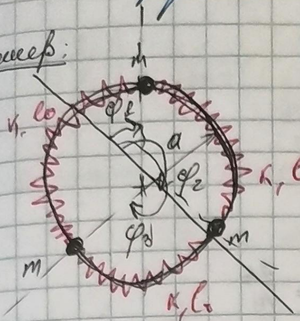
$$(\vec{A^k}, \vec{A^l}) = \sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}A_i^k A_j^l = m(A_1^k A_1^l + A_2^k A_2^l)$$

Ортогональность: $(\vec{A^1}, \vec{A^2}) = 0$?

$$(\vec{A^1}, \vec{A^2}) = m(1\cdot(-1) + 1\cdot(-1)) = -2m \neq 0$$

14.05.22. → из пройдёб задачи $\omega_1 = 0$ $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m\lambda}(\lambda - l_0)}$ и всё так же формально.

Пример:



$\vec{g} = 0$

выполнено $3l_0 = 2\pi a$

Обобщ. координаты: $\varphi_{1,2,3}$ $(S = 3)$

$$L(\varphi_{123}, \dot{\varphi}_{123}) = \frac{ma^2}{2}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) - U(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

$$U = \frac{k}{2}(a(\varphi_2 - \varphi_1) - l_0)^2 + \frac{k}{2}(a(\varphi_3 - \varphi_2) - l_0)^2 + \frac{k}{2}(a(\varphi + 2\pi - \varphi_3) - l_0)^2$$

Полож. равновесия: $\left\{\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = 0, \frac{\partial U}{\partial \varphi_3} = 0\right\}$

$\Rightarrow$ любое $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0$: $\varphi_1^{(\varepsilon)} = \varepsilon$, $\varphi_2^{(\varepsilon)} = \varepsilon + \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_3^{(\varepsilon)} = \varepsilon + \frac{4\pi}{3}$ ~ явл. полож. равновесия при любом ε.

Рассмотрим положение при $\varepsilon = 0$

$\rightarrow$ $\varphi_1 = 0 + \xi_1$
$\varphi_2 = \frac{2\pi}{3} + \xi_2$
$\varphi_3 = \frac{4\pi}{3} + \xi_3$

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \frac{ma^2}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2) - U(\xi_{123})$$

$$U(\xi_{123}) = \frac{k}{2}\Big(a(\xi_2 - \xi_1) + \cancel{\frac{2\pi a}{3} - l_0}\Big)^2 + \frac{ka^2}{2}(\xi_3 - \xi_2)^2 + \frac{k}{2}\Big(a(\xi_1 - \xi_3) - \cancel{\frac{4\pi a}{3} + 2\pi a - l_0}\Big)^2 =$$

$$= \frac{ka^2}{2}\left((\xi_2 - \xi_1)^2 + (\xi_3 - \xi_2)^2 + (\xi_1 - \xi_3)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}ka^2\left(2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2 - 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3 - 2\xi_1\xi_3\right)$$

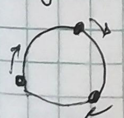
$$m_{ij} = \begin{pmatrix} ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 \end{pmatrix}; \quad k_{ij} = \begin{pmatrix} 2ka^2 & -ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & 2ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & -ka^2 & 2ka^2 \end{pmatrix}$$

Далее угадаем собственные вектора и найдём собственные частоты

$$\sum_i (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) A_i = 0$$

$$\begin{cases} (2ka^2 - ma^2\omega^2)A_1 - ka^2 A_2 - ka^2 A_3 = 0 \\ -ka^2 A_1 + (2ka^2 - ma^2\omega^2)A_2 - ka^2 A_3 = 0 \\ -ka^2 A_1 - ka^2 A_2 + (2ka^2 - ma^2\omega^2)A_3 = 0 \end{cases}$$

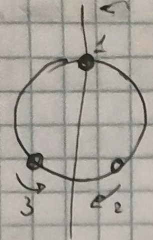
Угадаем собств. вектора в силу симметрии:

1)  $\vec{A}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ~ подст. в систему:

$$\begin{cases} 2ka^2 - ma^2\omega^2 - ka^2 - ka^2 = 0 \\ -ka^2 + 2ka^2 - ma^2\omega^2 - ka^2 = 0 \\ -ka^2 - ka^2 + 2ka^2 - ma^2\omega^2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \omega_1^2 = 0$$

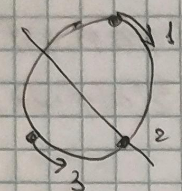
Все 3 ур-я превращаются в верные равенства одним знач. ω => собств. вектор угадан правильно!)

← симметр. отн. этой прямой

2) 

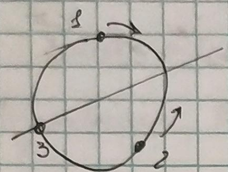
$\vec{A^2} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{cases} 0 - ka^2 + ka^2 = 0 \\ 0 + 2ka^2 - ma^2\omega^2 + ka^2 = 0 \\ 0 - ka^2 - (2ka^2 - ma^2\omega^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_2^2 = \dfrac{3k}{m}$

3) 

$\vec{A^3} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2ka^2 - ma^2\omega^2 + 0 + ka^2 = 0 \\ -ka^2 + 0 + ka^2 = 0 \\ -ka^2 + 0 - (2ka^2 - ma^2\omega^2) = 0 \end{cases} \qquad \omega_3^2 = \dfrac{3k}{m}$

