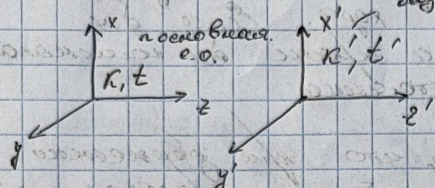
Павличенко Иван Александрович.

08.02.2023г. Специальная теория относительности.

Инерциальная система отсчёта — с.о., в которой тело находится в покое, либо движется равномерно и прямолинейно.

Принцип отн-ти — все законы природы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчёта.

(*) $m\ddot{\vec r} = \vec F$



Преобразования Галилея:

$x' = x$, $t = t'$

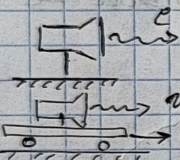
$y' = y$

$z' = z - Vt$

Т.е. вид ур-ий механики (*) не меняется при преобр. Галилея:

$m\ddot{\vec r}' = \vec F'$ преобр. Галилея — ковариантны.

Но была проблема со скоростью света.



$v_{св.} = c + v$?

пусть теперь движ. на тележке.

Но, что говорят ур-я Максвелла:

$$\Delta \vec A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec j$$

В пр-ве вне источника:

$$\Delta \vec A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec A}{\partial t^2} = 0$$

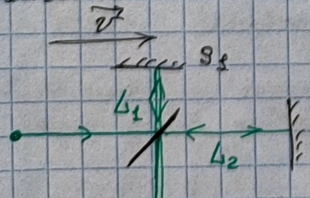
$\Rightarrow \vec A = \vec A(z - ct)$ т.е. ск-ть распр-я всегда $= c$ в вакууме.

А по преобр. Галилея $v_{св} = c + v$? Парадокс

Что можно предположить, решая парадокс:

1) Пр. отн. применим к механике, но не применим к ЭД.
2) Пр. отн. справедлив везде, но законы ЭД неверны
3) Пр. отн. справедлив везде, но законы механики требуют изменения.

Опыт Майкельсона и Морли (1887г.) — установка из 2х зеркал двигалась со ск-ю v.



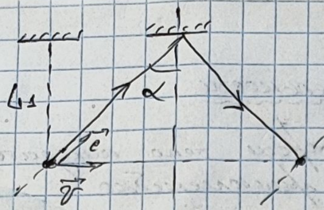
t_2 — от пластинки до $З_2$ и обратно

$$t_2 = \frac{L_2}{c+v} + \frac{L_2}{c-v} = \frac{2L_2 c}{c^2 - v^2} = \frac{2L_2}{c}\frac{1}{1-\beta^2}$$

если преобр-я Галилея верны. $\beta = \frac{v}{c}$ — обознач.

t_1 — от пластинки до $З_1$ и обратно.

Удобно перейти в с.о., связанную с гипотетическим эфиром



$$t_1 = \frac{2L_1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{c} = \frac{2L_1}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{v}{c}$$

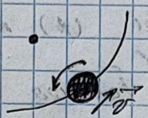
Разность хода возникает из разности времён:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c}\left(\frac{L_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{L_2}{1-\beta^2}\right)$$

А теперь давайте повернём систему. У нас изменяются расстояния, а следовательно и разность хода. Если бы они отличались → интерф. картинка на экране бы изменялась. Но этого не было, т.е. ск-ть света постоянна.

Лоренц и Фитцджеральд предположили, что при движении установка как бы „сжимается", свет проходит другое расстояние:

$$L_2' = L_2\sqrt{1-\beta^2}$$



Причём в разное время суток из-за разного вращения Земли была бы разная ск-ть, и интерф. картина бы двигалась. Но этого не наблюдалось.

Постулаты Эйнштейна:

I. Принцип относительности справедлив и в механике и в электродинамике (= Законы природы ковариантны по отношению к преобразованию координат и времени при переходе от одной ИСО к другой).

II. Скорость света не зависит от движения источника и равна $c \approx 3\cdot10^8\ \frac{м}{с}$ во всех ИСО и по всем направлениям.

⇒ Время течёт по разному в разных с.о.

Вывод преобразований Лоренца из требований ковариантности системы ур-ий Максвелла

I) Каноническая форма ур-ий Максвелла в вакууме

1) $\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$

2) $\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$

3) $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ — калибровка Лоренца

4) $\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ — ур-е непрерывности

Далее математическая возня. Введём 4-величины.

$$\bar{x} = (x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict)$$

x_i, $i = 1, \ldots, 4$

x_α, x_β, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ — обознач. греческие и латинские буквы.

$$\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial (ict)^2} = \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$\bar{A} = (A_x, A_y, A_z, i\varphi)$ — 4х векторный потенциал.

$\bar{j} = (j_x, j_y, j_z, ic\rho)$ — 4х плотность тока.

Тогда 1) и 2) ур-я можно переписать в др. виде:

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}A_i = -\frac{4\pi}{c}j_i$$

Преобразуем 3):

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial i\varphi}{\partial ict} = \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0$$

компактно записываются без суммы. - обознач. Эйнштейна

Преобразуем 4):

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0$$

Каноническая форма ур-ий Максвелла

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}A_i = -\frac{4\pi}{c}j_i \\ \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

← они не независимые

Условия ковариантности ур-ий Максвелла во всех ИСО:
- для того чтобы система (1) была ковариантна при переходе от одной ИСО к другой необходимо чтобы величины $\bar{x}$, $\bar{j}$, $\bar{A}$ были векторами в 4-м пр-ве.

15.02.23 г.

$\bar{x} = (x, y, z, ict) \equiv (\vec{r}, ict)$

$\bar{A} = (\vec{A}, i\varphi)$

$\bar{j} = (\vec{j}, ic\rho)$

Условия ковариантности уравнений Максвелла:

1) Величины, которые входят в канонич. ур. Максвелла не просто величины, а вектора.

$$x, y, z, t \rightarrow x', y', z', t'$$

$K \qquad K'$

$\bar{A} \rightarrow \bar{A}'$ ← по аналогии что и переход от $\bar{x} - \bar{x}'$

$\bar{j} \rightarrow \bar{j}'$ ←

ИСО ИСО

При переходе от K к K' должны сохраняться "длины" четырёхвекторов и "углы" между ними. т.е. должно сохр. скалярное пр-е 4х векторов.

$$(\bar{x}\cdot\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = (\bar{x}'\cdot\bar{x}')$$

аналогично и для др. 4х векторов.

$$(\bar{A}\cdot\bar{j}) = (\bar{A}'\cdot\bar{j}')$$

2) Переход от одной ИСО к другой должен описываться линейным ортогональным преобразованием.

$\bar{x}\to\bar{x}'$ Для новой компоненты: $x_i' = \underset{\text{пост. величины}}{a_{ik}}(x_k + b_k)$

Следует из изотропии пр-ва и однородности времени.

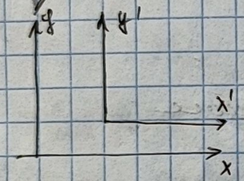
Не любое преобр. такого типа ортогонально, только если:

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ik}a_{il} = \delta_{kl}$$

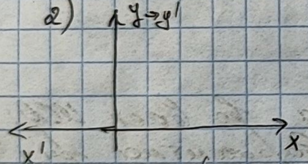
Если хотим вернуться в старую с.к.:

$$x_i = a_{ki}(x_k' - b_k)$$

2D примеры линейных ортогональных преобразований:

1) 

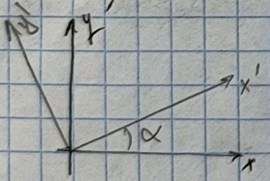
$x' = x+b_1$
$y' = y+b_2$ — параллельный перенос.

2) 

— зеркальное отражение.

$y' = y$
$x' = -x$ → матр. преобраз. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$

3) Поворот с.к.



Матр. преобр.: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

В четырёхмерном случае:

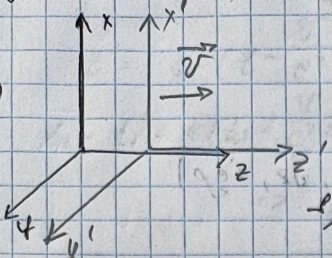
1) $x_i' = x_i + b_i$ — перенос нач. с.к. и сдвиг времени — тривиальное преобразование.

2) Зеркальное отражение: — не имеет физического смысла.

3) Поворот системы координат.
Возможные повороты отн. плоскостей: $\underbrace{xy,\ xz,\ yz}_{\text{обычные повороты простр. осей}},\ xt,\ yt,\ zt.$

Вывод преобразований Лоренца

Закон преобразования от одной ИСО к другой, которые движутся относительно 1й оси.



Для простоты пусть в моменты:

$t=0 \quad x=0 \quad y=0 \quad z=0$ и

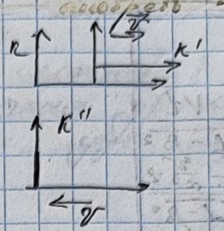
$t'=0 \quad x'=0 \quad y'=0 \quad z'=0$

1) Как могут преобр. поперечные к $\vec v$ координаты.

$x' = \alpha x$

$y' = \alpha y$?

Не сами — смотреть на картинке.



Если исп. обр. преобр.:

$x'' = \alpha x' = \alpha^2 x = x \Rightarrow \alpha = 1.$

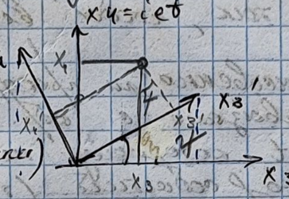
Т.е. поперечные координаты не преобразуются:

$x' = x$

$y' = y$

Почему нельзя исп. преобр. поворота? А куда они должны повор.? Против или по часовой? По здравому смыслу не должны.

2) Преобразование x_3, x_4
z, t



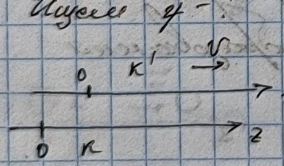
Проще рассуждать через обратное преобр. (геометрически)

$x_3 = x_3' \cos\psi - x_4' \sin\psi$

$x_4 = x_3' \sin\psi + x_4' \cos\psi$

Матрица перехода $\bar{x}' \to \bar{x}$: $a_{ki} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \Rightarrow \psi - ?$

Ищем ψ - ?



Смотрим как измен. расстояние между началами отсчета K и K'

пусть $x_3' = 0$ ($z' = 0$) ?

$\begin{cases} x_3 = -x_4' \sin\psi \\ x_4 = x_4' \cos\psi \end{cases} \qquad \frac{x_3}{x_4} = -\operatorname{tg}\psi$

$\Rightarrow \frac{z}{ict} = -\operatorname{tg}\psi \Rightarrow \operatorname{tg}\psi = i\frac{v}{c} = i\beta \qquad (\beta = \frac{v}{c})$

Тогда из тригонометрии: $\sin\psi = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}} \to \sin\psi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}} \to \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

В итоге преобразование:

$x_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x_3' - \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x_4'$

$x_4 = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x_3' + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x_4'$

Прямое преобразование: $x_i' = a_{ik} x_k$, где

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ - множитель}$$

Должно быть всё аналогично:

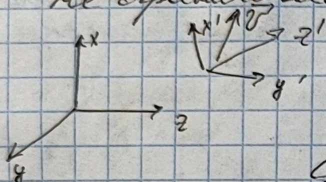
$$\bar{A}, \bar{j} \quad ; \quad \Rightarrow \quad j_i' = a_{ik} j_i \quad ; \quad j = (j_x, j_y, j_z, ic\rho)$$

Закон преобр-я для координат:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \frac{z - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2} z}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}}$$

- законы преобр-я координат и времени.

Не ограничиваем ли мы себя данным примером



Можно повернуть, выбрать оси так, чтобы всё свелось к случаю выше.

Единственно ли преобразование Лоренца?

Всё связано с обр. преобр-м, пусть есть событие x, y, z, t, которому не может предшествовать несколько событий. (т.е. физически это невозможно) $\Rightarrow$ преобр-е только должно быть одно.

Или математически:

$$X \xrightarrow[\text{преобр.}]{\text{по Лоренцу}} X' \xrightarrow[\text{преоб.}]{\text{по друг.}} X \neq X, \text{ которое в начале?}$$

Некоторые следствия преобр-я Лоренца

I) Если $V \ll c$, тогда $\beta \ll 1$, получим преобразования Галилея:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= z - Vt \\ t' &= t \end{aligned}$$

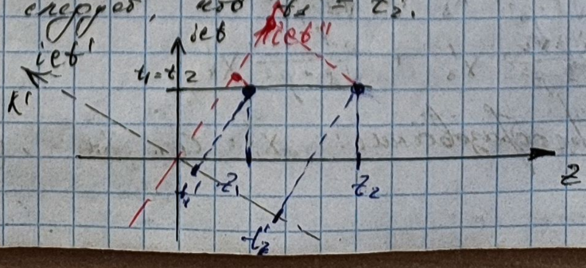
II) Скорость движения объекта $V < c$. (из корня в преобр-ях)

$\beta > 1$. $\Rightarrow$ координаты и время станут комплексными ($V > c$ невозможно).

III) Одновременность двух событий.

Два события, которые одновременны в одной ИСО могут быть неодновременны в другой. Т.е. из условия $t_1 = t_2$ в одной ИСО не следует, что $t_1' = t_2'$.

Геом. интерпретация:



События, которые одновр. происходят в разных точках пр-ва не могут быть причинно связанными.

$$t' = \gamma\cdot\left(t - \frac{V}{c^2}z\right)$$, тогда время между двумя событиями:

$$t_2' - t_1' = \gamma\left(t_2 - \frac{V}{c^2}z_2 - t_1 + \frac{V}{c^2}z_1\right)$$

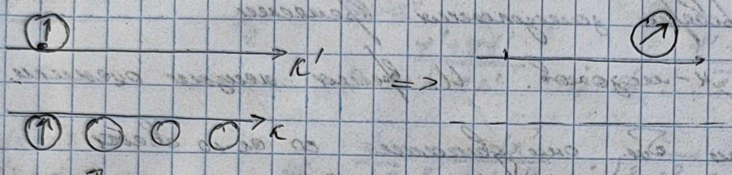
$$\Rightarrow \Delta t' = \gamma\cdot\frac{-V\Delta z}{c^2}$$ ← т.е. зависит от положения в пр-ве начальной С.О.

$\Delta z = z_2 - z_1$

IV) Замедление хода движущихся часов:

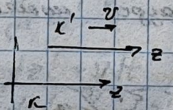
"Движущиеся часы идут медленнее (отстают) в том смысле, что если сравнивать показания движущихся часов с покоящимися, то первые идут медленнее"

Пусть есть 2 С.О.



нужно добавить ещё часы чтобы сравнивать

22.02.23г. $\bar{G} = (G_1, G_2, G_3, G_4)$

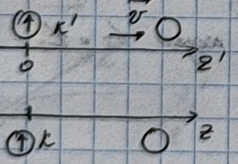


$G'_{1,2} = G_{1,2}$

$G_3' = (G_3 + i\beta G_4)\gamma$

$G_4' = (-i\beta G_3 + G_4)\gamma$

IV. Эйнштейновское замедление времени (продолжение).

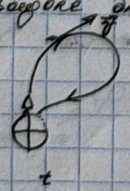


$t' = t = 0$

$$t = \frac{t' + z'\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$dt' = \sqrt{1-\beta^2}\,dt$$ (?)

Парадокс близнецов: один на земле, другой в ракете, слетал, по возвращении 2х возраст будет разный.



Но в СО связ. с землёй → ИСО. А для ракеты это не ИСО

Представим ускоренное движение в виде [illegible] точек.

$$dt' = \sqrt{1-\beta^2}\,dt = \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\,dt$$

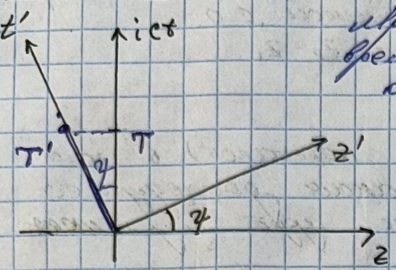
Собственное время объекта - время которое показывают часы, которые движутся вместе с объектом.

Т.е. если хотим узнать время, прошедшее для астронавта:

t_1 - старт
t_2 - приземление

$$\underset{\text{СВО}}{\tau} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt$$

Замечание:



Может возникнуть соблазн преобр. время геометрически. Но угол комплексный, его нельзя так просто поворачивать. $\Rightarrow$ нельзя пользоваться такой интерпретацией.

Экспериментальная проверка замедления времени

1) τ_μ - время жизни μ-мезонов. Их время жизни оценили.

