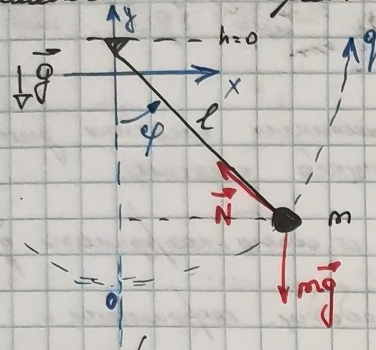
Теоретическая механика.
Введение.

02.02.21.

То все механика ~ только с использованием вариаций → другой математический аппарат.



Задача - плоская.

а) Второй з-н Ньютона: $m\ddot{\vec r} = m\vec g + \vec N$

Силы реакции неудобная ~ для неё никакой конкретной формулы нет.

б) ЗСЭ: (Закон сохранения энергии.)

~ Благодаря связи, на самом деле наше движение одномерное (движется по окружности)

$v = l\dot\varphi$

$h = -l\cos\varphi$

$\longleftarrow \quad \frac{mv^2}{2} + mgh = E$

отсчитывается от подвески.

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot\varphi^2 - mgl\cos\varphi = E$$ → сможем решить $\varphi(t)$

Достаточно было всего 1го ур-я → получили ур-е от 1ой переменной. — система с одной степенью свободы.

Степени свободы ~ „количество переменных, от которых зависит система".

Чтобы обойти силы реакции будем исп-ть не декартовы, а обобщённые координаты.

в) Некоторое „на пальцах" объяснение:
q ~ кривая координатная ось, на эту ось сила реакции в проекции 0.

Криволинейные координаты:

$\varphi = \frac{q}{l}$ $\qquad m\ddot q = -mg\sin\frac{q}{l}$ ~ пришли к нелинейной, но это верно

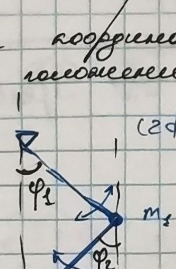
08.02.22.

1. Механика Лагранжа (лагранжев формализм в механике).

1.1 Обобщ. координаты

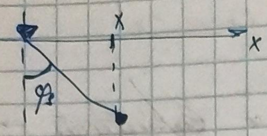
Опр. Обобщённые координаты - совокупность величин, которыми однозначно определяется положение механической системы в пространстве.

Пример: (2d)



Введём φ_1 и φ_2, и пусть они будут обобщёнными координатами.

Требование: обобщённые координаты должны быть независимы. (геометрически/алгебраически)



<u>Пример</u> Если ввести φ_1 и x ~ зависимые
=> достаточно только φ_1!

Общее обозначение обобщ. координат: $q_1, q_2, \dots, q_s$ или $\{q_i\}_{i=1}^{s}$ или q, по-другому: s - количество степеней свободы.

<u>Опр.</u> Состояние - совокупность информации о переменных системы, достаточной для однозначного предсказания будущего системы.

<u>Опр.</u> Обобщённая скорость - производная по времени от обобщ. координаты $\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$

<u>Постулат:</u> Состояние механической системы ~ это все обобщ. координаты и обобщённые ск-ти : $\{q_i, \dot{q}_i\}_{i=1}^{s}$

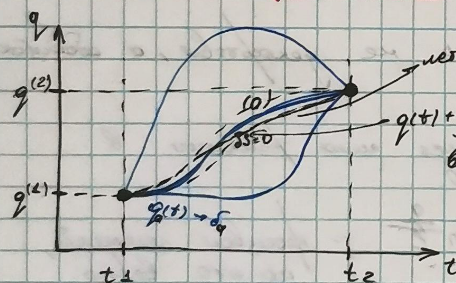
1.3. Вариационный принцип Гамильтона

<u>Вариационный принцип</u> (Гамильтона) - принцип наименьшего действия:

~ Каждая механическая система характеризуется функцией $L(q, \dot{q}, t)$ (скалярной, действит. значимой), называемой ф-ей Лагранжа, которая однозначно определяет законы движения системы. <u>А именно</u>: если система в момент времени t_1 занимает положение $q^{(1)}$ и в момент $t_2 > t_1$ занимает положение $q^{(2)}$, то <u>движение</u> системы на отрезке времени $[t_1; t_2]$ является экстремально <u>вариационной</u> задачи.

Первая вариация
$$\boxed{\begin{cases} \delta S = 0 \\ q(t_1) = q^{(1)}, \quad q(t_2) = q^{(2)} \end{cases}}$$
, где S ~ функционал, именуемый <u>действием</u>

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt}$$



истинное движение.

$q(t) + \delta q(t)$
вариация решения

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$

~ Должны движение проварьировать, рассмотреть близкие движения.

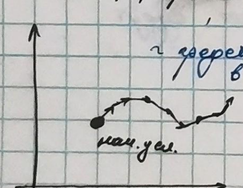
~ Интегральная формулировка.

Пусть (a) ~ решение.

$$S = S_a + \Delta S$$

разл. по степ. δq $\longrightarrow$ $\Delta S = \underbrace{\delta S}_{\sim \delta q} + \underbrace{\delta^2 S}_{\sim (\delta q)^2} + \delta^3 S + \dots$

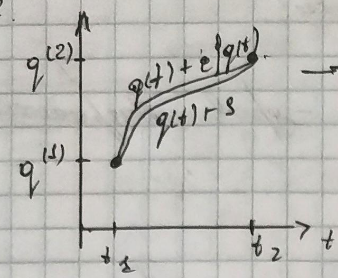
<u>Дифференциальная формулировка законов</u>: 1.2. Уравнение Лагранжа



~ усовершенствование решения в виде маленьких шагов

<u>Уравнения Лагранжа</u> (переход от интегральной формулировки, т.е. вариационной, → к дифференциальной.)

16.02

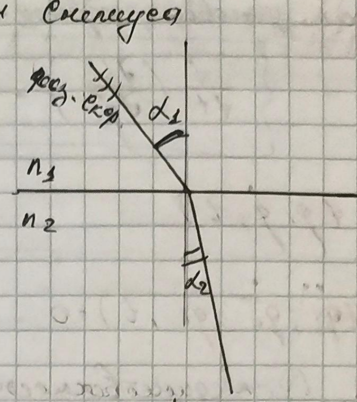


$\to S+\Delta S=\tilde{S}$

$\Delta S=\delta S$

$\delta S=0$

3-н Снеллиуса



$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$

$v_{фаз} = \frac{c}{n_2}$

время распростр. → min

$\Delta S = \tilde{S} - S$

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\dot q(t),t)\,dt \to \tilde{S}=\int_{t_1}^{t_2} L(q(t)+\delta q(t),\dot q(t)+\delta\dot q(t),t)\,dt \ominus$$

$$\ominus \text{ Ряд Тейлора } = \int_{t_1}^{t_2}\Big[L(q,\dot q,t)+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i + O((\delta q)^2)\Big]dt =$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)\,dt + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\Big[\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i}_{\delta S} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} O((\delta q)^2)\Big]dt}_{\delta^2 S+\delta^3 S+\dots}$$

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{s}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Big)-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big)\delta q_i = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{s}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big)\Big)dq_i(t) +$$

$$+\underbrace{\sum_{i=1}^{s}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i(t)\Big)\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Big)=\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big)\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i$$

где t явно

→ теперь смотрим на рис. 1 и н.у.

$$\begin{cases}\delta S=0\\ q(t_1)=q^{(1)},\ q(t_2)=q^{(2)}\\ \delta q(t_{1,2})=0\end{cases}$$

$$\underbrace{\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{s}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big)\Big)\delta q_i(t)\,dt}_{\text{непрерыв. диф.}}$$

Требуем $\delta S=0$ при любых допустимых вариац. $\delta q_i(t)$

Интеграл $=0$, если скобка перед $\delta q_i = 0$.

Необх. условие обращен. в 0 первой вариации:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, s}$$ — уравн. Лагранжа

$L = L(q, \dot q, t)$

$\Phi(\ddot q_i, \dot q_i, q_i, t) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, s$ — система ОДУ порядка 2s.

Теорема. (о неединственности функц. Лагранжа физ. системы.)
Пусть физич. сист. описывается ф-цией Лагранжа $L(q, \dot q, t)$.
Тогда ф-я Лагранжа $\tilde L = L + F(q, \dot q, t)$, где $F(q, \dot q, t) = \frac{d}{dt} f(q,t)$
описывает те же законы движения.

Док-во: $S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$, $\tilde S = \int_{t_1}^{t_2} \tilde L\, dt = S + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q,t)\, dt = S + f(q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} \neq S$

Но в законе движ. стоит δS.

$$\delta \tilde S = \delta S + \underbrace{\delta}_{\text{вариация}}\left(f(q,t)\Big|_{t_1}^{t_2}\right) = \delta S$$ => вариац. задачей $\delta S = 0$ и $\delta \tilde S = 0$ — одинаков. в силу вариац. задачи

($f \neq 0$, но концы закрепл. → вариац.) $f = 0$.

То есть одинаковы законы движения ☒

1.2 Неединств. ф-ции Лагранжа

Пр. $f(q,t) = ct$ $(c = const)$, тогда $F = \frac{d}{dt} f = c$.
т. е. сдвиг. потенц. энергии на конст.

$$\frac{d}{dt} f(q,t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot q_i$$

Точечные преобразования.
(конфигурационное пространство.)

Опр. Пусть $\{q_i\}_{i=1}^{s}$ и $\{Q\}_{i=1}^{s}$ — 2 набора обоб. коорд. одной физ. системы.
Тогда выражения, связывающие q и Q назыв. точечн. преобр.

$$q_i = f_i(Q, t)$$
$$\dot q_i = \frac{d}{dt} f_i(Q, t) = q_i(Q, \dot Q, t)$$

1.2 Точечные преобразования

2.03.22.

Теорема.
Пусть $\{q_i\}_{i=1}^{s}$ и $\{Q_i\}_{i=1}^{s}$ — два набора обобщ. коорд. одной и той же системы, связанных преобразованием:

$$\begin{cases} q_i = f_i(Q, t) \\ \dot q_i = \frac{d}{dt} f_i(Q, t) = q_i(Q, \dot Q, t) \end{cases},$$

и известна функция Лагранжа системы в коорд q: $L_q(q,\dot q,t)$

Тогда: функция Лагранжа в коорд. Q: $L_Q(Q,\dot Q,t) = L_q(f(Q,t), \dot g(Q,\dot Q,t),t)$

Док-во: запишем функционал действия:

$$S_q = \int_{t_1}^{t_2} L_q(q(t),\dot q(t),t)\,dt$$

$$S_Q = \int_{t_1}^{t_2} L_Q(Q,\dot Q,t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L_q(f(Q,t), q(Q,\dot Q,t),t)\,dt$$

одни и тот же интеграл, записанный через разные переменные в подынтегр. выражении.

Вариационная задача: $\delta S_q = 0$ и $\delta S_Q = 0$ ~ одна и та же вариац. задача в разных перем-х.

=> Одни и те же законы движения (в разных переменных).

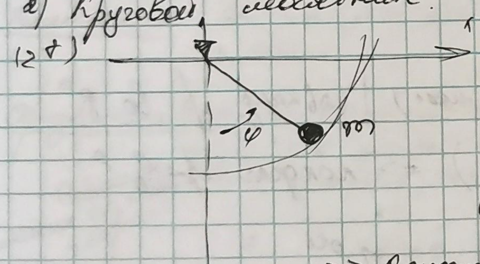
Опр. Конфигурационное пространство - это абстрактное пространство, в котором в качестве системы координат выступают обобщённые координаты.