4) 

$\vec{A^4} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \omega^2 = \dfrac{3k}{m}$

$\vec{A^4} = \vec{A^3} - \vec{A^2}$ ∈ собств. подпр-ву $(\vec{A^2}, \vec{A^3})$

Аналогично, напр., $2\vec{A^2} + \vec{A^3} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ – тоже собств. вектор из того же собств. подпрост. где $\omega^2 = \dfrac{3k}{m}$

или по-другому: $\omega^2\left(\omega^2 - \dfrac{3k}{m}\right)^2 = 0$ ← из определителя

Скал. произв.: $(\vec{A^l}, \vec{A^c}) = \sum m_{ij} A_i^l A_j^c$

Ортогональность: $\omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow (\vec{A^1}, \vec{A^2}) = 0$

$\omega_1 \neq \omega_3 \Rightarrow (\vec{A^1}, \vec{A^3}) = 0$

$(\vec{A^2}, \vec{A^3}) = ma^2(0+0+1) = ma^2$

треб. ортогонализация (QR-разложение)

пусть $\vec{A^{3'}} = \vec{A^3} + c\vec{A^2}$ треб. $(\vec{A^{3'}}, \vec{A^2}) = 0$

$(\vec{A^{3'}}, \vec{A^2}) = (\vec{A^3}, \vec{A^2}) + c(\vec{A^2}, \vec{A^2}) = 0 \Rightarrow c = -\dfrac{(\vec{A^3}, \vec{A^2})}{(\vec{A^2}, \vec{A^2})} = -\dfrac{ma^2}{2ma^2} = -\dfrac{1}{2}$

$A^{3'} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

Нормировка: $\|\vec{A^1}\| = \sqrt{(\vec{A^1}, \vec{A^1})} = \sqrt{3ma^2}$

$\|\vec{A^2}\| = \sqrt{2ma^2}$

$\|\vec{A^{3'}}\| = \sqrt{\tfrac{3}{2}ma^2}$

$\Rightarrow \vec{A^{1''}} = \dfrac{1}{\sqrt{3ma^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \quad \vec{A^{2''}} = \dfrac{1}{\sqrt{2ma^2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}; \quad \vec{A^{3''}} = \dfrac{1}{\sqrt{\tfrac{3}{2}ma^2}}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

Нормальные координаты:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3ma^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2ma^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \eta_2 + \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} ma^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \eta_3$$

Исходная L - чисто квадратичная, старших степеней - не отбрасывали!

$\Rightarrow$ $L_{нк}$ описывает <u>исходную</u> систему.

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{\dot{\eta}_1^2}{2} + \frac{\dot{\eta}_2^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{3k}{m} \eta_2^2 + \frac{\dot{\eta}_3^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{3k}{m} \eta_3^2$$

Ур-е движения н.к.: $\ddot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = 0$

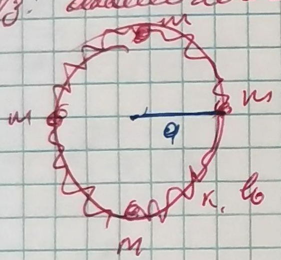
$$\Rightarrow \ddot{\eta}_1 = 0 \quad \rightarrow \eta_1(t) = a_1 t + b_1$$

$$\ddot{\eta}_2 + \frac{3k}{m} \eta_2 = 0 \quad \eta_2(t) = b_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \psi_2\right)$$

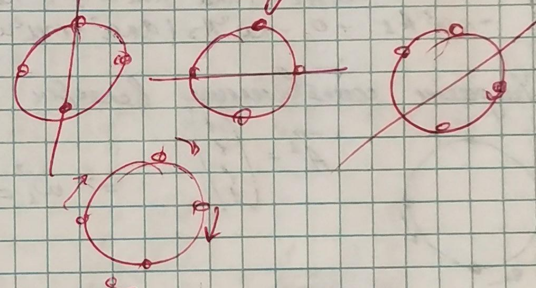
$$\ldots \quad \eta_3(t) = b_3 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \psi_3\right)$$

$\Rightarrow$ решили задачу.

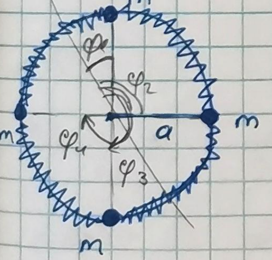
Д/З: аналогично, но теперь шарика 4. (возни. только с соображениями!



Симметрии



Домашняя работа.



Обобщённые координаты: $\varphi_{1,2,3,4}$.

$$L(\varphi_{1,234}, \dot{\varphi}_{1234}) = \frac{ma^2}{2}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_4) + U(\varphi_{1234})$$

$$U(\varphi_{1234}) = \frac{k}{2}\left(a(\varphi_2 - \varphi_1) - l_0\right)^2 + \frac{k}{2}\left(a(\varphi_3 - \varphi_2) - l_0\right)^2 + \frac{k}{2}\left(a(\varphi_4 - \varphi_3) - l_0\right)^2 + \frac{k}{2}\left(a(\varphi_1 + 2\pi - \varphi_4) - l_0\right)^2$$

Положения равновесия: $\left\{ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = 0, \frac{\partial U}{\partial \varphi_3} = 0, \frac{\partial U}{\partial \varphi_4} = 0 \right\}$