$\tau \sim 10^{-6}$ сек. Если бы они двигались со ск-ю света

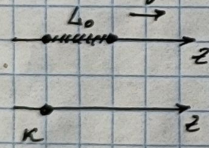
$h \sim 10$ км.

$$l \sim 3 \cdot 10^{8} \cdot 10^{-6} \sim 300 \text{ м.}$$

Но их наблюдали гораздо ниже. Всё связано с замедлением времени.

$$\tau = \frac{\tau_\mu}{\sqrt{1-\beta^2}} >> \tau_\mu.$$

V. Сокращение длины движущегося отрезка.



Чтобы измерить нужно одновременно измерить концы отрезков.

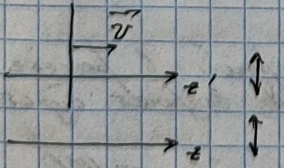
$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ конец левого отрезка

$$z_1' = \frac{z_1 - vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad z_2' = \frac{z_2 - vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$, надо $t_1 = t_2$

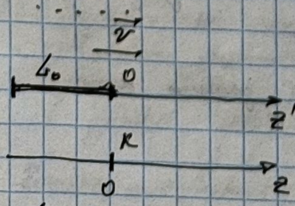
$$L_0 = z_2' - z_1' = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ ← наблюдает в системе К.

$$\Rightarrow L = \sqrt{1-\beta^2}\, L_0 < L_0$$

Что если:



Эти размеры не изменяются, но стержень „станет тоньше".



$t = 0$

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Правый конец напротив наблюдателя.

Δt - время за которое в неподв. системе тело прошло через наблюдателя (т.е. через 0)

$$-L_0 = \frac{0 - v\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$v\Delta t = L_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Связь между Δt и $\Delta t'$:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' - \frac{v}{c^2}L_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Big| \cdot v \quad \rightarrow \quad v\Delta t = L_0\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

VI. Новый закон сложения скоростей

$\vec{v}'$ - ? В классике сложение бы я вектора. Но не в релятивистском случае.

$x = x'$

$y = y'$

$\cancel{z = z'}$

$$z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t = \frac{t' + \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} dx &= dx' \\ dy &= dy' \\ dz &= \frac{dz' - v\,dt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ dt &= \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dz'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt' + \frac{v}{c^2}z'}\cdot\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}v_z'}\,v_x'$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}v_z'}\,v_y'$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz' + V\,dt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dz'} = \frac{v_z' + V}{1 + \frac{V v_z}{c}}$$

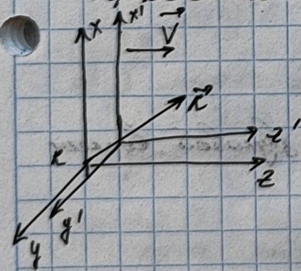
Пример:

$v_x' = v_y' = 0$

$v_z' \rightarrow c$

$V \rightarrow c$ $\quad \Rightarrow v_z \rightarrow c$

VII. Эффект Доплера.



Плоская волна $\vec{k}$ движется в вакууме.

$\vec{E}, \vec{H} \sim e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ - поля зависят от координат

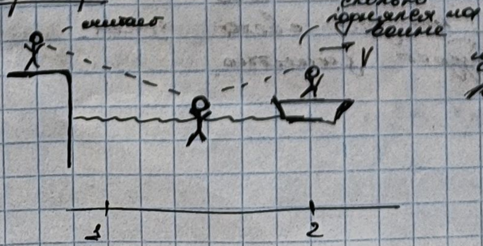
Ур-я Максвелла справедливы во всех ИСО:

$\vec{E}', \vec{H}' \sim e^{i(\omega' t' - \vec{k}'\vec{r}')}$

С частотой и волновым вектором?

фаза $\rightarrow$ $\Phi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ $\qquad$ Фазовое поле меняется?

Пример:



измерение пока пока 1 и 2.
Кто больше насчитает? Одинаково.

Фаза плоской волны инвариантна (должна сохраняться).
Фаза константа, но t и r меняются:

$$\Phi = \omega t - \vec{k}\vec{r} = \omega \frac{x_4}{ic} - k_x x_1 - k_y x_2 - k_z x_3 = -\underbrace{k_i x_i}$$ по виду скалярное.

$k_i = (k_x, k_y, k_z, i\frac{\omega}{c})$

Чтобы Φ инвариантно, вектор в 4D.

$\bar{k}$ – истинный 4х вектор ($\bar{k}$ – 4х волновой вектор)

$$\bar{k} = (\vec{k}, ik)$$

4-ых вектор, преобразования Лоренца:

$k_1' \equiv k_x' = k_x$

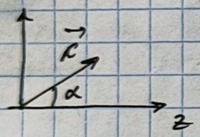
$k_2' \equiv k_y' = k_y$

$$k_3' = k_z' = \frac{k_z - i\beta k_4}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{k_z - \beta\frac{\omega}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$k_4' = i\frac{\omega'}{c} = \frac{-i\beta k_z + i\frac{\omega}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\omega' = \frac{\omega - k_z c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ Эта ф-ла исп. для нахождения движения тел в небе (звезд).

ω_0 – частота в С.О., в которой источник покоится.



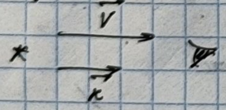
ω' – частота сигнала, в которой объект неподвижен (СО)

$$\omega_0 = \frac{\omega - \frac{\omega}{c}\cos\alpha \cdot c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\left\{ \omega = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\alpha}\,\omega_0 \right\}$$ ~ как преобразуется сигнал при переходе из одной системы в другую.

<u>Частные случаи:</u>

1) $\alpha = 0$



$$\omega = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}\,\omega_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_0$$

$$\omega > \omega_0$$

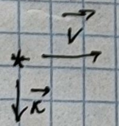
$\beta = \frac{v}{c} \ll 1$: $\omega \simeq (1+\beta)\,\omega_0$ ~ как для звуковой волны в среде.

2) $\alpha = \pi$

$$\omega = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega_0 < \omega_0$$

п. 1 и 2 – продольный эффект Доплера.

3) $\alpha = \frac{\pi}{2}$



$\omega = \sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0$ → для звуковых волн ничего бы не изменилось, но для света измен. частоты будет заметно.

Понятие интервала в 4-х мерном пространстве.

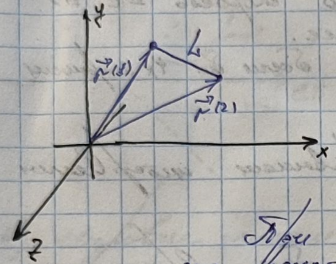
- рассмотрим координаты в 4D

$x_1, x_2, x_3, \underset{ict}{x_4}$ При переходе из разных систем отсчёта коорд. события могут меняться, но есть постоянная величина (длина вектора, отрезка). Сохраняется расстояние между точками.

Пусть есть 2 события $\bar{x}^{(1)}$ и $\bar{x}^{(2)}$ опис. их векторами. Введём расстояние между ними:

$$(\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(2)})^2 =$$

Пример. из 3х мерного пр-ва:



$$\vec{r}^{\,(1,2)} = (x^{(1,2)}, y^{(1,2)}, z^{(1,2)})$$

$$L^2 = |\vec{r}^{\,(1)} - \vec{r}^{\,(2)}|^2 = ((\vec{r}^{\,(1)} - \vec{r}^{\,(2)})\cdot(\vec{r}^{\,(1)} - \vec{r}^{\,(2)})) = ?$$

$$L^2 = (x^{(1)} - x^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2 + (z^{(1)} - z^{(2)})^2$$

При преобр. координат (линейном и ортогон.) это расстояние L не должно изменяться.

Проведём аналогичные рассуждения для 4х мерного пр-ва Минковского. Пусть есть два события 4-х векторов, для которых $\bar{x}^{(1)}$ и $\bar{x}^{(2)}$.

Назовём интервалом между событиями 1 и 2 величину:

$$\overset{-\text{квадрат}}{S^2_{1,2}} = ((\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(2)})\cdot(\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(2)})) = \sum_{i=1}^{4} (x_i^{(1)} - x_i^{(2)})^2 = \{x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict\} =$$
$$= (x^{(1)} - x^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2 + (z^{(1)} - z^{(2)})^2 - c^2(t^{(1)} - t^{(2)})^2$$

1) Интервал - это инвариант (т.е. при переходе из одной с.к. в другую интервал сохраняется.)

2) S^2_{12} может быть любого знака.

Пусть события 1 и 2 происходят в одной и той же точке пространства.

$$\Rightarrow S^2_{12} < 0$$

пусть события происх. одновременно

$$\Rightarrow S^2_{12} > 0$$

Связь между интервалом и собственным временем объекта.

Пусть с некоторым объектом происходит два события, коорд. которых в 4D очень близки и отлич. на величину

$$d\bar{x} = (dx, dy, dz, ic\,dt)$$

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = -c^2\left(1 - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{c^2 dt^2}\right) dt^2$$

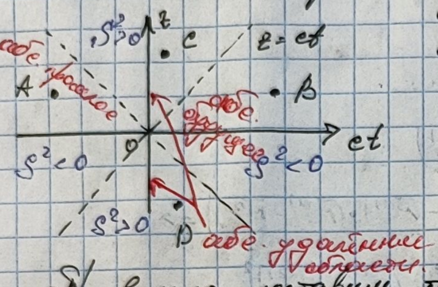
$$dS = ic\underbrace{\sqrt{1-\frac{V^2(t)}{c^2}}\,dt}_{d\tau},$$ => Поскольку dS (интервал) инвариант то и собственное время объекта (с.в.о.) тоже инвариант.

Т.е. если мы можем вычислить с.в.о. в одной ИСО, то и в другой оно будет таким же.

$$d\tau = \sqrt{1-\frac{V^2(t)}{c^2}}\,dt = \sqrt{1-\frac{V^2(t')}{c^2}}\,dt'$$

Пространство Минковского и световой конус.

Рассм-м ось времени и только 1 координату.



Оказывается это пр-во можно разделить на области.

Пусть в О. произошла вспышка света и полетел фотон → его скорость $= c$ => полетят по биссектрисе.

В 4D – эти линии были бы 4х мерным конусом.

Произвольно поставим точки A, B, C, D сравним интервалы с т. О

Временноподобный интервал, когда $S^2<0$ – подобен временному интервалу между 2мя событиями, которые произошли в одной и той же точке пр-ва в разные моменты времени.

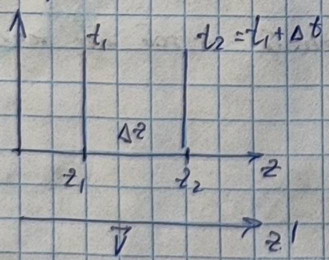
Пространственноподобный интервал, когда $S^2>0$

A происходит раньше события O. (это будет вып-но в любой сист. отсчёта) → область абс. прошлого

B происходит позже O → область абс. будущего. (в $\forall$ И.С.О)

Можно всегда подобрать такую ИСО, где A и B будут происх. в одной и той же точке пр-ва.

Например:



Исп-м преобр. Лоренца:

$$z' = \frac{z_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \overset{\text{хотим}}{=} \frac{z_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ищем ск-ть, чтобы события происходили в одн. и той же точке.

$$V = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

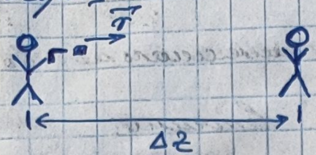
В абсолютно удалённых областях: можно выбрать с.о. в которых соб. C и D происходят одноврем. или даже меняют очерёдность во времени, но ни в какой с.о. они не могут пр. в одной точке.

Причинно связанными могут быть только события, которые связаны между собой временноподобным интервалом.

Т.е. О м.б. следствие соб. A. Но О не м.б. следствием соб. C и D.

Из этого следует, что ск-ть передачи сигнала всегда $< c$.

Иллюстрация: Первый стреляет во второго:



$$s^2 = \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$

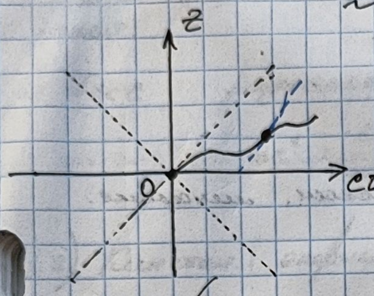
$$\Delta z = V_{пули}\, \Delta t$$

$$s^2 = -(c^2 - V_{пули}^2)\, \Delta t^2$$

Если $s^2 < 0$ → времениподобный интервал. (всё хорошо.)
Но если $V_{пули} > c$ => $s^2 > 0$ – простр. подобный интервал, т.е. могло бы быть, что 2й упал, а только потом 1й стрельнул, что невозможно.

Мировая линия

– это траектория движения тела в 4D пр-ве Минковского.



Св-ва мир. линии:

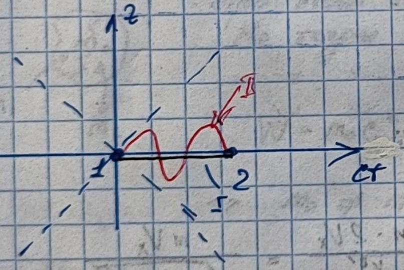
1) Возьмём ∀ точку на м.л. и посмотрим:

$$tg\,\theta = \frac{dz}{d(ct)} = \frac{V}{c} < 1.$$

2) Мировые линии всегда лежат внутри светового конуса.

3) Интеграл $\int ds$, взятый между двумя заданными мировыми точками имеет макс. значение, если он берётся по прямой мировой линии, соедин. эти точки.

Простой случай



$$ds = ic\,d\tau$$

$$\int_1^2 ds \sim \int_1^2 d\tau$$

$$\text{I}: \int_1^2 dt = t_0$$

$$\text{II}: \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{V^2(t)}{c^2}}\, dt < t_0$$

Релятивистская механика свободной материальной частицы

1) Принцип наименьшего действия – для ∀ механической системы ∃ такой интеграл, называемый действием, который для действительного движения имеет минимум.

$$S_q = \int_1^2 L(\vec q, \dot{\vec q}, t)\, dt$$

В случае свободной частицы L не зависит от $\vec q$ – следствие однородности пр-ва.
Также L не зависит от t – т.к. время однородно.

Остаётся $\dot{\vec q}$ → чтобы сделать скаляр => $|\dot{\vec q}|$

=> L может зависеть только от величины ск-ти $|\dot{\vec q}|$ – следствие изотропности пр-ва.

=> S_g — должно быть инвариантно (минимально во всех ИСО)

У нас только интервал — инвариантная величина:

1) $S_g \sim \int d\tau$

2) $S_g \sim -\int d\tau$ ~ т.к. dS достиг. макс. знач. вдоль мир. линии?

$$\Rightarrow \quad S_g = -a\int_1^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

для согласования размерностей.

Из S_g — inv, следует, что a — inv

При малых v → должно быть как в класич. механике.

$$\Rightarrow \quad L = -a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \xrightarrow[\frac{v}{c}\to 0]{} L_{кл} = \frac{mv^2}{2}$$

разложим в ряд:

$$L \approx -a + \frac{av^2}{2c^2} = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = mc^2$$

опр-ся с точн. до пост.

Лагранжиан релятивистской частицы:

$$\boxed{L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Тогда можно найти импульс и энергию:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}; \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x}$$

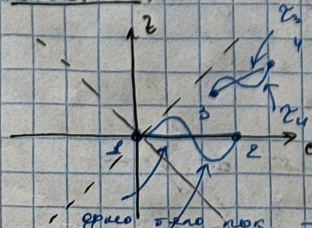
$$\Rightarrow \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{\partial L}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial v_x} = \frac{m\cdot 2v_x}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

Энергия:

$$W = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

15.03.23г.



Например из т.1 в т.2: $\tau_1 > \tau_2$

А если возьмём т. 3 и 4.

По кривой быстрее $\tau_3 > \tau_4$.

одно тело пок. → τ_1

другое движ. → τ_2

Почему? Можно перейти в ИСО связ. с объектом с τ_4. (просто переместить их)

чтобы макс. превр. в минимум

$$S_g = -a\int d\tau \Rightarrow L = -a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$a = mc^2$

Поскольку a — инвариантно, то и m должно быть инвариантно.

Верно из (1) и (2) если $v << c$. → получим выражения как в классике:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

при $v \to c$ => $\vec{p} \to \infty$

Про следствия из выраж. для энергии:

1) Если $v = 0$, то энергия определена → $W = W_0 = mc^2$.
У покоящегося тела энергия в СТО строго опр-на — энергия покоя.