Примеры: 1) Мат. точка в 3d пр-ве. Обобщ. коорд: (x,y,z) декарт. (ρ,φ,z) цилиндр. (r,θ,φ) сферич. ...

Конфигурационное пр-во — 3d эвклидово пр-во.

2) Круговой маятник.

(2d)



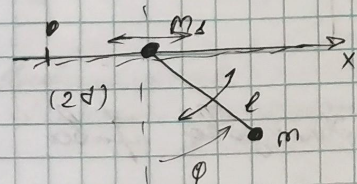
Обобщ. коорд. (φ)

Если не перемещается вдоль горизонтали можно исп-ть (x)

(φ) (x) ~ координаты на окружн.

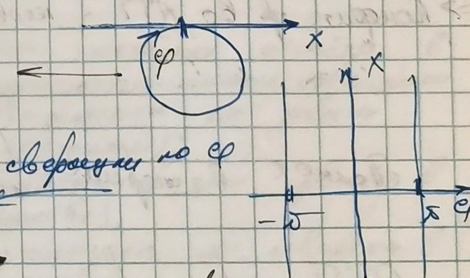
=> Конфигурационное пр-во - окружность.

3)

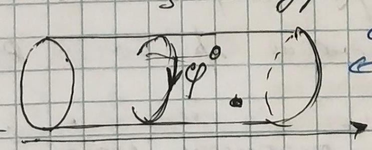


Обобщ. коорд.: (x,φ).

Конфигурационное пр-во — цилиндр.

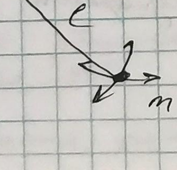


свернули по φ



Взаимно однозначное соответствие между положениями мех. системы и точками конфиг. пр-ва

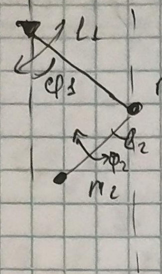
4)

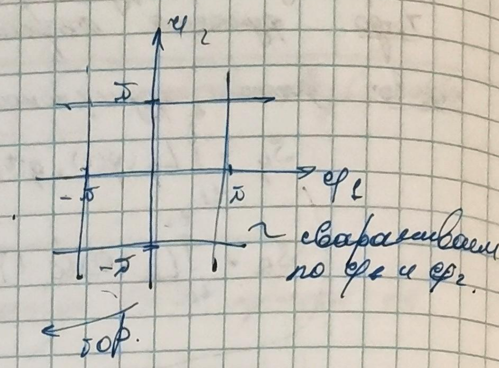


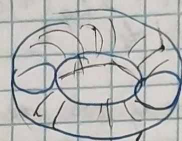
~конфигурационное пространство — сфера в 3d эвклидовом пр-ве.

5) Двойной плоский маятник.

Обобщ. коорд. $(\varphi_1; \varphi_2)$

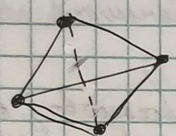


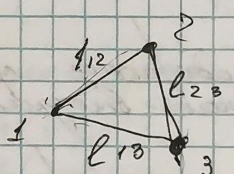




Конфиг-ое пр-во тор.

6) Абс. твердое тело в 3d.





Положение АТТ однозначно опр-ся полож. 3 его точек

всего координат: $(x_{1,2,3},\ y_{1,2,3},\ z_{1,2,3})$ — 9 шт.

связей: 3 связи

=> 3 из 9 коорд. выражаются через все остальные

=> 6 степеней свободы (т.е. 6 обобщ. коорд)

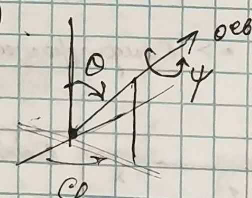
3 из этих 6 коорд — коорд. (например центра масс) в 3d эвклидовом пр-ве.

+ 3 угла, задающих ориентацию (поворот) "Эйлеровы углы"

Зафиксируем одну точку тв. тела (напр. центр масс) | эвклид. пр-во R^3

=> ост. 3 степени своб. (эйлеровы углы) => конфиг. пр-во ?

(θ, φ, ψ) - напр. оси, как в сфер. с.к.) — эйлеровы углы



=> Конфиг. пр-во АТТ - неэвклидово 3d пр-во. SO(3)

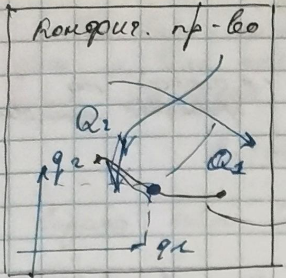
группа вращений 3d эвклидова пр-ва.

Полное 6-мерное конфиг. пр-во $= R^3 \times SO(3)$

Обобщ. коорд. - разные системы координат, введённые в конфиг. пр-ве.

Конфиг. пр-во - одно для конкретной системы.

=> Кол-во обобщ. коорд (кол-во степеней свободы) = размерности конфиг. пр-ва.



траект. точки

=> Ф-я Лагранжа явл. действительнозначная скалярн. функция от точки в конфиг. пр-ве; скорости в конфиг. пр-ве; времени.

9.03.22

Свойства симметрии и функция Лагранжа свободной материальной точки (классической частицы).

Опр. Материальная точка (МТ) — это объект нулевого размера, характер-ся действительным положительным параметром — массой, $m > 0$.

Как вариант: „МТ — объект, размер которого $\ll$ остальных пространственных масштабов системы".

Опр. Система отсчёта (СО) — средство измерения, позволяющее определить положение (координаты) МТ в данный момент времени, или положение и время точечного события.

Замечание: СО — физический объект (а не математический "сист. коорд. + часы")

Предположения: 1. Предположение о невозмущающих измерениях: подразумеваем, что положение МТ можно измерить сколь угодно точно, не изменив его при этом.

Работает в макро (не квантовой) теории.

2. Физическое пространство — трёхмерное эвклидово пр-во ($\mathbb{R}^3$)

Конфигурационное пр-во МТ — $\mathbb{R}^3$, обобщ. коорд.: $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$

Опр. Инерциальная система отсчёта (ИСО) — такая система отсчёта, в которой законы физики обладают следующими симметриями:

1) однородность времени (инвариантность отн. сдвига во времени);
2) однородность пространства (инвариантность отн. сдвига в пространстве);
3) изотропия пространства (инвариантность отн. поворота в пространстве).

Постулат: Принцип относительности.

1. СО, движущаяся в ИСО равномерно и прямолинейно, также явл. ИСО.
2. Законы физики во всех ИСО одинаковы.

Функция Лагранжа м.т. в ИСО: $L(\vec{r}, \vec{v}, t) = ?$

Обеспечение выполнения св-в симметрии ИСО: (с опорой на простейшие пункты)

1) Однородн. времени → $L(\vec{r}, \vec{v}) = ?$

2) Однородн. пр-ва → $L(\vec{v}) = ?$

3) Изотропия пр-ва → $L(|\vec{v}|) - ?$, т.е. $L = \Lambda(\vec{v}^2)$ некоторая

16.03.22.

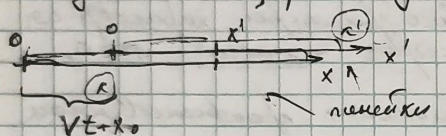
$L = \Lambda(\vec{v}^2)$

Преобразования ИСО.

Пусть ИСО K' движется относительно ИСО K равномерно прямолинейно со скоростью $\vec{V}$. Пусть известны координаты $\vec{r}'$ и время t' некоторого события в сист. отсчёта K'.

Найти коорд. $\vec{r}$ и время t того же события в СО K.

Пусть $Ox \uparrow\uparrow \vec{V}$, рассм. одномерную задачу (преобр. x)



$x = x' + Vt + x_0 \quad \Big| \ \frac{d}{dt}$

$v = v' + V$ — правило сложения скоростей ~ не всегда справедливо.

K и K' — это системы отсчёта! (а не ск.)

Обоснование (картинки и результата): пусть выполняется предположение о возможности дальнодействия (передача воздействия на конечное (ненулевое) расстояние за 0 время.)

Тогда:

1. Возможны абсолютно твёрдые тела; пусть СО реализована в виде линейки (АТТ со шкалой); (окр. координат)
2. Возможно ввести единое (абсолютное) время в системах K и K': $t = t'$
3. Возможно "сфотографировать" всю систему (включая линейки) в любой момент t.

=> тогда задача преобразований ИСО сводится к геометрической:

Преобразования Галилея: $\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \\ t = t' \end{cases}$ Следствие: правило сложения скоростей $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$

Ф-ция Лагранжа своб. м.т. в Галилей-инвариантной теории.

$L = \Lambda(\vec{v}^2)$

Пусть известна ф-ция Лагранжа $L_K^{\text{своб. м.т.}} = \Lambda_0(\vec{v}^2)$ в ИСО K. Найдём ф-цию Лагранжа той же м.т. в ИСО K' (движущейся отн. ИСО K со ск-ю $\vec{V}$)

1 способ: а) Через преобр. Галилея (как точное преобразование)

$L_{K'} = \Lambda_0((\vec{v}' + \vec{V})^2)$

б) Основываясь на принципе относительности: $L_{K'} = \Lambda_0(\vec{v}'^2)$

Оба вида ф-ии Лагранжа $L_{K'}$ (а) и (б) - правильные, т.е. должны давать одни и те же законы движ-я. По теореме о неоднозначности ф-ии Лагранжа это означает, что:

$$\Lambda_0((\vec{v}\,'+\vec{V})^2) = \Lambda_0(\vec{v}\,'^2) + \frac{d}{dt} f(\vec{r}\,',t)$$

Задача: найти вид ф-ии $\Lambda_0(\cdot)$, который обеспеч. выполн. условия.

Сначала решим задачу в предположении $\vec{V} = \varepsilon\cdot\vec{b}$, ε - малый параметр.