Любые $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0, \varphi_4^0$:

$$\varphi_1^0 = \varepsilon \qquad \varphi_2^0 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \qquad \varphi_3^0 = \pi + \varepsilon \qquad \varphi_4^0 = \frac{3\pi}{2} + \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 0$:

$$\varphi_1^0 = 0 \qquad \varphi_2^0 = \pi/2 \qquad \varphi_3^0 = \pi \qquad \varphi_4^0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\varphi_1 = \xi_1$$
$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \xi_2$$
$$\varphi_3 = \pi + \xi_3$$
$$\varphi_4 = \frac{3\pi}{2} + \xi_4$$

$$L(\xi_{1234}, \dot\xi_{1234}) = \frac{ma^2}{2}\left(\dot\xi_1 + \dot\xi_2 + \dot\xi_3 + \dot\xi_4\right) + U(\xi_{1,2,3,4})$$

$$U(\xi_{1,2,3,4}) = \frac{k}{2}\left(a\left(\frac{\pi}{2} + \xi_2 - \xi_1\right) - b_0\right)^2 + \frac{k}{2}\left(a\left(\frac{\pi}{2} + \xi_3 - \xi_2\right) - b_0\right)^2 + \frac{k}{2}\left(a\left(\frac{\pi}{2} + \xi_4 - \xi_3\right) - b_0\right)^2 + \frac{k}{2}\left(a\left(\xi_1 - \xi_4 + \frac{\pi}{2}\right) - b_0\right)^2$$

Если выполнено $4b_0 = 2\pi a \rightarrow b_0 = \frac{\pi a}{2}$

$$\Rightarrow U(\xi_{1234}) = \frac{ka^2}{2}\left([\xi_2 - \xi_1]^2 + (\xi_3 - \xi_2)^2 + (\xi_4 - \xi_3)^2 + (\xi_1 - \xi_4)^2\right) =$$

$$= \frac{ka^2}{2}\left(\xi_2^2 - 2\xi_2\xi_1 + \underline{\xi_1^2} + \xi_3^2 - 2\xi_3\xi_2 + \xi_2^2 + \xi_4^2 - 2\xi_4\xi_3 + \xi_3^2 + \underline{\xi_1^2} - 2\xi_1\xi_4 + \xi_4^2\right) =$$

$$= \frac{ka^2}{2}\left(2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2 + 2\xi_4^2 - 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3 - 2\xi_4\xi_3 - 2\xi_1\xi_4\right)$$

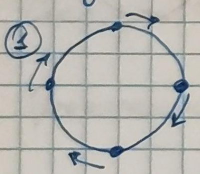
$$m_{ij} = \begin{pmatrix} ma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ma^2 \end{pmatrix} \qquad k_{ij} = \begin{pmatrix} 2ka^2 & -ka^2 & 0 & -ka^2 \\ -ka^2 & 2ka^2 & -ka^2 & 0 \\ 0 & -ka^2 & 2ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & 0 & -ka^2 & 2ka^2 \end{pmatrix}$$

Уравнения движения: $\sum_j (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j = 0$

$$\begin{cases} (2ka^2 - ma^2\omega^2)A_1 - ka^2 A_2 - ka^2 A_4 = 0 \\ -ka^2 A_1 + (2ka^2 - ma^2\omega^2)A_2 - ka^2 A_3 = 0 \\ -ka^2 A_2 + (2ka^2 - ma^2\omega^2)A_3 - ka^2 A_4 = 0 \\ -ka^2 A_1 + 0 - ka^2 A_3 (2ka^2 - ma^2\omega^2) A_4 = 0 \end{cases}$$

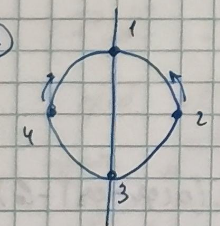
Угадаем собственные векторы в силу симметрии:

1



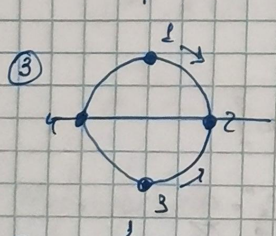
$$\vec{A^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega_1^2 = 0$$

2



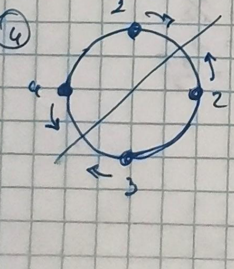
$$\vec{A^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2ka^2 - ma^2\omega^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{m}$$

3



$$\vec{A^3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2ka^2 - ma^2\omega^2 = 0, \quad \omega_3^2 = \frac{2k}{m}$$

4



$$\vec{A^4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2k\cancel{a^2} - m\cancel{a^2}\omega^2 + k\cancel{a^2} + k\cancel{a^2} = 0$$

$$\underbrace{\omega_4^2 = \frac{4k}{m}}$$

$$-ka^2 + ma^2\omega^2 - 2ka^2 - ka^2$$

Ур-е движ-я н.к.:

$$\ddot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = 0$$

$\ddot{\eta}_1 + 0\cdot\eta_k = 0 \rightarrow \eta_1(t) = a_1 t + b_1$

$\ddot{\eta}_2 + \frac{2k}{m}\eta_k = 0 \Rightarrow \eta_2(t) = b_2\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t + \psi_2\right)$

$\ddot{\eta}_3 \Rightarrow \eta_3(t) = b_3\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t + \psi_3\right)$

$\eta_4(t) = b_4\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \psi_4\right)$

$\omega_1 \neq \omega_2$

$\omega_1 \neq \omega_4.$

$\omega_2 = \omega_3$

$(\vec{A}^2, \vec{A}^3) = ma^2\left((0\cdot 1) + (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 0\right) = 0 \Rightarrow$ ортогональны.