2) $v << c$, разложение в ряд:

$$W = mc^2 + \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{\text{кин. эн. тела}} + \dots = W_0 + T$$

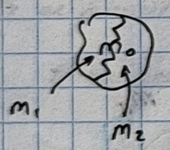
3) Кинетич. энергия: $T = W - W_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)mc^2$

$v \sim c$: $T \approx \gamma mc^2$

4) Эквивалентность массы и энергии и з-н сохранения массы:

$W_0 = mc^2$

Рассмотрим частицу с m_0, её энергия покоя: $W = m_0c^2$
Про этом она сост. из 2х частей с m_1 и m_2.
Но тогда нужно учесть энергию взаимодействия.



$$W = m_0c^2 = m_1c^2 + m_2c^2 + W_{вз}.$$

=> $m_0 \neq m_1 + m_2$ ЗСМ не выполнен.

5) Что если частица движется $v = c$ $W \not\to \infty$, тогда её масса покоя $m = 0$. (пример — фотоны).

Следствия из (1) и (2) вместе:

Можно получить соотношения.

$$\frac{W^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \quad ; \quad \vec{p} = W\frac{\vec{v}}{c^2}$$

$W = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ ← Энергия через импульс → гамильтониан релятив. частицы.

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

Если частица обладает энергией и движется → ей должны приписать и импульс. Перенос энергии сопровождается возникновением импульса.

$\frac{W^2}{c^2} - p^2 = Inv$ — это всегда инвариант в любой ИСО.

Примем за ед. измерения ск-ти — „c".

тогда получим:

$$W^2 - p^2 = m^2$$ — они будут иметь одну и ту же размерность (в энергиях)

$$[m] = [p] = [W]$$ следствие того, что они связаны между собой и соотношением.

Уравнения движения релятивистской частицы

1) О массе в релятивистской механике:

$\vec p = \tilde m \vec v$, т.е. введем новую $\tilde m$

$W = \tilde m c^2$ где $\tilde m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ — релятивистская масса. (m — масса покоя.)

— это просто компактное обозначение, оно не инвариант.

По опр-ю изменение импульса: (и 2-з-н Ньютона)

$$\frac{d\vec p}{dt} = \vec F \iff \frac{d\vec p}{dt} = \frac{m\frac{d\vec v}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m\vec v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \left(\frac{\vec v}{c^2} \cdot \frac{d\vec v}{dt}\right)$$

а) пусть $\vec F \perp \vec v$, тогда вклад 2-го слаг. (провер. данное скалярн.)

$$\vec F = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec v}{dt} \to \frac{F}{a} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_\perp$$

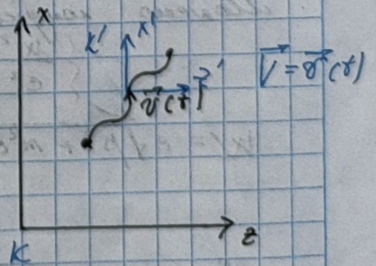
б) пусть $\vec F \parallel \vec v$:

$$\vec F = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}}\underbrace{\frac{d\vec v}{dt}}_{\vec a} \to \frac{F}{a} = \frac{m}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3} = m_\parallel$$

т.е. движ. тело по разному сопр. в разных напр-ях.

2) Ковариантная формулировка уравнений механики.

$\frac{m\,d\vec v}{dt} = \vec F$ — не сохр-т форму записи в разных ИСО → не ковариантно.



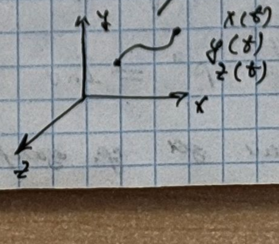
(x', t') — сопровождающая сист. отсчета.

В это с.о. ск-ть объекта $= 0$ и здесь должно выполняться:

$$m\frac{d\vec v'}{dt'} = \vec F'$$

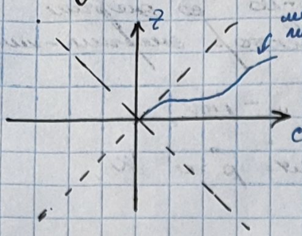
Сконструируем 4х векторы, чтобы при переходе из одной ИСО в др. → они были истинными векторами.

а) 4-х скорость. в 3D



$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \ \ldots$

А у нас 4Д Минковского



мировая линия → её можно задать параметрически:

$$x_1 = x_1(\tau);\ x_2 = x_2(\tau);\ x_3 = x_3(\tau);\ x_4 = x_4(\tau)$$

тогда 4х ск-ть аналогично:

$$\bar{U} = \frac{d\bar{x}}{d\tau}$$

1) $[\tau]$ = время — размерность

2) Нам нужно, чтобы это сохр. и в др. ИСО

$\bar{U}' = \frac{d\bar{x}'}{d\tau}$, если $\bar{U}$ — 4х вектор, то $\tau \equiv \tau$ — собств. время объекта.

$$\Rightarrow \boxed{\bar{U} = \frac{d\bar{x}}{d\tau}} \text{ — 4х скорость}$$

$$U_i = \frac{dx_i}{d\tau}$$

$$U_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{dx_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\,dt} = \frac{v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$U_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{d(ict)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt} = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \bar{U} = \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ i\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Всегда если $v=0$, то $|\bar{U}|^2 \neq 0$. Тело всегда движ. в 4х мерном пр-ве, (связано с течением времени.)

Аналогично можно ввести

$$\bar{w} = \frac{d\bar{U}}{dt} \text{ — 4х ускорение.}$$

Найдём длину вектора:

$$|\bar{U}|^2 = \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = -c^2$$

$\Rightarrow$ Для любого движения (любого объекта) $|\bar{U}|^2 = -c^2$ — раз это инвариант. Значит компоненты $\bar{U}$ не могут быть произвольными:

$$U_i^2 = -c^2$$

Рассмотрим скалярное пр-е:

$$(\bar{w}\cdot\bar{U}) = \left(\bar{U}\cdot\frac{d\bar{U}}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}|\bar{U}|^2 = 0 \quad \Rightarrow (\bar{w}\cdot\bar{U}) = 0$$

взаимно перпендикулярны.

б) 4-х импульс. по аналогии с кл. должен быть коэф-т пропорц-ти. → масса

$$\bar{p} = m\bar{U}$$

Причём должна быть инвариантна. это m покоя.

$$\bar{p} = \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ \frac{imc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \leftarrow i\frac{W}{c}$$

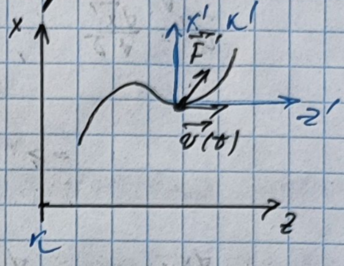
релят. импульс

$$\Rightarrow \boxed{\bar{p} = \left(\vec{p}, i\frac{W}{c}\right)}$$ содержит инф-ю об энергии частицы. (вектор энергии-импульса)

$|\bar{p}|^2 = p^2 - \frac{W^2}{c^2} = \{$подставить p и $W\} = -m^2c^2$ — inv.

Если сохр-ся 4х вектор. → должен сохр-ся $\vec{p}$ и W.
(это просто пример.)

б) 4-х сила Минковского и преобразования вектора силы.



$\frac{d\bar{p}}{d\tau} = \bar{\mathcal{F}}$ — 4х сила.

Рассуждаем аналогично. Рассм-м момент времени, когда тело движ. вдоль OZ. (для простоты)

Т.к. в K' тело покоится, то там:
справедливо:

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \vec{F}'$$

Если $v \ll c$: $U_\alpha \simeq v_\alpha$

$$m\frac{dU_\alpha'}{d\tau} = F_\alpha' \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathcal{F}}' = (\vec{F}'; \,?)$$

Исходя из общих формул:

$$\mathcal{F}_4' = m\frac{dU_4'}{d\tau} = m\frac{d}{dt'}\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \sim \underset{0}{\underset{\shortparallel}{v'}}\frac{dv'}{dt'} \text{ в } K'$$

Тогда в K':

$$\bar{\mathcal{F}}' = (\vec{F}', 0)$$

Как получить в исходной системе? Нужно восп-ся преобр Лоренца:

$\mathcal{F}_i = a_{ik}\mathcal{F}_k'$, вспоминаем обратное преобр-я.

$\mathcal{F}_{1,2} = \mathcal{F}_{1,2}'$ — поперечные не преобр-ся.

$$\mathcal{F}_3 = \frac{\mathcal{F}_3' - i\beta\mathcal{F}_4'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\mathcal{F}_4 = \frac{i\beta\mathcal{F}_3' + \mathcal{F}_4'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{т.к. } \mathcal{F}_4' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_{1,2} = F_{1,2}'$$

$$\mathcal{F}_3 = \frac{F_3'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Обратимся к опр-ю силы. Нам лучше связать комп. силами в с.о K:

$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{\mathcal{F}}$ для пространственных компонент.

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dp_\alpha}{dt} = \begin{cases} F'_\alpha, & \alpha = 1,2 \\ \frac{F'_\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \alpha = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_{1,2} = \sqrt{1-\beta^2}\, F'_{1,2}$$
$$F_3 = F'_3$$

Но могли выбирать ск-ть не по z. т. е. важно знать ориентацию между $\vec{F}'$ и $\vec{v}$

$$\vec{F}' = \underset{\parallel \vec{v}}{\vec{F}_\parallel} + \underset{\perp \vec{v}}{\vec{F}_\perp}$$

Общие формулы тогда дадут: $\left\{ \begin{aligned} \vec{F}_\perp &= \sqrt{1-\beta^2}\, \vec{F}'_\perp \\ \vec{F}_\parallel &= \vec{F}'_\parallel \end{aligned} \right\}$ – з-н преобр-я вектора силы

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ ? \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \\ \frac{dp_\kappa}{d\tau} &= \mathcal{F}_\alpha \\ d\tau &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt \end{aligned} \right\}$$ Из них вытекает связь

? – из док-ого ранее соотношения:

$$\frac{d\bar{p}}{d\tau} = m\frac{d\bar{u}}{d\tau} = m\bar{w} = \bar{\mathcal{F}} \quad \Big/ \cdot (\bar{u} \cdot$$

$$\Rightarrow m\underset{0}{(\bar{w}\cdot\bar{u})} = (\bar{\mathcal{F}}\cdot\bar{u}) \quad \Rightarrow ?$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_\alpha u_\alpha + \mathcal{F}_4 u_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_4 = \frac{-(\vec{F}\cdot\vec{v})}{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{ic}$$

$$\Rightarrow \left\{ \bar{\mathcal{F}} = \left(\frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ \frac{i}{c}\frac{(\vec{F}\cdot\vec{v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \right\}$$ – четырёх сила Минковского

22.03.23г.

Ковариантная форма ур-ий механики:

$$\frac{dp}{d\tau} = \bar{\mathcal{F}}$$

Для простр. компонент:

$$\frac{dp_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt} = \frac{F_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\Rightarrow$ то же самое 2з. Н.

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = F_\alpha$$, но опр-е импульса теперь другое.

$$\frac{d}{dt}\frac{m v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_\alpha$$ – всё сложнее, т.к. v зав-т от координат, и проще в лоб интегрировать для нахождения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – трудно.

Делают по-другому: (говорим, что импульс зависит от t):

$p_\alpha(t) \Rightarrow W(t)$

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{mc^2 v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{W(t)}{c^2}\,v_\alpha = p_\alpha(t)$$

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{c^2 p_\alpha(t)}{W(t)}$$ → даже проще.

Для временных компонент:

$$\frac{dp_4}{d\tau} = F_4 \to \left\{\begin{aligned} p_4 &= \frac{i}{c}W \\ F_4 &= \dots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \underbrace{(\vec F\cdot\vec v)}_{\text{работа}}$$

⇒ получили закон изменения энергии.

Ковариантная формулировка ур-ий электродинамики.

Было ранее для 4х векторного потенциала:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = -\dfrac{4\pi}{c} j_i \\ \dfrac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0 \;;\; \dfrac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

Но нужно ещё знать как преобразуются поля при переходе между С.О.

Тензор ЭМП.

знаем: $A_i = (\vec A, i\varphi)$

С другой стороны:

$$\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t} - \nabla\varphi \;;\; \vec B = \text{rot}\,\vec A$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = i\frac{\partial i\varphi}{\partial x} - \frac{i\,\partial A_1}{c\,\partial it} = i\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)$$

$$B_y = -\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_3} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right)$$

... если расписать все будут похожи.

Введём обозначение:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

$F_{14} = -iE_x$; $F_{23} = B_x$; $F_{13} = -B_y$ и т.д.

Удобно составить матрицу 4x4.

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$ антисимметричная

Зачем нужно? Для преобразований. Как преобр. $\frac{\partial A_k}{\partial x_i}$ при переходе в др. С.О.?

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \sum_l a_{lk}\frac{\partial A'_l}{\partial x_i} = \sum_l a_{lk}\sum_f \frac{\partial A'_l}{\partial x'_f}\frac{\partial x'_f}{\partial x_i} = \sum_{lf} a_{lk}\,a_{fi}\,\frac{\partial A'_l}{\partial x'_f},$$

$A_k = a_{lk}A'_l$; $\vec A' = \vec A'(\vec x') = \vec A'(x'_1(\vec x), x'_2(\vec x), x'_3(\vec x), x'_4(\vec x))$

=> где $x'_f = a_{fi} x_i$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \sum_{lf} a_{lk}\, a_{fi} \frac{\partial A'_f}{\partial x'_l}$$

тогда:
$$F_{ik} = a_{lk}\, a_{fi} \left(\frac{\partial A'_l}{\partial x'_f} - \frac{\partial A'_f}{\partial x'_l} \right) = a_{lk}\, a_{fi}\, F'_{fl}$$

где коэф. преобр. по правилу: $x_i = a_{fi} x'_f$, $x_k = a_{lk} x'_l$

=> F_{ik} преобр. как произвед. координат $x_i x_k$ => F_{ik} - тензор

F_{ik} - тензор электромагнитного поля.

Ковариантная ф-ла уравнений Максвелла

(1) $\text{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

~ всего 4 ур-я. → 3 из rot, 1 из div.

(2) $\text{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho$

Запишем одну из проекций (на ox):

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_1 \longrightarrow \frac{\partial F_{1i}}{\partial x_i} = \frac{4\pi}{c} j_1$$

$+\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1}$, можно добавить, т.к. $F_{11} = 0$

Рассм-м другое ур-е.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad |\cdot i$$

$$\frac{\partial iE_x}{\partial x} + \frac{\partial iE_y}{\partial y} + \frac{\partial iE_z}{\partial z} = \frac{4\pi i c\rho}{c}$$

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_4$$

=> (1), (2) => $\boxed{\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i}$

Рассм-м другую пару ур-ий:

(3) $\text{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

(4) $\text{div}\,\vec{B} = 0$

в проекции:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{i\,\partial B_z}{\partial ict} = 0 \quad |\cdot(-i)$$

$$-\frac{\partial iE_y}{\partial x} + i\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial ict} = 0$$

сравниваем с тензором.

$$\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} = 0$$

просто циклич. в индексах.

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} = 0$$, k, l, i − ∀ неравн. индекс.

Для удобства вводится тензор $\tilde{F}_{ik}$ − тензор дуальный по отн. к F_{ik}.

По опр.:

$$\tilde{F}_{ik} = e_{iklm} F_{lm}$$

e_{iklm} − абсолютно антисимм. ед. тензор.