Разложение по степеням ε:

$$\Lambda_0((\vec{v}\,'+\vec{V})^2) = \Lambda_0(\vec{v}\,'^2 + 2(\vec{v}\,',\vec{V}) + \vec{V}^2) = \Lambda_0(\vec{v}\,'^2 + 2\varepsilon(\vec{v}\,',\vec{b}) + \varepsilon^2\vec{b}^2) =$$

Справка: $f(x+\varepsilon) = f(x) + f'(x)\cdot\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ ~ ряд Тейлора.

$$= \Lambda_0(\vec{v}\,'^2) + \Lambda_0'(\vec{v}\,'^2)\cdot 2\varepsilon(\vec{v}\,',\vec{b}) + O(\varepsilon^2)$$

Требуем, чтобы:

$$\Lambda_0'(\vec{v}\,'^2)\cdot 2\varepsilon(\vec{v}\,',\vec{b}) = \frac{d}{dt} f(\vec{r}\,',t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}\,',t) + \underbrace{\boxed{\frac{\partial}{\partial \vec{r}\,'} f(\vec{r}\,',t)}}_{\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z'}\right)} \cdot \underbrace{\vec{v}\,'}_{\dot{\vec{r}}\,'}$$

постоянный вектор

значит слева тоже пост. вектор

Заметим: в левой части нет зависимости от $\vec{r}\,'$ и t
=> значит в пр. части тоже $\vec{v}\,'$ умножается скалярно на пост. вектор.

$$\Rightarrow \quad \Lambda_0'(\vec{v}\,'^2) = a = const$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda_0(\vec{v}\,'^2) = a\cdot\vec{v}\,'^2 + \underbrace{C}_{=\frac{d}{dt}(Ct)}$$ ~ не оказ. влияние на законы движ-я, можно выкинуть

В СО К: $L = \Lambda_0(\vec{v}^2) = a\vec{v}^2$

Проверим при произвольном (не малом) $\vec{V}$

$$\Lambda_0((\vec{v}\,'+\vec{V})^2) = a(\vec{v}\,'^2 + 2(\vec{v}\,',\vec{V}) + \vec{V}^2) = \underbrace{a\vec{v}\,'^2}_{\Lambda_0(\vec{v}\,'^2)} + \underbrace{2a(\vec{v}\,',\vec{V}) + a\overset{const}{\vec{V}^2}}_{\text{треб.} \ = \frac{d}{dt} f(\vec{r}\,',t)}$$

Треб. $f(\vec{r},t) = 2a(\vec{r}\,',\vec{V}) + a\vec{V}^2 t$ ~ вычисл. интеграл

Итак, вид функции Лагранжа свободной м.т. в Галилеевой инвар. физике (в клас. мех.):

$$\boxed{L = a\vec{v}^2}$$

a - опр. св-ва самой частицы (пост. параметр)

Для обеспеч. соотв. с формализмом Ньютона (законами): $a = \frac{m}{2}$, тогда

$$\boxed{L = \frac{m\vec{v}^2}{2}}$$

Замечание: з симметр. простр. вр. $\Rightarrow L = \Lambda(\vec{v}^2)$

Галилей-инвариантная теория: $L = \frac{m\vec{v}^2}{2}$ } Лоренцево-инвариантная теория

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt}$$

$$v^2 dt^2 = (d\vec r)^2$$

$$S = -mc^2\int\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt = -mc\int\sqrt{c^2-v^2}\,dt = -mc\int\sqrt{c^2dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2)}$$

ds – „интервал" – инвариант отн. преобразований Лоренца.

Функция Лагранжа систем частиц.

__Теорема__ (об аддитивности ф-ий Лагранжа)

Пусть A и B – замкнутые невзаимодействующие подсистемы, описываемые функциями Лагранжа L_A и L_B.
__Тогда__ полная система, состоящая из невзаимодействующих подсистем A и B описывается ф-ей Лагранжа вида

$$\boxed{L = c_A L_A + c_B L_B}$$, где c_A и c_B – пост. параметры.

Док-во: Докажем, что законы движения, описываемые, с одной стороны ф-ями L_A и L_B по отдельности, а с другой стороны – ф-ей L – одинаковы.

Рассм. вариац. задачи:
$$\begin{cases}\delta S_A = 0\\ \delta S_B = 0\end{cases} \quad (**) \quad \text{и} \quad \delta S = 0 \quad (*)$$

– док-ть эквивал. решения.

1) (**) => (*)

2) (*) => (**)

$S_A = \int L_A\,dt$, $S_B = \int L_B\,dt$

$\Rightarrow S = \int L\,dt = c_A\int L_A\,dt + c_B\int L_B\,dt = c_A S_A + c_B S_B$

$\delta S = c_A\,\delta S_A + c_B\,\delta S_B$

$\delta S = 0 \Rightarrow \delta S_B = -\frac{c_A}{c_B}\delta S_A$

$\delta S_A = 0$ и $\delta S_B = 0$

$\Uparrow$

Если δS_A и $\delta S_B \neq 0$, то они зависимы, что противоречит условию теоремы.

__Замечание:__ В общем случае понятие ф-ии Лагранжа отдельной подсистемы в составе полной системы не имеет смысла и не вводится.

① __Ф-я Лагранжа системы невзаим. частиц.__

$$L = \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{m_\alpha \vec v_\alpha^{\,2}}{2}$$ – по доказанной выше теореме, описыв. систему невзаим. частиц.

c_α – пост. коэф. → включаем в массу.

т.е. $c_\alpha \tilde m_\alpha = m_\alpha$

1. __Функция Лагранжа потенциальных систем.__

__Опр__ Потенциальной системой (взаимод.) мы будем называть систему описываемую ф-ей Лагранжа вида:

$$L=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2}}{2}-U(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N)$$

где $T=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2}}{2}$ - называем кинетич. энергией, а $U(\dots)$ - потенц. энерг.

Следствие (обоснование) Ур-ния Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\alpha}=0$

Обозн: $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$; $\frac{\partial}{\partial \vec{v}}=\left(\frac{\partial}{\partial v_x},\frac{\partial}{\partial v_y},\frac{\partial}{\partial v_z}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}},\frac{\partial}{\partial \dot{y}},\frac{\partial}{\partial \dot{z}}\right)$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\alpha}=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha};\quad \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_\alpha}=\frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha}\left(\sum_\beta\frac{m_\beta \vec{v}_\beta^{\,2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha}\cdot\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2}}{2}=\frac{m_\alpha}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha},\frac{\partial}{\partial \dot{y}_\alpha},\frac{\partial}{\partial \dot{z}_\alpha}\right)\left(\dot{x}_\alpha^2+\dot{y}_\alpha^2+\dot{z}_\alpha^2\right)=$$

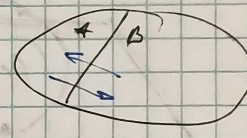
$$=m_\alpha(\dot{x}_\alpha,\dot{y}_\alpha,\dot{z}_\alpha)=m_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha=m_\alpha\vec{v}_\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)=\frac{d}{dt}(m_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha)=m_\alpha\ddot{\vec{r}}_\alpha$$

$$\boxed{m_\alpha\ddot{\vec{r}}_\alpha=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha}}$$ ~ совп. со 2м законом Ньютона

2. Функция Лагранжа неавтономных потенциальных систем

Рассмотрим систему, сост. из подсистем A и B, причём влиянием A на B можно пренебречь.



Попытаемся получить ф-ю Лагр, описывающую подсистему A для полной системы

$$L=\sum_{\alpha\in A}\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2}}{2}+\sum_{\beta\in B}\frac{m_\beta \vec{v}_\beta^{\,2}}{2}-U(\vec{r}_A,\vec{r}_B)$$

все частицы из A

все частицы из B

$\vec{r}_A=\{\vec{r}_\alpha\}_{\alpha\in A}$

$\vec{r}_B=\{\vec{r}_\beta\}_{\beta\in B}$.

Поскольку пренебрегли влиянием $A\to B$, движение подсистем не зависит от A, обозн. это движение:

$\vec{r}_B(t)$, $\vec{v}_B(t)=\frac{d}{dt}\vec{r}_B(t)$, тогда

- задает $v_\beta(t)$

- задает $\vec{r}_B(t)$

$$L=\sum_{\alpha\in A}\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2}}{2}+\sum_{\beta\in B}\frac{m_\beta \vec{v}_\beta^{\,2}(t)}{2}-U(\vec{r}_A,\vec{r}_B(t))$$

$= T_B(t)=\frac{d}{dt}f(t)$ - можно выкинуть

$$\Rightarrow \left\{L_A=\sum_{\alpha\in A}\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2}}{2}-U(\vec{r}_{\alpha\in A},t)\right\}$$

~ выражение через коорд. и скорости частиц подсистем. A не содержит коорд. и скорост. подсист. B, а значит может рассматриваться как ф-я Лагранжа отдельно взятой подсистемы A.

Опр. В рамках сделанных предположений подсист. A назыв. неавтономной потенциальной системой.

3. Потенциальная система с голономными связями.

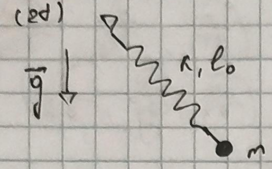
Опр. Связи - взаимодействие, сводящееся к геометрическим ограничениям на положение и движение тел.

Связи реализуются в виде соприкосновения тел и нитей, рычагов и т.д., если можно пренебречь

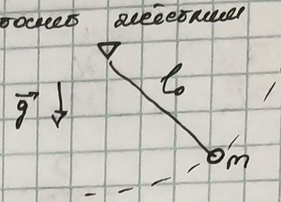
а) временем сокращения;

б) упругой деформацией этих элементов.

<u>Пример</u>: (2d)

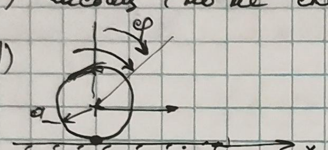


$k \to \infty$ пружинка станет жёстким стержнем



<u>Опр.</u> <u>Голономная связь</u> - сводящаяся к ограничениям только на положения (т.е. координат) частиц (но не скорости!).

<u>Пр. 3</u>: 1) (2d)

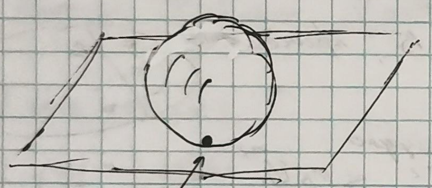


без проскальз. т.е. $\vec v = 0$ в этой точке.

$a\dot\varphi = \dot x \quad \Big| \int dt$

$x = x_0 + a\varphi$ - огр. только на координаты - голономная.

2) (3d) шар на плоском столе без проскальз.



$\vec v = 0$ (без проск.)

→ не приводится к голономной.

=> неголономная связь.

Ограничимся только голономными связями. Представим связи в виде уравнений:

$$\begin{cases} f_1(\vec r_1, \dots, \vec r_N, t) = 0 \\ \vdots \\ f_m(\vec r_1, \dots, \vec r_N, t) = 0 \end{cases}$$

- алгебраическая система отн. неизвестных $\{\vec r_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ - $3N$ действит. величин.

- M уравнений

N - число частиц

m - число связей

Требуем: $3N > M$ (недоопр-ая система)

Неизвестные $\{\vec r_\alpha\}_1^N$ выражаются через s штук независимых параметров $\{q_1, \dots, q_s\}$, где $s = 3N - M$

<u>Заметим</u>: совокупность величин $\{q_i\}_1^s$ (а) независимы и (б) однозначно определяют положение системы (т.е. значения всех $\{\vec r_\alpha\}_\alpha^N$), а значит, удовл. опред. <u>обобщ. координат</u>.

$$\vec r_\alpha = \vec r_\alpha(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\vec v_\alpha = \frac{d}{dt}\vec r_\alpha = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial t}$$

Подставляем в ф-ю лагранж. системы:

$$L = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{2}\vec v_\alpha^{\,2}}_{T} - U(\vec r_1, \dots, \vec r_N, t)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial q_i}\dot q_i \cdot \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial q_j}\dot q_j + 2\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial q_i}\dot q_i \cdot \frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial t}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\underbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{\partial \vec r}{\partial q_i}\frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial q_j}\right)}_{T_{ij}^{(2)}(q,t)}\dot q_i \dot q_j + \sum_{i=1}^{s}\underbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial t}\right)}_{T_i^{(1)}(q,t)}\dot q_i + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\left(\frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial t}\right)^2}_{T^{(0)}(q,t)} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} T_{ij}^{(2)}(q,t)\dot q_i \dot q_j}_{T_2 \text{ — квадратичная форма по обобщ. ск-ям}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{s} T_i^{(1)}(q,t)\dot q_i}_{T_1 \text{ — линейная форма по обобщ. ск-ям}} + \underbrace{T^{(0)}(q,t)}_{T_0 \text{ — не содержит обобщ. скоростей}} = T_2 + T_1 + T_0$$

Потенциальная энергия: $U(\vec r_1(q,t), \dots, \vec r_N(q,t), t) = U_0(q,t)$ — не содержит обобщ. ск-тей

$$\Rightarrow L = T - U = T_2 + T_1 + \underbrace{T_0 - U_0}_{L_0}$$

$L = L_2 + L_1 + L_0$, где $L_2 \equiv T_2$, $L_1 \equiv T_1$, $L_0 = T_0 - U_0$

Следствие: при стационарных голономных связях все $\frac{\partial \vec r_\alpha}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow T_0 = T_1 = 0$$

$$\Rightarrow L = \underbrace{T_2}_{T}\underbrace{- U_0}_{L_0}$$

Замечание: $H = L_2 - L_0 = T + U$

4. Обобщенно-потенциальные системы

$$U = U_1 + U_0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{s} U_i^{(1)}(q,t)\dot q_i}_{U_1} + U_0(q,t)$$

Функция Лагранжа заряж. частицы в заданном эл.магн. поле.