$\|\vec{A}^1\| = \sqrt{(\vec{A}^1, \vec{A}^1)} = \sqrt{4ma^2} = 2a\sqrt{m}$

$\|\vec{A}^2\| = \sqrt{(\vec{A}^2, \vec{A}^2)} = \sqrt{2ma^2}$

$\|\vec{A}^3\| = \sqrt{2ma^2}$

$\|\vec{A}^4\| = \sqrt{4ma^2}$

$\Rightarrow \vec{A}^{1\prime} = \frac{1}{\sqrt{4ma^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{A}^{2\prime} = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{A}^{3\prime} = \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{A}^{4\prime} = \frac{1}{\sqrt{4ma^2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4ma^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\eta_2 + \frac{1}{\sqrt{2ma^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{4ma^2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

18.05.22 **Гамильтонов формализм**

10.3.

$$L = \underbrace{\frac{m\dot{x}^2}{2}}_{L_2} \underbrace{- \frac{kx^2}{2} - \alpha x^3}_{L_0} \underbrace{+ \beta x\dot{x}^2}_{L_2}, \quad H = ?$$

1. Найти все обобщ. импульсы $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + 2\beta x\dot{x}$

2. Выразить все обобщ. скорости через импульсы $\dot{x} = \frac{p}{m + 2\beta x}$

3. Обобщ. энергия $H = L_2 - L_0 = \frac{1}{2}(m + 2\beta x)\dot{x}^2 + \frac{kx^2}{2} + \alpha x^3$

4. Подставляем (2) в (3)

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2(m + 2\beta x)} + \frac{kx^2}{2} + \alpha x^3$$

Ур. Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m + 2\beta x} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx - 3\alpha x^2 + \frac{p^2\beta}{(m + 2\beta x)^2} \end{cases}$$

10.7. Найдём движение частицы в однородном магнитном поле:

$\varphi(\vec r)=0\ ,\quad A_x=0\ ,\quad A_y=Bx\ ,\quad A_z=0$

$\vec A=(A_x, A_y, A_z)\ ,\quad \vec B=\mathrm{rot}\,\vec A=B\,\vec z^{0}$

$L=\frac{m\vec v^2}{2}+\frac{e}{c}(\vec A\,\vec v)-e\varphi_{0}$

Декарт: $L=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)+\frac{e}{c}Bx\,\dot y$

1) Импульсы: $p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot x}=m\dot x\ ,\quad p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot y}=m\dot y+\frac{e}{c}Bx\ ,\quad p_z=m\dot z$

2) Скорости через имп.: $\dot x=\frac{p_x}{m}\ ,\quad \dot y=\frac{p_y-\frac{e}{c}Bx}{m}\ ,\quad \dot z=\frac{p_z}{m}$

3) Обобщ. энергия: $H=L_2-L_0=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)$

4) Ф-я Гамильтона: $H(\vec r,\vec p,t)=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{(p_y-\frac{e}{c}Bx)^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}$

Циклич. коорд.: y, z, t.

Уравнения Гамильтона:

замкнутая

$\dot x=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m}$

$\dot p_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{m}\left(p_y-\frac{e}{c}Bx\right)\left(+\frac{e}{c}B\right)$

– сист. ОДУ отн. только (x, p_x), y и z нет, т.к. они циклич. (по опр-ю) p_y есть (p_z вообще говоря тоже могло), но: $p_y=\mathrm{const}$, $p_z=\mathrm{const}$ поэтому можно рассм-ть как параметры.

Система ур-ий Гамильтона расщепляется (есть циклич. координаты)

отщеплённые

$\dot y=\frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{1}{m}\left(p_y-\frac{e}{c}Bx\right)$

циклич.

$\dot p_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=0\ \to\ p_y=\mathrm{const}$

$\dot z=\frac{\partial H}{\partial p_z}=\frac{p_z}{m}$

$\dot p_z=0\ \to\ p_z=\mathrm{const}$

$\dot x=\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{p_x}{m}\ \Rightarrow\ \ddot x=\frac{\dot p_x}{m}$

$\ddot x=\frac{eB}{m^2c}\left(p_y-\frac{e}{c}Bx\right)$

$\ddot x+\underbrace{\left(\frac{eB}{mc}\right)^2}_{\omega_n^2}\Big(x-\underbrace{\frac{p_y c}{eB}}_{=x_0}\Big)=0$

$\ddot x+\omega_n^2(x-x_0)=0\qquad \omega_n=\frac{eB}{mc}$

введём $\xi=x-x_0\ ,\quad \ddot\xi+\omega_n^2\xi=0$

$x(t)=x_0+\underbrace{R}_{\text{ампл.}}\cos(\omega_n t+\varphi_0)$

$y(t)=\int\left(\frac{p_y}{m}-\frac{eB}{mc}x(t)\right)dt=\int\left(\cancel{\frac{p_y}{m}}-\frac{eB}{mc}\cdot\frac{p_y c}{eB}-\frac{eB}{mc}R\cos(\omega_n t+\varphi_0)\right)dt=$

$=y_0-\cancel{\frac{eB}{mc}}R\cdot\cancel{\frac{1}{\omega_n}}\sin(\omega_n t+\varphi_0)$

$z(t) = z_0 + \frac{p_z}{m} t$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + R\cos(\omega_\perp t + \varphi_0) \\ y(t) = y_0 - R\sin(\omega_\perp t + \varphi_0) \\ z(t) = z_0 + Vt \end{cases}$$

переобозн. константу.