Опр-е e_{iklm}:

1) $e_{1234} = 1$.
2) если ∀ 2 индекса совп., то этот элемент равен нулю $e_{114l} = 0$
3) при перестановке ∀ 2х индексов местами изменяется знак элемента тензора

$$e_{iklm} = -e_{kilm}$$

Если проделать выкладки можно получить:

$$\tilde{F}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & B_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & B_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & B_z \\ -B_x & -B_y & -B_z & 0 \end{pmatrix}$$

формально получается из F_{ik}, если в нём заменить $E_\alpha = iB_\alpha$ и $B_\alpha = -iE_\alpha$

Тогда получим для (3) и (4):

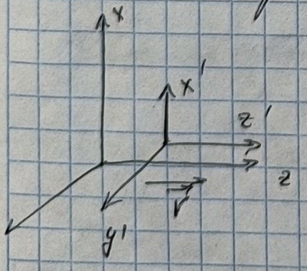
$$\boxed{\frac{\partial \tilde{F}_{ik}}{\partial x_k} = 0}$$

Ковариантная форма С.У.М.:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{4\pi}{c} j_i \\ \frac{\partial \tilde{F}_{ik}}{\partial x_k} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Законы преобразования полей

Достаточно рассм-ть лишь частный (но известный) случай:



$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

Можно было действ-ть в лоб: исходя соотв. в виде:

$$F'_{ik} = a_{il} a_{km} F_{lm}$$

Поперечные коорд. не преобр.; (лоренцевы преобр-ий):

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

а) Посмотрим как преобр. F_{12}? → должен преобр. как $x_1 x_2$, а они никак не преобр.:

$$F_{12}' = F_{12}$$

б) Как преобр. F_{13} и F_{23}: должны преобр. как $x_1 x_3$ и $x_2 x_3$ => преобр. так же как компонента x_3.

$$F_{13}' = \gamma(F_{13} + i\beta F_{14}) \; ; \; F_{23}' = \gamma(F_{23} + i\beta F_{24})$$

в) F_{14} и F_{24} преобр. как $x_1 x_4$ и $x_2 x_4$ => как комп. x_4:

$$F_{14}' = \gamma(-i\beta F_{13} + F_{14}) \; ; \; F_{24}' = \gamma(-i\beta F_{23} + F_{24})$$

г) Сложнее с F_{34} и F_{43}, их делаем в лоб, обе коорд. преобразуются.

$$F_{34}' = a_{3l} a_{4m} F_{lm} = a_{33} a_{4m} F_{3m} + a_{34} a_{4m} F_{4m} =$$

$$= a_{33} a_{43} \underset{0}{F_{33}} + a_{33} a_{44} F_{34} + a_{34} a_{43} F_{43} + a_{34} a_{44} \overset{=0}{F_{44}} =$$

$$= \{ F_{34} = -F_{43} \} = F_{34} \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = F_{34}$$

Если записать теперь преобр. для комп.:

а) $=> B_z' = B_z$

в) $=> E_x' = \gamma(E_x - \beta B_y)$

$E_y' = \gamma(E_y + \beta B_x)$

б) $=> B_y' = \gamma(B_y - \beta E_x)$

$B_x' = \gamma(B_x + \beta E_y)$

г) $E_z' = E_z$

Если писать для общего случая, разделив на компоненты: $\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$; $\vec{B} = \vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp$

$=> \vec{E}_\parallel' = \vec{E}_\parallel$; $\vec{B}_\parallel' = \vec{B}_\parallel$

$$\vec{E}_\perp' = \frac{\vec{E}_\perp + \frac{1}{c}[\vec{v} \times \vec{B}]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \; ; \; \vec{B}_\perp' = \frac{\vec{B}_\perp - \frac{1}{c}[\vec{v} \times \vec{E}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

29.03.23г.

Инварианты тензора ЭМП.

(некоторая скалярная величина, не меняющаяся при переходе).

Можно ввести по разному:

а) $F_{ik} F_{ik} = inv \to E^2 - B^2 = inv$

б) $F_{ik} \tilde{F}_{ik} = inv \to (\vec{E} \cdot \vec{B}) = inv$

} Порождаем в каком-то месте пр-ва и в какой-то момент времени.

Мы знаем:

$$\vec E'_{\parallel} = \vec E_{\parallel} \;;\quad \vec B'_{\parallel} = \vec B_{\parallel} \;;\quad \vec E'_{\perp} = \frac{\vec E_{\perp} + \frac{1}{c}[\vec v \times \vec B]}{\sqrt{1-\beta^2}} \;;\quad \vec B'_{\perp} = \frac{\vec B_{\perp} - \frac{1}{c}[\vec v \times \vec B]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ищем разность величин:

$$(E')^2 - (B')^2 = E'^2_{\parallel} - B'^2_{\parallel} + E'^2_{\perp} - B'^2_{\perp} = E_{\parallel}^2 - B_{\parallel}^2 + \frac{E_{\perp}^2 + \frac{2}{c}([\vec v, \vec B]\cdot \vec E_{\perp}) + \frac{1}{c^2}\overbrace{([\vec v, \vec B])^2}^{v^2 B_{\perp}^2}}{1-\beta^2} -$$

$$- \frac{B_{\perp}^2 - \frac{2}{c}([\vec v \times \vec E]\vec B_{\perp}) + \frac{1}{c^2}\underbrace{([\vec v \times \vec E])^2}_{v^2 E_{\perp}^2}}{1-\beta^2} = E^2 - B^2$$

можно док-ть и $(\vec E \cdot \vec B)$ – inv

Следствия из а) и б):

1) Если в некоторой с.о $\vec E \perp \vec B$ → они должны быть $\perp$ и в $\forall$ другой с.о.

2) Если в некоторой с.о $|\vec E| = |\vec B|$, то они должны быть равны и в $\forall$ другой с.о.

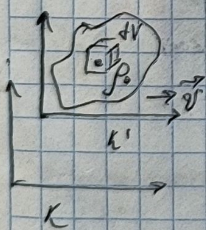
3) Аналогично 2) ~~вып-ся~~ сохр-ся и соотн. $|\vec E| \gtrless |\vec B|$

4) Если угол между векторами $\vec E$ и $\vec B$ острый (тупой) в одной с.о, то это сохр. и в другой с.о.

5) Если в некоторой с.о. $\vec B \perp \vec E$ то можно найти такую с.о, в которой либо $|\vec E| = 0$, либо $|\vec B| = 0$.
Зависит от знака $|E|^2 - |B|^2$

6) Если в некоторой с.о. либо $E = 0$, либо $B = 0$ => $\vec E \perp \vec B$ в $\forall$ др. с.о

Закон сохранения заряда



Пусть есть какая-то пл-ть заряда – неподвижная
и пусть есть K в которой ρ движ-ся со ск-ю $\vec v$
Куда входит ρ?

$$\vec j' = (0, 0, 0, ic\rho_0)$$

Согласно общим ф-ам преобр-ий:

$$j_4 = \frac{i\beta j_3' + j_4'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$=> ic\rho = \frac{ic\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad => \quad \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Но что происходит с полным зарядом?

$$q = \iiint \rho \, dV = \iiint \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} dx\,dy\,dz = \{\text{преобр. коорд.}\} =$$

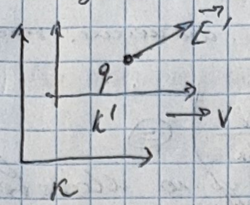
$$= \iiint \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} dx'\,dy'\,\underbrace{dz'\sqrt{1-\beta^2}}_{\text{из-за Лоренцова сокращения}} = q'$$

=> Полный заряд сохраняется.

q-inv

Ковариантная запись силовых и энергетических соотношений в электродинамике.

1. Связь силы Лоренца и закона преобр. полей.



Чему равна сила в с.о. K?

в K': $\vec F' = q\vec E' = q\vec E'_\parallel + q\vec E'_\perp = \vec F'_\parallel + \vec F'_\perp$

в K: $\vec F_\parallel = \vec F'_\parallel = q\vec E'_\parallel = q\vec E_\parallel$

$$\vec F_\perp = \sqrt{1-\beta^2}\,\vec F'_\perp = \sqrt{1-\beta^2}\, q\,\frac{\vec E_\perp + \frac{1}{c}[\vec v\cdot\vec B]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\vec F = \vec F_\parallel + \vec F_\perp = q\vec E + \frac{q}{c}[\vec v,\vec B]$$

2. 4-х вектор плотности силы Лоренца. (пл-ть силы на единицу объёма)

Пусть в объёме ΔV находится заряд Δq, кот. дв. со скор $\vec v$

$$\vec f = \frac{\Delta\vec F}{\Delta V} = \frac{\Delta q}{\Delta V}\vec E + \frac{1}{c}\frac{\Delta q}{\Delta V}[\vec v\times\vec B] \quad \left\{\frac{\Delta q}{\Delta V} = \rho,\ \rho\cdot\vec v = \vec j\right\}$$

$$\Rightarrow \vec f = \rho\vec E + \frac{1}{c}[\vec j\times\vec B]$$

$$f_x = \rho E_x + \frac{1}{c} j_y B_z - \frac{1}{c} j_z B_y = \frac{1}{c}\big(B_z j_y + (-B_y) j_z + (ic\rho)(-iE_x)\big) =$$
$$= \frac{1}{c}\big(F_{12} j_2 + F_{13} j_3 + F_{14} j_4 + \underbrace{F_{11}}_{0} j_1\big)$$

Можно аналогично написать для всех i

$$\underbrace{f_\alpha}_{\text{пр. нач. 4х вектора}} = \underbrace{\frac{1}{c}}_{inv} \underbrace{F_{\alpha i}}_{\text{4 тензор}} \underbrace{j_i}_{\text{4 вектор}}$$

$$\Rightarrow f_4 = \frac{1}{c} F_{4i} j_i = \frac{1}{c}\big((+iE_\alpha) j_\alpha\big)$$

$$f_4 = \frac{i}{c}(\vec E, \vec j) = \frac{i}{c}(\vec E\,\rho\vec v) = \frac{i}{c}(\vec f\cdot\vec v)$$ — работа, которая в ед. вр. соверш. полем над зарядами в ед. V

$f_i = \frac{1}{c} F_{ik} j_k$ размерность? [Пл-ть энергии / до длины]

Аналогично как в ЭД:

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$ → уметь в том, что, при переходе доб. просто поставить i, сохр-т ~~своё~~ ~~форм.~~ вид.

3. Тензор энергии - импульса - натяжений.

Вспоминаем ур-я Максвелла

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = \frac{4\pi}{c} j_k.$$

$$f_i = \frac{1}{4\pi} F_{ik}\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = \frac{1}{4\pi}\left(\underbrace{\frac{\partial F_{ik}F_{kl}}{\partial x_l}}_{I} - \underbrace{F_{kl}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}}_{II}\right)$$

сумма по i и k

$$I = \frac{\partial F_{il}F_{lk}}{\partial x_k}$$

меняем индексы с учёт. антисимм. тензора.

$$II = \frac{1}{2}\left(F_{kl}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + F_{lk}\frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}F_{kl}\left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}\right) \circledcirc$$

~ подобное ур-ю Максвелла

$$\left\{\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} = 0\right\}$$

$$\circledcirc\; -\frac{1}{2}F_{kl}\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} = -\frac{1}{4}\frac{\partial F_{kl}^2}{\partial x_i} = -\frac{\delta_{ik}}{4}\frac{\partial F_{ml}^2}{\partial x_k}$$

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{4\pi}(I - II)$$

$$\Rightarrow\quad T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{lk} + \frac{\delta_{ik}}{4}F_{lm}^2\right)$$ ~ тензор энергии-импульса.

Свойства:

1) $T_{ik} = T_{ki}$ ~ симметричный тензор.

2) $\sum_i T_{ii} = 0$ ~ „след" = шпур. $Sp\, T_{ik} = 0$

3)
$$T_{ik} = \left(\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \hat{T}_{\alpha\beta} & \cdot & -\frac{i}{c}\vec{S} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \hline & -\frac{i}{c}\vec{S} & & w \end{array}\right)$$

вектор Пойнтинга.

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2 + B^2)\right)$$

~ тензор натяжений Максвелла.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{B}]$$ – вектор Пойнтинга.

$$w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$$ ~ плотность энергии ЭМП.

Пр. $T_{24} = -\frac{i}{c}S_y$, $T_{32} = \hat{T}_{32}$, $T_{41} = -\frac{i}{c}S_x$

4. Закон сохранения энергии.

$$f_4 = \frac{\partial T_{4k}}{\partial x_k}$$

$$\frac{i}{c}(\vec{E}\vec{j}) = -\frac{i}{c}\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial w}{\partial ict}$$

$$(1)\;\Rightarrow\; \frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{E}\vec{j}) = -\operatorname{div}\vec{S}$$ ~ теорема Пойнтинга в диф. форме.

Проинтегрируем по объёму:

$$\frac{d}{dt}W_{эм} + \frac{d}{dt}W_{мех} = -\oint(\vec{S})\,d\vec{\Omega}$$ Ω – пов-ть, кот. огр. объём V

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(W_{эм}+W_{мех}\right) = -\oint(\vec{S}\cdot d\vec{\Omega})}$$

Если система замкнута (в том смысле, что поток энергии на границе $=0$) =>

$$W_{эм}+W_{мех} = const.$$

5. Закон сохранения импульса.

$$f_\alpha = \frac{\partial \sigma_{\alpha k}}{\partial x_k} = \frac{\partial \hat{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{i}{c}\frac{\partial S_\alpha}{\partial ict}$$

$$f_\alpha = \frac{\partial \hat{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{S_\alpha}{c^2}; \quad \vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$$[\vec{g}] = \frac{[\text{импульс}]}{[\text{объём}]}$$ $\vec{g}$ – пл. импульса ЭМП.

5.04.23г.

„В прошлой серии":

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}; \quad \sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} & i\cdot c\vec{g} \\ i\cdot c\vec{g} & -w \end{pmatrix}$$

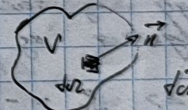
$$f_\alpha = \frac{\partial \hat{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{S_\alpha}{c^2}$$

$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}$ – плотность импульса ЭМП.

Найдём интегральное ур-е, вытекающее из этого соотношения.

$$\iiint f_\alpha\, dV + \frac{d}{dt}\iiint g_\alpha\, dV = \iiint \frac{\partial \hat{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dV = \oint \hat{\sigma}_{\alpha\beta}\, d\Omega_\beta$$

где $d\Omega_\beta$ – β-я компонента вектора $d\vec{\Omega}$



$d\vec{\Omega} = \vec{n}\, d\Omega$

$\frac{d}{dt}\iiint g_\alpha\, dV = \dot{G}_\alpha$ – α-я компонента полного импульса поля в объёме V;

$\iiint f_\alpha\, dV = F_\alpha = \frac{dp_\alpha}{dt}$

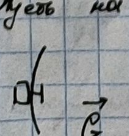
В итоге приводится к виду:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}+\vec{G})_\alpha = \oint \hat{\sigma}_{\alpha\beta}\, d\Omega_\beta$$

Если система замкнута (в смысле, что поток $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ равен 0), то сохраняется полный импульс

$$\vec{p}+\vec{G} = const$$

Пусть на ∞ в космосе $\exists$ антенна. Если я в СО неподв. и генератор выключ. → ничего не произ.



Но при излуч. → антенна должна ускоряться. Такой фотонный двигатель

=> $f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ опис. закон измен. энергии + закон измен. импул.

Вывод уравнений движения из принципа наим. действия

1) Действие для зар. частицы в заданном ЭМП и ф-я Лагранжа.

Как должно выглядеть действие в заданном поле?

$$S_g = S_{св} + S_{вз.} + \underbrace{S_{поля}}_{\text{измен. поле}}$$

$S_{вз.}$ — взаимод. частицы с полем.

Если предположить, что частица не оказ. влияния на поле, то $S_{поля}$ можно опустить.

$$S_g = -mc^2 \int_1^2 d\tau + \int_1^2 dS_{вз}$$

$dS_{вз}$ — действие на элементе мировой линии между точками $\bar{x}$ и $\bar{x} + d\bar{x}$

Действие должно быть инвариантно, что во всех ИСО не было разногласий!

S_g — inv $\Rightarrow dS_{вз}$ — inv.

По логике должно быть:

а) $dS_{вз} \sim q$ (заряду)

б) $dS_{вз} \sim d\bar{x}$

в) $dS_{вз} \sim$ связано с полем $\sim \bar{A}$

можно догадаться до вида:

$$dS_{вз} = q(\bar{A} \cdot d\bar{x}) \cdot \frac{1}{c}$$ — для уравнив. размерностей

Вообще из таких рассуждений это выр. не следует, оно постулируется из экспериментальных фактов.

$$\Rightarrow S_g = -\int_1^2 mc^2 d\tau + \frac{q}{c}\int_1^2 (\bar{A} \cdot d\bar{x}) =$$

$$= -\int_1^2 mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt + \frac{q}{c}\int_1^2 \left(A_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} + A_4 \frac{dx_4}{dt}\right) dt =$$

$$= -mc^2 \int_1^2 \sqrt{1-\beta^2}\, dt + \frac{q}{c}\int_1^2 [(\vec{A} \cdot \vec{v}) - c\varphi]\, dt$$

Тогда Лагранжиан:

$$L = \underbrace{-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{L_{св.}} + \underbrace{\frac{q}{c}(\vec{A} \cdot \vec{v}) - q\varphi}_{L_{вз}}$$

Можно сразу получить полезные соотношения:

Обобщённый импульс:

$$p_\alpha^{об} = \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = \frac{m v_\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{q}{c} A_\alpha \,; \quad \vec{p}^{\,об} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}$$

$$W = p_\alpha^{об} v_\alpha - L = \underbrace{(p_\alpha v_\alpha - L_{св})}_{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}} + \frac{q}{c} A_\alpha v_\alpha - L_{вз}$$

Энергия частицы в заданном поле.

$$W = \underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{\text{кин + эн. покоя}} + \underbrace{q\varphi}_{\text{потенц. энергия}}$$

2) Вывод уравнений движения:

Ур. наим. действия $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \nabla L$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}\right) = \nabla \frac{q}{c}(\vec{A}\cdot\vec{v}) - q\nabla\varphi$$

вспомним векторный анализ:

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{v}) = \underbrace{(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{v}}_{=0} + (\vec{v},\nabla)\vec{A} + \underbrace{[\vec{A}\times \mathrm{rot}\,\vec{v}]}_{=0} + [\vec{v}\times \mathrm{rot}\,\vec{A}]$$

т.к. v и r незав. переменные

$$\frac{d}{dt}\frac{q}{c}\vec{A} = \frac{q}{c}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{A}\right)$$

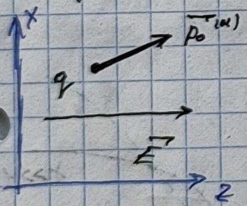
само $\vec{A} = \vec{A}(t)$ и может меняться из разных точек. (как в акустике)

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{q}{c}[\vec{v}\times \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{A}}_{\vec{B}}] + q\underbrace{\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right]}_{\vec{E}}$$

Движение заряженной частицы в заданных полях

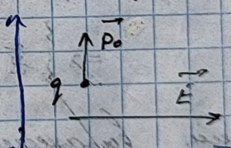
1) Постоянное однородное эл. поле.

