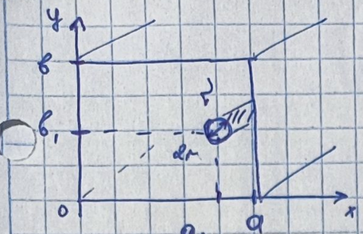
№10.17

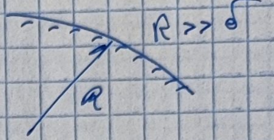


$$h'' = \frac{\operatorname{Re}\eta_s \oint_l |\vec H_\tau|^2 dl}{2\operatorname{Re}\,\eta + \iint_{S_\perp} |\vec H_\perp|^2 dS} \quad ; \quad h'' = \frac{P_{ст}}{2P}$$

$\sigma \ll \omega$

Ограничение на значение исп. Л источника был получен из ГУ Леонтовича.

$$[\vec E_\tau \times \vec H_\tau^*]$$



„Хороший проводник": $\varepsilon_к = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$

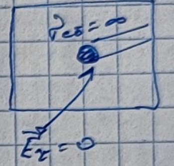
$$\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \varepsilon \Rightarrow \sigma \gg \frac{\varepsilon\omega}{4\pi} \ ; \ \boxed{\sigma \gg \omega}$$

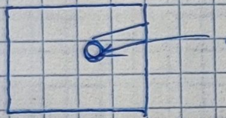
т.е. теперь ф-ла не работает. исп-ся:

$$h'' = \frac{P_{пот.\ на\ ед.\ дл.\ волны}}{2P}$$

Исп-ся условия: $\varepsilon_{ст} = \mu_{ст} = 1$ и $r \ll a$.

Если бы это был идеальный стержень → он бы искажал поле в волноводе





$$\varepsilon_к = 1 - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} = \{\sigma \ll \omega\}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_к| \approx 1.$$

т.е. стержень почти не искажает поле в волноводе. С точки зрения диэл. св-в никак не отличается от вакуума.

Потери уходят на тепло;

$$q = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\vec j\vec E^* = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\sigma_{ст}\vec E\vec E^* = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\sigma|\vec E|^2$$

Структура поля не меняется:

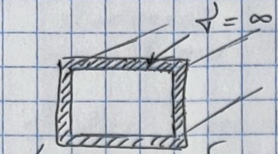
$$\vec E = \vec y_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-ihz}$$ ← считаем в точке, где стержень.

$$P_{пот.\ на\ ед.\ дл.} = \iint_{S_{\perp ст.}} \frac{1}{2}\sigma_{ст.}|\vec E(a_1)|^2 dS$$, считаем $r \ll a$, то знач. поля почти не меняется.

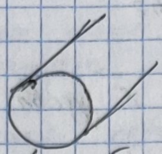
7.02.23г.

Прикладная электродинамика (Волноводы и резонаторы).

Практика.

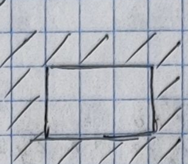


прямоугольный волновод



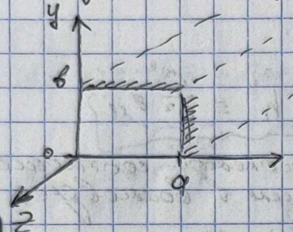
круглый волновод.

Стенки выполнены из проводника. Идеализация $\sigma \to \infty$ - правильный волновод.
Толщина стенок не имеет значения.



Рассм-м гармонич. поля. Записываем всё для компл. амплитуд.

Введём систему координат.



Все типы волн в линиях электропередач.

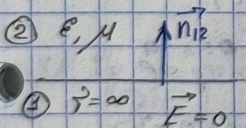
TE:
$$\vec E(\vec r) = \vec E_\perp(\vec r_\perp) e^{-ihz}$$
$$\vec H(\vec r) = \left(\vec H_\perp(\vec r_\perp) + \vec z_0 H_z(\vec r_\perp)\right) e^{-ihz}$$
$$\boxed{TE: E_z = 0}$$

TM:
$$\vec E = \left(\vec E_\perp(\vec r_\perp) + \vec z_0 E_z(\vec r_\perp)\right) e^{-ihz}$$
$$\vec H = \vec H_\perp(\vec r_\perp) e^{-ihz}$$
$$\boxed{TM: H_z = 0}$$

$\boxed{TEM: E_z = 0,\ H_z = 0}$ (в прямоуг. волноводе их не может быть.)

(x, y, z)
$$\vec E(x, y, z) = \left(\vec x_0 E_x(x, y) + \vec y_0 E_y(x, y)\right) e^{-ihz}$$

где $\vec r_\perp = \{x, y\} \Rightarrow \vec r_\perp = x \cdot \vec x_0 + y \cdot \vec y_0$



$\vec j = \sigma \vec E$ из условия $|\vec j| < \infty \Rightarrow$ при $\sigma \to \infty$, $\vec E \to 0$

ГУ: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $E_{1\tau} = 0$ $\Rightarrow E_{2\tau} = 0$ т.е. решения ур-ний Максвелла для волн в волноводе должны удовл. этому условию.

$E_\tau\big|_L = 0$ В любом волноводе м.б. ∞ много волн $\to$ они называются модами.

Рассмотрим низшую моду.

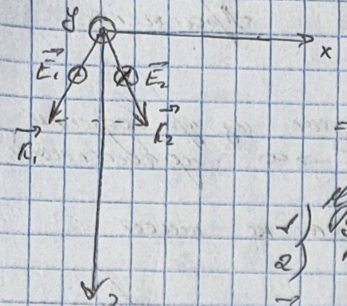
Одн. плоская волна: $\vec E = \vec y_0 E_0 e^{-ihz}$ h - продольное волновое число, æ - поперечное волновое число

$\vec k = h \vec z_0$, E_0 - const.

$y = 0$: $E_x = 0$, $E_z = 0$

$x = 0$: $E_y = 0$, $E_z = 0$

Она не удовл. всем условиям. В прямоуг. волноводе не может распр. плоская одн. волна.



$\vec{\varkappa}_1 = -\varkappa \vec{x}_0 + h\vec{z}_0$
$\vec{\varkappa}_2 = \varkappa \vec{x}_0 + h\vec{z}_0$

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin(\varkappa x)\, e^{-ihz}$

Нужно проверить, когда $\vec{E}$ уровн.
1) уровн. Максвелла
2) $\Gamma.У.$

$\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\varkappa^2 E_y, \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -h^2 E_y$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-\varkappa^2 - h^2 + k^2)}_{=0} E_y = 0 \Rightarrow \boxed{k^2 = \varkappa^2 + h^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu}$$

– дисперсионное соотношение для волн в волноводе.

$E_y|_{x=0} = 0$

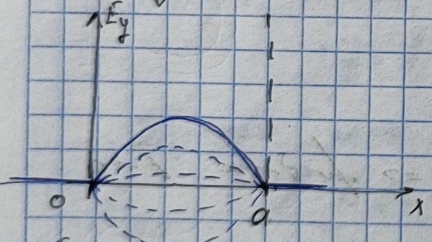
$E_y|_{x=a} = E_0 \sin(\varkappa a)\, e^{-ihz} = 0 \Rightarrow \sin(\varkappa a) = 0$

$\Rightarrow \varkappa = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$

TE_{m0} ; TE_{mn}

Смотрим $TE_{10} \Rightarrow m = 1. \Rightarrow \varkappa = \frac{\pi}{a}$

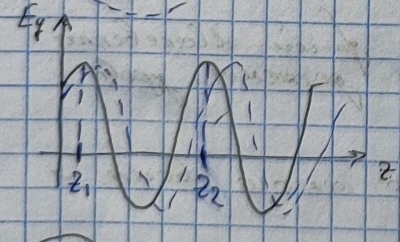
$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ihz}$



$\vec{E}_{физ} = Re\{\vec{E}(\vec{r})\, e^{i\omega t}\}$

$\vec{E}_{физ} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - hz)$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ihz}, & 0 < x < a,\ 0 \le y \le b \\ 0 & x \notin [0, a],\ y \notin [0, b] \end{cases}$$



№10.1

Дано:
a, b $(a > b)$
TE_{10}, ω,
E_{max}

Найти:
а) ω_{cr} – ?
λ_g – ?
v_φ – ?
v_g – ?

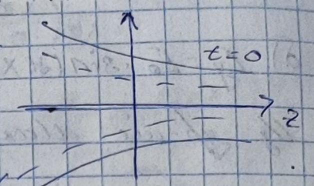
$\varkappa = \frac{\pi}{a} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$

1) $\omega = \omega_{cr} \Leftrightarrow h = 0 \Rightarrow \omega_{cr} = \frac{\pi c}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$\omega > \omega_{cr} \Rightarrow h^2 > 0 \Rightarrow h$ – действительная
– распространяющаяся волна.

$\omega < \omega_{cr} \Rightarrow h^2 < 0 \Rightarrow h$ – мнимая
– нераспространяющаяся волна.

$$h = -i\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu} \Rightarrow e^{-ihz} = e^{-|h|z}$$



У каждой моды своя $\omega_{кр}$, у низшей моды она самая маленькая.

2) Все остальные параметры опр-ся продольной компонентой h.

$\lambda_g = \frac{2\pi}{h}$ ← как док-ть: $\Delta z \, h = 2\pi$ изменение фазы

$$\Rightarrow \lambda_g = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} = \underbrace{\frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}}_{\lambda_0}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}}$$

длина волны для плоской волны

3) $\omega t - hz = const \; / \frac{d}{dt} \Rightarrow v = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}$

4) $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial h} = \frac{\partial\omega(h)}{\partial h}$ → и выразить обратно $v_g(\omega)$

или $v_g = \left[\frac{\partial h}{\partial\omega}\right]^{-1}$

Д/З: доделать 10.1 п. 3), 4) и построить $V(\omega)$, $V_g(\omega)$ и $V \cdot V_g(\omega)$

в пункте б) + нарисовать картинку линий E и H

через вектор Пойнтинга ← + 10.19 ?

б) Найти: H_{1max} - ? H_{2max} - ? ← из ур-ий Максвелла.

$$P = \iint_{S_\perp} S_z \, dS_\perp$$

Домашняя работа (продолжение)

3) $v = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} = \frac{\omega \cdot c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}}$

4) $v_g = \left[\frac{\partial h}{\partial\omega}\right]^{-1}$

$$\frac{\partial h}{\partial\omega} = \frac{2\frac{2\omega}{c^2}\varepsilon\mu}{2\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} = \frac{\omega\cdot\varepsilon\mu\cdot c}{c^2\cdot\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{v_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow v_g = v_0\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}$$

$$v_g(\omega)\cdot v(\omega) = v_0^2$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu = h^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

$$\frac{2\omega d\omega}{c^2}\varepsilon\mu = 2h\,dh \Rightarrow \frac{d\omega}{dh} = v_{gr} = \frac{h}{\varepsilon\mu}\frac{c^2}{\omega} = \frac{v_\varphi^{(0)2}}{v_\varphi} = v_\varphi^0\sqrt{1-\frac{c^2}{\kappa^2}}$$

б) $E_y = E_0 \cdot \sin(\varkappa x)\, e^{-ihz}$

Из ур-ий Максвелла:

$$\text{rot}\vec{E} = -ik_0 \mu \vec{H} \quad \rightarrow \quad \vec{H} = \frac{i}{k_0 \mu}\,\text{rot}\vec{E} = \frac{ic}{\omega\mu}\,\text{rot}\vec{E}$$

$$\text{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial z} E_y\right) + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial x} E_y =$$

$$= \vec{x}_0 \cdot E_0 \sin(\varkappa x) \cdot ih\, e^{-ihz} + \vec{z}_0 \cdot \varkappa E_0 \cos(\varkappa x)\, e^{-ihz}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \vec{x}_0 \cdot \left(-\frac{hc}{\omega\mu}\right) \cdot E_0 \sin(\varkappa x)\, e^{-ihz} + \vec{z}_0 \frac{i\varkappa c}{\omega\mu} E_0 \cos(\varkappa x)\, e^{-ihz}$$

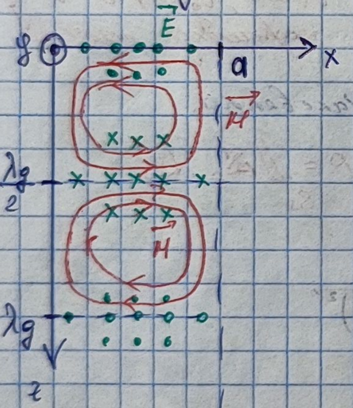
$$E_0 \equiv E_{max} \quad \Rightarrow \quad H_{z\,max} = \frac{\varkappa c}{\omega\mu} E_{max} = \left\{ \varkappa = \frac{\pi}{a} \right\} =$$

$$= \frac{\pi c}{a \mu \omega} E_{max}$$

$$H_{\perp max} = H_{x\,max} = \frac{c}{\omega\mu}\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \cdot E_{max}$$

Как выглядят поле в волноводе?

В какое-то время t



№ 10.19

Дано:
a, b
TE_{10}, ω,
P - мощность

Найти: E_m - ?
H_m - ?