в CGS: $L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\left(\vec A(\vec r,t)\cdot \vec v\right) - e\varphi(\vec r,t)$, где c — ск-ть света в вакууме

e — заряд частицы

$\vec A$ — векторный потенциал

φ — скалярный потенциал

$$\begin{pmatrix}\vec E\\ \vec B\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}\vec A\\ \varphi\end{pmatrix}$$

$$\vec B = \operatorname{rot}\vec A$$

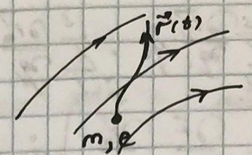
$$\vec E = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t}$$

Уравнения Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec v}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec r} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec r} = \left\{\frac{\partial}{\partial \vec r} = \nabla\right\} = \frac{e}{c}\nabla(\vec A\vec v) - e\nabla\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r},t)$$

$\vec{r}(t)$ движение частицы



$\vec{A}(\vec{r},t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = m\ddot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\underbrace{\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{r}(t),t)}_{\text{субстанциональная производная}}$$

$$\frac{d}{dt}A_x(\vec{r}(t),t) = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial \vec{r}}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)A_x = \frac{\partial A_x}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)A_x$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{A}(\vec{r},t)}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{A}$$

$$\boxed{\frac{d\cdot}{dt} = \frac{\partial\cdot}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)}$$ — формула для субстанциальной производной.

$$m\ddot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{A}\right) - \frac{e}{c}\nabla(\vec{A},\vec{v}) + e\nabla\varphi = 0$$ ~ ур-е движ. нашей системы.

$$m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{e\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)}_{eE\text{ - сила Кулона}} + \ldots \quad \leftarrow \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = [\nabla\times\vec{A}]$$

$$m\ddot{\vec{r}} = eE + \underbrace{\frac{e}{c}\left(\nabla(\vec{A}\vec{v}) - (\vec{v}\nabla)\vec{A}\right)}_{\text{сила Лоренца?}}$$

Магн. сила:

$$\vec{F} = \frac{e}{c}[\vec{v}\times\vec{B}]$$

$$\vec{F} = \frac{e}{c}[\vec{v}\times[\nabla\times\vec{A}]] = \frac{e}{c}\left(\nabla(\vec{v},\vec{A}) - \vec{A}(\vec{v},\nabla)\right) = \frac{e}{c}\left(\nabla(\vec{A},\vec{v}) - (\vec{v}\nabla)\vec{A}\right)$$

(ф-я Лагранжа)

$\Rightarrow$ Док-ли, что ур-е соответствует.

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_э + \vec{F}_м$$

Обобщённые законы сохранения.

Опр. 1-й интеграл — функция обобщённых координат, обобщ. ск-тей и времени, сохраняющая значение на истинном движении (решении) системы (просто закон сохр. энергии).

$$\psi(q_1,\ldots,q_s,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s,t)\Big|_{\underset{\text{истинное движ.}}{q=q(t)}} = \text{const}$$ (з-н сохранения / интеграл движения)

Опр. Обобщённый импульс:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Теорема (З-н изменения обобщ. импульса):

$$\frac{d}{dt}p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Док-во:

Из ур-я Лагранжа $\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)}_{p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Опр. коорд. q_i назыв-ся циклической, если $\partial L / \partial q_i = 0$

Следствие. З-н сохранения обобщ. импульса: если q_i — циклич., то $p_i = \text{const}$. (т.е. явл. 1-м интегралом движения)

Опр. Обобщённая энергия $H(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t)$

Опр. Функция $f(x_1,\dots,x_s)$ назыв. однородной со степенью однородности n, если $f(ax_1,\dots,ax_s) = a^n f(x_1,\dots,x_s)$

Теорема Эйлера
~ Если ф-я $f(x_1,\dots,x_s)$ — одноф. со степенью однородности n, то $\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i = n f(x_1,\dots,x_s)$

Теорема (о виде обоб. энергии для потенц. систем (с голономными связями))
Пусть $L = L_2 + L_1 + L_0$, где L_i — однородная по обобщ. скоростям со степ. однородности i, тогда

$$H = L_2 - L_0$$

Док-во:

$$H = \sum_i \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (L_2 + L_1 + L_0) =$$

$$= (2L_2 + 1 \cdot L_1 + 0 \cdot L_0) - (L_2 + L_1 + L_0) = L_2 - L_0$$

Замечание: Если $T_1 = T_0 = U_1 = 0$, то $H = T + U$ (см. прошлую лекцию)

Теорема (З-н изменения обобщённой энергии)

$$\boxed{\left.\frac{dH}{dt}\right|_{q(t)} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$$

ист. движ.

Док-во:

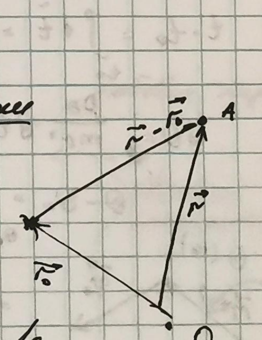
$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\Big(\underbrace{\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)}_{\frac{\partial L}{\partial q_i}\ \text{(ур. Лагр.)}} \dot{q}_i + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i}\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{s} \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d\dot{q}_i}{dt}} + \frac{\partial L}{\partial t}\Big) =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Опр. Время t называется циклическим, если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Следствие: З-н сохранения обоб. энергии:
~ Если t — циклич., то H явл. 1-м интегралом, т.е., сохраняется на всех истинных движ. (решениях) системы.

Движение м.т. в центральном поле



Опр. Центральное поле: $U(\vec{r}) = U(|\vec{r} - \vec{r}_0|)$

Ф-я Лагранжа: $L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U(|\vec{r} - \vec{r}_0|)$

Введём сферическую сист. коорд. с началом коорд. в центре поля (в точке $\vec{r}_0$),

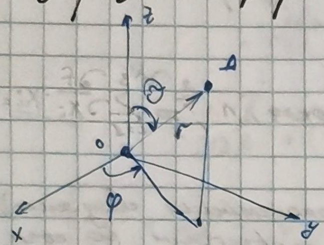
$\vec{r}_0 = \text{const}$ — "центр поля" тогда $|\vec r - \vec r_0| = r$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + r^2\dot\theta^2\right) - U(r)$$

φ - циклич => $p_\varphi = const$,

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = mr^2\sin^2\theta\,\dot\varphi = const$$

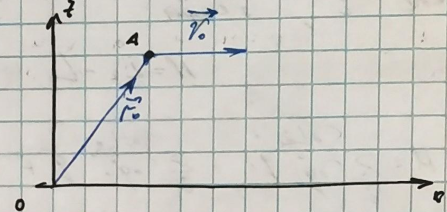
Изобразим сферич. с.к. с привязкой к декартовым осям (x, y, z)



Нач. условия $\vec r(t_0)$ и $\vec v(t_0)$
$\vec r_0$ $\vec v_0$

Расположим систему координат (повернём) так, чтобы коорд-ая пл-ть xOz проходила через (центр поля O), вектор $\vec r_0$ и вект. $\vec v_0$ (постр. плоскость через 3 точки)

Тогда:



Для сферич. коорд. имеем:

$\varphi(t_0) = 0$
$\dot\varphi(t_0) = 0$

значит $p_\varphi(t_0) = 0$, то $p_\varphi(t) = 0 = const$.

$\Rightarrow \dot\varphi = 0 = const \rightarrow \varphi(t) = 0 = const$ $\Rightarrow$ Всё движение будет происходить в пл-ти.

Движение в центральном поле всё. плоское.

13.04.22. $L_{2d}(r, \theta, \dot r, \dot\theta) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - U(r)$

θ - циклич. => $p_\theta = const$, $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = mr^2\dot\theta \rightarrow \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}$

t - циклич. => $H = const$, $H = L_2 - L_0 = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + U(r) = E = const$

$$\frac{m\dot r^2}{2} + \underbrace{\frac{p_\theta^2}{2mr^2} + U(r)}_{U_{эф.}(r)} = E$$

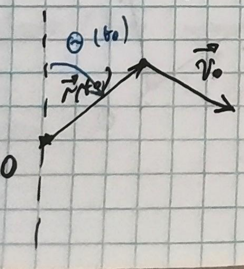
$$\frac{dr}{dt} = \dot r = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{эф.}(r)\right)}$$

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} d\tilde t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{d\tilde r}{\sqrt{E - U_{эф}(\tilde r)}} \Rightarrow r(t; r_0, p_\theta, E)$$

$$d\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}dt$$

$$\theta - \theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\tilde\theta = \int\frac{p_\theta}{mr^2}dt = \pm\frac{p_\theta}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{d\tilde r}{\tilde r^2\sqrt{E - U_{эф}(\tilde r)}} \Rightarrow \theta(r, r_0, \theta_0, p_\theta, E)$$

$r(t)$ подстав. решение   не надо подставл. решение $r(t)$



$\Rightarrow \dot r(t_0)$, $\dot\theta(t_0)$

Комплект начальных условий:

$$\begin{pmatrix}\vec r(t_0)\\ \vec v(t_0)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r_0(t_0)\\ \dot r(t_0)\\ \theta(t_0)\\ \dot\theta(t_0)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}p_\theta\\ E\\ r_0\\ \theta_0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} r(t; r_0, p_\theta, E)\\ \theta(r(t); r_0, \theta_0, p_\theta, E)\end{pmatrix}$$

гео. своб.
8 конст.

из дифур:

$$\begin{cases} m\ddot x = f_x(x,y) \\ m\ddot y = f_y(x,y)\end{cases} \to \begin{cases} \dot x = v_x \\ m\dot v_x = f_x(x,y) \\ \dot y = v_y \\ \dot v_y = f_0(x,y)\end{cases}$$

4 константы.

<u>Неправильно!</u> <u>делать так:</u> $\dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2} \to L_{1d} = \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - U(r)$

$t_{цикл.} \to H = const$; $H = L_2 - L_0 = \frac{m\dot r^2}{2} - \cancel{U_{эф}(r)}$

$$H = L_2 - L_0 = \frac{m\dot r^2}{2} + U(r) - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} = \tilde E \text{ — не энергия}$$

не работает!

Но, ф-я Лагранжа должна запис. через обобщ. коорд.! т.е. теперь (с обобщ. импульсом) → ф-я не явл. ф-ей Лагранжа!

<u>Неверно:</u> из $\frac{dr}{dt} = \dot r = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{эф}(r)\right)}$

$$\int dr = \pm\int\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{эф}(r)\right)}\,dt$$

— не решение в квадратурах, а интегральное уравнение.