Константы интегрирования: p_y, p_z — нет. обыкн. в процессе решения

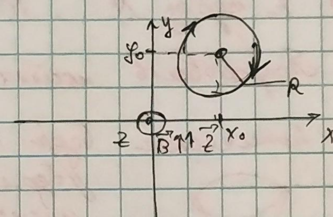
Обозн. x_0 через p_y и параметры

$\omega_\perp$ — только через параметры (конст. интегр. нет!)

R, φ_0 — конст. интегр. гарм. осциллятора.

y_0, z_0 — от неопр. интегралов.

Константы интегрирования в полном решении: x_0, y_0, z_0, R, φ_0, V — 6 шт.



10.5. Гамильтоновская формулировка геометрической оптики.

$$\boxed{H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{c|\vec{p}|}{n(\vec{r}, \vec{p})}}$$

лок.-но преломления
$n(\vec{r})$ — простр. неоднор.
$n(\vec{p})$ — пространств. дисперсия

Луч света в стратифицир. среде без дисперсии.

По условию положим $n(\vec{r}) = ax$

В декартовых коорд.: $H = \frac{c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}{ax}$ → y, z, t — циклич.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{c p_x}{ax\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = +\frac{c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}{ax^2} \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{c p_y}{ax\sqrt{\ldots}} \\ p_y = const \\ \dot{z} = \frac{c p_z}{ax\sqrt{\ldots}} \\ p_z = const \end{cases}$$

$\frac{dz}{dy} = \frac{p_z}{p_y} = const$

⇒ z и y в постоянном соотн. (плоскость!)

Направление Oy и Oz не задано условием задачи, выберем напр. осей так, что $p_z = 0 = const$
$z = const$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{p_y}{p_x}$

t - цикл. $\Rightarrow$ $A = const = E$

$$p_x = \pm\sqrt{\frac{E^2 a^2 x^2}{c^2} - p_y^2 - p_z^2}, \quad p_z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{p_y}{p_x} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{Eax}{p_y c}\right)^2 - 1}} \Rightarrow y(x) \quad \text{Д/З.}$$

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \Big|_{\dot{q} \text{ через } p} \rightarrow L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H \Big|_{p_i \text{ через } \dot{q}}$$

Дано: H $\quad$ Найти: L

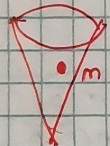
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Rightarrow p \text{ через } \dot{q}$$

Д/З: ✓ ① $\rightarrow y(x)$ в прошлой задаче.

✓ ② L через H: $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - (\vec{a}\,\vec{p})$, где $\vec{a}$ - пост. вектор.

③ Попробовать найти L для $H = \frac{c|\vec{p}|}{n(\vec{r})}$ (ничего хорошего)

✓ ④ Коническое ведро (из прошлого) записать ф-ю Гамильтона. Убедиться, что тоже тоже отщепление циклических координат от ур-ий Гамильтона.



Домашняя работа.

① $$\frac{dy}{dx} = \frac{p_y}{p_x} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{Eax}{p_y c}\right)^2 - 1}}$$

$$y(x) = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{Eax}{p_y c}\right)^2 - 1}} = \pm\left(\frac{p_y c}{Ea}\right)^2 \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C$$

② $$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - (\vec{a}, \vec{p})$$

$$(\vec{a}, \vec{p}) = a_x p_x + a_y p_y + a_z p_z$$

$$\vec{p}^2 = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} - \dots$$

$$\dot{q}_x = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{2p_x}{2m} - a_x; \quad \dot{q}_y = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} - a_y; \quad \dot{q}_z = \frac{p_z}{m} - a_z$$

$$\begin{cases} p_y = m(\dot{q}_y + a_y) \\ p_x = m(\dot{q}_x + a_x) \\ p_z = m(\dot{q}_z + a_z) \end{cases}$$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = m(\dot{q}_x + a_x)\dot{q}_x + m(\dot{q}_y + a_y)\dot{q}_y + m(\dot{q}_z + a_z)\dot{q}_z =$$

$$= m(\dot{q}_x^2 + \dot{q}_y^2 + \dot{q}_z^2) + m(a_x \dot{q}_x + a_y \dot{q}_y + a_z \dot{q}_z)$$

~~$L = \dots$ $m(\dot{q}_x^2 + \dot{q}_y^2 + \dot{q}_z^2)$ $+ m(a_x + a_y + a_z)$ $+ (a_x p_x + a_y p_y + a_z p_z)$~~

$$H = \frac{m^2((\dot q_x + a_x)^2 + (\dot q_y + a_y)^2 + (\dot q_z + a_z)^2)}{2m} - (a_x m(\dot q_x + a_x) + a_y m(\dot q_y + a_y) + a_z m(\dot q_z + a_z)) =$$

$$= \frac{m}{2}(\dot q_x^2 + 2\dot q_x a_x + a_x^2 + \dot q_y^2 + 2\dot q_y a_y + a_y^2 + \dot q_z^2 + 2\dot q_z a_z + a_z^2) - m a_x \dot q_x - m a_x^2 - m a_y \dot q_y - m a_y^2 -$$