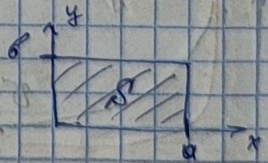
Решение: Для TE_{10} из № 10.1:

$$E_y = E_0 \sin(\varkappa x)\, e^{-ihz} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ihz}$$

$$H_x = -\frac{hc}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ihz}$$

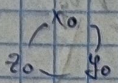
$$H_z = \underbrace{\frac{i\pi c}{a\mu\omega} E_0}_{\rightarrow H_m} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ihz}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi}[\vec{E}, \vec{H}^*]$$



Тогда полную мощность можно найти как:

$$P = \iint_S \vec{S}\, d\vec{s} = \iint_S \frac{c}{8\pi}[\vec{E}, \vec{H}^*]\, dx\, dy \cdot \vec{z}_0 =$$



$$= \frac{c}{8\pi}\iint_S [E_y \cdot \vec{y}_0,\ H_x^* \vec{x}_0 + H_z^* \cdot \vec{z}_0]\, dx\, dy \cdot \vec{z}_0 =$$

$$= \frac{c}{8\pi}\int_0^a\int_0^b -\vec{z}_0 \cdot E_y H_x^*\, dx\, dy \cdot \vec{z}_0 =$$

$$= \frac{c}{8\pi}\int_0^a\int_0^b \frac{hc}{\omega\mu}\cdot E_0^2\cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx\,dy = \frac{hc^2 b}{8\pi\omega\mu}E_0^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{hc^2 b}{16\pi\omega\mu}E_0^2\left(\int_0^a 1\,dx - \int_0^a \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dx\right) = \frac{hc^2 b}{16\pi\omega\mu}E_0^2\left(a - \underbrace{\frac{a}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\Big|_0^a}_{=0}\right) =$$

$$= \frac{ahc^2 b}{16\pi\omega\mu}E_0^2 = \frac{chE_0^2 ab}{16\pi k_0} \quad (\mu = 1)$$

$$\Rightarrow E_m = \left(\frac{16\pi\omega\mu\cdot P}{ahc^2 b}\right)^{1/2} = \{\mu = 1\} = \left(\frac{k_0 16\pi P}{ahbc}\right)^{1/2}$$

$\cdot\ H_m = \ldots$

14.02.23г.

10.19. (в классе)

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-ihz}$$

$$H_x \sim \frac{h}{k_0}$$

$$H_z \sim \frac{\pi}{a k_0}$$

$$\mathrm{Re}\{[\vec{y}_0 E_y \times \vec{z}_0 H_z^*]\} = \mathrm{Re}\{\vec{x}_0 E_y H_z^*\}$$

Полная система собств. мод волновода

Используем векторный потенциал:

$$\vec{A}^{(e)} = \vec{z}_0\, \varphi^{(e)}(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}$$

Покажем, что такой вект. потенц. опис. ТМ волну $(H_z = 0)$:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{\mu}[\nabla\times\vec{z}_0\,\varphi^{(e)}(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}] = \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi^{(e)}(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\times\vec{z}_0] =$$

$$\nabla = \nabla_\perp + \vec{z}_0\frac{\partial}{\partial z} \qquad = \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi^{(e)}(\vec{r}_\perp)\times\vec{z}_0]e^{-ihz}$$

$$\Rightarrow \vec{H}\perp\vec{z}_0, \text{ ч.т.д.}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{ik_0\varepsilon\mu}(\nabla\,\mathrm{div}\vec{A} + k^2\vec{A})$$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial z}A_z = -ihA_z$$

$$\nabla\,\mathrm{div}\vec{A} = -ih\left(\nabla_\perp\varphi^{(e)}(\vec{r}_\perp)e^{-ihz} + \vec{z}_0\frac{\partial}{\partial z}\varphi^{(e)}(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\right) = [-ih\nabla_\perp\varphi^{(e)}(\vec{r}_\perp) - \vec{z}_0 h^2\varphi^{(e)}(\vec{r}_\perp)]\cdot$$

$$\cdot e^{-ihz}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_\perp = -\dfrac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\varphi^{(e)}(\vec{r}_\perp)e^{-ihz} \\ E_z = \dfrac{k^2-h^2}{ik_0\varepsilon\mu}\varphi^{(e)}(\vec{r}_\perp)e^{-ihz} \end{cases}$$

Всё вместе, для ТМ:

$$\left.\begin{aligned} \vec H_\perp &= \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp \varphi^{(e)} \times \vec z_0] \\ \vec E_\perp &= -\frac{h}{k_0 \varepsilon\mu}\nabla_\perp \varphi^{(e)} \\ E_z &= \frac{\varkappa^2}{k_0^2\varepsilon\mu}\varphi^{(e)} \end{aligned}\right\} \cdot e^{-ihz}$$

Для ТЕ вводим вект. потенциал магнитного типа:

$$\vec A^{(m)} = \vec z_0\, \varphi^{(m)}(\vec r_\perp)\, e^{-ihz}$$

$$\vec D = -\mathrm{rot}\, \vec A^{(m)}$$

$$\vec H = \frac{1}{ik_0\varepsilon\mu}\left(\nabla\, \mathrm{div}\, \vec A^{(m)} + k^2 \vec A^{(m)}\right)$$

По принципу перест. двойственности для ТЕ:

$$\left.\begin{aligned} \vec E_\perp &= -\frac{1}{\varepsilon}[\nabla_\perp \varphi^{(m)} \times \vec z_0] \\ \vec H_\perp &= -\frac{h}{k_0 \varepsilon\mu}\nabla_\perp \varphi^{(m)} \\ H_z &= \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\varphi^{(m)} \end{aligned}\right\} \cdot e^{-ihz}$$

Векторные потенциалы удовл. ур-ию Гельмгольца:

$$\Delta \vec A^{(e,m)} + k^2 \vec A^{(e,m)} = 0$$

$$\Delta A_z^{(e,m)} + k^2 A_z^{(e,m)} = 0 \quad ; \quad \Delta_\perp \varphi^{(e,m)} + \underbrace{(k^2 - h^2)}_{\varkappa^2}\varphi^{(e,m)} = 0$$

$$\Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ТМ: $\boxed{\Delta_\perp \varphi^{(e)} + \varkappa^2 \varphi^{(e)} = 0}$

$E_\tau = 0 \Rightarrow E_z = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi^{(e)}\big|_L = 0}$

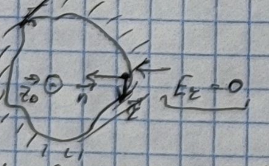
ТЕ: $\boxed{\Delta_\perp \varphi^{(m)} + \varkappa^2 \varphi^{(m)} = 0}$

E_τ: $(\vec \tau \cdot \vec E_\perp) \sim (\vec\tau \cdot [\nabla_\perp \varphi^m \times \vec z_0]) = (\nabla_\perp \varphi^m \cdot [\vec z_0 \times \vec \tau]) =$

$= (\nabla_\perp \varphi^m \cdot (-\vec n)) \sim \frac{\partial \varphi^m}{\partial n}$

$E_\tau \sim \frac{\partial \varphi^m}{\partial n}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial n}\Big|_L = 0}$

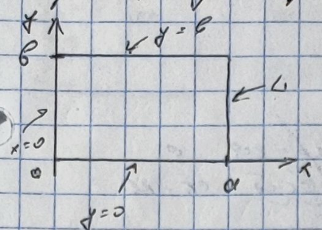


произв. сечение волновод

$\varkappa_1^{(TE)} \to \varphi_1^{(m)}$; $\varkappa_2^{(TE)} \to \varphi_2^{(m)}$; $\varkappa_3^{(TE)} \to \varphi_3^{(m)}$; $\varkappa_4^{(TE)} \to \varphi_4^{(m)}$ → $\vec E$, $\vec H$

$\varkappa_1^{(TM)} \to \varphi_1^{(e)}$; $\varkappa_2^{(TM)} \to \varphi_2^{(e)}$; $\varkappa_3^{(TM)} \to \varphi_3^{(e)}$; $\varkappa_4^{(TM)} \to \varphi_4^{(e)}$ → $\vec E$, $\vec H$

Например для прямоугольного волновода.



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi^{(e)} + \frac{\partial^2 \varphi^{(e)}}{\partial y^2} + æ^2 \varphi^{(e)} = 0$$

ГУ: $\varphi^{(e)}\big|_{x=0} = 0$; $\varphi^{(e)}\big|_{y=0} = 0$

$\varphi^{(e)}\big|_{x=a} = 0$; $\varphi^{(e)}\big|_{y=b} = 0$

$$\varphi^{(e)} = C \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Методом разделения переменных:

$$\varphi^{(e)}(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{=-æ_x^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{=-æ_y^2} + æ^2 = 0 \Rightarrow X'' + æ_x^2 X = 0 \quad и \quad Y'' + æ_y^2 Y = 0$$

$X(0) = 0$, $X(a) = 0$; $Y(0) = 0$, $Y(b) = 0$

Например для X:

$$X(x) = C_1 \sin(æ_x x) + \overset{0}{C_2} \cos(æ_x x)$$

$$X(0) = C_2 = 0$$

$$X(a) = C_1 \sin(æ_x a) = 0 \rightarrow æ_x = \frac{m\pi}{a}$$

Аналогично: $æ_y = \frac{n\pi}{b}$

Итого: $æ^2 = æ_x^2 + æ_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

$$\begin{cases} \varphi^{(e)} = C \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ æ_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \end{cases}, \quad m, n = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

Д/З: получить √ $\varphi^{(m)} = \tilde{C}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ $æ_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ в случае ТМ волны методом раздел. пер.

\+ ~~10.2~~, ~~10.3~~, 10.4*, ~~10.8~~

$m, n = (0), 1, 2, \ldots$

Получим ТЕ$_{10}$: $\rightarrow m = 1$, $n = 0$

$$\varphi^{(m)} = \tilde{C}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$\vec{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon}\cdot\Big[\underbrace{\vec{z}_0 \cdot \left(-\tilde{C}\frac{\pi}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a} \times \vec{x}_0}_{-\vec{y}_0}\Big] e^{-ihz} = -\vec{y}_0\,\tilde{C}\frac{\pi}{a\varepsilon}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-ihz} =$$

$$= \{\text{переобозначим константы}\} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ihz}$$

Дисперсионное соотношение: $h = \sqrt{k^2 - æ_{mn}^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - æ_{mn}^2}$

Частный случай $\varepsilon\mu = 1$

$$\omega_{кр\,m,n} = c\,æ_{mn}$$

$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{h}$

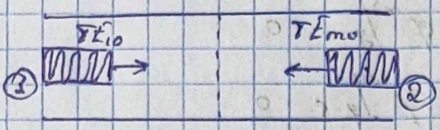
№10.2.

1) TE_{10}

2) TE_{m0}

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ – ?

$\frac{\lambda_{g1}}{\lambda_{g2}}$ – ?



Импульсы распр-ся с одинаковой групповой ск-ю.

$v_{gr1} = v_{gr2}$

$\varkappa_{10} = \frac{\pi}{a}$; $\varkappa_{m0} = \frac{m\pi}{a}$

1) У импульсов разные несущие частоты! Идем через v_{gr}.

Из 10.1: $v_g = v_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2}$; $\omega_{cr} = \frac{\pi c}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$\Rightarrow v_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega_1\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)^2} = v_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c m}{a\omega_2\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)^2}$

$\Rightarrow \frac{\pi c}{a\omega_1\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\pi c m}{a\omega_2\sqrt{\varepsilon\mu}} \Rightarrow \omega_2 = m\omega_1.$

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda}$

$\frac{2\pi c}{\lambda_2} = m \cdot \frac{2\pi c}{\lambda_1} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = m$

2) $\frac{\lambda_{g1}}{\lambda_{g2}}$ – ?

Длина волны в волноводе $\lambda_g = \frac{2\pi}{h}$

Ищем h через дисперсионное соотношение:

$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$

$\Rightarrow h_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2}\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}}$; $h_2 = \sqrt{\frac{\omega_2^2}{c^2}\varepsilon\mu - \frac{m^2\pi^2}{a^2}}$

$\left(\frac{\lambda_{g1}}{\lambda_{g2}}\right)^2 = \frac{h_2^2}{h_1^2} = \frac{\frac{\omega_2^2}{c^2}\varepsilon\mu - \frac{m^2\pi^2}{a^2}}{\frac{\omega_1^2}{c^2}\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}} = \frac{\frac{m^2\omega_1^2}{c^2}\varepsilon\mu - \frac{m^2\pi^2}{a^2}}{\frac{\omega_1^2}{c^2}\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}} = m^2$

$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_{g1}}{\lambda_{g2}} = m$

№10.3

Дано: $\lambda_g = 2\lambda_{кр}$

$\frac{\omega}{\omega_{кр}}$ - ?

$-\lambda_{кр} = \frac{2\pi c}{\omega_{кр}}$ (когда $h=0$)

Или $k_{кр} = \varkappa \to \lambda_{кр} = \frac{2\pi}{k_{кр}}$

$= \varkappa^2 + h^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu \Rightarrow \omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\varkappa^2+h^2}$; $\omega_{кр} = \frac{c\varkappa}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{\omega_{кр}} = \frac{\sqrt{\varkappa^2+h^2}}{\varkappa} = \sqrt{1+\frac{h^2}{\varkappa^2}} = \left\{ h^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_g^2};\ \varkappa^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_{кр}^2} = \frac{16\pi^2}{\lambda_g^2} \right\} =$$

$$= \sqrt{1+\frac{4\pi^2\lambda_g^2}{\lambda_g^2\cdot 16\pi^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

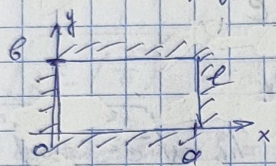
Ответ: $\frac{\omega}{\omega_{кр}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

№10.7

Дано: TE_{11}, a, b, L

ω - ?