Пусть есть поле $\vec{E}$ и частица q с нач. импульсом.

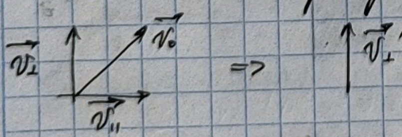


Можем взять другую ИСО чтобы импульс был направлен по ox

↳ На самом деле можем преобр. времени, если просто перейти в Лоренцевскую ... возникнуть поле



При этом $\vec{E}$ не измен., т.к. прод. сост. не преобр.



всегда можем выбрать такую с.о.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}$$

Проецируем на оси:

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = 0 \\ \frac{dp_z}{dt} = qE \end{cases} \rightarrow \text{интегрируем: } \begin{cases} p_x = const = p_0 \\ p_z = qEt \end{cases}$$

Энергия частицы:

$$W = \sqrt{(mc^2)^2 + (c\vec{p})^2} = \sqrt{\underbrace{(mc^2)^2 + cp_0^2}_{\text{эн. покоя + кин. энергия. } W_{нач}} + (qEct)^2} = \sqrt{W_{нач}^2 + (qcEt)^2}$$

Знаем соотношение:

$$\vec{p} = \frac{W}{c^2}\vec{v} \rightarrow v_x = \frac{c^2 p_x}{W} = \frac{c^2 p_0}{W}$$ → никакой силы по x не действ. а ск-ть v_x со временем меняется (следствие релятивизма)

$$v_z = \frac{c^2 qEt}{W}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \int \frac{p_0 c^2}{\sqrt{W_{нач}^2 + (qcEt)^2}} dt = \frac{p_0 c}{qE} \operatorname{Arcsh} \frac{qcEt}{W_{нач}} \\ z(t) = \int \frac{c^2 qEt}{\sqrt{W_{нач}^2 + (cqEt)^2}} dt = \frac{1}{qE}\sqrt{(qEct)^2 + W_{нач}^2} \end{cases}$$

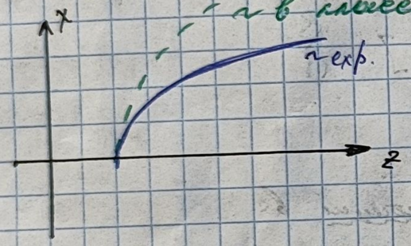
Удобнее связать $z(x)$:

$$z = \frac{W_{нач}}{qE} \operatorname{ch} \frac{qEx}{p_0 c}$$ ~ цепная линия

Если разложить по малому параметру $\frac{v}{c} \ll 1$.

$$z \simeq \frac{qEx^2}{2mv_0^2} + const$$ — совпад. с кл. механикой

~ в классике была бы парабола.



Можно ввести безразмерные величины

$$L = \frac{p_0 c}{qE} \Rightarrow \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}$$

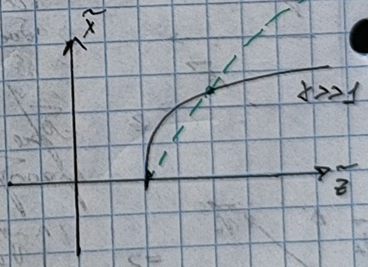
$$\Rightarrow \tilde{z} = \frac{W_{нач}}{p_0 c} \operatorname{ch}\tilde{x}, \quad \frac{W_{нач}}{p_0 c} = \frac{W_{нач}}{\sqrt{W_{нач}^2 - W_0^2}} =$$

$$\frac{W_{нач}}{p_0 c} = \left\{ \frac{W}{W_0} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\} = \frac{1}{\beta_{нач}} = \frac{c}{v_{нач}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \tilde{z} = \frac{c}{v_{нач}} \operatorname{ch}\tilde{x} \right\}$$

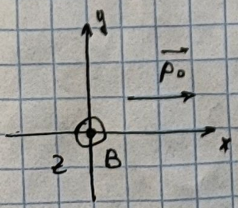
Из класс. выражения:

$$\tilde{z} = \frac{c}{v_{нач}\sqrt{1-\left(\frac{v_{нач}}{c}\right)^2}} \frac{\tilde{x}^2}{2}$$



2) ~~Постоянное~~ ~~однородное~~ магнитное поле.

Можно аналогично решить следующую задачу:



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q}{c}[\vec{v} \times \vec{B}]$$

$$\frac{dW}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{F}_{лор}) = 0 \Rightarrow W = const.$$

Т.е. энергия ~~частицы~~ работа должна сохр-ся $W = W_{нач}$

⇒ сохр-ся скорость

$$|\vec{v}| = v_{нач}.$$

$$\vec{p} = \frac{W_{нач}}{c^2}\vec{v} \Rightarrow$$

$$\frac{W_{полн}}{c^2}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c}\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]$$ спроецируем

$$\frac{dv_x}{dt} = \underbrace{\frac{qcB}{W_{полн}}}_{\omega_B} v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \underbrace{\frac{-qcB}{W_{полн}}}_{\omega_B} v_x \quad \Big| \cdot i$$

$(+)$ $$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(v_x + i v_y\right) = -i\omega_B\left(v_x + i v_y\right)$$

$$\Rightarrow v_x + i v_y = C e^{-i\omega_B t}, \quad C \to |C| e^{i\psi}$$

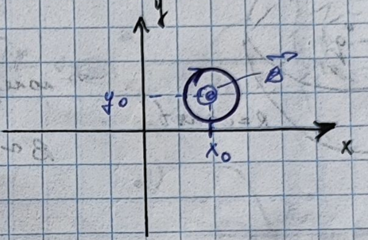
Исп-я нач. условия: $v_x = v_{нач}\cos(\omega_B t)$, $\omega_B = \frac{qcB}{W_{нач}}$

$v_y = -v_{нач}\sin(\omega_B t)$

$$\omega_B = \frac{qcB}{W_{нач}}\cdot\frac{mc^2}{mc^2} = \frac{mc^2}{W_{нач}}\left(\frac{qB}{mc}\right) = \omega_B^{кл}\cdot\frac{1}{\gamma}$$

Получим ур-я для координат:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \dfrac{v_{нач}}{\omega_B}\sin(\omega_B t) \\ y(t) = y_0 + \dfrac{v_{нач}}{\omega_B}\cos(\omega_B t) \end{cases}$$



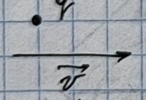
→ сдвинутая окружность с центром в (x_0, y_0)

с $r_0 = \frac{v_{нач}}{\omega_B}$

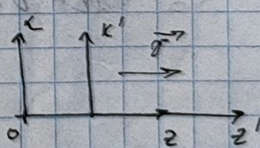
Сравним с кл. мех: $r_0 = \frac{v_{нач}}{\omega_B} = \gamma\frac{v_{нач}}{\omega_B^{(кл)}} = \gamma r_0^{(кл)} > r_0^{(кл)}$

Поля, создаваемые движущимися зарядами

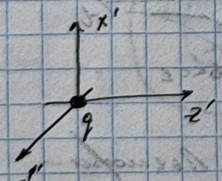
1) Заряд, движущийся с постоянной ск-ю



Можно перейти в с.о. связ. с зарядом т.е. в K' заряд покоится, тогда:



$$\varphi' = \frac{q}{r'}$$



$$\vec{E}' = -\nabla'\varphi' = \frac{q\left(x'\vec{x}_0 + y'\vec{y}_0 + z'\vec{z}_0\right)}{r'^3}$$

Преобразуем пот. и координаты

$x' = x$

$y' = y$

$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\Rightarrow r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - vt)^2}{1-\beta^2}} = g(x,y,z,t)$$

vt — z_0 координата заряда

$$\Rightarrow z' = \frac{(z - z_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\vec{E}' = \underbrace{\frac{q}{r'^3}\left(x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0\right)}_{\vec{E}'_\perp} + \underbrace{\frac{q}{r'^3}z'\vec{z}_0}_{\vec{E}'_\parallel}$$

$$\vec{E}_\parallel = \vec{E}'_\parallel\,; \quad \vec{E}_\perp = \frac{\vec{E}'_\perp - \frac{1}{c}\left[\vec{v}\times\vec{B}'_\perp\right]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$\vec{B}'_\perp = 0$ т.к. в с.о. связ. с зар. он не движется => поля не создаёт.

В итоге получим:

$$\vec{E}_{\parallel}' = \frac{q}{g^3}\cdot\frac{z - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{z}_0 \; ; \quad \vec{E}_{\perp}' = \frac{q}{g^3}\frac{(x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}' = \frac{q\vec{R}}{g^3\sqrt{1-\beta^2}}$$

Запишем преобр-е магнитного поля

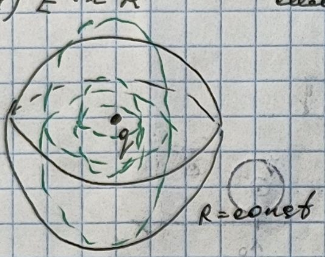
$$\vec{B}_{\parallel}' = \vec{B}_{\parallel}$$

$$\vec{B}_{\perp}' = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c}[\vec{V}\times\vec{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

$\Rightarrow$ можно убрать значок $\perp$ $\Rightarrow$ $\vec{B}_{\parallel}' = \vec{B}_{\parallel} = 0$, $\vec{B} = \frac{1}{c}[\vec{V}\times\vec{E}]$

Следствия:

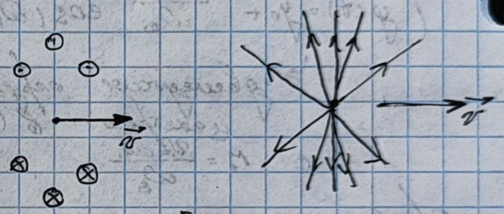
1) $\vec{E} \sim \vec{R}$ — силовые линии поля $\perp$ пов-ти сферы $R = const$.

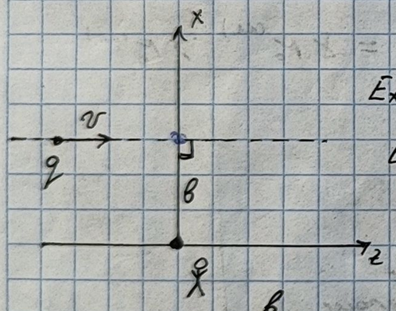


пов-ть $g = const$ — $x^2 + y^2 + \frac{(z-Vt)^2}{1-\beta^2} = const$

$\to$ поле неравномерно распр-но вокруг заряда.

$$B \sim \frac{V}{c}E < E$$



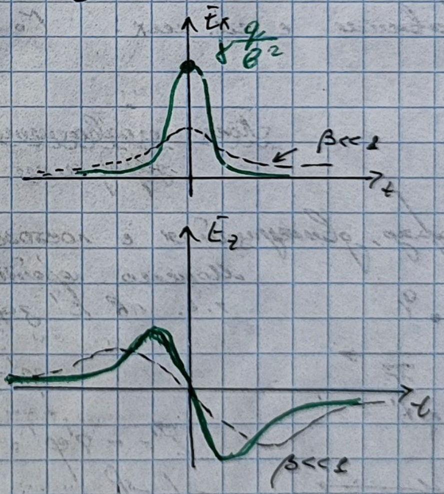


$$\Delta t \sim \frac{b}{V\gamma}$$

$$E_x = \frac{qb}{g^3\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E_z = -\frac{qVt}{g^3\sqrt{1-\beta^2}}$$

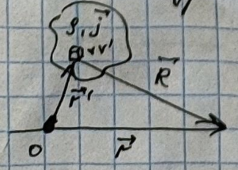
$$g = \sqrt{b^2 + \frac{(Vt)^2}{1-\beta^2}}$$



2) Поле произвольно движущегося заряда (потенциалы Лиенара-Вихерта).

Пусть известна траектория движ. заряда $\vec{r}_0(t)$.

Было в курсе ЭД: $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ ← есть запазд. φ^0 потенц.



$$\varphi(\vec{r}, t) = \iiint \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R}\, dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\iiint \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R}\, dV'$$

Если вспомнить четырёхвектора:

$$\overleftrightarrow{A} = (\vec{A}, i\varphi) \quad , \quad \overleftrightarrow{j} = (\vec{j}, ic\rho)$$

$$A_i = \frac{1}{c}\iiint_V \frac{j_i(\vec r', t - \frac{R}{c})}{R}\, dV' = \frac{1}{c}\iiint_V \int_{-\infty}^{t} \frac{j_i(\vec r', t')}{R}\,\delta\left(t' - \left(t - \frac{R}{c}\right)\right) dV'\, dt'$$

в силу принципа причинности.

Заряд в точке: $\rho(\vec r', t') = q\,\delta(\vec r' - \vec r_0(t'))$

$j_\alpha = v_\alpha \rho$; $j_i = q v_i\, \delta(\vec r' - \vec r_0(t'))$

$v_i = (\vec v, ic)$ — не 4х вектор, просто обозначение.

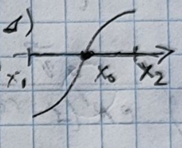
Дело в том, что δ размерная величина $\delta \sim \frac{1}{dx\cdot dy\cdot dz}$.

$$A_i = \frac{1}{c}\iiint_V \int_{-\infty}^{t} \frac{q v_i(t')}{R}\,\delta(\vec r' - \vec r_0(t'))\,\delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right) dV'\, dt' =$$

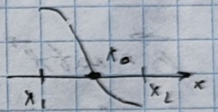
$$= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} \frac{q v_i(t')}{R(t')}\,\delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) dt' \quad ; \quad \vec R(t') = \vec r - \vec r_0(t')$$

Как брать такие интегралы:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(f(x))\, dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = y \\ dy = dx \cdot \frac{df}{dx} \end{array} \right\} = \int_{f(x_1)}^{f(x_2)} \frac{\delta(y)}{\frac{df}{dx}}\, dy =$$

1) 

$= \frac{1}{\frac{df}{dx}}\Big|_{x=x_0}$

2) 

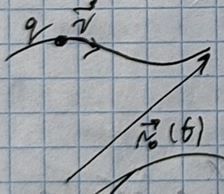
$= -\frac{1}{\frac{df}{dx}}\Big|_{x=x_0}$

Можно аналогично пок-ть:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,\delta(f(x))\, dx = g(x_0)\cdot \frac{1}{\left|\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}}$$

В нашем случае:

$$f(t') = t' - t + \frac{R(t')}{c}, \quad f(t^*) = 0$$



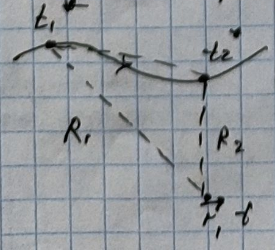
t^* — поле в точке с коорд. $\vec r$ в момент времени t, опр. положением и ск-ю заряда в момент времени t^* (когда он находился в точке $\vec r_0(t)$)

$\vec r_0$ — "световая точка"

Пустим в опр. времени волна будет расходиться а e будет двигаться в опр. направлении.

=> ~~волн~~ если ск-ть e более догонит e.

Возникает вопрос: сколько таких точек.



$$t_1^* - t + \frac{R_1}{c} = 0$$

$$t_2^* - t + \frac{R_2}{c} = 0$$

$$t_2^* - t_1^* = \frac{R_1 - R_2}{c}$$

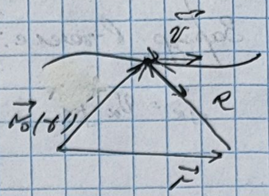
$$c = \frac{R_1 - R_2}{t_2^* - t_1^*} < \frac{L}{t_2^* - t_1^*} = v_{ср}$$?

противоречие.