ф-я от r

Сведение к 1d ф-ии Лагранжа.
Рассм. энергию:

$$\frac{m\dot r^2}{2} + U_{эф}(r) = E$$

Запишем формально ф-ю Лагранжа такую, чтобы из неё получалась такая ~~ф-я Н~~ энергия:

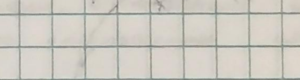
$$L_{1d}(r, \dot r) = \frac{m\dot r^2}{2} - U_{эф.}(r)$$

$H = L_2 - L_0 =$ тому, что нужно

<u>Качественное исследование</u>
<u>движения в центральном поле.</u>

1) Азимутальное движение $\theta(t)$; $\dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}$

Если $p_\theta = 0 \to \dot\theta = 0 \to \theta = const$

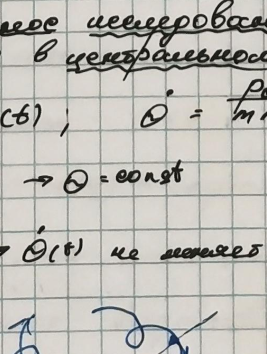


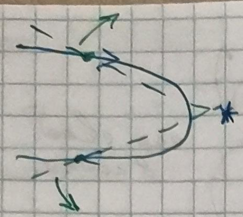
лобовое падение

лобовое рассеяние.

Далее полагаем $p_\theta \neq 0 \to \dot\theta(t)$ не меняет знак, ⇒ $\theta(t)$ монотонна

Невозм. движения:





2) Радиальное движение.

Классифицируем по достижимости: а) центра поля: с падением на центр / без падения.

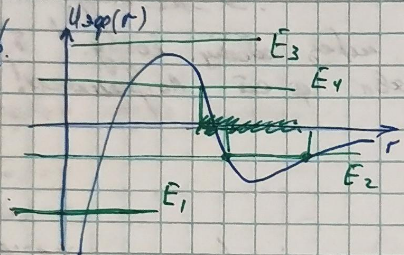
б) беск-ти: финитное / инфинитное.

• Метод баланса энергии:

$$\underbrace{\frac{m\dot{r}^2}{2}}_{\geq 0} + U_{эф}(r) = E \to U_{эф}(r) \leq E$$

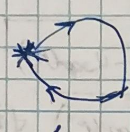
~ достижимые значения r явл. решениями этого неравенства.

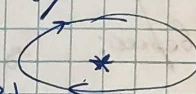
Пример.



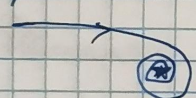
1) Финитное дв. с падением на центр.

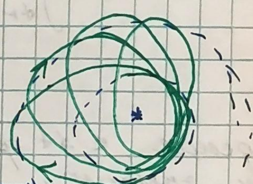
2) Финитное без падения (орбитальное)


1


(притяг)
2

3) Инфинитное с падением

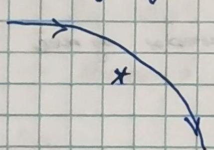


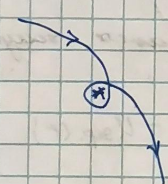

(притяг.)

прецессия из-за поправок в теории отн-ти.

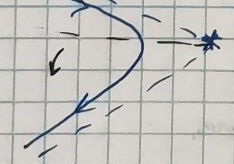
4) Инфинитное без падения (рассеяние)

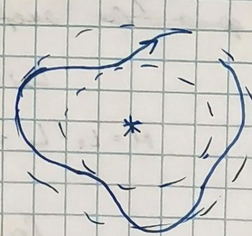
притяг:


или



Отталк:




(притяг. - отталк.)

20.04.22.

Пример:

$\omega_0^2 =$

$\Rightarrow \ddot{\varphi} +$

Условие

1) Пренебр

2) Линеари

Опр. Мали колеб

1) Опред.

2) Опред.

3) Опред

4) Исслед

Опр Балансе неогран нач. скор

Замечание

Ф. Лагран

$T =$

$U_2 = 0$ - н

Автоном

$T_0 = T_1 = 0$

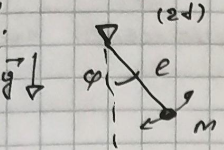
ф-я

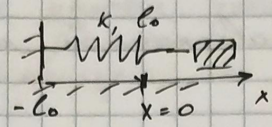
L

20.04.22.

Малые колебания в автономных потенциальных системах.

Пример: (2.1)





$\rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\rightarrow$ линеариз. – в з-не Гука.

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \underbrace{\sin\varphi}_{\approx \varphi} = 0 \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\Rightarrow x = C\cos(\omega_0 t + \psi)$$

$\uparrow$ конст. интегрирования.

Условия универсальности гармонического осциллятора:

1) Пренебрежение потерями;

2) Линеаризация ур-ий (превращение ур-я в линейное).

Опр. Малые колебания – финитные дв-я в окр-ти устойчивого положения равновесия, опис. линеариз. уравн. движения.

1) Опред. полож. равновесия;

2) Опред. (отыскание) полож. равновесия;

3) Опред. устойчивости;

4) Исследование положения равновесия на устойчивость

Опр. Положение равновесия – положение системы, в котором она остаётся неогран. долго, будучи помещена в это положение при нулевых нач. скоростях.

Замечание: если $\{q_i^0\}_{i=1}^s$ – пол-е равновесия, то $\{q_i^0, \dot{q}_i^0 = 0\}_{i=1}^s$ – состояние равновесия.

Автономные потенциальные системы

Ф. Лагранжа потенц. системы: $L = T - U$

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \qquad U = U_0(q) \text{ – скоростей здесь нет!}$$

$U_1 = 0$ – не обобщ. пот сил, нет магн. поля и т.д.

Автономность – нет внешнего воздействия $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$: $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, $T_0 = T_1 = 0$.

Ф-я Лагранжа автономн. потенц. системы:

$$\boxed{L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} \overbrace{T_{ij}^{(2)}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j}^{\text{обозн. к } T_2} - U(q)}$$

Отыскание положения равновесия:

Теорема.
Положение равновесия автономной потенциальной системы явл. решением сист. ур-й:

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \right. , \quad i = 1, \dots, s$$

Док-во: ур-я Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} \frac{\partial}{\partial q_k} T_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} T_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\dot{q}_i \dot{q}_j) \ominus \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$\ominus \dots \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j + \dot{q}_i \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}\right) = \underbrace{\dots}_{\text{симв. Кронекера}} (\delta_{ik} \dot{q}_j + \delta_{jk} \dot{q}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} T_{ij}(q)(\delta_{ik} \dot{q}_j + \delta_{jk} \dot{q}_i) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{s} T_{k,j}(q) \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{s} T_{i,k}(q) \dot{q}_i\right) = \{T_{j,k} = T_{k,j}\} =$$

$$= \frac{2}{2} \sum_{j=1}^{s} T_{k,j}(q) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} T_{k,j}(q) \dot{q}_j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s} T_{k,j}(q) \dot{q}_j\right) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} \frac{\partial}{\partial q_k} T_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0$$

в состоянии равновесия: $\dot{q}_i = 0 \to \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0$, $k = 1, \dots, s$.

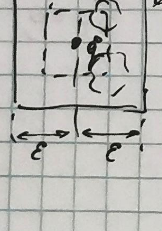
Опр. Положение равновесия q^0 — устойчиво по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, при любых нач. усл-ях удовлетв.:

$$\left\{ \begin{array}{l} |q_i(0) - q_i^0| < \delta \\ |\dot{q}_i(0)| < \delta \end{array} \right| \; i = 1, \dots s$$

решение $q(t)$ при $t > 0$ удовл:

$$\left\{ \begin{array}{l} |q_i(t) - q_i^0| < \varepsilon \\ |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \end{array} \right| \; i = 1, \dots s$$

то есть пусть нач. усл $\in$ δ-окрестности q^0, решение $\in$ ε-окрестности q^0.

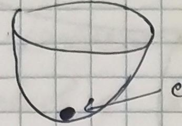


тело не покинет ε-окр, но тело может покинуть δ-окрестн. в процессе движения, но изнач. тело наход в δ.

Устойч. пол-я равновесия:

Теор. Лагранжа: (дост. условие устойч. пол-я равнов-я)
~ Если в положении q^0 потенц. энергия $U(q)$ имеет строгий минимум (изолир. минимум), то пол-е q^0 — устойч. по Ляпунову.

Пример:

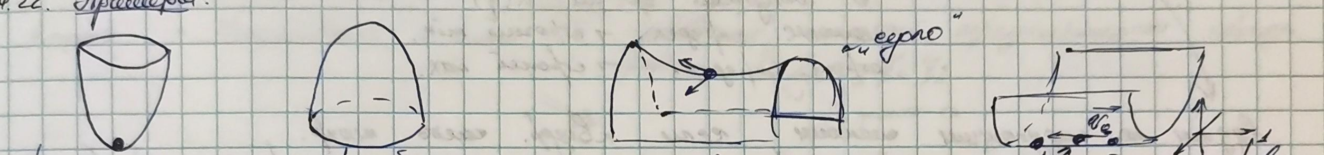


строгий минимум $\Rightarrow$ это устойч. положе. равн-я

Док-во: (основано на анализе пов-й уровня пот. энергии $U(q) \le E$ — обл. достижимости, $U(q) = E$ — её граница).

~ без док-ва

27.04.22. Примеры:



безразличное равновесие (вроде бы не скатывается), но по Ляпунову неустойч. (если задаём шарику ск-ть, то он укатится из ε обл-ти)

$\xi_1(t) = v_0 t > \varepsilon$, даже если $v_0 < \delta$, как только $t > \frac{\varepsilon}{v_0}$

Отыскание минимума функции.

① $s = 1$.

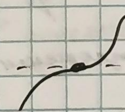
1) $U'(q) = 0$ $\Rightarrow$ q_0 — точка „подозрительная на экстремум" / ~~полож.~~ полож. равнов.

2) $U''(q_0) > 0$, $U''(q_0) < 0$, $U''(q_0) = 0$?

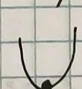
 minimum

 максимум

$$U(q_0+\xi) = \underbrace{U(q_0)}_{const} + \underbrace{U'(q_0)\cdot\xi}_{=0} + \frac{1}{2}U''(q_0)\cdot\xi^2 + a\xi^3 + b\xi^4 + \dots$$

Если $a \ne 0$:  ~ точка перегиба

$a = 0$: $b > 0$



min (неквадр.)

$b < 0$:  max

② $s > 1$.

1) $\frac{\partial U(q)}{\partial q_i} = 0$ $\Rightarrow$ q_i^0 — подозрит. на экстремум / полож. равнов.

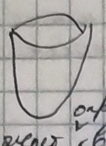
2) $$U(q^0+\xi) = \underbrace{U(q^0)}_{const} + \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q_i}\Big|_{q_0}}_{=0} \xi_i + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{q_0} \xi_i \xi_j}_{\text{квадратичная форма}} + O(\xi^3)$$

Опр. Квадратичная форма $B(\xi_1, \dots, \xi_s)$ назыв. положительно (отрицательно) определённой, если:

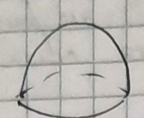
1) $B \ge 0$ $(B \le 0)$;

2) $B=0$, тогда и только тогда, когда все $\xi_i = 0$

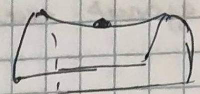
Примеры: $B = \xi_1^2 + \xi_2^2$ $\quad B = -\xi_1^2 - \xi_2^2$ $\quad B = \xi_1^2 - \xi_2^2$



положит. определ. квадрат. форма



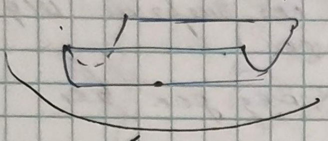
отриц. определ.