Сначала продолжение классной: выведем для ТЕ волны



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi^{(m)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi^{(m)} + \varkappa^2\varphi^{(m)} = 0$$

ГУ: $\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial n}\Big|_Г = 0$

Аналогично методом раздел. переменных: $\varphi^{(m)}(x,y) = X(x)Y(y)$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\varkappa_x^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\varkappa_y^2} + \varkappa^2 = 0 \Rightarrow X'' + \varkappa_x^2 X = 0 \quad и \quad Y'' + \varkappa_y^2 Y = 0$$

ГУ: $X'(0) = 0$; $Y'(0) = 0$

$X'(a) = 0$; $Y'(b) = 0$

Для X: $X(x) = C_1\sin(\varkappa_x x) + C_2\cos(\varkappa_x x)$

$X'(x) = \varkappa_x C_1\cos(\varkappa_x x) - C_2\varkappa_x\sin(\varkappa_x x)$

$X'(0) = C_1\varkappa_x = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$X'(a) = -C_2\varkappa_x\sin(\varkappa_x a) = 0 \Rightarrow \varkappa_x = \frac{\pi m}{a}$

$\Rightarrow X(x) = C_2\cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)$

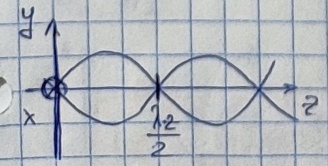
Аналогично: $\varkappa_y = \frac{\pi n}{b} \to Y(y) = C_1\cos\left(\frac{\pi n x}{b}\right)$

$\Rightarrow \varphi^{(m)} = \tilde{C}\cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{b}\right)$

$\varkappa_{mn}^2 = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2$

В случае, описанном №10.7: $m=1$, $n=1$.

$\Rightarrow \varkappa^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$



Поле в волноводе сконструировано как суперпозиция двух плоских волн.

$\frac{\lambda_z}{2} = \frac{\lambda_g}{2} = \frac{2\pi}{2h} = \frac{\pi}{h} = L$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2 \Rightarrow \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\pi^2}{b^2}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

$$\Rightarrow \omega = \pi c\sqrt{\frac{1}{L^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

28.02.23г.

№10.4

$a = 10$ см

$b = 7$ см

а) $f = 1700$ МГц. две волны TE_{10}, TE_{30}

Как описывается эл-ое поле для каждой моды:

$TE: \quad \varphi^{(m)} = C\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

$\vec{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon}\left[\nabla_\perp \varphi^{(m)} \times \vec{z}_0\right]$

$\Rightarrow TE_{m0}: \Rightarrow \vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{i\omega t - ihz}$

$\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_1 + \vec{E}_3$

$TE_{10}: \quad \vec{E}_1 = \vec{y}_0 E_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\omega t - ih_1 z}$, где $h_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$

$TE_{30}: \quad \vec{E}_3 = \vec{y}_0 E_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) e^{i\omega t - ih_3 z}$, где $h_3 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{3\pi}{a}\right)^2} = -i|h_3|$

Если подставим: $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ → подставить!

Нужно найти крит. значения частоты:

$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - æ^2}$; $\omega_{кр} = cæ$; $æ = \frac{m\pi}{a}$

$f_{кр} = \frac{\omega_{кр}}{2\pi} = \frac{mc}{2a}$

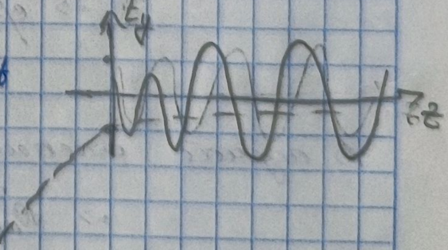
для $TE_{10} \to f_{кр} = 1500$ МГц.

$TE_{20} \to f_{кр} = 3000$ МГц.

$TE_{30} \to f_{кр} = 4500$ МГц

$\Rightarrow f > f_{кр}^{(TE_{10})}$ – распр. ; $f < f_{кр}^{(TE_{30})}$ – нераспр.

$\Rightarrow E_{y\,физ} = E_1\cos(\omega t - h_1 z) - E_3 e^{-|h_3| z}\cos\omega t$



б) TE_{10} и TE_{20}

$\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$TE_{20}: \quad \vec{E}_2 = \vec{y}_0 E_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{i\omega t - ih_2 z}$

$\vec{E}_2\big|_{x=\frac{a}{2}} = 0$

в) TE_{10} и TE_{30} у

$f = 10^5$ МГц.

Аналогично пункту а), но обе волны распространяющиеся.

$k >> æ$, $h_1, h_3 \to k$.

и причём $h_1 \approx h_3$ ~ близкие продольные частоты → биения в пространстве.

Пусть $E_1 = E_3 = 1$.

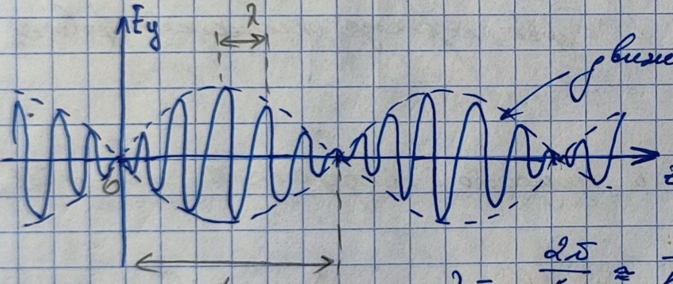
$$\Rightarrow E_y = \cos(\omega t - h_1 z) - \cos(\omega t - h_3 z) = -2\sin\left(\omega t - \frac{h_1+h_3}{2}z\right)\sin\left(\frac{h_3-h_1}{2}z\right)$$

$$h_1 \approx h_3 \approx k \quad \Rightarrow \quad \frac{h_1+h_3}{2} \approx k, \quad а \quad \frac{h_3-h_1}{2} - ?$$

$$h_1 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = k\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{ak}\right)^2} \approx k\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{ak}\right)^2\right) \approx k - \frac{1}{2k}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

$$h_3 = \{аналогично\} = k - \frac{1}{2k}\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2$$

$$\frac{h_3-h_1}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k}\frac{9\pi^2}{a^2} + \frac{1}{2k}\frac{\pi^2}{a^2}\right) = -\frac{1}{4k}\frac{8\pi^2}{a^2} = -\frac{2\pi^2}{ka^2} \quad << k$$

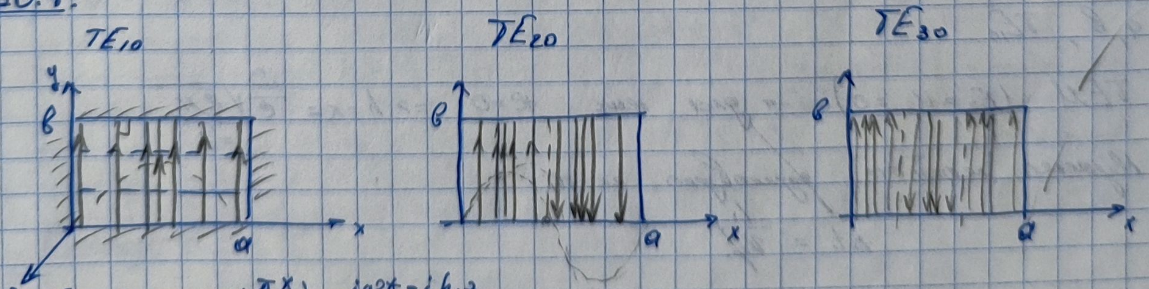


$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \approx \frac{4\pi}{h_1+h_3}$$

$$L = \frac{2\pi}{h_1-h_3} \quad \Rightarrow L >> \lambda$$

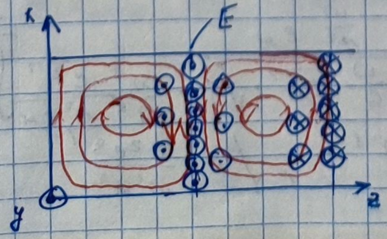
$\{E, H, k\}$

№10.7.



$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\omega t - i h_1 z}$$

H_x, H_z



Чтобы построить линии $\vec{H}$ надо явно найти H_x и H_z.

или: $[d\vec{e} \times \vec{H}] = 0$ $\quad d\vec{e} \parallel \vec{H}$

$$\boxed{\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z}}$$

диффур для вект. линий.

$\varkappa = \alpha\mu$

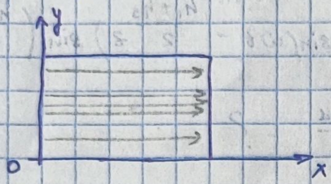
$\varkappa_x = \alpha\mu_x$

TE_{0n}:
$$\vec E = \vec x_0 E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\omega t - ihz}$$

$$\varphi^{(m)} = C\cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$\vec E_\perp \sim [\nabla_\perp \varphi^{(m)} \times \vec z_0] \sim \vec x_0, \leftarrow \nabla_\perp \varphi^{(m)} \sim \vec y_0$$

TE_{01}



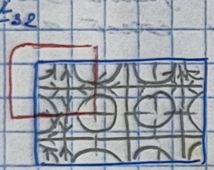
TE_{11} – ? Нужно замешать E_x и E_y (рома)

$\vec H_\perp \sim \nabla_\perp \varphi^{(m)}$ – нарисовать линии уровня

$TE_{11} \Rightarrow \varphi = C\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$

$\vec E$ будет перпендикулярно линиям уровня.

TE_{32}



← Рисуем в каждом квадратике как у TE_{11}

Д/з: для TM_{11} структуру силовых линий
~~10.5~~, ~~10.6~~, (для плазмы $\varepsilon = 1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2}$, $\mu = 1$)
~~10.8~~, 10.9

№10.5.

Линия передачи длиной L, радиосигнал ω, за какое Δt пройдёт?

а) a, b, TE_{10}

б) TEM ($E_z = H_z = 0$) → для них $\varkappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c}\underbrace{\sqrt{\varepsilon\mu}}_{=1}$

Нужно найти групповую ск-ть:

$$\Delta t = \frac{L}{v_{гр}}$$

а) Первая распр. волна – $TE_{10} \Rightarrow \varkappa = \frac{\pi}{a}$

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}}$$

$$v_{гр} = \left[\frac{\partial h}{\partial \omega}\right]^{-1} = \left[\frac{2\frac{\omega}{c^2}\varepsilon\mu}{2\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}}}\right]^{-1} = \left[\frac{\frac{\omega}{c^2}\varepsilon\mu}{\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot\sqrt{1-\frac{\pi^2 c^2}{a^2\omega^2\varepsilon\mu}}}\right]^{-1} =$$

$$= \{\text{в вакууме } \varepsilon = \mu = 1\} = \left[\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\pi^2 c^2}{\omega^2 a^2}}}\right]^{-1} = c\sqrt{1-\frac{\pi^2 c^2}{\omega^2 a^2}}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{L}{c}\left(1 - \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2 a^2}\right)^{-1/2}$$

б) Для TEM волны: $\varkappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \{\text{в вакууме}\} = \frac{\omega}{c}$

$$\Rightarrow v_{гр.} = \left[\frac{\partial h}{\partial \omega}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{c}\right]^{-1} = c.$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{L}{c}$$

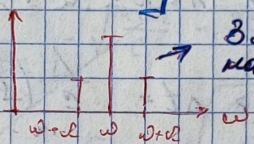
$$\cos\Omega t = \frac{1}{2}e^{i\Omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\Omega t}$$

№ 10.8 TE_{10} — промодул. на частоте Ω

$$E = E_0(1 + m\cos\Omega t)e^{i\omega t} = ; \quad \frac{\pi c}{\omega} > a > \frac{\pi c}{\omega + \Omega}$$

$$= E_0\left[\frac{m}{2}e^{i(\omega-\Omega)t} + e^{i\omega t} + \frac{m}{2}e^{i(\omega+\Omega)t}\right]$$

т.е. на входе в волновод



→ 3 моды TE_{10} каждой на собственной частоте

$z = 0$

нераспр. волна

$z > 0$:

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\frac{m}{2} e^{i(\omega-\Omega)t - i\sqrt{\frac{(\omega-\Omega)^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\, z} + e^{i\omega t - i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\, z} + \frac{m}{2} e^{i(\omega+\Omega)t - i\sqrt{\frac{(\omega+\Omega)^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\, z}\right]$$

→ распр.

Смотрим на выражения под корнями не деловее:

1) $\frac{\pi c}{\omega} > a \to \omega < \frac{\pi c}{a}$; $\omega_{кр} = c \cdot \varkappa = \frac{c\pi}{a}$

$$\Rightarrow \omega < \omega_{кр}.$$

Для $\omega - \Omega < \frac{\pi c}{a}$ → нераспр.

2) $a > \frac{\pi c}{\omega + \Omega} \Rightarrow \omega + \Omega > \frac{\pi c}{a}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega+\Omega}{c}\right)^2 > \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$ $\Rightarrow$ последнее слагаемое даст вклад в спектр. т.к. волна распр.

Очевидно, что $\left(\frac{\omega-\Omega}{c}\right)^2 < \left(\frac{\omega+\Omega}{c}\right)^2$ и $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 < \left(\frac{\omega+\Omega}{c}\right)^2$

Т.е. поле в волноводе содержит 3и спектральных компоненты с частотами $\omega-\Omega$, ω, $\omega+\Omega$. $E_{\omega-\Omega}$ и E_ω убывают с ростом z. А $E_{\omega+\Omega}$ не изменяется.