$$- m a_z \dot q_z - m a_z^2 =$$

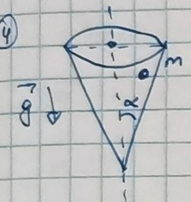
$$= \frac{m}{2}(\dot q_x^2 + \dot q_y^2 + \dot q_z^2) - \frac{m}{2}(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)$$

$$L = m(\dot q_x^2 + \dot q_y^2 + \dot q_z^2) + m(\vec a, \dot{\vec r}) - \frac{m}{2}(\dot q_x^2 + \dot q_y^2 + \dot q_z^2) + \frac{m}{2}\vec a^2 =$$

$$= \frac{m\dot{\vec r}^2}{2} + m(\vec a, \dot{\vec r}) + \frac{m}{2}\vec a^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{m\dot{\vec r}^2}{2} + \frac{m}{2}\vec a^2 + m(\vec a, \dot{\vec r})$$

(4)



В сферических сист. коорд: (r, θ, φ).

$\theta = \alpha$. $\to$ обобщ. коорд: r, φ

$$L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot\varphi^2) - mgr\cos\alpha$$

Импульсы:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \ ; \qquad \dot r = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\dot\varphi r^2\sin^2\alpha \qquad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\alpha}$$

Обобщ. энергия:

$$H = L_2 - L_0 = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot\varphi^2) + mgr\cos\alpha$$

Функция Гамильтона:

$$H = \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{r^2\sin^2\alpha\, p_\varphi^2}{m^2 r^4\sin^4\alpha}\right) + mgr\cos\alpha = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$$

Циклич. координаты: φ, t

$$\dot r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot p_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\varphi^2}{2m^2\sin^4\alpha}\left(-\frac{2r}{r^4}\right) - mg\cos\alpha = \frac{p_\varphi^2}{m^2r^3\sin^4\alpha} - mg\cos\alpha$$

$$\dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\alpha}$$

~ циклич. $\to$ т.е. отщепление циклических координат.

$$\dot p_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \to p_\varphi = const$$

(3) $H = \dfrac{c|\vec p|}{n(\vec r)}$, L - ?

$$\dot{\vec r} = \frac{\partial H}{\partial \vec p} = \frac{c}{n(\vec r)}\cdot\frac{\vec p}{|\vec p|} \quad - ?$$

25.05.22

Скобки Пуассона.

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

Если $\{q_i\}_{i=1}^{3N} = \{\vec{r}_\alpha\}_{\alpha=1}^{N} = \{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\}_{\alpha=1}^{N}$ $\quad s = 3N$

$$\{f,g\} = \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_\alpha}\cdot\frac{\partial g}{\partial \vec{p}_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial \vec{p}_\alpha}\cdot\frac{\partial g}{\partial \vec{r}_\alpha}\right)$$ как скалярное произведение.

Если $\vec{f}$ – вектор-функция:

$$\{\vec{f},g\} = \vec{x}^0\{f_x,g\} + \vec{y}_0\{f_y,g\} + \vec{z}_0\{f_z,g\}$$

Замечание: если $\vec{f}$ и $\vec{g}$ векторные, то $\{\vec{f},\vec{g}\}$ – неопределена.

Примеры:

① $\{q_i,q_j\} = \sum_k\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\cdot\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0}\cdot\frac{\partial q_j}{\partial q_k}\right) = 0$

$\{p_i,p_j\} = 0$

$\{q_i,p_j\} = \sum_k\left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{=1,\ k=i;\ 0,\ k\neq i}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0}\right) = \sum_k \underbrace{\delta_{ki}}_{=1 \text{ при } k=i, \text{ иначе } 0}\cdot\delta_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases}1, & \text{для канонических сопр. переменных}\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$

Фундаментальные скобки Пуассона ~ как проверка для канонического преобр.

10.14(б). $\{\vec{a}\vec{p}, \vec{b}\vec{r}\} = \underbrace{\frac{\partial(\vec{a}\vec{p})}{\partial\vec{r}}}_{=0}\cdot\frac{\partial(\vec{b}\vec{r})}{\partial\vec{p}} - \frac{\partial(\vec{a}\vec{p})}{\partial\vec{p}}\cdot\frac{\partial(\vec{b}\vec{r})}{\partial\vec{r}} = -\vec{a}\vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b}$ – пост. вектора

Вектор момента имп.: $\vec{K} = \sum_\alpha[\vec{r}_\alpha\times\vec{p}_\alpha]$

② $\{\vec{a}\vec{K}, \vec{b}\vec{r}\} = \frac{\partial(\vec{a}\vec{K})}{\partial\vec{r}}\cdot\underbrace{\frac{\partial(\vec{b}\vec{r})}{\partial\vec{p}}}_{=0} - \frac{\partial(\vec{a},\vec{K})}{\partial\vec{p}}\cdot\underbrace{\frac{\partial(\vec{b}\vec{r})}{\partial\vec{r}}}_{\vec{b}} = -[\vec{a}\vec{r}]\cdot\vec{b} = -[\vec{b},\vec{a}]\vec{r} = [\vec{a},\vec{b}]\vec{r}$

$\vec{a}\vec{K} = \vec{a}\cdot[\vec{r}\times\vec{p}] = (\vec{a},\vec{r},\vec{p}) = (\vec{p}[\vec{a}\cdot\vec{r}]) = \vec{r}[\vec{p},\vec{a}]$