седловая

$B = (\xi_1 - \xi_2)^2$

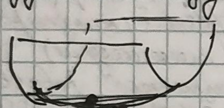
$B \geq 0$, но $B = 0$ при $\xi_1 = \xi_2 \neq 0$



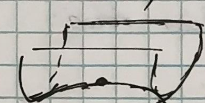
– положит. неопределённая

в исходной ф-ии $U(q)$ – то же самое, если
положит. определ. → строгий min,
отриц. определ. → строгий max.

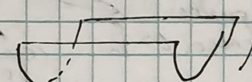
Судим по следующим членам, если квадр. часть неопр.



min

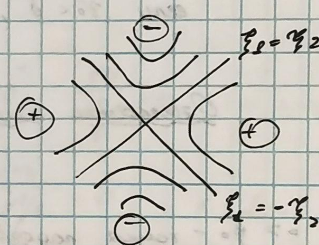


седло нельзя испортить добавкой больших степеней (радикально)



в зависимости от старших членов разложения по степеням ξ.

=> Анализ устойчивости полож. равновесия сводится к классификации квадратичн. форм в разлож. $U(q)$ по степеням ξ.



Ф-я Лагранжа малых колебаний:

исходная ф-я Лагранжа: $L = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{s} b_{ij}^{(2)}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q)$

пусть q^0 – полож. равнов., т.е. $\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{q_0} = 0$

введём новые переменные: $q_i = q_i^0 + \xi_i$

запишем L через ξ и разложим по степеням ξ: $\dot{q}_i = \dot{\xi}_i$

$b_{ij}(q^0 + \xi) = b_{ij}(q^0) + O(\xi)$

$$\Rightarrow L = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} b_{ij}(q^0)\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_0}\xi_i\xi_j}_{L_{мк}} + O(\xi\dot{\xi}^2) + O(\xi^3) - \underbrace{\cancel{U(q^0)}}_{=const}$$

при малых колеб. – малый вклад (но не точность решения [illegible])

не влияет на динамику

Опр. $L_{мк}$ – квадр. часть разложения исходной ф-ии Лагранжа в окрестности сост. равновесия по степеням малых отклонений от сост. равнов. ξ, $\dot{\xi}$.

Обозначения:

$m_{ij} = T_{ij}(q^0)$, $k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{q_0}$, тогда $L_{мк} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} m_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} k_{ij}\xi_i\xi_j$

Замечания:

$m_{ij} = m_{ji}$ (в силу св-в $T_{ij}(q)$), $k_{ij} = k_{ji}$, квадр. форма кин. энергии явл. положит. опред. по смыслу кин. энергии.

Условия применимости метода МК:

1. Полож. равнов q^0 в исходной системе должно быть устойчивым по Ляпунову;
2. Полож. равнов q^0 должно быть устойчивым также и в ф-ии $L_{мк}$.
3. Требуем полож. определ-ти кв. формы пот. энергии.

2 пункт → Устойчивость в $L_{мк}$ $\overset{\text{необх и дост. (эквивал.)}}{\Leftrightarrow}$ требование положит. определённости квадр. формы $\frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}\xi_i\xi_j$

$\Downarrow$ достат-ть.

Устойчивость в исходной L

⇒ 1. Достаточно потребовать: положит. определённости кв. формы $\frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}\xi_i\xi_j$

2. Амплитуда колебаний достаточно мала.

3. Ограничен интервал времени, на котором описывается движение системы.

а) ошибка в частоте (пример. истинное решение $x(t) = \cos(1\cdot t)$, приближ. решение $x_n(t) = \cos(1{,}01\cdot t)$, подставим $t = 100$ и увидим).

б) при неск. степенях свободы → хаос / диффузия Арнольда (КАМ-теорема).

Уравнения Лагранжа МК и их общее решение

$L_{мк} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} m_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} k_{ij}\xi_i\xi_j$ → подставить в $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{мк}}{\partial \dot{\xi}_k}\right) - \frac{\partial L_{мк}}{\partial \xi_k} = 0$

$k = 1, \dots, s$

$\Rightarrow \left\{ \sum_{j=1}^{s} (m_{ij}\ddot{\xi}_j + k_{ij}\xi_j) = 0 \;\right|\; i = 1, \dots, s$

— система ОДУ порядка 2s, обозн. $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_s \end{pmatrix}$

1. Линейная однородная система (ЛОС) ОДУ порядка 2s: общее решение
$\vec{\xi}(t) = \sum_{k=1}^{2s} C_k \vec{\psi}_k(t)$, где $\{\vec{\psi}_k(t)\}_{k=1}^{2s}$ — набор из 2s линейно-незав. решений.

фундаментальная система решений (ФСР)

2. ЛОС ОДУ с пост. коэффициентами: ФСР имеет вид
$\psi_k(t) = \vec{P}_k(t)\cdot e^{\lambda_k t}$, где $\vec{P}_k(t)$ — векторный полином.

$\lambda_k \in \mathbb{C}$ - константы (могут быть компл.)

3. Положение равновесия устойчиво по Ляпунову, $|\xi_i(t)|$ - ограничены. => невозм. $Re\,\lambda_k > 0$

Система обратима во времени ($t \to -t$ не меняет вид ур-я), т.е. ур-ния инвариантны отн. $t \leftrightarrow -t$ (т.к. $\frac{d^2}{dt^2}$)

=> если $\xi(t)$ решение, то $\xi(-t)$ также решения.

→ реш. $Re\,\lambda_k > 0$ и $Re\,\lambda_k < 0$ могут появляться только попарно.

-> $Re\,\lambda_k < 0$ - также невозможно.

=> $Re\,\lambda_k = 0$ => пусть $\lambda_k = i\omega_k$

4. $\xi \in R$ -> все λ_k образуют компл. сопряжённые пары.

$$\{\lambda_k\}_{k=1}^{2s} = \{\pm i\omega_k\}_{k=1}^{s}$$

$$\vec\psi_k(t) = \vec P_k(t)\, e^{i\omega_k t} \quad ; \quad |\vec\psi_k(t)| = |\vec P_k(t)|$$

Из требования ограниченности решения => $\vec P_k(t) = \vec A^k$ - постоянный вектор.

нумерует векторы.

<u>Общее решение:</u> $\vec\xi(t) = \sum_{k=1}^{s} C_k \cdot \vec A^k e^{i\omega_k t} + к.с.$

$C_k \in \mathbb{C}$ - константы интегр. (s компл. конст. = $2s$ действ. констант), опред. из нач. усл.

$\{\omega_k, \vec A^k\}_{k=1}^{s}$ - определяются системой.

$$\sum_j (m_{ij}\ddot\xi_j + k_{ij}\xi_j) = 0 \quad \leftarrow \quad \vec\xi(t) = \vec A e^{i\omega t}, \quad \xi_j(t) = A_j e^{i\omega t}$$

=> $\sum_{j=1}^{s} (-m_{ij}\omega^2 + k_{ij}) A_j = 0$, $i = \overline{1, s}$ — лин. одн. алгебр. система отн. неизвестных A_j

$|-m_{ij}\omega^2 + k_{ij}| = 0$ ~ ур-е собственных частот (характеристическое ур-е).

- алгебр. ур-е степени $2s$ отн ω, или степени s отн. ω^2

=> s шт. корней $\{\omega_k^2\}_{k=1}^{s}$ с учётом кратности.

Подставляем кажд. ω_k в систему отн A_j => реш. $\vec A^k = \begin{pmatrix} A_1^k \\ \vdots \\ A_s^k \end{pmatrix}$ для кажд. ω_k.

Обозн. $(\vec A^k)_j = A_j^k$

1. Если ω_k - простой (некратный / невырожденный) корень =>

=> $\vec A^k$ ищется с точностью до постоянного множителя.

2. Если ω_k - m-кратный (m-кратно вырожденный корень) => мн-во решений явл. линейным подпространством размерности m. =>

$\Rightarrow m$ мощн незав. векторов $\vec{A}^k, \ldots, \vec{A}^{k+m+1}$

21.05.22. $\left\{\xi_j^{(k)} = A_j^{(k)} e^{i\omega_k t}\right\}_{k=1}^{s}$ – ФСР

$\Rightarrow \left| \left\{ \sum_{j=1}^{s} (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j = 0 \right\} \right|_{i=1,\ldots,s} \rightarrow |-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}| = 0$ ур-е собств. частот

система для собств. векторов

$\underbrace{\omega_k = \omega_{k+1} = \ldots = \omega_{k+m-1}}_{m \text{ мощн.}}$ – m-кратно вырожд. $\Rightarrow$ m мерное соб. подпространство

$\downarrow$

$\vec{A}^k$ – соб. вектор: $\vec{A}^k = \{A_j^k\}$

$\vec{A}^k, \vec{A}^{k+1}, \ldots, \vec{A}^{k+m-1}$ – все явл. соб. векторами (решениями системы лин. независимы собств. векторов.)

Любая лин. комбинация также является решением, т.е. явл. собств. вектором для той же ω_k.

Общее решение:

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{k=1}^{s} C_k \vec{A}^k e^{i\omega_k t} + \text{к.с.},$$ где $(\omega_k, \vec{A}^k)$ – собств. частоты и вектора, опр-ся системой

C_k – константы интегрирования (опр. нач. усл.)

$\omega_k \in \mathbb{R}$ (в силу ограниченности решения).

$C_k \in \mathbb{C}$, $\{C_k\}_{k=1}^{s}$ – s шт $\Rightarrow$ $2s$ шт. действит. констант. = порядку системы.

$\vec{A}^k \in \mathbb{R}^s$ – действит. в силу действ.-ти системы (полагаем без нарушения общности)

Обозначим: $C_k = \frac{b_k}{2} e^{i\psi_k}$, где $b_k, \psi_k \in \mathbb{R}$, тогда

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{b_k}{2} \vec{A}^k \left(e^{i(\omega_k t + \psi_k)} + \text{к.с.}\right)$$

$$\boxed{\vec{\xi}(t) = \sum_{k=1}^{s} b_k \vec{A}^k \cos(\omega_k t + \psi_k)}$$ общее решение для малых колебаний

Нормальные координаты. (колебания)

$$L_{мк}(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} \xi_i \xi_j$$

решение:

$$\xi_j(t) = \sum_{k=1}^{s} A_j^k b_k \cos(\omega_k t + \psi_k)$$

Рассмотрим ф-ю Лагранжа ансамбля (s шт) невзаимод. гарм. осцилляторов:

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\dot{\eta}_k^2}{2} - \frac{\omega_k^2 \eta_k^2}{2} \right)$$

ур. Лагр. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\eta_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot\eta_k} = \dot\eta_k$, $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\omega_k^2 \eta_k$, $\ddot\eta_k + \omega_k^2\eta_k = 0$

=> решение $\eta_k(t) = b_k\cos(\omega_k t + \psi_k)$ (можно сравнить с $\xi(t)$)

=> замена $\xi_j = \sum_{k=1}^{s} A_j^k \eta_k$ (*)

Гипотеза: любая $L_{мк}(\xi, \dot\xi)$ может быть приведена к виду $L_{нк}(\eta,\dot\eta)$ заменой переменных вида (*), где $A_j^k = (\vec A^k)_j$ – компоненты собств. векторов.