№10.6. Решить задачу 10.5 для линий передачи, заполненных плазмой:

$$\mu = 1, \quad \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Рассуждения аналогичные:

а) $TE_{10} \rightarrow \varkappa = \frac{\pi}{a}$

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\cdot\varepsilon - \frac{\pi^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\cdot\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) - \frac{\pi^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$$

$$V_{гр.} = \left[\frac{\partial h}{\partial \omega}\right]^{-1} = \left[\frac{\frac{2\omega}{c^2}}{2\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{L}{c}\left(1 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}$$

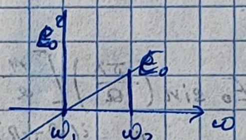
б) TEM: $\varkappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$

$$v_{гр} = \left[\frac{\partial h}{\partial \omega}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{c}\cdot\frac{2\omega}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}\right]^{-1} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{L}{c}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}$$

№10.9.

Дано: TE_{10}, с частотным спектром.



Найти длину L и ширину a волновода, если на выходе волновода спектр этого сигнала представл. две линии 1й амплитуды на ω_1 и ω_2.

$z = 0$: $\quad E = E_0^2 \cdot e^{i\omega_1 t} + E_0 e^{i\omega_2 t}$; $\quad \varepsilon, \mu = 1$

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}, \quad \text{т.е. будет слагаемое с } e^{-ihz}$$

В конце волновода амплитуда спадает до 1цы, т.е.

$$\begin{cases} E_0^2 \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}\,L} = 1 \\ E_0 \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega_2^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}\,L} = 1 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{\frac{\omega_2^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}\,L = \ln\frac{1}{E_0}$$

$$L^2\left(\frac{\omega_2^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}\right) = (\ln E_0)^2$$

$$\frac{\omega_2^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2} = \left(\frac{\ln E_0}{L}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{a^2} = \frac{\omega_2^2}{c^2} - \left(\frac{\ln E_0}{L}\right)^2$$

Из 1го: $\sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} = \ln E_0^2$

$$\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\omega_2^2}{c^2} + \left(\frac{\ln E_0}{L}\right)^2 = \left(\frac{\ln E_0}{L}^2\right)^2$$

$$\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{c^2} = \left(\frac{\ln E_0}{L} - \frac{\ln E_0^2}{L}\right)\left(\frac{\ln E_0}{L} + \frac{\ln E_0^2}{L}\right)$$

$$\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{c^2} = \frac{1}{L^2}\cdot 3\cdot(-1)(\ln E_0)^2, \quad \text{т.к. } E_0 = e \text{ по усл.}$$

$$\Rightarrow L^2 = \frac{3c^2}{\omega_2^2-\omega_1^2}$$

Исп-м коэффициент 2е ур-е системы:

$$L^2\left(\frac{\omega_2^2}{c^2}-\frac{v^2}{a^2}\right) = (\ln E_0)^2 = \{E_0 = e\} = 1.$$

$$\frac{\omega_2^2}{c^2}-\frac{v^2}{a^2} = \frac{1}{L^2} = \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{3c^2}$$

$$\frac{v^2}{a^2} = \frac{\omega_2^2}{c^2} - \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{3c^2} = \frac{2\omega_2^2-\omega_1^2}{3c^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{v^2c^2\cdot 3}{2\omega_2^2-\omega_1^2}$$

в учебнике 4.

Что бы было для частоты $\omega_3 = 2\omega_2$?

$$E_0\cdot e^{-\sqrt{\frac{4\omega_2^2}{c^2}-\frac{v^2}{a^2}}\cdot\sqrt{\frac{3c^2}{\omega_2^2-\omega_1^2}}} = E_0\cdot e^{-\sqrt{\frac{4\omega_2^2}{c^2}-\frac{2\omega_2^2-\omega_1^2}{3c^2}}\sqrt{\frac{3c^2}{\omega_2^2-\omega_1^2}}} =$$

$$= E_0\cdot e^{-\sqrt{\frac{10\omega_2^2-\omega_1^2}{3c^2}}\cdot\sqrt{\frac{3c^2}{\omega_2^2-\omega_1^2}}} = E_0\, e^{-\sqrt{\frac{10\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2-\omega_1^2}}} = \ ?$$

№10.9. Уменьшение амплитуды на выходе → м.б. как следствие осцилляций во время распространения.
Будем записывать сразу равенство ~~...~~ степеней экспонент.

$$\begin{cases} 2 - iL\sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2}-\frac{v^2}{a^2}} = 0 & |\cdot \text{к.с.} \\ 1 - iL\sqrt{\frac{\omega_2^2}{c^2}-\frac{v^2}{a^2}} = 0 & |\cdot \text{к.с.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + L^2\left(\frac{\omega_1^2}{c^2}-\frac{v^2}{a^2}\right) = 0 \\ 1 + L^2\left(\frac{\omega_2^2}{c^2}-\frac{v^2}{a^2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$1 + L^2\frac{\omega_2^2}{c^2} - L^2\frac{v^2}{a^2} = 0 \ ; \quad 1 + L^2\frac{\omega_2^2}{c^2} = L^2\frac{v^2}{a^2}$$

$$L^2 = -\frac{1}{\left(\frac{\omega_2^2}{c^2}-\frac{v^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{v^2}{a^2}-\frac{\omega_2^2}{c^2}\right)}$$ подставим в 1е. ур-е.

$$4 + \frac{1}{\left(\frac{v^2}{a^2}-\frac{\omega_2^2}{c^2}\right)}\cdot\left(\frac{\omega_1^2}{c^2}-\frac{v^2}{a^2}\right) = \frac{(\omega_1^2a^2-v^2c^2)\cdot\cancel{a^2c^2}}{\cancel{a^2c^2}\cdot(v^2c^2-\omega_2^2a^2)} + 4 = 0$$

$$\omega_1^2a^2 - v^2c^2 = 4(\omega_2^2a^2 - v^2c^2)$$

$$\omega_1^2a^2 - v^2c^2 = 4\omega_2^2a^2 - 4v^2c^2 \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{3v^2c^2}{4\omega_2^2-\omega_1^2}}$$

$$1 + L^2\left(\frac{\omega_2^2}{c^2} - \frac{\cancel{v^2}}{3\cancel{v^2}c^2}\cdot(4\omega_2^2-\omega_1^2)\right) = 1 + L^2\cdot\left(\frac{3\omega_2^2-4\omega_2^2+\omega_1^2}{3c^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{L^2 = \frac{3c^2}{\omega_2^2-\omega_1^2}}$$

$$\Rightarrow L = c\sqrt{\frac{3}{\omega_2^2-\omega_1^2}} \ ; \quad a = v c\sqrt{\frac{3}{4\omega_2^2-\omega_1^2}}$$

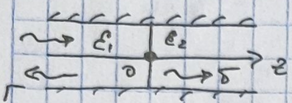
Что будет для сигнала на $\omega_3 = 2\omega_2$.

$$h^2 = \left(\frac{2\omega_2}{c}\right)^2 - \frac{\pi^2}{a^2} = \frac{4\omega_2^2}{c^2} - \frac{\pi^2(4\omega_2^2 - \omega_1^2)}{3\pi^2 c^2} = \frac{8\omega_2^2 + \omega_1^2}{3c^2} > 0$$

=> затухания ампл. не будет → именно на част. $\omega_0 = 2\omega_2$ волновод не изменяет.

№10.20 $\Gamma - ?$ $\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & z<0 \\ \varepsilon_2, & z>0 \end{cases}$; $\omega, \varkappa$

а) ТЕ, б) ТМ



$$\frac{E_\perp}{H_\perp} = \eta_\perp \ ; \ \vec{E_\perp} = \eta_\perp [\vec{H_\perp}, \vec{z_0}] \ ; \ \vec{H_\perp} = \frac{1}{\eta_\perp}[\vec{z_0}, \vec{E_\perp}]$$

ТМ: $\varphi^{(e)}$:

$$\underbrace{\vec{H_\perp} = \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp \varphi^{(e)}, \vec{z_0}] \ ; \ \vec{E_\perp} = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu}\nabla_\perp \varphi^{(e)} \ ; \ E_z = \frac{\varkappa^2}{i k_0 \varepsilon \mu}\varphi^{(e)}}_{\cdot e^{i(\omega t - hz)}}$$

$$\frac{E_\perp}{H_\perp} = \frac{\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu}}{\frac{1}{\mu}} = \frac{h}{k_0 \varepsilon}, \quad \nabla_\perp \varphi^{(e)} = -\frac{k_0 \varepsilon \mu}{h}\vec{E_\perp} \Rightarrow \vec{H_\perp} = -\frac{k_0 \varepsilon}{h}[\vec{E_\perp}, \vec{z_0}] =$$

$$= \frac{k_0 \varepsilon}{h}[\vec{z_0}, \vec{E_\perp}] \Rightarrow \frac{1}{\eta_\perp} = \frac{k_0 \varepsilon}{h}$$

$$\Rightarrow \eta_\perp^{(TM)} = \frac{h}{k_0 \varepsilon} = \frac{h}{k_0 \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{h}{k}.$$

ТЕ:

$$\underbrace{\vec{E_\perp} = -\frac{1}{\varepsilon}[\nabla_\perp \varphi^{(m)}, \vec{z_0}] \ ; \ \vec{H_\perp} = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu}\nabla_\perp \varphi^{(m)} \ ; \ H_z = \frac{\varkappa^2}{i k_0 \varepsilon \mu}\varphi^{(m)}}_{\cdot e^{i(\omega t - hz)}}$$

$$\Rightarrow \frac{E_\perp}{H_\perp} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu}} = \frac{k_0 \mu}{h}$$

$$\nabla_\perp \varphi^{(m)} = -\frac{k_0 \varepsilon \mu}{h}\vec{H_\perp} \Rightarrow \vec{E_\perp} = -\frac{1}{\varepsilon}\left[-\frac{k_0 \varepsilon \mu}{h}\vec{H_\perp}, \vec{z_0}\right] = \frac{k_0 \mu}{h}[\vec{H_\perp}, \vec{z_0}]$$

$$\Rightarrow \eta_\perp^{(TE)} = \frac{k_0 \mu}{h} = \frac{k_0 \sqrt{\mu}\cdot\sqrt{\mu}\cdot\sqrt{\varepsilon}}{h \cdot \sqrt{\varepsilon}} = \frac{k}{h}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$z<0$: $\vec{E_\perp} = \vec{E_0}(\vec{r_\perp})e^{-ih_1 z} + \Gamma \vec{E_0}(\vec{r_\perp})e^{+ih_1 z}$

$$\vec{H_\perp} = \frac{1}{\eta_{\perp 1}}[\vec{z_0}, \vec{E_0}(\vec{r_\perp})]e^{-ih_1 z} + \frac{1}{\eta_{\perp 1}}\cdot\Gamma[(-\vec{z_0}), \vec{E_0}(\vec{r_\perp})]e^{ih_1 z}$$

$z>0$:

$$\vec{E_\perp} = D\vec{E_0}(\vec{r_\perp})e^{-ih_2 z}$$

$$\vec{H_\perp} = \frac{1}{\eta_{\perp 2}}[\vec{z_0}, \vec{E_0}(\vec{r_\perp})]e^{-ih_2 z} \qquad h^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \varkappa^2$$

$\mu = 1$

Граничные условия: $z=0$: $\begin{cases} \vec{E_0}(1+\Gamma) = \vec{E_0}D \\ \frac{1}{\eta_{\perp 1}}(1-\Gamma)[\vec{z_0}, \vec{E_0}] = \frac{D}{\eta_{\perp 2}}[\vec{z_0}, \vec{E_0}] \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\Gamma = D \\ \frac{1}{\eta_{\perp 1}}(1-\Gamma) = \frac{D}{\eta_{\perp 2}} \end{cases} \rightarrow D = \frac{\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 1}}(1-\Gamma)$$

$$1+\Gamma = \frac{\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 1}}(1-\Gamma) \iff 1+\Gamma = \frac{\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 1}} - \frac{\eta_{\perp 2}\Gamma}{\eta_{\perp 1}}$$

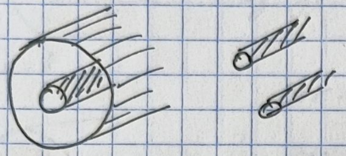
$$\Gamma + \frac{\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 1}}\Gamma = \frac{\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 1}} - 1$$

$$\Gamma\,\frac{\eta_{\perp 1}+\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 1}} = \frac{\eta_{\perp 2}-\eta_{\perp 1}}{\eta_{\perp 1}} \Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{\eta_{\perp 2}-\eta_{\perp 1}}{\eta_{\perp 2}+\eta_{\perp 1}}}$$

$$\boxed{T = \frac{\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 1}}\left(1 - \frac{\eta_{\perp 2}-\eta_{\perp 1}}{\eta_{\perp 2}+\eta_{\perp 1}}\right) = \frac{\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 1}}\left(\frac{2\eta_{\perp 1}}{\eta_{\perp 2}+\eta_{\perp 1}}\right) = \frac{2\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 1}+\eta_{\perp 2}}}$$

Двухпроводная линия.

TEM: $æ = 0$ − распр-ся в многосвязных волноводах.



$$\Delta\varphi^{(e)} = 0$$

Дирихле: $\varphi|_{l_i} = C_i = \text{const}$.