Пример:

$\vec{a} = \vec{x}^0;\ \vec{b} = \vec{y}^0:\quad \{K_x, y\} = [\vec{x}^0,\vec{y}^0]\vec{r} = z$

$\vec{a} = \vec{x}^0;\ \vec{b} = \vec{x}^0:\quad \{K_x, x\} = [\vec{x}^0,\vec{x}^0]\vec{r} = 0$

2.2 $\{\vec{a}\vec{K}, \vec{b}\vec{p}\} = \frac{\partial(\vec{a}\vec{K})}{\partial\vec{r}}\cdot\underbrace{\frac{\partial(\vec{b}\vec{p})}{\partial\vec{p}}}_{=\vec{b}} - \frac{\partial(\vec{a}\vec{K})}{\partial\vec{p}}\cdot\underbrace{\frac{\partial(\vec{b}\vec{p})}{\partial\vec{r}}}_{=0} = [\vec{p}\vec{a}]\vec{b} = [\vec{a}\vec{b}]\vec{p}$

③ $\{\vec a\vec K, \vec b\vec K\} = \frac{\partial}{\partial \vec r}(\vec a[\vec r\vec p])\frac{\partial}{\partial \vec p}(\vec b[\vec r\vec p]) - \frac{\partial}{\partial\vec p}(\vec a[\vec r\vec p])\frac{\partial}{\partial \vec r}(\vec b[\vec r\vec p]) =$

$= \underbrace{[\vec p\vec a][\vec b\vec r]}_{(а)} - \underbrace{[\vec a\vec r][\vec r\vec b]}_{(б)} = (\vec a\vec r)(\vec b\vec p) - (\vec b\vec r)(\vec a\vec p) = [\vec a\times\vec b]\vec K$

в ответе $[\vec a\times\vec b]\vec K$

$(а) = ([\vec p,\vec a],\vec b,\vec r) = \vec b[\vec r\times[\vec p\vec a]] = \vec b(\vec p(\vec a\vec r) - \vec a(\vec r,\vec p)) =$
$= (\vec b\vec p)(\vec a\vec r) - (\vec a\vec b)(\vec r\vec p)$

$(б) = ([\vec a,\vec r],\vec r,\vec b) = \vec p[\vec b\times[\vec a,\vec r]] = \vec p(\vec a(\vec b\vec r) - \vec r(\vec b,\vec a)) =$
$= (\vec a,\vec p)(\vec b\cdot\vec r) - (\vec r,\vec p)(\vec a\vec b)$

$[\vec a\times\vec b]\vec K = [\vec a\vec b][\vec r\vec p] = \vec r[\vec p\times[\vec a\vec b]] = \vec r(\vec a(\vec p\vec b) - \vec b(\vec p\cdot\vec a)) =$
$= (\vec a\vec r)(\vec p\vec b) - (\vec b\vec r)(\vec a\vec p)$

Про квантовую механику:

$\vec a = \vec b = \vec x^0$ $\quad \{K_x, K_x\} = 0$

$\vec a = \vec x^0$, $\vec b = \vec y^0$ $\quad \{K_x, K_y\} = [\underbrace{\vec x^0, \vec y^0}_{\vec z^0}]\vec K = K_z$

$\Rightarrow \{K_y, K_z\} = K_x$ $\qquad \{f_1f_2, g\} = f_1\{f_2,g\} + f_2\{f_1,g\}$

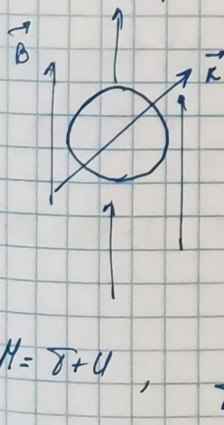
$\{K_z, K_x\} = K_y$

④ $\{K_x, \vec K^2\} = \{K_x, K_xK_x\} + \{K_x, K_yK_y\} + \{K_x, K_z\cdot K_z\} =$ /по правилу Лейбница для дифф-ния/

$= 2\{K_x,K_x\}K_x + 2\{K_x,K_y\}K_y + 2\{K_x,K_z\}K_z = 0 + 2K_zK_y - 2K_yK_z = 0$

10.21 Магнитный момент в однородном магнитном поле.

Сферический волчок с магн. моментом. I - момент инерции (одинаков отн. любой оси.)



$\vec K$ - момент импульса. (по усл. задачи.)

Магнитный момент: $\vec\mu = \gamma\vec K$, γ - гиромагн. отношение.

Найти: $\vec K(t)$ - ?

$\frac{d\vec K}{dt} = \underbrace{\frac{\partial\vec K}{\partial t}}_{=0} + \{\vec K, H\}$ ф-я Гамильтона

$H = T+U$, $\quad T = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{\vec K^2}{2I}$; $\quad U = -(\vec\mu,\vec B) = -\gamma(\vec K\vec B)$

$\vec K = I\vec\omega$

$\Rightarrow H = T+U = \frac{\vec K^2}{2I} - \gamma(\vec K,\vec B)$

Для одной из проекций

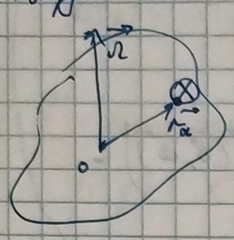
$\{K_x, H\} = \frac{1}{2I}\underbrace{\{K_x,\vec K^2\}}_{=0} - \gamma\{K_x,(\vec K\vec B)\} =$

$= -\gamma\{x^0\kappa, B\kappa\} = -\gamma[\vec x^0, \vec B]\vec\kappa = -\gamma[\vec B\ \vec\kappa]\,\vec x_0 = \gamma([\vec\kappa, \vec B])_x$

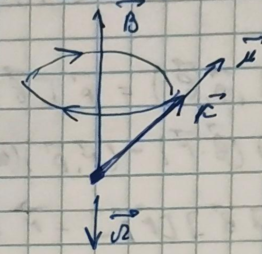
для других проекций сообв.