$\Rightarrow$ Световая точка всегда $\exists$, причём единственная.

$$\frac{df(t')}{dt'} = \frac{d}{dt'}\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) = 1 + \frac{1}{c}\frac{dR(t')}{dt'}$$

введём вектор $\vec n = \frac{\vec R}{R}$



$$\frac{df}{dt'} = 1 - \frac{1}{c}(\vec v, \vec n)$$

$$\Rightarrow \quad A_i = \frac{1}{c}\left\{\frac{q v_i}{R\left(1 - \frac{1}{c}(\vec v \cdot \vec n)\right)}\right\}_{t^*}$$

$\{\ \}_{t^*}$ – обозначим, что величина в скобках вычисляется в момент времени $t' = t^*$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \left\{\frac{q}{R\left(1 - \frac{(\vec v \cdot \vec n)}{c}\right)}\right\}_{t^*}$$

$$\vec A = \left\{\frac{q \vec v}{cR\left(1 - \frac{(\vec v \cdot \vec n)}{c}\right)}\right\}_{t^*}$$

– потенциалы Льенара – Вихерта.

$$\vec B = \operatorname{rot} \vec A, \quad \vec E = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t}$$

Без док-ва:

$$\vec E = q\underbrace{\left\{\frac{(1-\beta^2)(\vec n - \vec\beta)}{R^2\left(1 - \frac{v_R}{c}\right)^3}\right\}_{t^*}}_{\mathrm{I}} + q\underbrace{\left\{\frac{[\vec n, [\vec n - \vec\beta, \dot{\vec\beta}]]}{cR\left(1 - \frac{v_R}{c}\right)^3}\right\}_{t^*}}_{\mathrm{II}}$$

$$\vec B = [\vec n \times \vec E], \quad \vec\beta = \frac{\vec v(t')}{c}, \quad v_R = (\vec v \cdot \vec n)$$

Обозначим слагаемые:

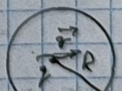
$$\vec E = \vec E_{\mathrm{I}} + \vec E_{\mathrm{II}}; \quad \vec B = \vec B_{\mathrm{I}} + \vec B_{\mathrm{II}}$$

I) $E_{\mathrm{I}} \sim \frac{1}{R^2}$, E_{I} – присутствует даже если заряд движ. равномерно ($\dot{\vec v} = 0$)

II) $\vec E_{\mathrm{II}} \sim \dot{\vec\beta}$; $\vec E_{\mathrm{II}} \sim \vec B_{\mathrm{II}} \sim \frac{1}{R}$, $|\vec E_{\mathrm{II}}| = |\vec B_{\mathrm{II}}|$, $\vec E_{\mathrm{II}} \perp \vec B_{\mathrm{II}} \perp \vec n$ – следу-т только если $\dot{\vec v} \neq 0$

~ похожее на сферическую волну.

$\Rightarrow$ $\vec E_{\mathrm{II}}$, $\vec B_{\mathrm{II}}$ – поле излучения $\rightarrow$ $\vec E_{изл.}$, $\vec B_{изл.}$



$E_{\mathrm{I}} \sim B_{\mathrm{I}} \sim \frac{1}{R^2}$ $\Rightarrow$ вектор Пойнтинга: $S_{\mathrm{I}} \sim \frac{1}{R^4}$

Тогда поле излучения движущегося заряда:

$$\vec E_{изл.} = \frac{q}{c}\left\{\frac{[\vec n, [\vec n - \vec\beta, \dot{\vec\beta}]]}{R\left(1 - \frac{v_R}{c}\right)^3}\right\}_{t^*}$$

19.04.23г. Энергия движ. заряда:

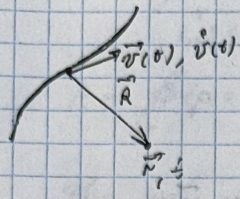
$$\frac{\Delta W}{\Delta t} \sim S \cdot R^2 \sim (E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{II}})(B_{\mathrm{I}} + B_{\mathrm{II}})R^2 \sim E_{\mathrm{II}} B_{\mathrm{II}} \cdot R^2$$

=> т.к. мы опр-ем поток энергии

=> $\vec E_{II}$, $\vec B_{II}$ — поля излучения.

$$\vec E_{изл} = \frac{q}{c}\left\{\frac{[\vec n,[\vec n-\vec\beta,\dot{\vec\beta}]]}{R(1-(\vec\beta\cdot\vec n))^3}\right\}_{t^*}, \quad \vec B_{изл} = [\vec E_{изл}\times\vec n]$$

$$\vec\beta = \frac{\vec v}{c}; \quad \dot{\vec\beta} = \frac{\dot{\vec v}}{c}, \quad \vec n = \frac{\vec R}{R}$$



$$t^* - t + \frac{R(t^*)}{c} = 0$$

Излучение движ. зарядов.

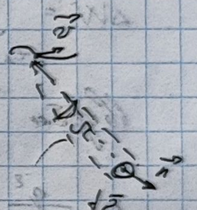
1) Движение с малой ск-ю. Дипольное излучение, формула Лармора.

$\beta \ll 1$, $v \ll c$ => $\vec E_{изл} = \frac{q}{c}\frac{[\vec n,[\vec n,\dot{\vec\beta}]]}{R}$

+ пренебрегаем запаздыванием.

Для изучения излучения нужно найти распределение потока энергии.

$$\vec S = \frac{c}{4\pi}|\vec E_{изл}|^2\vec n$$



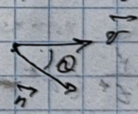
Энергия, проходящая через др. площадку в ед. времени:

$$dP = (\vec S\cdot d\vec\Sigma), \quad d\vec\Sigma = d\Sigma\,\vec n$$

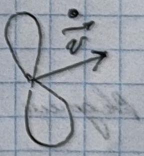
Ω — телесный угол. => $d\Sigma = R^2\,d\Omega$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}|\vec E_{изл}|^2R^2$$

мощность в ед. телесного угла. — ДН.



θ — угол между ускорением и напр. на точку наблюдения.



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{q^2}{c^2}\cdot\frac{\dot v^2}{c^2}\sin^2\theta \Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\dot v^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow P_0 = \oint_{4\pi}\frac{dP}{d\Omega}\,d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{q^2}{4\pi c^3}\dot v^2\sin^2\theta\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$\Rightarrow \left\{P_0 = \frac{2}{3}\frac{q^2\dot v^2}{c^3}\right\} \quad \text{ф-ла Лармора}$$

$$P_0 = \frac{2}{3c^3}(q\dot{\vec v}^2) = \frac{2}{3c^3}\Big(\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{q\vec r}_{\vec p}\Big)^2 = \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec p}^2$$

$\vec p$ — дип. момент

а) Возможно ли дип. излучение в замкн. системе с частицами одного сорта, тогда получаем дип. момент:

$$\vec p = \sum_i q\vec r_i = \frac{q}{m}\sum_i m\vec r_i = \frac{q}{m}\left(\frac{\sum_i m\vec r_i}{\sum_i m}\right)\cdot\sum_i m = \text{const}.$$

коорд. центра масс; в случае замкн. системы.

=> излучение в замкн. системе невозможно.

б) рассмотрим частный случай когда координата заряда меняется по гармон. закону:

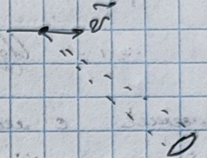
$$\vec r_0(t) = \vec l \cos(\omega t)$$

$$\bar P' = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3} l^2 \cdot \overline{\cos^2(\omega t)} \cdot \omega^4 = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3}$$ ← как для излучения диполя.

2) Тормозное излучение.

β - неб. любая, но $\vec\beta \parallel \dot{\vec\beta}$ преобр. ф-лу:

$$\vec E_{изл} = \frac{q}{c}\left\{\frac{[\vec n,[\vec n,\dot{\vec\beta}]]}{R(1-(\vec\beta\cdot\vec n))^3}\right\}_{t^*}$$



Время, где принимаем излуч. может не совп. с временем излучения.

ΔW – энергия, которая проходит через ед. пл., расп. в точке наблюдения за интервал времени $[t_1, t_2]$

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} (\vec S\cdot\vec n)\, dt = \frac{q^2}{4\pi c}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{[\vec n,[\vec n,\dot{\vec\beta}]]}{R(1-(\vec\beta\vec n))^3}\right\}^2_{t^*} dt =$$

Введём замену: $t_{1,2} = t^*_{1,2} + \frac{R(t^*_{1,2})}{c}$

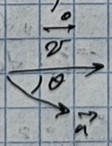
$$= \frac{q^2}{4\pi c}\int_{t_1^*}^{t_2^*}\frac{[\vec n,[\vec n,\dot{\vec\beta}]]^2}{R^2(1-\vec\beta\cdot\vec n)^6}\frac{dt}{dt^*}\cdot dt^* = \int_{t_1^*}^{t_2^*} \Pi\cdot dt^*$$

$$\Rightarrow dP = \Pi\cdot R^2\, d\Omega$$

$$\frac{dt}{dt^*} = \frac{d}{dt^*}\left(t^* + \frac{R(t^*)}{c}\right) = 1 - \frac{(\vec v\cdot\vec n)}{c} = 1-\vec\beta\cdot\vec n$$

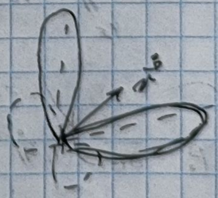
$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\frac{[\vec n,[\vec n,\dot{\vec\beta}]]^2}{(1-\vec\beta\cdot\vec n)^5}$$

Введём аналогично угол:



$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\dot v^2\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

Если будет двигаться с реляг. великой ск-тью:



$$\cos\theta_{max} = \frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta}$$

Рассмотрим случай, когда $\beta \sim 1$:

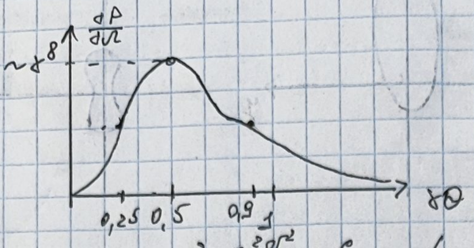
$$\frac{W}{mc^2} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \gg 1.$$

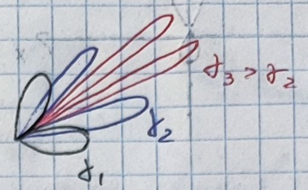
Если $\theta \ll 1$: $\sin\theta \approx \theta$

$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

в итоге получим:

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{8q^2\dot{v}^2}{\pi c^3}\gamma^8 \frac{(\theta\gamma)^2}{(1+(\theta\gamma)^2)^5}$$

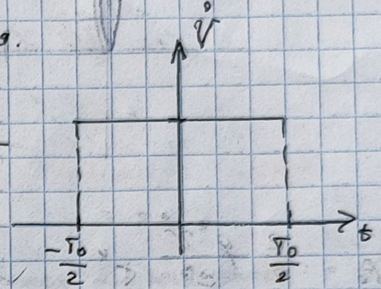


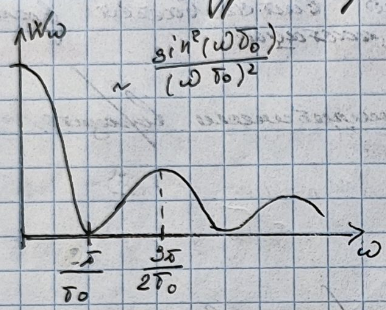


$P_0 = \oint_{4\pi} dP = \frac{2}{3}\frac{q^2\dot{v}^2}{c^3}\gamma^6$ – при $\forall \gamma$ – мощность изл. увеличив. больше.

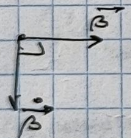
Что со спектром тормозящего излучения.
Пусть ускоряется в интервале $[0, \tau_0]$

Делаем Фурье образ:





3) Синхротронное излучение.



$$\vec{E}_{изл} = \frac{q}{c}\left\{\frac{[\vec{n},[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]]}{R(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\right\}_{t^*} \qquad \dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$$

можно показать, что ДН будет опис-ся аналогично:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\frac{[\vec{n},[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]]^2}{(1-(\vec{\beta}\cdot\vec{n}))^5}$$

$$[\vec{n},[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]] = (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}(1-(\vec{\beta}\cdot\vec{n}))$$

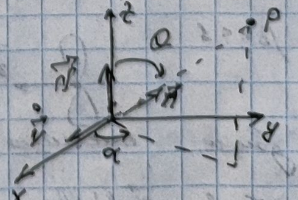
$$[\vec{n},\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]^2 = \dot{\beta}^2(1-(\vec{n}\cdot\vec{\beta}))^2 - (\dot{\vec{\beta}}\vec{n})^2(1-\beta^2)$$

Если всё упрощать получим следующее выражение:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2\dot{\beta}^2}{4\pi c}\cdot\frac{1}{[1-(\vec{n}\vec{\beta})]^3}\cdot\left(1-\frac{(\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{n})^2(1-\beta^2)}{\dot{\beta}^2(1-(\vec{n}\vec{\beta}))^2}\right)$$

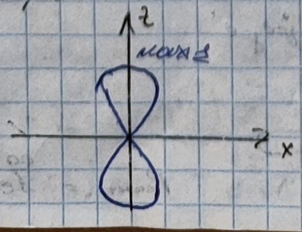
Результирующее выражение:

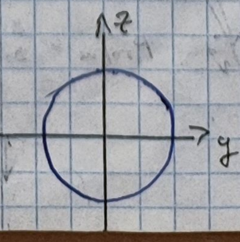
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\cdot\frac{1}{[1-\beta\cos\theta]^3}\left(1-\frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\alpha}{(1-\beta\cos\theta)^2}\right)$$

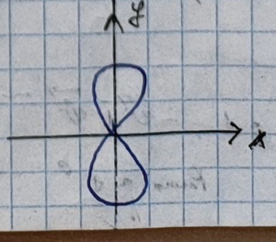


Рисуем в разных пл-ях.

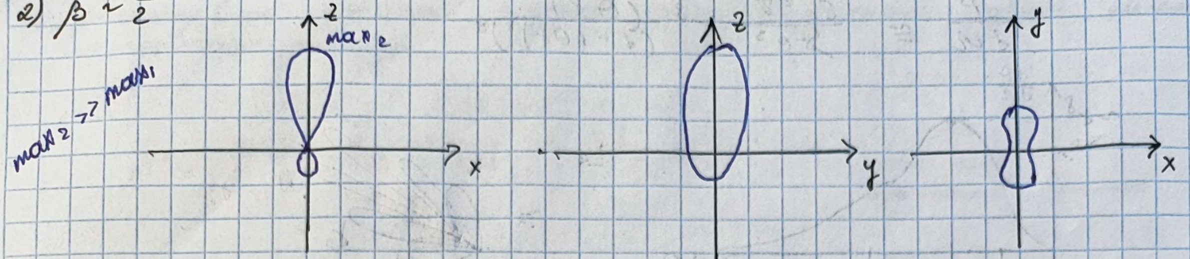
1) $\beta \ll 1$



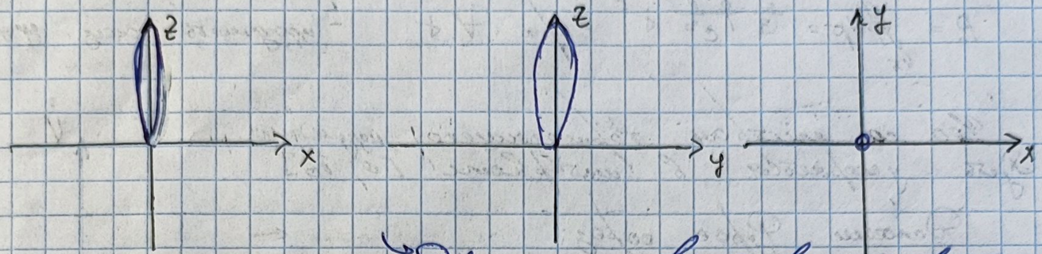




2) $\beta \sim \frac{1}{2}$



3) $\beta \sim 1$

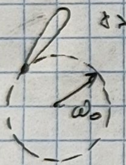


→ ДН сильно вытягивается вдоль движения частицы.

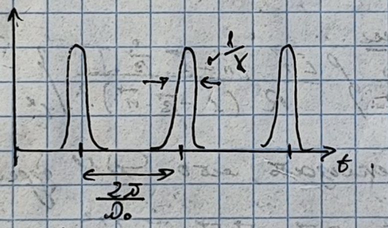
$$P_0 = \frac{2}{3}\frac{q^2 \dot{v}^2}{c^3}\gamma^4$$ ← можно также аналитически вывести.

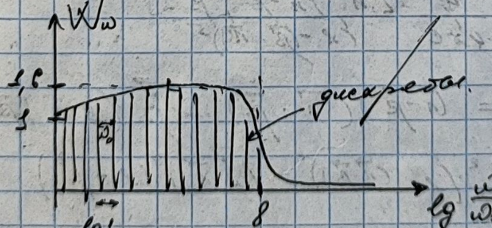
$$P_{дип} \ll P_{синх} \ll P_{торм}$$

Спектр синхротронного излучения.