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\varphi^{(e)}\\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi^{(e)}, \vec{z}_0]\end{aligned}\right\} e^{i\omega t - ikz}$$

$$h = k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

(r, ψ, z): цилиндр. с.к.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} = 0 \Rightarrow \text{TEM: } \varphi = \varphi(r) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} R_m(r)\begin{Bmatrix}\cos(m\psi)\\ \sin(m\psi)\end{Bmatrix}$$

(т.к. $\varphi = \text{const}$ на границах)

$$\hookrightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0 \qquad r\frac{d\varphi}{dr} = C_1$$

$E_z \sim æ \Rightarrow E_z = 0$

$$\varphi(r) = C_1\ln r + C_2$$

$$\nabla_\perp\varphi(r) = \vec{r}_0\frac{d\varphi}{dr} = \vec{r}_0\frac{C_1}{r}$$

$$\vec{E}_\perp = -\frac{k}{k_0\varepsilon\mu}\vec{r}_0\cdot\frac{C_1}{r}e^{i\omega t - ikz}$$

$$\vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu}\frac{C_1}{r}\underbrace{[\vec{r}_0, \vec{z}_0]}_{-\vec{\psi}_0}e^{i\omega t - ikz} = -\vec{\psi}_0\frac{C_1}{\mu r}e^{i\omega t - ikz} = H_{\perp\psi}\vec{\psi}_0$$

$$\frac{E_\perp}{H_\perp} = \frac{E_r}{H_\psi} = \frac{k}{k_0\varepsilon} = \frac{k_0\sqrt{\varepsilon\mu}}{k_0\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$ как в однородной среде

$$\vec{E} = \vec{r}_0\frac{A}{r}e^{i\omega t - ikz}; \quad \vec{H} = \vec{\psi}_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{A}{r}e^{i\omega t - ikz}$$ − структура поля в коаксиальной линии такая же как в статике.

$E \sim \nabla_\perp\varphi$; $(\nabla_\perp)^2\varphi = 0$

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &\to V(z,t)\\ \vec{H} &\to I(z,t)\end{aligned}\right\}$$ описание волн в терминах токов и напряжений.

$z = \text{const}$; $V(z,t) = \int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l}$

$$I(z,t) = \frac{c}{4\pi}\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} \qquad \left(\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}I(z,t)\right)$$

$$I = I_0 e^{i\omega t - ikz} \qquad V = V_0 e^{i\omega t - ikz}$$

$Z_в = \frac{V_0}{I_0}$ — волновое сопротивление линий.

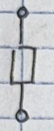
$Z_в \neq Z_н \Rightarrow V^{(-)} = V_0^{(-)} e^{i\omega t + ikz}$; $I^{(-)} = -I_0^{(-)} e^{i\omega t + ikz}$

$\Rightarrow \frac{V_0^{(-)}}{I_0^{(-)}} = -Z_в$. $\Rightarrow \frac{V_0^{(-)}}{V_0} = \Gamma$

$V = V_0 e^{-ikz} + \Gamma V_0 e^{ikz}$

$I = \frac{V_0}{Z_в} e^{-ikz} - \frac{V_0}{Z_в} \Gamma e^{ikz}$

$$Z_н = \frac{V(z)}{I(z)}\Big|_{z=0} \Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в}}$$



$\frac{V_н}{I_н} = Z_н$; $Z_н = R$; $Z_н = i\omega L$; $Z_н = \frac{1}{i\omega C}$

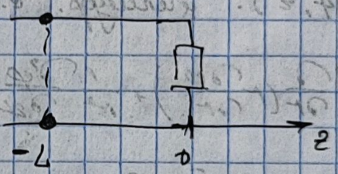
№10.23 Γ - ? ; $Z(L)$ - ? $Z_в$. Если к концу линии подключена нагрузка:

а) C - ёмкость: $Z_н = \frac{1}{i\omega C}$.

$$\Gamma = \frac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в} \Rightarrow \Gamma = \frac{\frac{1}{i\omega C} - Z_в}{\frac{1}{i\omega C} + Z_в} = \frac{1 - i\omega C Z_в}{1 + i\omega C Z_в} \Rightarrow |\Gamma| = 1.$$

$$Z(-L) = Z_в \cdot \frac{Z_н + i Z_в\, tg(kL)}{Z_в + i Z_н\, tg(kL)}$$

$$\Rightarrow Z(L) = Z_в \frac{\frac{1}{i\omega C} + i Z_в\, tg(kL)}{Z_в + \frac{1}{\omega C} tg(kL)}$$



Д/З: ~~10.23~~, ~~10~~.22, ~~10~~.24

б) L - индуктивность: $Z_н = i\omega L \cdot \frac{1}{c^2}$ ← в СГС.

$$\Gamma = \frac{\frac{i\omega L}{c^2} - Z_в}{\frac{i\omega L}{c^2} + Z_в} \Rightarrow |\Gamma| = 1$$

$$Z(-L) = Z_в \cdot \frac{\frac{i\omega L}{c^2} + i Z_в\, tg(kL)}{Z_в + \frac{i \cdot i\omega L}{c^2} tg(kL)} = \frac{Z_в \cdot i\left(\frac{\omega L}{c^2} + Z_в\, tg(kL)\right)}{Z_в - \frac{\omega L}{c^2} tg(kL)}$$

в) Сопротивление $R = Z_в$.

$$\Gamma = \frac{Z_в - Z_в}{2 Z_в} = 0$$

$$\Gamma(-L) = Z_в \cdot \frac{Z_в(1 + i\, tg(kL))}{Z_в(1 + i\, tg(kL))} = Z_в$$

г) $Z_{в1}$.

$$\Gamma = \frac{Z_{в1} - Z_в}{Z_{в1} + Z_в} \ ; \ \Gamma(-L) = Z_в \frac{Z_{в1} + i Z_в\, tg(kL)}{Z_в + i Z_{в1}\, tg(kL)}$$

д) $R = 0$ (линия закорочена) $\Rightarrow Z_н = 0$

$\Gamma = -1$.

$$\Gamma(-L) = Z_в \cdot \frac{i Z_в\, tg(kL)}{Z_в} = i Z_в\, tg(kL)$$

е) $R = \infty$ (линия разомкнута)

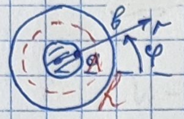
$$\Gamma = \frac{1 - \frac{z_в}{z_н}}{1 + \frac{z_в}{z_н}} = \{z_н \to \infty\} = 1$$

$$Z(-L) = z_в \cdot \frac{z_н + i z_в\, tg(kL)}{z_в + i z_н\, tg(kL)} = \{z_н \to \infty\} = z_в \cdot \frac{1}{i\, tg(kL)} = -i z_в\, ctg(kL)$$

№10.22. Рассчитать эквивалентные L и C, и $z_в$ для:

а) коаксиальной линии с радиусами a и b:

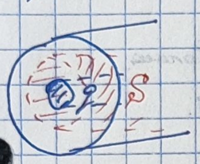
По опр-ю: $C = \frac{q}{V}$



Из ур-ий Максвелла: $\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = 4\pi q$

$\varepsilon, \mu = 1$.

$$2\pi r \cdot l \cdot E_r = 4\pi \cdot q_{лин} \cdot l \Rightarrow E_r = \frac{2 q_{лин}}{r}$$



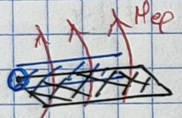
$$V = \int_a^b E_r\, dr = 2 q_{лин} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow C_{лин} = \frac{q_{лин}}{V} = \frac{1}{2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

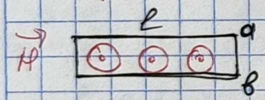
$$\oint_l \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow H_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow H_\varphi = \frac{2I}{cr}$$

Тогда поток через пов-ть, пронизанную $\vec{H}$:

$$\Phi = \iint_S H_\varphi\, dS = l \cdot \int_a^b \frac{2I}{cr}\, dr = \frac{2Il}{c} \ln\frac{b}{a} = \frac{LI}{c}$$



Сравнивая с $\Phi = \frac{LI}{c}$

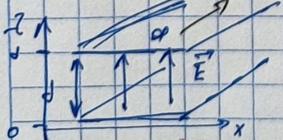


$$L_{лин} = 2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad z_в = \sqrt{\frac{L_{лин}}{C_{лин}}}\,\frac{1}{c}$$

$$z_в = \frac{V}{I} = \frac{2 q_{лин} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{I} = \{ I = \quad q n v S = q_{лин} \cdot c \} =$$

$$= \frac{2 q_{лин} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{q_{лин} \cdot c} = \frac{2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L_{лин}}{C_{лин}}}$$

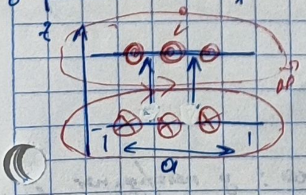
б) полосковая линия, обр. 2мя метал. лентами ширины a и расст-м между ними $d \ll a$



Аналогично:

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = 4\pi q \Leftrightarrow E_z \cdot a l = 4\pi q_{лин} \cdot l$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{4\pi q_{лин}}{a}$$



$$V = \int_0^d E_z\, dz = \frac{4\pi q_{лин}}{a} d$$

$$C_{лин} = \frac{q_{лин}}{V} = \frac{a}{4\pi d}$$

$$\oint_l \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I \Leftrightarrow H_x \cdot a = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow H_x = \frac{4\pi I}{ca}$$

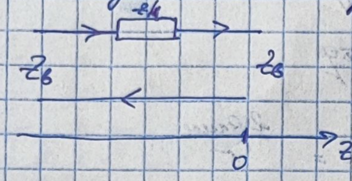
$$\Phi = \iint_S H_x\, dS = l \cdot \int_0^d \frac{4\pi I}{ac}\, dz = \frac{4\pi I}{ac}\, l d = \frac{L I}{c}$$

$$\Rightarrow L_{пог} = \frac{4\pi d}{a}$$

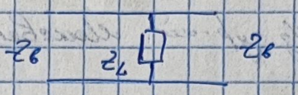
$$\Rightarrow Z_в = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L_{пог}}{C_{пог}}} = \frac{4\pi d}{ac}.$$

№10.24 $Z_в \equiv Z_{н}$; $Z_н \equiv Z_L$, если нагрузка включена в линию:

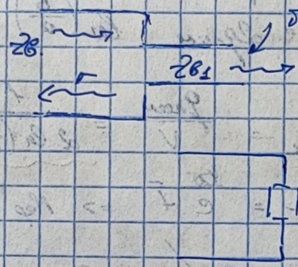
а) последовательно (в разрыв одного из проводов)



б)

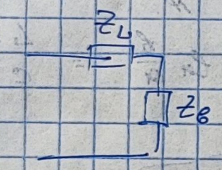


1 способ: $\Gamma = \dfrac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в}$

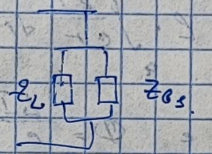


т.к. тут много бег. волн. сложно заменить.

а)



б)

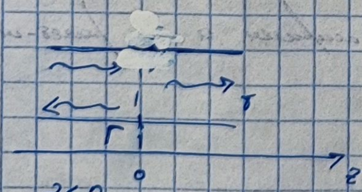


$\Rightarrow Z_н = Z_L + Z_в$ $\quad\Rightarrow \dfrac{1}{Z_н} = \dfrac{1}{Z_L} + \dfrac{1}{Z_в}.$

их подставить в Γ

2 способ (строгий):

Z_L - элемент с сосредоточенными параметрами.



, 0 напротив нагрузки

Γ.д. $z = 0$.

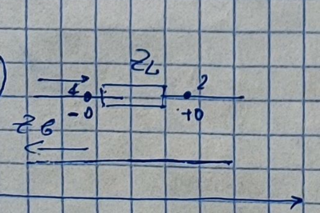
$z<0$: $V = e^{-ikz} + \Gamma e^{+ikz}$

$$I = \frac{1}{Z_в} e^{-ikz} - \frac{\Gamma}{Z_в} e^{+ikz}$$

$z>0$: $V = \tau e^{-ikz}$

$$I = \frac{\tau}{Z_в} e^{-ikz}$$

а)



Условие для непрерывности тока у нагрузки (слева и справа)

$I|_{z=-0} = I_1$; $I|_{z=+0} = I_2$

$V|_{z=-0} = V_1$ $\quad V|_{z=+0} = V_2$

Тогда при $z=0$:

$I_1 = I_2$ — сколько заряда входит в Z_L столько и выходит.

$V_1 - V_2 = I Z_L$ — падение напряжения на нагрузке

$z=0$: $V_1 = 1+\Gamma$ $\qquad V_2 = \tau$

$I_1 = \frac{1}{Z_в}(1-\Gamma)$ $\qquad I_2 = \frac{\tau}{Z_в}$

$\Rightarrow I_1 = I_2 \Rightarrow 1-\Gamma = \tau$

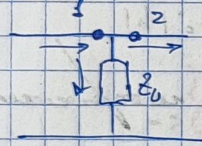
$V_1 - V_2 = Z_L I \Rightarrow 1+\Gamma-\tau = Z_L \frac{\tau}{Z_в}$

$$\cancel{1}+\Gamma-\cancel{1}+\Gamma = Z_L \cdot \frac{1-\Gamma}{Z_в}$$

$$2\Gamma = \frac{Z_L}{Z_в} - \frac{Z_L}{Z_в}\Gamma$$

$$\Gamma\left(2+\frac{Z_L}{Z_в}\right) = \frac{Z_L}{Z_в}$$

$$\Gamma \cdot \frac{2Z_в + Z_L}{Z_в} = \frac{Z_L}{Z_в} \Rightarrow \Gamma = \frac{Z_L}{2Z_в + Z_L}$$

б) 

$z=0$: изменяется ГУ — теперь непрерывен потенциал

$V_1 = V_2$; $I_1 = I_2 + \frac{V}{Z_L}$

$V_1 = 1+\Gamma$; $V_2 = \tau$

$I_1 = \frac{1}{Z_в}(1-\Gamma)$; $I_2 = \frac{\tau}{Z_в}$

$$\begin{cases} 1+\Gamma = \tau \\ \frac{1}{Z_в}(1-\Gamma) - \frac{\tau}{Z_в} = \frac{\tau}{Z_L} \end{cases}$$

$$\frac{1}{Z_в}(1-\Gamma) - \frac{1+\Gamma}{Z_в} = \frac{1+\Gamma}{Z_L}$$

$$-2\Gamma = \frac{Z_в}{Z_L} + \frac{Z_в}{Z_L}\Gamma$$

$$-\frac{Z_в}{Z_L} = \Gamma\left(\frac{Z_в}{Z_L}+2\right) = \frac{\Gamma \cdot (Z_в + 2Z_L)}{Z_L} \Rightarrow \Gamma = \frac{-Z_в}{Z_в + 2Z_L}$$

?