$\Rightarrow \underbrace{\frac{d\vec\kappa}{dt} = \gamma[\vec\kappa, \vec B] = -[\vec\Omega\times\vec\kappa]}$, где $\vec\Omega = -\gamma\vec B$

Твёрдое тело ↳ по форме аналогично для ск-ти тв. тела, вращающегося с угловой ск-ю $\vec\Omega$ (прецессия магнитного момента).



$\dot{\vec r}_\alpha = [\vec\Omega\ \vec r_\alpha]$



~~Д/з~~: ① $L_{мк} = \frac{1}{2}(\dot\xi_1^2 + \dot\xi_2^2 + 2\alpha\dot\xi_1\dot\xi_2) - \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)$

m_{ij} - ?, k_{ij} - ? $\omega_{1,2}^2$ - ? $\vec A^{1,2}$ - ? общ. решение

после ортогон. и нормировки → норм. коорд.

② $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ~ обобщ. энергия - ? (выраз. через v

Ф-я Гамильтона ?

$H = \vec p\frac{\partial L}{\partial\vec v} - L$

Домашняя работа

№1. $L_{мк} = \frac{1}{2}(\dot\xi_1^2 + \dot\xi_2^2 + 2\alpha\dot\xi_1\dot\xi_2) - \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)$

$m_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ $\quad k_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sum_j (m_{ij}\ddot\xi_j + k_{ij}\xi_j) = 0$

$\begin{cases} \ddot\xi_1 + \alpha\ddot\xi_2 + 1\cdot\xi_1 = 0 \\ \alpha\ddot\xi_1 + \ddot\xi_2 + \xi_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1 \\ A_2\end{pmatrix} e^{i\omega t} + к.с.$

$\begin{cases} -\omega^2 A_1 - \alpha\omega^2 A_2 + A_1 = 0 \\ -\alpha\omega^2 A_1 - \omega^2 A_2 + A_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\omega^2)A_1 - \alpha\omega^2 A_2 = 0 \\ -\alpha\omega^2 A_1 + A_2(1-\omega^2) = 0 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} (1-\omega^2) & -\alpha\omega^2 \\ -\alpha\omega^2 & (1-\omega^2) \end{vmatrix} = (1-\omega^2)^2 - \alpha^2\omega^4 = 0$

$(1-\omega^2-\alpha\omega^2)(1-\omega^2+\alpha\omega^2) = 0$

$1-\omega^2-\alpha\omega^2 = 0$ $\qquad 1-\omega^2(1-\alpha) = 0$

$1-\omega^2(1+\alpha) = 0$ $\qquad \omega_2^2 = \frac{1}{1-\alpha}$

$\omega_1^2 = \frac{1}{1+\alpha}$

1) $\omega^2 = \omega_1^2$ $\quad 1 - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{1+\alpha} A_1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} A_2 = 0 \\ -\frac{\alpha}{1+\alpha} A_1 + \frac{\alpha}{1+\alpha} A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1 = A_2 \qquad \vec{A}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $\omega^2 = \omega_2^2$

$$1 - \frac{1}{1-\alpha} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow -\frac{\alpha}{1-\alpha} A_1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} A_2 = 0$$

$$A_1 = -A_2 \Rightarrow \vec{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

$\omega_1^2 \neq \omega_2^2 \Rightarrow \vec{A}^1$ и $\vec{A}^2$ ортогональны

$$\|\vec{A}^1\| = \sqrt{1\cdot 1 + \alpha \cdot 1 + \alpha \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{2+2\alpha} \rightarrow \vec{A}^{1\prime\prime} = \frac{1}{\sqrt{2+2\alpha}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{A}^2\| = \sqrt{1\cdot 1 - \alpha - \alpha + 1} = \sqrt{2-2\alpha} \Rightarrow \vec{A}^{2\prime\prime} = \frac{1}{\sqrt{2-2\alpha}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Нормальные координаты:

$$\eta_1 = 1 \cdot \xi_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2+2\alpha}} + \alpha \xi_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2+2\alpha}} + \alpha \xi_2 \frac{1}{\sqrt{2+2\alpha}} + 1 \xi_2 \frac{1}{\sqrt{2+2\alpha}} =$$

$$= \xi_1 \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{2}} + \xi_2 \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} (\xi_1 + \xi_2)$$

$$\eta_2 = 1 \cdot \xi_1 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\alpha}} - \alpha \xi_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\alpha}} + \alpha \xi_2 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\alpha}} - \xi_2 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} (\xi_1 - \xi_2)$$

— норм. координаты

№2 $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = -\frac{mc^2}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(-\frac{2\vec{v}}{c^2}\right) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$H = \vec{p} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L$ ч?

$H = \vec{p}\vec{v} - L$