$\gamma >> 1$ ♀ - набл. будет видеть лишь короткие вспышки излучения





26.04.23г.

Выжимка прошлой лекции:

1) $\beta << 1$

$$P_{дип} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\dot{v}^2$$

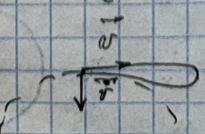
движ. частица излучает.

2) $\beta \lesssim 1$, $\vec{v} \uparrow\uparrow \dot{\vec{v}}$

$P_{max} \sim \gamma^8$

$$P_{торм} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\dot{v}^2\gamma^6$$

3) $\beta \lesssim 1$, $\vec{v} \perp \dot{\vec{v}}$

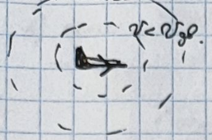


$P_{max} \sim \gamma^6$

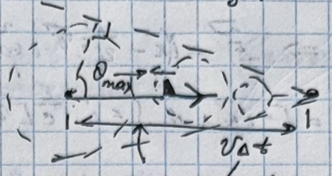
$$P_{синх} = \frac{2q^2}{3c}\dot{v}^2\gamma^4$$

Излучение Вавилова-Черенкова.

~~Аналогия~~ с истреб.



Если $v > v_{зв}$.



$\Rightarrow \cos\theta_{max} = \dfrac{v_{зв}}{v}$

успел раньше распр. → может возникнуть ударная волна.

Смотрим заряд в среде, со ск-по $v > v_ф$.

ε $\quad q \bullet \xrightarrow{\vec v}$ $\qquad v > v_ф = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$

Более строго в статье „Тамм, Франк – „Когерентное излуч. быстрого электрона в среде".

Запишем ур-я для векторного и скалярного потенциала:

$$\Delta\vec A - \frac{1}{v_ф^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec A = -\frac{4\pi}{c}\vec j$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v_ф^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

$$\rho = q\,\delta(\vec r - \vec v t) \quad \Rightarrow \quad \vec j = \vec v\rho = \vec v q\,\delta(\vec r - \vec v t)$$

Более хитро: можно разложить в интеграл Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\tilde f(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \quad ; \quad \tilde f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Разложим источники и по времени, и по пространств. коорд.

$$\rho = \iiiint_{-\infty}^{+\infty}\tilde\rho(\omega,\vec k)e^{i(\omega t - \vec k\vec r)}\,d\omega\, d^3\vec k$$

по сути разл. по плоским волнам.

$$\tilde\rho(\omega,\vec k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iiiint_{-\infty}^{+\infty}\rho(\vec r,t)e^{-i(\omega t - \vec k\vec r)}\,dt\,d^3\vec r =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} q\, e^{i(\omega - \vec k\vec v)t}\,dt = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha t}\,dt = 2\pi\delta(\alpha)\right\} =$$

$$\Rightarrow \tilde\rho = \frac{1}{(2\pi)^3}q\,\delta(\omega - \vec k\vec v) \; ; \; \tilde{\vec j} = \vec v\tilde\rho$$

В силу линейности ур-ий Максвелла должно быть вып-но ур-е непр-ти:

$$\frac{\partial\tilde\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\tilde{\vec j} = 0 \quad \Rightarrow \quad -i\omega\tilde\rho + (i\vec k, \vec v\tilde\rho) = 0 \; ?$$

Что если $\vec A$ и φ представим в виде аналогичн. интегралов:

$$\vec A = \iiiint\tilde{\vec A}e^{i(\omega t - \vec k\vec r)}\,d\omega\,d^3\vec k, \qquad \varphi = \ldots$$

Тогда упрощается волновые ур-я:

$$\left(-k^2 - \frac{1}{v_ф^2}(-\omega^2)\right)\tilde{\vec A} = -\frac{4\pi}{c}\tilde{\vec j}$$

$$\left(\frac{\omega^2}{v_ф^2} - k^2\right)\tilde\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde\rho$$

Тогда получим:

$$\tilde{\varphi} = \frac{4\pi q}{\varepsilon(2\pi)^3}\frac{\delta(\omega-\vec{k}\vec{v})}{k^2-\frac{\omega^2}{v_\varphi^2}} \quad ; \quad \tilde{\vec{A}} = \frac{\varepsilon}{c}\vec{v}\tilde{\varphi}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \tilde{\vec{E}} = i\left(\vec{k} - \frac{\omega}{v_\varphi^2}\vec{v}\right)\tilde{\varphi}$$

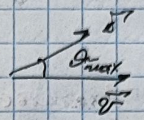
$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} \Rightarrow \tilde{\vec{B}} = [-i\vec{k}, \tilde{\vec{A}}] = i\frac{\varepsilon}{c}[\vec{v}\times\vec{k}]\tilde{\varphi}$$

Из него видно, что могут сущ-ть волны $\omega = \vec{k}\vec{v}$.
Из знаменателя:

$$k = \frac{\omega}{v_\varphi}$$ ← подставим.

$$kv_\varphi - (\vec{k}\vec{v}) = 0$$

$$\left(\frac{\vec{k}\vec{v}}{kv_\varphi}\right) = 1$$



$$\cos\theta_{max} = \frac{v_\varphi}{v}$$

Как устроено поле такой частицы?

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v_\varphi^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho = \frac{4\pi}{\varepsilon}q\,\delta(\vec{r}-\vec{v}t)$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{v_\varphi^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{v}\rho = \frac{4\pi}{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}}\cdot\frac{q}{\sqrt{\varepsilon}}\vec{v}\,\delta(\vec{r}-\vec{v}t)$$

$$\Rightarrow \Delta\sqrt{\varepsilon}\varphi - \frac{1}{v_\varphi^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sqrt{\varepsilon}\varphi = -\frac{4\pi q}{\sqrt{\varepsilon}}\delta(\vec{r}-\vec{v}t)$$

Если им. $\sqrt{\varepsilon}\varphi \to \varphi$, $\frac{q}{\sqrt{\varepsilon}} \to q$, $v_\varphi \to c$ ← аналогично полю заряда в вакууме

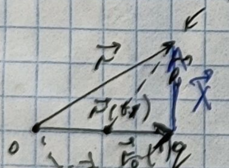
было

$$\varphi(\vec{r},t) = \left\{\frac{q}{R\left|1-\frac{\vec{v}\vec{n}}{c}\right|}\right\}_{t^*}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r},t) = \left\{\frac{q}{\varepsilon R\left|1-\frac{\vec{v}\vec{n}}{v_\varphi}\right|}\right\}_{t^*}$$

меряем в м. t

Т.е. хотим найти поле в нек. точке $\vec{r}$, от частицы, движ. по траект. $\vec{r}_0(t)$ т.к. свет распр. с конечной ск-ю



$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t^*)$$

$$t^* = t - \frac{R(t^*)}{v_\varphi} \Rightarrow \vec{r}_0(t) = \vec{v}t$$

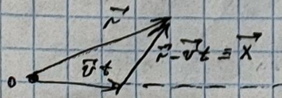
$$\Rightarrow t - t^* = \frac{|\vec{r}-\vec{v}t^*|}{v_\varphi} = \frac{|\vec{r}-\vec{v}t^* + \vec{v}t - \vec{v}t|}{v_\varphi}$$

$$\Rightarrow t - t^* = \frac{|\vec{r}-\vec{v}t + \vec{v}(t-t^*)|}{v_\varphi} =$$

вектор с нач. в р-т. набл. $\vec{X}$

$$= \frac{\sqrt{X^2 + 2\vec{v}\vec{X}(t-t^*) + v^2(t-t^*)^2}}{v_\varphi}$$

t^* - момент времени, что в который д. испустить фотон и долетит в т. набл. Т.е. время долёта до т. набл. фотона.

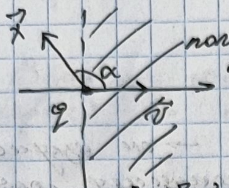


Хотим найти t^*

Решая ур-е: $t - t^* = \dfrac{-\vec{x}\cdot\vec{v} \pm \sqrt{(\vec{x}\cdot\vec{v})^2 - (v^2 - v_\varphi^2)x^2}}{v^2 - v_\varphi^2}$

1) если $v < v_\varphi$: $\sqrt{\dots} > 0$ кажется, что 2 корня, но t^* не м. б. $> t$ => всего ___1 корень.___ (будущ. раньше не наступит)

2) если $v > v_\varphi$: чтобы $t^* < t$ – возможно если $\vec{x}\cdot\vec{v} < 0$

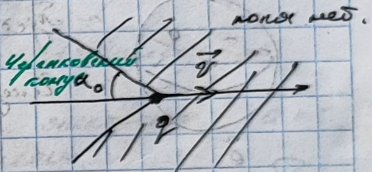


Смотрим дискриминант: < 0

$(\vec{x}\cdot\vec{v})^2 - (v^2 - v_\varphi^2)\,x^2 < 0$ => вводя угол α

=> $\cos^2\alpha < 1 - \dfrac{v^2}{v_\varphi^2}$; $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ => $\cos\alpha > -\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{v_\varphi^2}}$ – нет действ. решений.

т.е. огр-ся конус, вне которого поля быть не может. При $v > v_\varphi$ получили огр. пр-во, где есть поле.



В знаменателе:

$$\left\{R\left|1 - \frac{\vec{v}\vec{R}}{v_\varphi R}\right|\right\}_{t^*_{1,2}} = \left\{|R| - \frac{\vec{v}}{v_\varphi}\vec{R}\right\}_{t^*_{1,2}} =$$

$$= \begin{cases}(t - t^*_{1,2})\,v_\varphi = |R| \\ \vec{R} = \vec{x} + \vec{v}\,(t - t^*_{1,2})\end{cases} = \frac{1}{v_\varphi}\sqrt{(\vec{x}\cdot\vec{v})^2 - (v^2 - v_\varphi^2)\,x^2} = x\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_\varphi^2}\sin^2\alpha}$$

2 световые точки. т.е. формально

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{2q}{x\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_\varphi^2}\sin^2\alpha}}}$$

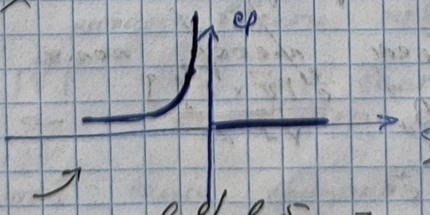
почему 2q? вроде 1 корень !!

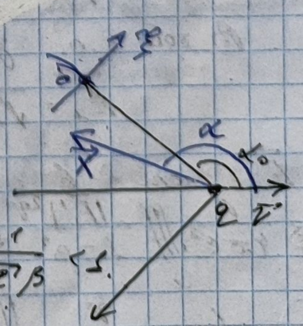
$$\varphi = \left\{\frac{q}{R\left|1 - \frac{\vec{n}\vec{v}}{v}\right|}\right\}_{t_1^*} + \{\dots\}_{t_2^*}$$

Всё аналогично можно сделать для вект. потенциала.

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c}\,\varphi\cdot\varepsilon}$$

По мере удал. от заряда потенциал убывает: $\sim \dfrac{1}{x}$





3) Но поле не может возд. в бес-ть.

$\cos\vartheta_{max} = \dfrac{v_\varphi}{v} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}\,v} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}\,\beta} < 1.$

Черенковское излуч. м. б. при: $\varepsilon > \dfrac{1}{\beta^2}$ ← т.е. в каком-то диап. частот.

2) $\varepsilon(\omega_2) > \varepsilon(\omega_1)$ → $\vartheta_{max\,2} > \vartheta_{max\,1}$

3) $\tilde{\varphi} = \frac{\dots}{n^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2}}$ ← в среде всегда есть потери, поэтому $\varepsilon \in \mathbb{C}$ => там не будет строго нуля.

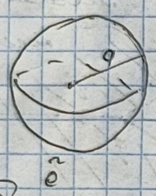
03.05.23г.

Сила реакции излучения.
(сила радиационного трения.)
Теория электромагнитной массы.
электродинамики.

Если ē движется под действием внешнего поля → он излучает сам, т.е. создаётся некоторое противодействие внешнему полю.

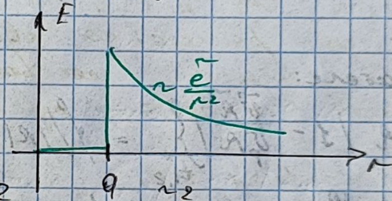
Поле т.з. $\sim \frac{q}{r^2}$ в точке, где заряд, оно → ∞. Представим ē в виде заряженного шара.

1) Классический радиус ē и теория электромагнитной массы



~ Пусть заряд равномерно распределён по сфере.

Чему равно поле?



Посчитаем полную энергию:

$$U_0 = \iiint_V \frac{1}{8\pi} |E|^2 dv = \frac{1}{8\pi} \int_a^\infty 4\pi r^2 \cdot \frac{\tilde{e}^2}{r^4} dr = \frac{\tilde{e}^2}{2a}$$

ē движ. → созд. эл-ое и магн. поле → появл. вектор Пойнтинга. ē должен обладать импульсом. ~~Пусть ē движ.~~

Найдём импульс для поля, кот. создаёт движ. „электрон“ радиуса a.

$$\vec{G} = \iiint \frac{\vec{S}}{c^2} dV = \frac{c}{4\pi c^2} \iiint [\vec{E} \times \vec{B}] dv = G_{эм} \cdot \vec{z}_0$$

Очевидно импульс должен быть колл. по oz

$G_{эм}$ должен зависеть от поперечных к оси z компонент.

$$G_{эм} = \frac{1}{4\pi c} \iiint |[\vec{E}_\perp \times \vec{B}_\perp]| dV \;⊜\; \{\text{раскрываем по век-ому}\} ⊜$$

В той с.о., где ē покоится, преобр. поля по пр. Лоренца:

$$\vec{E}_\perp = \frac{\vec{E}'_\perp}{\sqrt{1-\beta^2}} \; ; \quad \vec{B}_\perp = \frac{\frac{1}{c}[\vec{v} \times \vec{E}'_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ → подставим

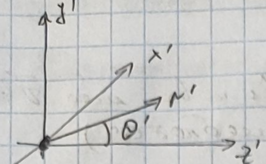
$\vec{E}'$ — поле в с.о. связ. с ē

$$⊜ \frac{1}{4\pi c^2} \iiint \frac{|E'_\perp|^2 v}{1-\beta^2} dV = \{dV = dx\,dy\,dz = dx'dy'\sqrt{1-\beta^2}dz' = \sqrt{1-\beta^2}\, d^3V'\} =$$

лоренцево сокр.

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \cdot \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \iiint |E'_\perp|^2 d^3V'$$

Можно ввести сферическую с.к.



$$E_\perp' = \frac{e}{r'^2} \cdot \sin\theta'$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{эм} = \frac{1}{4\pi c} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \iiint |E_\perp'|^2 d^3V' = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot 2\pi \int\limits_a^\infty \int\limits_0^\pi \frac{\tilde{e}^2}{r^4} \sin^2\theta' \, r^2 \sin\theta' \, dr \, d\theta'$$

$$= \{\text{вычисляем интегралы}\} = \frac{4}{3} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\tilde{e}^2}{2a c^2}$$

Всякое появление имп. связано с энергией → есть энергия → есть масса. Попробуем найти массу ЭМП.

$$\mathcal{E}_{эм} = \frac{4}{3} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\tilde{e}^2}{2ac^2} = \frac{m_{эм} v}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

предположим, что вся масса $\tilde{e}$ связана с его энергией, т.е

$$U_0 = \frac{\tilde{e}^2}{2a} = mc^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\tilde{e}^2}{2ac^2}$$

а если смотреть в $\mathcal{E}_{эм} \to \frac{4}{3}$! $\quad m_{эм} = \frac{3}{4} m_{эл}$

поля, электрона

В класич. ЭД нельзя никак обойти эту проблему. Эта проблема решается квантовой ЭД.

По современным соображениям радиус электрона $a = 0$. Это можно сделать перенормировкой массы.

$$m = m_{эм} + m_{не\,эм}$$

„голая масса" *подробнее у Фейнмана по квант. ЭД.*

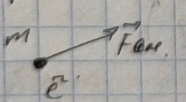
которая наблюдается

Класич. ЭД не может ввести существование точечных зарядов. В класике из $\mathcal{E}_{эм}$, можно найти класич. радиус электрона:

$$\left\{ r_{кл} = \frac{2}{3} \frac{\tilde{e}^2}{mc^2} \right\} \approx 10^{-13} \text{ см}$$

2) Сила радиационного трения (очень необычный вывод).

Рассмотрим нерелятивистский случай $\beta \ll 1$. И пусть есть зар. частица, на которую действует внешняя сила.