Потери в линиях передачи.

$\sigma = \infty$ — идеальный волновод, в реальности $\sigma \neq \infty$

т.е. часть энергии уходит на тепло.

1) $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$, $\mu = \mu' - i\mu''$, $\sigma = \infty$ — можно ввести диэлектрик с потерями, а $\sigma = \infty$

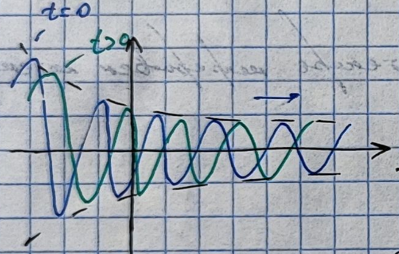
2) или диэл-к без потерь, но стенки с конечной проводимостью.

$$h = h' - ih''$$

$$E_y \sim e^{i\omega t - ihz} = e^{i\omega t - ih'z - h''z}$$

$$E_{y\,физ} \sim e^{-h''z}\cos(\omega t - h'z)$$

$$\lambda_в = \frac{2\pi}{h'}; \quad v_ф = \frac{\omega}{h'}, \quad v_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial h'}; \quad L = \frac{1}{h''}$$



$\sigma = \infty$ $\omega < \omega_{кр}$; $h = -i|h|$

Здесь $\boxed{\omega > \omega_{кр}}$, но с потерями!

$\sigma \neq \infty$ → амплитуда начинает затухать.

Говорят, что поле затухает по мере распространения.

Поле проникает в стенки, и теперь поперечное волновое число будет зависеть от ω и σ:

1. $\varkappa(\omega, \sigma) = \varkappa' - i\varkappa''$

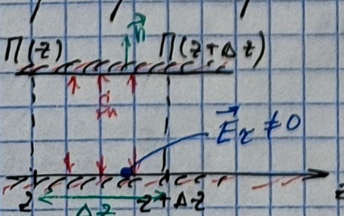
$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2} = h' - ih''$$

2. Пропадает строгое разделение на TE и TM волны

$\sigma \neq \infty$: $|E_z| \ll |\vec{E}_\perp|$

Условие хорошего проводника: $\varepsilon_к = \varepsilon - i\underbrace{\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)}_{\gg \varepsilon}$ $\Rightarrow 4\pi\sigma \gg \omega$

При хорошей пр-ти поле не должно сильно изменяться. (структура)



Мощность через сечение: $\Pi(z)$

часть энергии будет диссипировать в стенки, т.к. вектор Пойнтинга направл. не только по z.

$$\Pi(z) = \Pi(z + \Delta z) + \Delta P_{пот}$$

$$P_{\substack{ст\\ \text{стенок}}} = \frac{\Delta P_{пот}}{\Delta z} \Rightarrow \Delta P_{пот}$$

$$\frac{\Pi(z+\Delta z)-\Pi(z)}{\Delta z} = -P_{ст}$$

В пределе $\Delta z \to 0$: $\boxed{\frac{d\Pi(z)}{dz} = -P_{ст}}$

$$\Pi(z) \sim \iint_{S_\perp} S_z\,dx\,dy \sim e^{-2h''z}, \quad \text{т.к.} \quad |\vec{E}_\perp|, |\vec{H}_\perp| \sim e^{-h''z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Pi(z)}{dz} = -2h''\Pi(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{h'' = \frac{P_{ст}}{2\Pi}}$$

$$\Pi = \iint_{S_\perp} S_z\,dS = \frac{c}{8\pi} Re \iint \left(\vec{z}_0 \cdot [\vec{E}_\perp \times \vec{H}_\perp^*]\right) dS$$

Используя импедансное поперечное соотношение:

$$\vec{E}_\perp = \eta_\perp [\vec{H}_\perp \times \vec{z}_0]$$

$$\Rightarrow [\vec{E}_\perp \times \vec{H}_\perp^*] = \eta_\perp [[\vec{H}_\perp \times \vec{z}_0] \times \vec{H}_\perp^*] = -\eta_\perp [\vec{H}_\perp^* \times [\vec{H}_\perp \times \vec{z}_0]] =$$

$$= -\eta_\perp \left(\vec{H}_\perp (\vec{H}_\perp^* \cdot \vec{z}_0) - \vec{z}_0 (\vec{H}_\perp \cdot \vec{H}_\perp^*)\right) = \vec{z}_0\, \eta_\perp |\vec{H}_\perp|^2$$

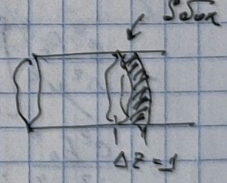
$$\Rightarrow \boxed{\Pi = \frac{c}{8\pi} Re\, \eta_\perp \iint_{S_\perp} |\vec{H}_\perp|^2 dS}$$

или $\boxed{\Pi = \frac{c}{8\pi} Re \frac{1}{\eta_\perp} \iint_{S_\perp} |\vec{E}_\perp|^2 dS}$

$\eta_\perp = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{h}{k}\right)^{\pm 1}$ приближённо можно считать:

$$Re\,\eta_\perp = \sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}} \left(\frac{h'}{k}\right)^{\pm 1}, \quad \text{если} \quad h'' \ll h'$$

Как оценить мощность потерь на стенках?



$$\Delta P_{пот} = \iint_{S_{бок}} S_n \cdot dS = \Delta z \oint_l S_n\,dl \quad \text{т.к. } \Delta z = 1.$$

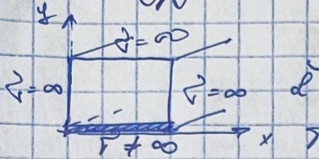
Если проводник хороший можно исп-ть ГУ Леонтовича:

$$\vec{E}_\tau = \eta_s [\vec{n} \times \vec{H}]$$

$$\Rightarrow P_{ст} = \frac{c}{8\pi} Re \oint \left(\vec{n} \cdot [\vec{E}_\tau \times \vec{H}_\tau^*]\right) = \frac{c}{8\pi} Re\, \eta_s \oint_l |\vec{H}_\tau|^2 dl$$

$$\boxed{h'' = \frac{Re\, \eta_s \oint_l |\vec{H}_\tau|^2 dl}{2\, Re\, \eta_\perp \iint_{S_\perp} |\vec{H}_\perp|^2 dS}}$$

№10.16 TE_{10} в прямоуг. волноводе $a>b$. Если одна из стенок имеет ζ, а 3 других $\zeta\to\infty$. Найти h'' - ?



$$\oint\limits_{\ell}|\vec{H}_\tau|^2 d\ell = \int\limits_0^a \left(|H_x|^2+|H_z|^2\right)dx$$

TE_{10}: H_x; H_z.

$$\eta_s = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_\kappa}} = \left\{\varepsilon_\kappa \approx -i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right\} = \sqrt{-\frac{\mu\omega}{i4\pi\sigma}} = \sqrt{i}\sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}}$$

$$\iint\limits_{S_\perp}|\vec{H}_\perp|^2 dS = \int\limits_0^b\int\limits_0^a |H_x|^2 dx\,dy$$

$$h'' = \frac{\operatorname{Re}\eta_s \oint\limits_{\ell}|\vec{H}_\tau|^2 d\ell}{2\operatorname{Re}\eta_\perp \iint\limits_{S_\perp}|\vec{H}_\perp|^2 dS}$$

Такую краевую задачу решали, для неё:

$$E_y = E_0\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{i\omega\mu}{c}\vec{H}$$

$$\vec{H} = +\frac{ic}{\omega\mu}\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{ic}{\omega\mu}\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 0 & E_y & 0\end{vmatrix} = \frac{ic}{\omega\mu}\left(\vec{z}_0\frac{\partial E_y}{\partial x} - \vec{x}_0\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{ic}{\omega\mu}\left(\vec{z}_0\cdot\frac{\pi}{a}E_0\cos\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)} + \vec{x}_0 ih E_0\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)}\right)$$

$\Rightarrow H_y = 0$

$$H_x = -\frac{ch}{\omega\mu}E_0\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)}$$

$$H_z = \frac{ic\pi}{\omega\mu a}E_0\cos\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)}$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{\ell}|\vec{H}_\tau|^2 d\ell = \int\limits_0^a\left(|H_x|^2+|H_z|^2\right)dx = \int\limits_0^a\left(\frac{c^2h^2}{\omega^2\mu^2}E_0^2\sin^2\frac{\pi x}{a} + \frac{c^2\pi^2}{\omega^2\mu^2a^2}E_0^2\cos^2\frac{\pi x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{c^2E_0^2}{\omega^2\mu^2}\left[\int\limits_0^a h^2\sin^2\frac{\pi x}{a}dx + \int\limits_0^a\frac{\pi^2}{a^2}\cos^2\frac{\pi x}{a}dx\right] =$$

$$= \frac{c^2E_0^2}{\omega^2\mu^2}\left[h^2\frac{a}{2}+\pi^2\frac{a}{2a^2}\right] = \frac{c^2E_0^2 a}{\omega^2\mu^2 2}\underbrace{\left[h^2+\frac{\pi^2}{a^2}\right]}_{k^2} = \frac{c^2E_0^2ak^2}{2\omega^2\mu^2}$$

$$\iint\limits_{S_\perp}|\vec{H}_\perp|^2 dS = \int\limits_0^b\int\limits_0^a|H_x|^2dx\,dy = \int\limits_0^b\int\limits_0^a\frac{c^2h^2}{\omega^2\mu^2}E_0^2\sin^2\frac{\pi x}{a}dx\,dy =$$

$$= \frac{c^2h^2E_0^2}{\omega^2\mu^2}\cdot b\cdot\frac{a}{2} = \frac{ab}{2}\cdot E_0^2\frac{h^2c^2}{\omega^2\mu^2}$$

$$\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow \eta_s = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} \quad \operatorname{Re}\eta_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\eta_s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\sigma}}$$

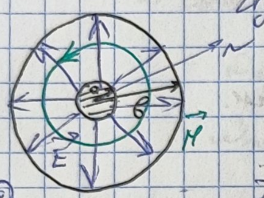
$$\eta_\perp = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{k}{h}\right)$$

$$h'' = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\sigma}}\cdot\frac{c^2 E_0^2 a k^2}{2\omega^2\mu^2}}{2\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{k}{h}\right)\cdot\frac{ab}{2}E_0^2\frac{k^2c^2}{\omega^2\mu^2}} = \{\varepsilon=\mu=1\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}\cdot a k^2 k}{4h\cdot ab k^2} = \frac{k}{2bh}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \Rightarrow h'' = \frac{k}{2bh}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}$$

№10.18 (б) Аналогично 10.16 для ТЕМ в неидр. проводящей линии. ($\sigma \neq \infty$)

Из 10.22 находим выражения для полей:



$\odot_z$

$$E_r = \frac{2q_{лин}}{r} \equiv \frac{A}{r}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{i\omega}{c}\vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{ic}{\omega}\operatorname{rot}\vec{E}$$

Для ТЕМ-волны: $\eta_\perp = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$$\vec{E}_\perp = \eta_\perp[\vec{H}_\perp, \vec{z}_0] \cdot [\vec{z}_0$$

$$[\vec{z}_0, \vec{E}_\perp] = \eta_\perp(\vec{H}_\perp - \vec{z}_0\cdot\underbrace{(\vec{z}_0, \vec{H}_\perp)}_{=0})$$

$$\Rightarrow \vec{H}_\perp = \frac{1}{\eta_\perp}[\vec{z}_0, \vec{E}_\perp] \Rightarrow H_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cdot\frac{A}{r}$$

т.к. $\varepsilon = \mu = 1 \Rightarrow H_\varphi = \frac{A}{r}$

т.к. интегр. по окружн. опр-го радиуса

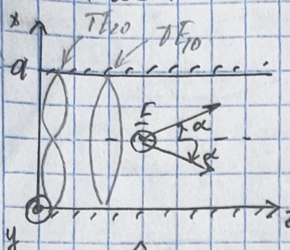
$$\oint_L |\vec{H}_\tau|^2 dl = \int_0^{2\pi}\frac{A^2}{b^2}b\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\frac{A^2}{a^2}\cdot a\,d\varphi = 2\pi A^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$$

$$\eta_s = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_n}} = \sqrt{i\frac{\omega}{4\pi\sigma}} \Rightarrow \operatorname{Re}\eta_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}$$

$$\iint_S |\vec{H}_\perp|^2 dS = \int_a^b \frac{A^2}{r^2}\cdot 2\pi r\,dr = 2\pi A^2 \ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow h'' = \frac{\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\cdot 2\pi A^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)}{2\cdot 2\pi A^2\ln\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\cdot\frac{a+b}{2ab}\ln^{-1}\frac{b}{a}$$

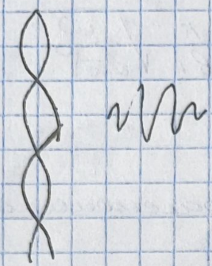
18.04.23г. **Концепция Бриллюэна.**



$$\vec E = \vec E_0(\vec r_\perp)\, e^{-ihz}$$

$$\vec E = \sum_i \vec E_n\, e^{-i\vec k_{\perp n}\vec r_\perp - ihz}$$

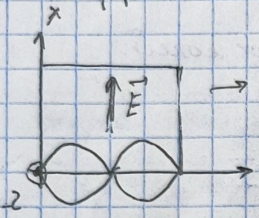
Любую моду в волноводе можно представить в виде суммы плоских волн.