Проверим: подставим (*) в $L_{мк}$ => получим ли $L_{нк}$?

$$L(\eta,\dot\eta) = \frac12\sum_{ij} m_{ij}\sum_k A_i^k\dot\eta_k \sum_l A_j^l \dot\eta_l - \frac12\sum_{ij}k_{ij}\sum_k A_i^k\eta_k\sum_l A_j^l\eta_l =$$

$$= \frac12\sum_{kl}\left(\sum_{ij} m_{ij}A_i^kA_j^l\right)\dot\eta_k\dot\eta_l - \frac12\sum_{kl}\underbrace{\left(\sum_{ij}k_{ij}A_i^kA_j^l\right)}_{\text{должно} = \omega_k^2\delta_{kl}}\eta_k\eta_l \overset{\text{должно}}{=} L_{нк}(\eta,\dot\eta)$$

двойная сумма превр. в одинарную – если под ней стоит символ Кронекера.

=> $\left(\sum_{ij} m_{ij}A_i^kA_j^l\right) = \delta_{kl}$ (должно быть)

1) $\sum_{ij} m_{ij}A_i^kA_j^l = \delta_{kl} = \begin{cases}1, & k=l\\ 0, & k\ne l\end{cases}$

2) $\sum_{ij}k_{ij}A_i^kA_j^l = \omega_k^2\delta_{kl}$

Заметим: обозн. $(\vec A^k,\vec A^l) = \sum_{ij} m_{ij}A_i^kA_j^l$ – удовл. всем аксиомам скалярного произв.

1. Коммутативность: $(\vec A^k,\vec A^l) = (\vec A^l,\vec A^k)$ – в силу симметричн. матрицы $m_{ij}=m_{ji}$

2. Линейность $(\vec A, c_1\vec B_1 + c_2\vec B_2) = c_1(\vec A,\vec B_1) + c_2(\vec A,\vec B_2)$

3. Положит. опр-ть: $(\vec A^k,\vec A^k)\ge 0$ причём $(\vec A^k,\vec A^k)=0$, при $\vec A^k = 0$ в силу аналогии с кин. энергией: $T = \frac12\sum m_{ij}\dot\xi_i\dot\xi_j$

→ далее будем называть скалярным произведением.

Треб. (I) запишем в виде $(\vec A^k,\vec A^l) = \delta_{kl}$, т.е. $\{\vec A^k\}_{k=1}^{s}$ – ортонормированный базис (в обозначен. специального скалярн. произведения).

18.05.22.

Треб. (I) $\sum_{i,j=1}^{s} m_{ij}A_i^kA_j^l = \delta_{kl}$ то же самое, что $=(\vec A^k,\vec A^l)$

(II): $\sum_{ij} k_{ij}A_i^kA_j^l = \omega_k^2\delta_{kl}$

Треб. (I): $(\vec{A}^k, \vec{A}^\ell) = \delta_{k\ell}$ — ортонормировка базиса

1) Ортогональность: треб. $(\vec{A}^k, \vec{A}^\ell) = 0$ при $k \neq \ell$

уравнения об. векторов: $\sum_{i,j=1}^{s} -\omega_\ell^2 m_{ij} A_j^\ell A_i^k + \sum_{i,j=1}^{s} k_{ij} A_j^\ell A_i^k = 0$ $\quad |\cdot A_i^k \quad |\cdot \sum_i$

поменяем местами $i \leftrightarrow j$, $k \leftrightarrow \ell$ и заменим $m_{ji} = m_{ij}$, $k_{ij} = k_{ji}$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{s} -\omega_k^2 m_{ij} A_i^k A_j^\ell + \sum_{i,j=1}^{s} k_{ij} A_i^k A_j^\ell = 0 \quad (*)$$ —

$$(\omega_k^2 - \omega_\ell^2) \sum_{i,j=1}^{s} m_{ij} A_i^k A_i^\ell = 0$$

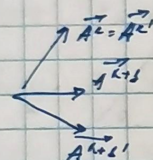
если $\omega_k \neq \omega_\ell$, то $(\vec{A}^k, \vec{A}^\ell) = 0$ выполн.

если $\omega_k = \omega_{k+1} = \ldots = \omega_{k+m-1}$ (m кратно вырождена)

имеем: $\underbrace{\vec{A}^k, \vec{A}^{k+1}, \ldots, \vec{A}^{k+m-1}}_{m \text{ штук}}$ — линейно независимы, но изначально, вообще говоря, не ортогональны.

$\Rightarrow$ ортогонализация

Пример: $m = 2$ $\quad \vec{A}^k, \vec{A}^{k+1}$ линейно независимы, но не ортогональны.
→ хотим получить $\vec{A}^{k'}, \vec{A}^{k+1'}$ — ортогон.



берём $\vec{A}^{k'} = \vec{A}^k$
ищем $\vec{A}^{k+1'} = \vec{A}^{k+1} + c\vec{A}^k$

$$(\vec{A}^{k'}, \vec{A}^{k+1'}) = (\vec{A}^{k+1}, \vec{A}^k) + c(\vec{A}^k, \vec{A}^k) = \{\text{требуем}\} = 0$$

$$c = -\frac{(\vec{A}^{k+1}, \vec{A}^k)}{(\vec{A}^k, \vec{A}^k)} \Rightarrow \vec{A}^{k'} \text{ и } \vec{A}^{k+1'} \text{ ортогональны.}$$

$\vec{A}^{k'}, \vec{A}^{k+1'} \in$ тому же собственному подпространству.

Если $m > 2 \Rightarrow$ ортог. Грама-Шмидта. Но если $m \gg 1$, то метод Г-Ш работает плохо, т.к. есть значительная неустойчивость.

Используют методы QR-разложения: напр., метод отражений Хаусхолдера.

В результате ортогонализации имеем: $\underbrace{\vec{A}^{k'}, \ldots, \vec{A}^{k+m-1'}}_{m \text{ штук}}$, которые:

1) ортогональны между собой
2) являются собственными векторами на той же собственной частоте
3) ортогональны ко всем остальным собственным подпространствам.

В результате ортогонализации на всех кратных частотах, имеем полностью ортогональный набор: $(\vec{A}^{k'}, \vec{A}^{\ell'}) = 0$

2) Нормировка: $(\vec{A}^k, \vec{A}^k) = 1$

$\vec{A}^{k''} = \frac{1}{\|\vec{A}^{k'}\|} \vec{A}^{k'}$, где $\|\vec{A}^{k'}\| = \sqrt{(\vec{A}^{k'}, \vec{A}^{k'})}$, тогда $(\vec{A}^{k''}, \vec{A}^{k''}) = 1$ — выполнено

В результате ортогонализации и нормировки, имеем ортонорм. базис $\{\vec{A}^{k''}\}_{k=1}^{s}$ составл. из собств. векторов и удовл. треб. (I).

треб (II) $\sum_{i,j} k_{ij} A_i^k A_j^\ell = \omega_k^2 \underbrace{\sum_{i,j} m_{ij} A_i^k A_j^\ell}_{= \delta_{k\ell}} = \omega_k^2 \delta_{k\ell}$ — выполн. автоматически

Итак, переход к нормальным координатам: $\xi_i = \sum_{k=1}^{s} A_i^{k''}\eta_k$, $\vec{\xi} = \sum_{k=1}^{s}\vec{A}^{k''}\eta_k$

$$q_i = \sum_{k=1}^{s} A_i^{k''}\eta_k, \quad \vec{\xi} = \sum_{k=1}^{s}\vec{A}^{k''}\eta_k$$

Обратное преобразование: $\eta_k = (\vec{\xi}, \vec{A}^k)$

Т.о. построенно $\{\eta_k\}_{k=1}^{s}$ — ансамбль невзаимодейств. осцилляторов (в рамках приближения малых колебаний).

$$\ddot{\eta}_k + \omega_k^2\eta_k = 0$$

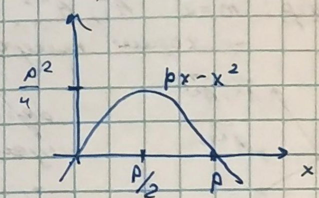
Нелинейности (учёт старших степеней разложения L) приводят к взаимодействию между нормальными колебаниями

Гамильтонов формализм в механике.

Опр. Преобразование Лежандра $\mathcal{L}: f(x) \to g(p)$

1) $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — ф-я, выпуклая вниз, тогда $g(p) = \max_x \{px - f(x)\}$

Пр. $f(x) = x^2$, $g(p) = \max(px - x^2) = \frac{p^2}{4}$



2) $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ выпукл. вниз тогда

$$g(p) = \max_x \left\{\sum_{k=1}^{s} p_k x_k - f(x)\right\}$$

Отыскание преобр. Лежандра:

точка max: $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k p_k x_k - f(x)\right) = 0$

$p_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, т.о. $\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = p_i \right.$, $i = 1\dots s$ | реш. $\Rightarrow x_{max}(p)$ — явл. max в силу треб. выпуклости $f(x)$

Св-во: $\mathcal{L}[\mathcal{L}[f(x)]] = f(x)$

Опр. Функция Гамильтона — преобр. Лежандра от ф-ции Лагранжа по всем обобщ. скоростям.

Обозн. $H(q, p, t)$

Отыскание 1) $\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i\right.$, $i = 1\dots s$ $\Rightarrow$ реш. $\dot{q}_i(p) = \dot{q}_i(p_1, \dots, p_s)$

2) $H(q, p, t) = \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t)\right)\Big|_{\dot{q}_i = \dot{q}_i(p)}$

Заметим: 1) новая переменная p_i совп. с обобщ. импульс.
2) Выраж. для $H(q,p,t)$ совпало с опред. обобщ. энергии.
т.е. ф-я Гамильтона — обобщённая энергия, выраж. через обобщ. импульсы.

Примеры: 1) $L = \frac{mv^2}{2}$; $\vec{p} = m\vec{v}$, обобщ. энергия $H = \frac{mv^2}{2}$

ф-я Гамильтона: $H = \frac{p^2}{2m}$

2) $L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec{A}, \vec{v}) - e\varphi$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

$\vec{v} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)$; обобщ. энергия $H = L_2 - L_0 = \frac{mv^2}{2} + e\varphi$

Ф-я Гамильтона: $H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi(\vec{r}, t)$

$$dH(q,p,t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \dot{p}_i$$

Воспольз. определением H: $dH = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \Bigg|_{i=1,\dots s} \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

ур-я Гамильтона

вспомним $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

З-н изменения обобщ. энергии:

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}}$$

25.05.22.

Обобщённые законы сохранения:

1) Если q_i циклическая $\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0\right)$, то $p_i = const$

2) Если p_i циклич. $\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0\right)$, то $q_i = const$

3) Если t циклич. $\left(\frac{\partial H}{\partial t} = 0\right)$, то $H(t) = const$

Скобки Пуассона.

пусть есть функция $f(q,p,t)$, $\left.\frac{df}{dt}\right|_{\substack{q(t)\\p(t)}} = ?$ — истинное движение

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\underbrace{\dot{q}_i}_{\frac{\partial H}{\partial p_i}} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\underbrace{\dot{p}_i}_{-\frac{\partial H}{\partial q_i}}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$$

<u>Опр.</u> Скобка Пуассона.
пусть $f(q,p,t)$ и $g(q,p,t)$ ф-ии, тогда $\{f,g\} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$
— скобка Пуассона

<u>Замечание</u>: встречается опр. скобок П. с обратным знаком! (Ландау vs Арнольд)

<u>Св-ва</u>: 1° Антикоммутативность $\{g, f\} = -\{f, g\}$

2° Билинейность $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1\{f_1, g\} + c_2\{f_2, g\}$ $(c_{1,2} = const)$

3° Тождество Якоби $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$

<u>Замечание</u>: конструкция, удовл. св-вам 1°-3° (как аксиомам) наз алгеброй Ли.