$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{вн.} + \vec{F}_{р.тр.}$ т.к. частица движ-ся. → излучает → замедляется

можно ввести новую силу. – радиац. трения

$$P_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\dot{\vec{v}}|^2$$

($\tilde{e}^2$ не важен заряд частицы, мощность излучения)

Работа этой силы связана как раз с ~~раб~~ мощностью излучения:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_{р.тр} \cdot \vec{v}) dt = -\int\limits_{t_1}^{t_2} P_0 \, dt = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{\tilde{e}^2}{c^3} \dot{\vec{v}}^2 dt$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{v}}, \vec{v}) - \vec{v} \cdot \ddot{\vec{v}} + |\dot{\vec{v}}|^2$$

выразим

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec F_{р.тр.}\cdot\vec v)\,dt = \frac{2}{3}\frac{\tilde e^2}{c^3}\left(\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\vec v}\,\vec v\,dt - \underbrace{(\dot{\vec v},\vec v)\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0}\right)$$

Можно представить случай, когда в t_1 и t_2 либо $\vec v = 0$ либо $\dot{\vec v} = 0$ (например как-то ск-ть колеблется)

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\left(\vec F_{р.тр.} - \frac{2}{3}\frac{\tilde e^2}{c^3}\ddot{\vec v},\ \vec v\right)dt = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec F_{р.тр.} = \frac{2}{3}\frac{\tilde e^2}{c^3}\ddot{\vec v}}$$ — спр-во в перенос. случае.

Тогда ур-е движения:

$$m\dot{\vec v} = \vec F_{вн} + \frac{2}{3}\frac{\tilde e^2}{c^3}\ddot{\vec v}$$

$$m\left(\dot{\vec v} - \frac{2}{3}\frac{\tilde e^2}{mc^2}\cdot\frac{1}{c}\ddot{\vec v}\right) = \vec F_{вн}$$

$\tau \equiv \frac{r_{кл}}{c}$ — время за которое свет проходит $r_{кл}$.

(*) $\dot{\vec v} - \tau\ddot{\vec v} = \frac{\vec F_{вн}}{m}$ — пусть внешняя сила действовала и резко исчезла.

Тогда ур-е перепишется:

$\vec a - \tau\dot{\vec a} = 0$ ← если нет внешней силы.

$\vec a = \vec C e^{t/\tau}$ — exp. рост. → такого быть не может.

Но (*) справедливо, только если $\vec F_{р.тр.} \ll \vec F_{вн}$.

Это условие позволяет дет. пределы применимости кл. ЭД.

Рассм-м заряд в заданных полях $\vec E$ и $\vec H$.

$\vec E, \vec H$

$$\Rightarrow \dot{\vec v} = \underbrace{\frac{\tilde e}{m}\vec E + \frac{\tilde e}{mc}[\vec v\times\vec B]}_{\text{— сила Лоренца}} + \underbrace{\tau\ddot{\vec v}}_{\text{— радиац. тр.}}$$

$\tilde e, m$

при условии $\tau\vec F \ll F_л$, можно исп-ть метод послед. приближений. Тогда отличие $\tau\ddot{\vec v}$

$$\ddot{\vec v} = \frac{\tilde e}{m}\dot{\vec E} + \frac{\tilde e}{mc}[\dot{\vec v}\times\vec B] + \frac{\tilde e}{mc}[\vec v\times\dot{\vec B}]$$

Пусть в выбранной с.о. $\vec v = 0$ в данный момент времени.

$$\vec F_{р.тр.} = m\tau\left(\frac{\tilde e}{m}\dot{\vec E} + \frac{\tilde e}{mc}[\dot{\vec v}\times\vec B]\right) = m\tau\left(\frac{\tilde e}{m}\dot{\vec E} + \frac{\tilde e^2}{m^2c}[\vec E\times\vec B]\right)$$

Каждое слагаемое должно быть мало по сравнению с $F_{вн} = \tilde e\vec E$

$\Rightarrow \tau\dot E \ll E$ — предположим поля периодич.

$\tau\omega E \ll E$

$\Rightarrow \tau\omega \ll 1 \Leftrightarrow r_{кл} \ll \frac{c}{\omega} \sim \lambda$

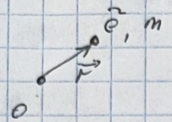
Кл. ЭД описывает поля, для которых: $\boxed{\lambda \gg r_{кл}}$

Есть второе слагаемое:

$$\frac{\tilde e^2\tau}{mc}[\vec E\times\vec B] \ll \tilde e\vec E \Rightarrow \boxed{B \ll \frac{c^4 m^2}{\tilde e^3}}$$ (?)

3) Радиационное затухание собственных колебаний.

Рассмотрим простую модель: электрон вращается вокруг некоторого е.р



$\vec F_{вн} = -k\vec r$ — аналог. ур. [illegible] ($\tilde e$ на пружинке)

$$m\ddot{\vec r} = -k\vec r + \tau m\dddot{\vec r} \quad \Big| :m$$

$$\ddot{\vec r} + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega_0^2}\vec r - \tau\dddot{\vec r} = 0$$

Без радиационного трения $\Rightarrow \vec r = \vec C e^{i\omega_0 t}$

Если есть радиационное трение: $\vec r = \vec r_0(t)\, e^{i(\omega_0 t)}$

$$\dddot{\vec r} = \left(\vec r_0(t)\, e^{i\omega_0 t}\right)''' = \left\{ \begin{array}{c} \text{аккуратно посчитав} \\ \text{пренебр. произв. } \dot{\vec r}_0 \end{array} \right\} \approx -\omega_0^2\dot{\vec r}$$

по духу ВКБ прибл.

Тогда приближённое уравнение движ.:

$$\ddot{\vec r} + \omega_0^2\vec r + \gamma\dot{\vec r} = 0, \quad \gamma = \omega_0^2\tau$$

— ур-е затухающего гармон. осциллятора.

$$\Rightarrow \vec r = \vec R_0 e^{i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2}t}$$

— ампл. со временем будет убывать.

$\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}^*$

Найдём среднюю за период энергию системы:

$$\overline{W} = \overline{W}_{кин} + \overline{W}_{пот} = 2\overline{W}_{кин} = 2\frac{m}{2}\overline{v^2} = \{\text{в итоге}\} = \frac{m\omega_0^2}{2}|R_0|^2 e^{-\gamma t} \quad ?$$

— энергия exp. убывает, время опр-ся пар-ом γ.

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\omega_0^2\tau}$$

— по духу обрат. естеств. времени жизни.

Если пересчитать в квант. мех. получим то же самое

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = -\gamma\overline{W} = -P_0$$

← можно убедиться [illegible]

Каков спектр колебаний?

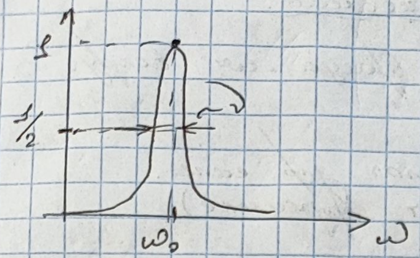
$$\vec r = \vec R_0 e^{i\omega_0 t - \frac{\gamma t}{2}}$$

$$\vec v \sim e^{i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2}t} \Rightarrow \sim \vec j \text{, пл-ть тока.}$$

Можем найти спектр тока. (а этот спектр связан со спектром поля.)

$$j(\omega) \sim \int e^{i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega t}\, dt \sim \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2}} \sim E(\omega)$$

$$\Rightarrow |E|^2 \sim \frac{1}{(\omega_0-\omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$



10.05.23. **Вынужденные колебания. Сечение рассеяния.**

Рассмотрим колебания заряда на пружинке во внешнем поле приблиз. для нерелят. случая:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} - \tau \dddot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\vec{E_0} e^{i\omega t} \; \cancel{+ \frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{B}]} \qquad v \ll c.$$

Рассмотрим установившиеся колебания:

$\vec{r} = \vec{R_0} e^{i\omega t}$ → подстановкой получим $\vec{R_0}$ амплитуда

$$-\omega^2 \vec{R_0} + \omega_0^2 \vec{R_0} + i\omega^3 \tau \vec{R_0} = \frac{e}{m}\vec{E_0} \Rightarrow \vec{R_0} = \frac{e}{m}\vec{E_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

где $\gamma = \omega^2 \tau$

Получается заряд движется ускоренно → значит он должен излучать по ф-ле Лоренца:

$$\overline{P_0}^t = \frac{2}{3}\frac{e^2 |\dot{v}|^2}{c^3} = \frac{1}{3}\frac{e^4 \omega^4}{c^3 m^2} E_0^2 \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

Введём сечение рассеяния:

по опр-ию $\Sigma = \frac{\overline{P_0}^t}{\overline{S_0}^t}$ — отношение полной изл. мощности к вектору Пойнтинга.

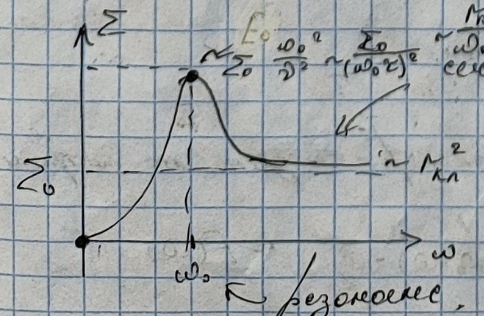
$$[\Sigma] = \frac{[\text{мощн}]}{[\text{мощн}/\text{пл.}]} \sim [L^2]$$

В нашем случае:

$$\overline{S_0}^t = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma = \Sigma_0 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \text{ где } \Sigma_0 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2$$

Нарисуем зависимость от ω:



$\sim \Sigma_0 \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} \sim \frac{\Sigma_0}{(\omega_0 \tau)^2} \sim \frac{r_{кл}^2 \cdot c^2}{\omega_0^2 r_{кл}^2} \sim \left(\frac{c}{\omega_0}\right)^2 \sim \lambda^2$

сечение рассеяния у свободного несвязанного e^-, пока будто $\omega_0 = 0$

$\sim r_{кл}^2$

$\Sigma_0 \sim r_{кл}^2$ — его называют томсоновское сечение рассеяния.

← резонанс.

Основы ЭД движущихся сред.

Запишем в начале ур-я Максвелла:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}_м = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}_м}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}_м = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_м}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_м$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E}_м = 4\pi\rho$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B}_м = 0$$

← для микроскопич. системы, связанной с зарядами в самой среде.

При усреднении по беск. малому физ-ому объёму:

$$\overline{\vec{j}_м}^V = c\,\mathrm{rot}\,\vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$\overline{\rho_м}^V = -\mathrm{div}\,\vec{P} + \rho$$

$\vec{M}$ – вектор намагниченности.
$\vec{P}$ – вектор поляризации.

Можно ввести доп. вектора:

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \quad ; \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}.$$

В итоге получим знакомые нам ур-я Максвелла.

$$① \quad \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$② \quad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$③ \quad \mathrm{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho$$

$$④ \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Поменяется ли вывод при релятив. случае? Нет, вид останется прежним.

Но! Величины полей могут преобр. при переходе от одной ИСО к другой

1) Ковариантная форма СУМ в среде. ①-④ при пер. не поменяли формы

$$①\text{-}④ \Rightarrow \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_e} + \frac{\partial F_{ei}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ke}}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \text{так и останется}$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

Это нужно для того, что мы фактически знаем законы преобр. полей.

Смотрим ②-③, расписанные с полным током.

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \underbrace{\frac{4\pi}{c}\left(c\,\mathrm{rot}\,\vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right)}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho - 4\pi\,\mathrm{div}\,\vec{P}$$

→ Скомбинируем доп. величину

$$\vec{j}^{(p)} = \left(c\,\mathrm{rot}\,\vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t},\ -ic\,\mathrm{div}\,\vec{P}\right) \sim$$

4х ток) поляризации.

$$\left\{ \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c}j_i \right.$$

$$\vec{j} = (\vec{j}, ic\rho)$$

что-то похожее на ур-я Максвелла

Раз мы можем объединить ток в виде тензора, то и 4х ток поляризации можно представить в виде тензора.

$$j_i^{(p)} = c\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_k} \quad \text{где}$$

$$M_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & iP_x \\ -M_z & 0 & M_x & iP_y \\ M_y & -M_x & 0 & iP_z \\ -iP_x & -iP_y & -iP_z & 0 \end{pmatrix}$$ по сути вывод эквивалентен с прошлым.

M_{ik} – тензор электрической/магнитной поляризации.

⇒ ②,③ ⇒ $\dfrac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \dfrac{4\pi}{c} j_i + 4\pi \dfrac{\partial M_{ik}}{\partial x_k}$

группируем и получим ковариантную форму ур-ий Максвелла

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i}$$

где $G_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix}$ – тензор возбуждений ЭМП

2) Правила преобразований полей в среде.

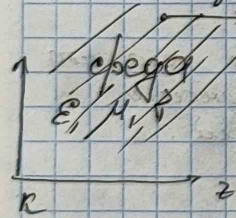
$\vec H$ и $\vec D$ преобр. так же как $\vec B$ и $\vec E$; ← По виду тензоров.

$\vec M$ и $\vec P$ преобр. так же как $\vec B$ и $-\vec E$.

$$\Rightarrow \vec M_\parallel' = \vec M_\parallel, \quad \vec P_\parallel' = \vec P_\parallel$$

$$\vec P_\perp' = \frac{\vec P_\perp - [\frac{\vec v}{c} \times \vec M]}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \vec M_\perp' = \frac{\vec M_\perp + [\frac{\vec v}{c} \times \vec P]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

3) Материальные ур-я для движущихся сред.



Пусть среда двигается как целое отн. лабор. с.о. – K.

Т.к. среда не знает, что она движется, в с.о. связ. со средой справедливы обычные матер. ур-я:

① $\vec D' = \varepsilon \vec E'$; ② $\vec B' = \mu \vec H'$; ③ $\vec j' = \sigma \vec E'$

Далее нужно выполнить законы преобр-я полей:

$$\vec D_\parallel' = \vec D_\parallel = \varepsilon \vec E_\parallel' = \varepsilon \vec E_\parallel \Rightarrow \vec D_\parallel = \varepsilon \vec E_\parallel$$

$$\vec D_\perp' = \frac{\vec D_\perp + [\vec\beta \times \vec H_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}} = \varepsilon \vec E_\perp' = \frac{\varepsilon \vec E_\perp + [\vec\beta \times \vec B]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \vec D_\perp + [\vec\beta \times \vec H_\perp] = \varepsilon(\vec E_\perp + [\vec\beta \times \vec B_\perp])$$

$$\vec D + [\vec\beta \times \vec H] = \varepsilon(\vec E + [\vec\beta \times \vec B]) \quad (5)$$

Полностью аналогично можно проделать для ②.

(2) $\{\vec{B} - [\vec{\beta} \times \vec{E}] = \mu(\vec{H} - [\vec{\beta} \times \vec{D}])\}$ (1) и (2) ~ мат. ур-я Минковского

можно по пр. двойственности

Смотрим ③:

$$\vec{j}_\perp' = \sigma \vec{E}_\perp' = \vec{j}_\perp$$

из преобр.

$$\vec{j}_\perp = \sigma \frac{\vec{E}_\perp + [\vec{\beta} \times \vec{B}]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

продольная компонента:

$$\vec{j}_{\parallel}' = \sigma \vec{E}_{\parallel}' = \frac{\vec{j}_{\parallel} - \vec{v}\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sigma \vec{E}_{\parallel}$$

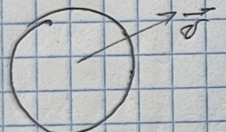
Эти выражения можно записать по-другому:

$$\left.\begin{aligned} \{\vec{j} - \vec{v}\rho\}_\perp &= \sigma \frac{\{\vec{E} + [\vec{\beta} \times \vec{B}]\}_\perp}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\{\vec{j} - \vec{v}\rho\}_{\parallel}}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \sigma\{\vec{E} + [\vec{\beta} \times \vec{B}]\}_{\parallel} \end{aligned}\right\}$$

з-н Ома для движ. среды

4) Граничные условия:

Скажем, есть некоторое тело движ. со ск-ю $\vec{v}$. Что будет с полями на границе?



Например перейдём в СО, связ. с телом.

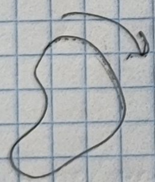
$$[\vec{H}_2' - \vec{H}_1' \times \vec{n}_{12}] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}'^{\text{пов}}$$

$$[\vec{E}_2' - \vec{E}_1', \vec{n}_{12}] = 0$$

Дальше преобр-ть.

$$D_{2n}' - D_{1n}' = 4\pi \rho'^{\text{пов}}$$

$$B_{2n}' = B_{1n}'$$



Для вращ. тела так нельзя. будет СО неинерц.