→ нужно, чтобы узел попадал на стенки

$$\vec E_\tau\big|_\Sigma = 0$$

TE_{m0} – м.б. получено в виде суперпоз. двух пл. волн.



→ TE_{0n}

=> TE_{mn}, TM_{mn} – в виде 4х волн.

$$\varphi^{(m)} = A\cos\Big(\underbrace{\frac{m\pi}{a}}_{\varkappa_x} x\Big)\cos\Big(\underbrace{\frac{n\pi}{b}}_{\varkappa_y} y\Big)$$

$$e^{\pm i\varkappa_x x \pm i\varkappa_y y}$$

$$\Rightarrow \vec k = \pm\frac{m\pi}{a}\vec x_0 \pm \frac{\pi n}{b}\vec y_0 + h\vec z_0$$

$$\varkappa^2_{mn} = \Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^2$$

$k_x \to \lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$

$k_y \to \lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}$ $\Rightarrow k_x^2 + k_y^2 + \underbrace{k_z^2}_{h^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu$ дисп. соотн.

Для того чтобы выполн. ГУ:

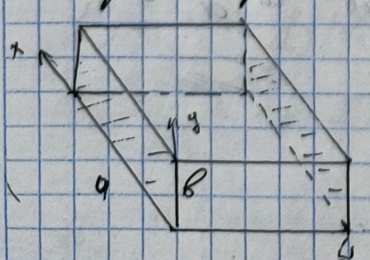
$$m\cdot\frac{\lambda_x}{2} = a \Rightarrow \frac{2a}{m} = \frac{2\pi}{k_x} \to k_x = \frac{m\pi}{a}$$

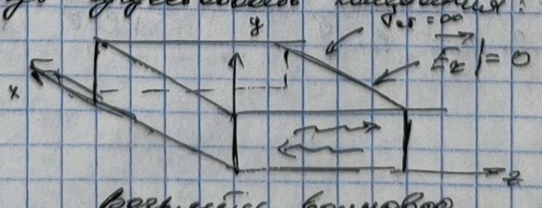
аналогично для y: $k_y = \frac{n\pi}{b}$

=> дискретный набор волновых векторов.

$$\Rightarrow h(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \Big[\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^2\Big]}$$

В резонаторе могут существовать колебания:



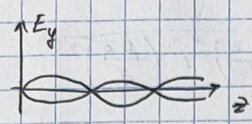


Возьмём волновод и закоротим слева и справа стенку.

Возьмём две волны с данным. стр. поля, но распр. в разные стороны.

$$\vec E = \vec E_0(\vec r_\perp)\, e^{i\omega t - ihz} - \vec E_0(\vec r_\perp)\, e^{i\omega t + ihz} =$$

$= \vec{E}_0(\vec{r}_\perp)(-2i)\sin(hz)\,e^{i\omega t}$



$\vec{E}\big|_{z=0} = 0 \quad ; \quad \vec{E}\big|_{z=L} = 0$

$\Rightarrow \sin hL = 0$

$hL = p\pi \quad \rightarrow \quad p = (0), 1, 2, 3, \dots$

$h_p = \dfrac{p\pi}{L}$

Но должно вып-ся дисп. ур-е: $\underbrace{k^2}_{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu} = \varkappa_{mn}^2 + h_p^2$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{mnp}^2}{c^2}\varepsilon\mu = \varkappa_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2$$

$\Rightarrow$ Собств. частоты:

$$\omega_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\varkappa_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}$$

$$\omega_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}$$

Волны аналогично можно делить на TE_{mnp} и TM_{mnp}

$m, n, p = (0), 1, 2, 3, \dots$

$TE_{mnp} \rightarrow m, n = (0), 1, 2, \quad p \neq 0$

$TM_{mnp} \rightarrow m, n \neq 0, \quad p = (0), 1, 2, 3 \dots$

Низшая мода $\omega_{н.мода} = \min\{\omega_{mnp}\}$ $\rightarrow$ для нашего рисунка $TE_{101} \Rightarrow TE_{10}$

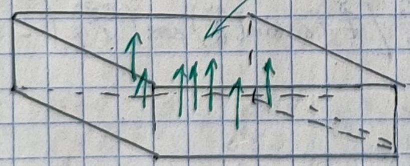
Помним сначала для TE_{10}: $\vec{E}_0(\vec{r}_\perp) = \vec{y}_0 C_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$

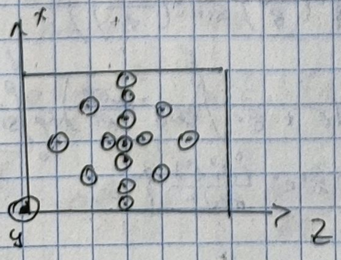
TE_{101}: $\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$

Густота меняется как вдоль оси z так и x

макс. густота в центре

Колебания на частоте:

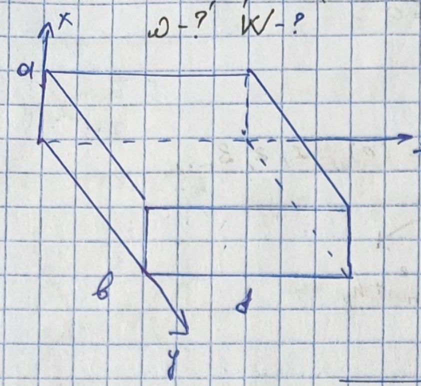




№10.33

Дано: a, b, d $(a<b<d)$; $E_{max} = E_0$

ω - ? W - ?



$$\omega_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}$$

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{d}$ => Ее мин. макс. тогда чтобы $\omega_{mnp} \to min$ если

$m=0$, $n, p = 1$.

$$\Rightarrow \omega_{011} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{(0)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi}{d}\right)^2} = c\cdot\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi}{d}\right)^2} = \pi c\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{d}\right)^2}$$

Низшая мода сонапр. с нашим ребром

$$\vec E = \vec x_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)e^{i\omega_{11}t}$$

Ищем W-?

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\vec E^2 + \mu\vec H^2\right)$$

$$\overline{w}^\tau = \frac{1}{16\pi}\left(\varepsilon|\vec E|^2 + \mu|\vec H|^2\right)$$

$$\overline{W}^\tau = \iiint_V \overline{w}^\tau dV = \overline{W_E}^\tau + \overline{W_H}^\tau$$

Если $\varepsilon \neq \varepsilon(\omega)$, $\mu \neq \mu(\omega)$ $\Rightarrow \overline{W_E}^\tau = \overline{W_H}^\tau$

$$\Rightarrow \overline{W}^\tau = 2\overline{W_E}^\tau = \frac{1}{8\pi}\iiint \varepsilon|\vec E|^2 dV = \frac{1}{8\pi}\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^d E_0^2\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin^2\frac{\pi z}{d}dz =$$

$$= \frac{a}{8\pi}E_0^2\cdot\frac{bd}{4} = \frac{abdE_0^2}{32\pi}$$

Через $\overline{W_H}^\tau$: $\mathrm{rot}\vec E = -\frac{\mu}{c}i\omega\vec H = -\frac{i\omega}{c}\vec H \Rightarrow \vec H = -\frac{c}{\omega i}\mathrm{rot}\vec E = \frac{ci}{\omega}\mathrm{rot}\vec E$

$$\vec H = \frac{ci}{\omega}\begin{vmatrix}\vec x_0 & \vec y_0 & \vec z_0\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ E_x & 0 & 0\end{vmatrix} = \left\{\vec y_0\frac{\partial E_x}{\partial z} - \vec z_0\frac{\partial E_x}{\partial y}\right\}\cdot\frac{ci}{\omega} = \left\{\vec y_0\left[\frac{\pi}{d}E_0\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \vec z_0\cdot\left[\frac{\pi}{b}E_0\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)\right]\right\}\cdot\frac{ic}{\omega}$$

$$|\vec H|^2 = \frac{c^2}{\omega^2}\left(\frac{\pi^2}{d^2}\cdot E_0^2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos^2\left(\frac{\pi z}{d}\right) + \frac{\pi^2}{b^2}E_0^2\cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{d}\right)\right)$$

$$\overline{W_H}^\tau = \frac{1}{16\pi}\frac{c^2}{\omega^2}\cdot a\cdot E_0^2\cdot\left[\underbrace{\int_0^b\frac{\pi^2}{d^2}\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)dy}_{b/2}\underbrace{\int_0^d\cos^2\left(\frac{\pi z}{d}\right)dz}_{d/2} + \frac{\pi^2}{b^2}\underbrace{\int_0^b\cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)dy}_{b/2}\underbrace{\int_0^d\sin^2\left(\frac{\pi z}{d}\right)dz}_{d/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\frac{c^2 a\pi E_0^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{d^2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{d}{2} + \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{d}{2}\right) = \left\{\omega^2 = \pi^2c^2\frac{(b^2+d^2)}{b^2d^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{a\pi E_0^2\, b^2d^2}{\pi^2\cdot(b^2+d^2)}\cdot\frac{(b^2+d^2)}{4bd} = \frac{abdE_0^2}{64\pi}$$

$$\Rightarrow \overline{W}^\tau = 2\overline{W_H}^\tau = \frac{abdE_0^2}{32\pi}$$

В случае плазмы:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \{\omega_p = const\}$$

$$\varkappa^2 = \varkappa_{np}^2 + h_p^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = K_{mnp}^2$$ → по отдельности над. смотреть E и M.

$$\omega^2 - \omega_p^2 = c^2 K_{mnp}^2$$

$$\omega = c\sqrt{\frac{\omega_p^2}{c^2} + K_{mnp}^2} = c\sqrt{\frac{\omega_p^2}{c^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}$$

Для каждой моды

$$\omega_{011} = c\sqrt{\frac{\omega_p^2}{c^2} + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$, но структура поля не изменится.

Объёмная пл-ть энергии в случае дисперсии:

$$\overline{w}^{\tau} = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}|\vec{E}_0(t)|^2 + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}|\vec{H}_0(t)|^2\right.$$

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\omega\cdot\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\right] = \frac{d}{d\omega}\left[\omega - \frac{\omega_p^2}{\omega}\right] =$$

$$= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\overline{W_E}^{\tau} = \frac{1}{16\pi}\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^d E_0^2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin^2\frac{\pi z}{d}\,dz\cdot\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) =$$

$$= \frac{a}{16\pi}\cdot E_0^2\cdot\frac{bd}{4}\cdot\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

$$\omega^2 = c^2\cdot\left(\frac{\omega_p^2}{c^2} + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2\right)$$

$$\overline{W_H}^{\tau} = \frac{c^2 a\cdot\pi\cdot E_0^2}{16\omega^2}\cdot\left(\frac{b}{4d} + \frac{d}{4b}\right) = \frac{c^2\cdot a\pi\cdot E_0^2(b^2 + d^2)}{4bd\cdot 16\omega^2} = \frac{1}{64}\cdot\frac{a\pi}{bd}\frac{(b^2 + d^2)}{\omega^2/c^2}E_0^2$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{d^2}$$

$$\overline{W}^{\tau} = \overline{W_E}^{\tau} + \overline{W_H}^{\tau} = \frac{a\,bd}{64\pi}E_0^2\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) + \frac{a\pi}{bd\,64}\cdot\frac{(b^2 + d^2)c^2}{\omega^2} =$$

$$= \frac{abd}{64\pi}E_0^2 + \frac{abd}{64\pi}E_0^2\cdot\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{a\pi(b^2 + d^2)c^2}{64\omega^2\,bd}E_0^2 =$$

$$= \frac{abd}{64\pi}E_0^2 + \frac{E_0^2}{64}\cdot\left[\frac{a\cdot b^2d^2\omega_p^2 + a\pi^2(b^2 + d^2)c^2}{\omega^2 bd\pi}\right] = \{\text{подставляя } \omega^2\} =$$

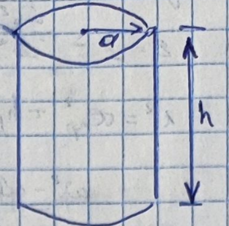
$$= \frac{abdE_0^2}{64\pi} + \frac{E_0^2}{64}\cdot\frac{\{ab^2d^2\omega_p^2 + a\pi^2(b^2 + d^2)c^2\}\cdot b^2d^2c^2}{bd\cdot\pi\; c^2(\omega_p^2 b^2d^2 + \pi^2c^2d^2 + \pi^2c^2b^2)} =$$

$$= \frac{abdE_0^2}{64\pi} + \frac{abd}{64\pi}E_0^2 = \frac{abd}{32\pi}E_0^2$$

№10.31

Собственные частоты:

$$\omega_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\varkappa_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2}$$



а) $h >> a$

Для низших мод:

TE_{11}: $\varkappa_{11} = \frac{1,84}{a}$; для TM_{01}: $\varkappa_{01} = \frac{2,405}{a}$

$\Rightarrow TE_{111}$: $\omega_{111} = c\sqrt{\left(\frac{1,84}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2}$

т.к. $h >> a$ => всё в основном опр-ся первым слагаемым.