<u>Пример</u> векторное произведение $[\vec{a} \times \vec{b}]$

4° $\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\}$

5. $\frac{\partial}{\partial \mu}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial \mu}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial \mu}\right\}$ (μ - параметр)

Зам. частный случай $\mu \to t$ (время)

6. $\frac{d}{dt}\{f,g\} = \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\}$

Следствие → Теорема Пуассона.

Если $f(q,p,t)$ и $g(q,p,t)$ - интегралы движения. $\left(\frac{df}{dt}\Big|_{ист.\,дв} = \frac{dg}{dt}\Big|_{ист.\,дв} = 0\right)$

то $\{f,g\} = const$ - тоже интеграл движения.

Замечание ур-е Гамильтона через ск. Пуассона.

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\} \end{cases}$$

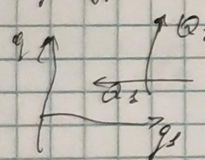
Опр. Канонические переменные - $\{q_i, p_i\}_{i=1}^{s}$ (все) канонич. сопряж. переменные (q_i, p_i) (координ. имп. для конкретной степени свободы)

Фазовое пр-во - это абстрактное пр-во, в котором $(q,p)_{i=1}^{s}$ выступают в кач-ве системы коорд.

Канонические преобразования

Вспомним лагранжев формализм.

Конфигурационное пр-во



$q \rightleftarrows Q$ точечные преобразования

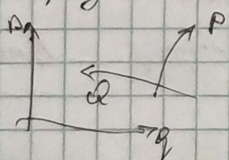
(ур. Лагранжа сохраняют вид)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$$

Гамильтонов формализм

фазовое пр-во ($\dim ФП = 2s$)



$q, p \rightleftarrows Q, P$ - канонические преобр.

Требуем, чтобы ур-е Гамильтона сохран. свой вид.

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \end{cases}$$

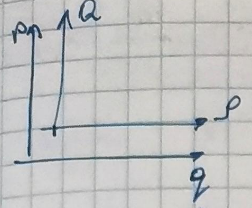
H' - новая ф-я Гамильтона.

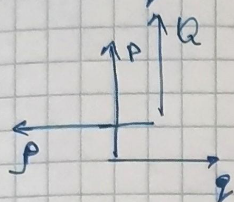
Пример 1) $q \rightleftarrows p$

$$\begin{cases} q = P \\ p = Q \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{P} = \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \dot{Q} = -\frac{\partial H}{\partial P} \end{cases}$$

- не имеют вида ур-ий Гамильтона

не канонические!



2) 

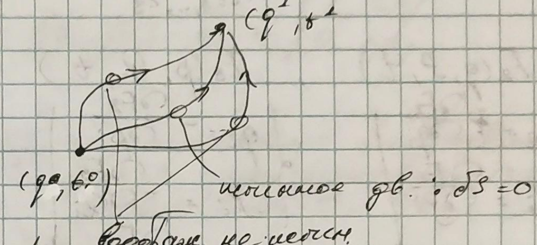
$$\begin{cases} q = -\rho \\ p = Q \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} -\dot\rho = \dfrac{\partial H}{\partial Q} \\ \dot Q = \dfrac{\partial H}{\partial \rho} \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} \dot Q = \dfrac{\partial H}{\partial \rho} \\ \dot\rho = -\dfrac{\partial H}{\partial Q} \end{cases}$$

каноническое преобр-е. сохр. вид ф-я Гамильтона

Действие как ф-ия коорд. и времени.

вспомним: действие как функционал:

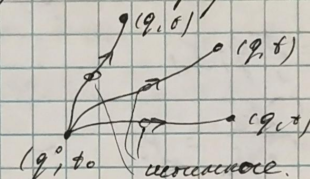
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot q, t)\,dt$$



Опр. Действие как ф-я конечного предела интеграл:

$$S_q(q,t) = \int_{(q^0, t_0)}^{(q,t)} L(q, \dot q, t)\,dt$$

(интегр. по истинному движе.)



В гамильтоновых обозначениях:

$$H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot q_i - L, \qquad L = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot q_i - H$$

$$S_q(q,t) = \int \Big[\sum_i p_i \dot q_i - H\Big]dt = \int_{(q_0,t_0)}^{(q,t)} \Big[\sum_i p_i\,dq_i - H\,dt\Big]$$

пусть (Q, ρ) - другие канонические переменные

$(q,p) \longleftrightarrow (Q, \rho)$ канонич. преобр.

H' - новая ф-я Гамильтона.

введём: $F_1(q, Q, t) = S_q(q,t) - S_Q(Q,t)$

$$dF_1 = \Big(\sum_i p_i\,dq_i - H\,dt\Big) - \Big(\sum_i \rho_i\,dQ_i - H'\,dt\Big)$$

по опр-ию полного дифф-ла: $dF_1 = \sum_i \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i\right) + \dfrac{\partial F_1}{\partial t}dt$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_i} \\ \rho_i = -\dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, s$$

— $2s$ шт. ур-ий => решим отн (Q, ρ) через (q, p, t)

=> $\boxed{Q_i = Q_i(q,p,t), \quad \rho_i = \rho_i(q,p,t)}$

каноническое по построению.

$$H'(Q, \rho, t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$ (подст. вм. (Q, ρ) через (q,p))

Теорема: если ~~до~~ дана $F_1(q, Q, t)$ - какая-то ф-ция, то преобр. $\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ \rho_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{cases}$ (назыв. производящей ф-ей) явл. каноническим.

Правило: дифф. по каноним. перемен. | знак; для (P, Q) ~~так~~ как в ф-е Гамильтона, для (p, q) – наоборот

27.06.22. (Консультация.)

(q, p) и (Q, P)

$F_1(q, Q, t)$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_i} \end{cases}, \quad \text{а} \quad H' = H + \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial t} \Bigg|_{i=1,\dots,2s}$$

$F_2(q, P, t)$, $F_3(p, Q, t)$, $F_4(p, P, t)$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i} \end{cases}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_{(1/2/3/4)}}{\partial t}$$

Примеры: 1) $F_2 = \sum_j q_j P_j$

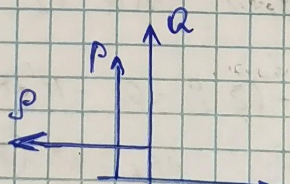
$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i \end{cases}$$ ~ „тождественное преобразование".

2) $F_2 = \sum_j f_j(q, t) \cdot P_j$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_j P_j \dfrac{\partial}{\partial q_i} f_j(q, t) \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t) \end{cases}$$ ~ „точечное преобразование."

3) $F_1 = \sum_j q_j Q_j$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_i} = Q_i \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_i} = -q_i \end{cases}$$



~ поворот осей

Теорема. Скобка Пуассона инвариантна относительно канонического преобразования.

пусть $(q, p) \to (Q, P)$ – 2 ~~скобки~~ набора каноним. преобр. (связаны каноним. преобр.)

и $f(q, p, t)$ и $g(q, p, t)$, тогда:

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$$

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \quad \{f, g\}_{Q,P} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial Q_i} \right)$$

Док-во: Введём в рассмотрение Гамильтонову систему с новым временем τ, не связанным с t, с ф-ей Гамильтона $H(q,p) = g(q,p)$

Найдём $\frac{df}{d\tau}$ на решениях этой формальной системы:

$$\frac{df}{d\tau} = \{f, H\} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \tau}}_{=0} = \{f, g\} = \{f, g\}_{q,p}$$

$$\frac{df}{d\tau} = \{f, g\}_{Q,P}$$

Опр. Фундаментальные скобки Пуассона:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Теорема. (необходимый и достаточный критерий каноничности преобразований). Преобразование $(q,p) \leftrightarrow (Q,P)$ является каноническим, тогда и только тогда, когда оно оставляет инвариантными все фундаментальные скобки Пуассона, т.е.:

$$\{q_i, q_j\}_{Q,P} = 0, \quad \{p_i, p_j\}_{Q,P} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{Q,P} = \delta_{ij}$$

Док-во: 1) Необходимость следует из предыдущей теоремы.
2) Достаточность (без док-ва).

Лагранжева теория: (что нужно иметь):
1. Конфигурационное пространство.
2. Функция Лагранжа.
3. Вариационный принцип $\delta S = 0$

$\Downarrow$

законы движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Гамильтоновская теория:
1. Фазовое пространство.
2. Функция Гамильтона.
3. Скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$

$\Downarrow$

законы движения.

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\} \end{cases}$$ H — ф-я Гамильтона.

Гейзенберговское представление квантовой механики:

1. Фазовое пространство $\to \hat{q}_i, \hat{p}_i$ — линейные операторы
2. Функция Гамильтона: $\hat{H}(\hat{q}_i, \hat{p}_i)$ — тоже оператор.
3. Скобка Пуассона: $\{\hat{f}, \hat{g}\} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{f}, \hat{g}]$ $\quad [\cdot,\cdot]$ — коммутатор

$$[\hat f, \hat g] = \hat f \hat g - \hat g \hat f \qquad \text{- коммутатор}$$

Требования:

1) Фундаментальные скобки Пуассона: (коммутационные соотн.):
т.е.
$$[\hat q_i, \hat q_j] = 0, \quad [\hat p_i, \hat p_j] = 0, \quad [\hat q_i, \hat p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

2) Аксиомы алгебры Ли для скобки Пуассона! ~ выполняются.

Тогда:
$$\begin{cases} \dot{\hat q}_i = \dfrac{1}{i\hbar}[\hat q_i, \hat H] \\ \dot{\hat p}_i = \dfrac{1}{i\hbar}[\hat p_i, \hat H] \end{cases}$$
~ уравнения Гейзенберга.

Метод Гамильтона - Якоби.

Дано: $H(q,p,t)$, найти $q(t)$ - ? $p(t)$ - ?

Хотим получить в новых переменных: $H' = 0$, где $H' = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}$

$(q,p) \longleftrightarrow (Q, P)$ ~ какая? $F_2(q, P, t)$ (именно F_2!)

тогда:
$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot Q_i = \dfrac{\partial H'}{\partial P_i} = 0 \\ \dot P_i = -\dfrac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 \end{cases}$$

$$Q_i(t) = \beta_i = const,$$
$$P_i(t) = \alpha_i = const.$$

Требуем: $\dfrac{\partial F_2}{\partial t} + H = 0$

Обозначение: $P_i = \alpha_i$

$F_2(q, P, t) = S(q,t,\alpha)$ (оказыв., что это действие.)

$$\boxed{\frac{\partial S(q,t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0}$$
~ уравнение Гамильтона - Якоби.

~ нужно найти решение, содерж. s незав. независимых констант: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ ~ называв. полным интегралом

т.е.
$$S(q_1, \dots, q_s, t, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = ?$$

1. Запишем ур-е Гамильтона - Якоби => нашли $S(q,t,\alpha)$

2.
$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial S(q,t,\alpha)}{\partial q_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial S(q,t,\alpha)}{\partial \alpha_i} = \beta_i = const \end{cases} \quad i = 1, \dots, s$$
~ 2s ур-ий

$\Downarrow$ находим

$$\begin{cases} q_i = q_i(t, \alpha, \beta) \\ p_i = p_i(t, \underbrace{\alpha, \beta}_{2s \text{ констант}}) \end{cases}$$
~ решение исходной мех-ой задачи.