б) $h << a$:

$\frac{\pi p}{h} \vee \varkappa_{mn} \Rightarrow \frac{\pi p}{h\varkappa_{mn}} = \frac{\pi p}{h}\cdot\frac{a}{\mu_{mn}} >> 1$

$\Rightarrow \frac{\pi p}{h} >> \varkappa_{mn}$

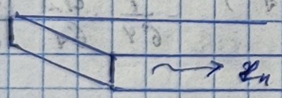
=> Наименьшей модой будет та, у которой можно занулить p. это возможно для TM:

TM_{01}: $\varkappa_{01} = \frac{2,405}{a}$

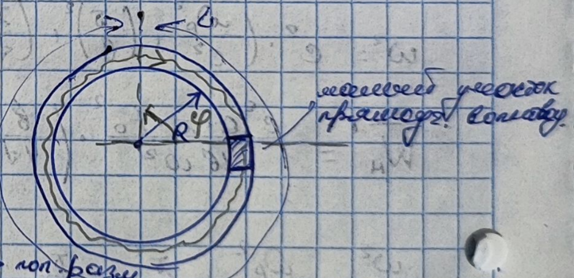
TM_{010}: $\omega_{010} = c\sqrt{\left(\frac{2,405}{a}\right)^2} = c\cdot\frac{2,405}{a}$

№10.32

L, $\varkappa_n$



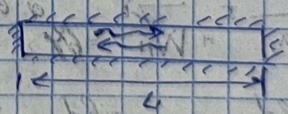
Свернули в колесо.



Найти собств. частоту; $\lambda >> L$; и $R >>$ поп. разм.

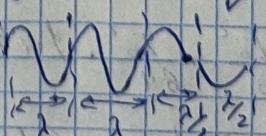
Дисп. соотн: $h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa_n^2}$

Что если бы обр. длинный резонатор.



Т.е. для резонатора д.б.: $L = \frac{\lambda}{2}\cdot p$

Если смотреть как волновод, то половинки брать нельзя, могут в нулевое превр-ся в [illegible]. Поле должно как бы переходить само в себя.



$L = \lambda\cdot p$, $p = 1, 2, 3, 4$

дл. волны в волноводе

$\lambda = \frac{2\pi}{h} \Rightarrow h = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa_n^2} = \frac{2\pi p}{L}$

$\frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa_n^2 = \frac{4\pi^2 p^2}{L^2} \Rightarrow \omega^2 = c^2\left(\frac{4\pi^2 p^2}{L^2} + \varkappa_n^2\right)$

$\omega = c\sqrt{\varkappa_n^2 + \left(\frac{2\pi p}{L}\right)^2}$

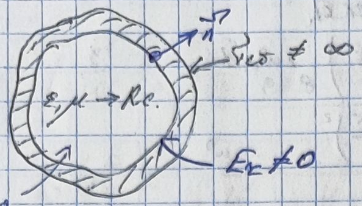
25.04.23г.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\, e^{i\omega t}$$

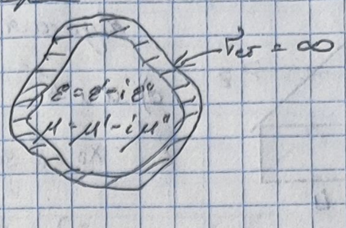
Теперь хотим учесть потери.

Потери двух видов:

(1)

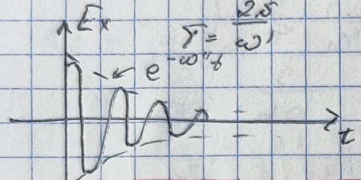


(2)



$$\omega = \omega' + i\omega''$$

$$\vec{E}_{физ}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\, e^{-\omega'' t} \cos(\omega' t + \alpha)$$



$$\boxed{Q = \omega' \frac{\overline{W}^{\sigma}}{P_{пот}}} \quad \boxed{= \frac{\omega'}{2\omega''}}$$

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = -P_{пот}, \qquad \overline{W}^{\sigma} = \frac{1}{16\pi} \iiint \left(\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2 \right)$$

$$W \sim |\vec{E}|^2 \sim e^{-2\omega'' t}$$

$$\Rightarrow \frac{d\overline{W}^{\sigma}}{dt} = -2\omega'' \overline{W}^{\sigma}$$

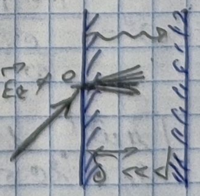
$$\omega'' = \frac{P_{пот}}{2\overline{W}^{\sigma}}$$

$$\omega' \frac{\overline{W}^{\sigma}}{P_{пот}} = 2\pi \frac{\overline{W}^{\sigma}}{T \cdot P_{пот}} \quad \rightarrow Q \text{ - пропорц. число колебаний до затухания.}$$

$W_{пот}$ за T.

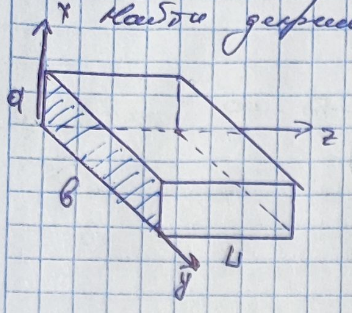
$$P_{пот} = \oint\limits_S (\vec{S} \cdot \vec{n})\, dS = \{\text{аналогично с потерями в волноводе}\} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \eta_s \oint |\vec{H}_\tau|^2 dS$$

$$\overline{W}^{\sigma} = 2\overline{W_E}^{\sigma} = 2\overline{W_H}^{\sigma} = \frac{1}{8\pi} \iiint |\vec{H}|^2 dV$$



$$\Rightarrow \boxed{\omega'' = \frac{c \operatorname{Re} \eta_s \oint |\vec{H}_\tau|^2 dS}{2 \iiint |\vec{H}|^2 dV}}$$

№10.36. a, b, L $(a<b<L)$; σ



Найти декремент затухания ω'' - ? Q - ?

Низшая мода: TE_{011} т.к. a - мин.

а) a и b – неид. стенки.

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)e^{i\omega_{011}t}$$

$$\omega_{011} = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi}{L}\right)^2} \equiv \omega'$$

Считаем $\varepsilon = \mu = 1$.

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{i\omega}{c}\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = -\frac{c}{i\omega}\operatorname{rot}\vec{E}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow H_y = -\frac{c}{i\omega}\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$H_z = +\frac{c}{i\omega}\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$H_y = -\frac{c}{i\omega}E_0\left(\frac{\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$H_z = \frac{c}{i\omega}E_0\left(\frac{\pi}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$\iiint\limits_V |\vec{H}|^2 dV = \int_0^a\int_0^b\int_0^L \left(|H_y|^2+|H_z|^2\right) dz\,dy\,dx = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 E_0^2 \int_0^a dx \int_0^b\int_0^L \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) +$$

$$+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) dy\,dz = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 E_0^2 \cdot a\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{L}{2}\underbrace{\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]}_{\frac{\omega^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{abL E_0^2}{4}$$

$$\operatorname{Re}\eta_s = \operatorname{Re}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_к}} = \left\{\varepsilon_к = \cancel{\varepsilon} - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right\} \approx \operatorname{Re}\sqrt{\frac{\mu}{-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}}} = \operatorname{Re}\sqrt{\frac{i\mu\omega}{4\pi\sigma}} =$$

$$= \left\{\sqrt{i} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}$$

а) $$\oint|\vec{H}_\tau|^2 dS = \iint|H_y|^2 dS = \int_0^a\int_0^b |H_y|^2\Big|_{z=0} dy\,dx = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 E_0^2 \int_0^a dx \int_0^b \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 E_0^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$\delta \equiv \omega'' = \frac{c\cdot\sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}\cdot\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 E_0^2 \frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{ab}{2}}{2\,\frac{abL\,E_0^2}{4}} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\cdot\frac{c^3\cdot\pi^2\cdot 2}{2c^2\left(\frac{\pi^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{L^2}\right)L^3} =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\cdot\frac{c\,b^2}{L(b^2+L^2)}, \text{ где } \omega \equiv \omega_{011} = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}$$

Добротность:

$$Q = \frac{\omega'}{2\omega''} = \frac{\cancel{c}\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}\cdot L(b^2+L^2)}{2\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\cdot\cancel{c}\,b^2}$$

б) Поверхность стенки b и L (паралл. пл-ти $z=0$)

$$\oint_S |H_\tau|^2 dS = \iint \left(|H_y|^2 + |H_z|^2\right) dS = \int_0^b\int_0^L |H_y|^2\Big|_{x=0} dy\,dz + \int_0^b\int_0^L |H_z|^2\Big|_{x=0} dy\,dz =$$

$$= \int_0^b\int_0^L \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 E_0^2 \left(\frac{\pi^2}{L^2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) dy\,dz +$$

$$+ \int_0^b\int_0^L \frac{c^2}{\omega^2} E_0^2 \frac{\pi^2}{b^2} \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) dy\,dz =$$

$$= \frac{c^2}{\omega^2} E_0^2 \pi^2 \left(\frac{1}{L^2} \cdot \frac{bL}{4} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{bL}{4}\right) = \frac{c^2}{\omega^2} E_0^2 \pi^2 \left(\frac{b}{4L} + \frac{L}{4b}\right) =$$

$$= \frac{c^2}{\omega^2} E_0^2 \pi^2 \frac{b^2+L^2}{4bL}$$

$$\gamma \equiv \omega'' = \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} \frac{c \cdot c^2 \cancel{E_0^2} \pi^2 (b^2+L^2) \cdot 4}{\omega^2 4bL \cdot 2 \cdot abL \cancel{E_0^2}} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \cdot \frac{(b^2+L^2) b^2 L^2 \pi^2 c}{\pi^2 (b^2+L^2) 2 b^2 L^2 a} =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \cdot \frac{c}{2a}$$

$$Q = \frac{\omega'}{2\omega''} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}\ \cancel{\cdot 2a}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} \cdot a}{\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}}$$

(н-10.36.)

$\varepsilon_r = \varepsilon_r - i\varepsilon_i \quad (\varepsilon_i > 0)$

Дисперс. соотношение: $k_{mnp}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu^{=1}$

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2$$

ε_r, то и частоты должны быть комплексные:

$$\omega = \omega' + i\omega''$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_r - i\varepsilon_i) = k_{mnp}^2 \quad ; \quad \omega_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} k_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}$$

Для низшей моды: $m=0$; $n=1$; $p=1$

$$\Rightarrow \omega_{11} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} \equiv \omega_0$$

Когда $\varepsilon_i \neq 0$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r\left(1 - i\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right) = k_{011}^2 \Rightarrow \omega^2\left(1 - i\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right) = \underbrace{\frac{c^2}{\varepsilon_r}\left[\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right]}_{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow (\omega' + i\omega'')^2\left(1 - i\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right) = \omega_0^2$$

$$\omega'^2 + 2i\omega'\omega'' - \omega'' = \frac{\omega_0^2}{1 - i\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}} = \frac{\omega_0^2\left(1 + i\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right)}{1 + \frac{\varepsilon_i^2}{\varepsilon_r^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega'^2 - \omega''^2 = \dfrac{\omega_0^2}{1 + \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right)^2} \\ 2\omega'\omega'' = \dfrac{\omega_0^2\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}}{1 + \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right)^2} \end{cases} \rightarrow \text{ищем } \omega''$$

Обычно ~~часто~~ делают $\varepsilon_i \ll \varepsilon_r$, тогда, как правило $\omega'' \ll \omega'$

Прибл. система:

$$\begin{cases} \omega'^2 \approx \omega_0^2 \\ 2\omega'\omega'' \approx \omega_0^2\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r} \end{cases} \qquad \omega' \approx \omega_0 \qquad 2\omega_0\omega'' \approx \omega_0^2\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r} \quad \rightarrow \omega'' = \frac{\omega_0}{2}\overbrace{\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right)}^{\ll 1} = \frac{\omega_0\alpha}{2}$$

как в учебнике

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r} \equiv \alpha$$

$$\begin{cases} \omega'^2 - \omega''^2 = \dfrac{\omega_0^2}{1+\alpha^2} \\ 2\omega'\omega'' = \dfrac{\omega_0^2\alpha}{1+\alpha^2} \end{cases} \rightarrow \omega' = \frac{\omega_0^2\alpha}{2(1+\alpha^2)\omega''}$$

$$\frac{\omega_0^4\alpha^2}{4(1+\alpha^2)^2\omega''^2} - \omega''^2 = \frac{\omega_0^2}{1+\alpha^2} \quad \Big/ \cdot \omega''^2$$

$$\omega''^4 + \frac{\omega_0^2}{1+\alpha^2}\omega''^2 - \frac{\omega_0^4\alpha^2}{4(1+\alpha^2)^2} = 0$$

$$D = \frac{\omega_0^4}{(1+\alpha^2)^2} + \frac{\omega_0^4\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} = \frac{\omega_0^4}{(1+\alpha^2)}$$

$$\omega''^2 = \frac{-\frac{\omega_0^2}{1+\alpha^2} \pm \frac{\omega_0^2}{\sqrt{1+\alpha^2}}}{2}$$

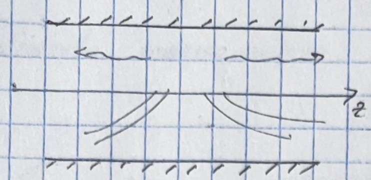
$$\omega'' > 0 \Rightarrow \omega''^2 = \frac{-\frac{\omega_0^2}{1+\alpha^2} + \frac{\omega_0^2}{\sqrt{1+\alpha^2}}}{2}$$

$$\omega''^2 = \frac{-\omega_0^2(1+\alpha^2)^{-1} + \omega_0^2(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} \approx \{\alpha \ll 1\} \approx$$

$$\approx \frac{-\omega_0^2(1-\alpha^2) + \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right)}{2} \approx \frac{\cancel{-\omega_0^2} + \omega_0^2\alpha^2 + \cancel{\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{2}\alpha^2}{2} =$$

$$= \frac{\omega_0^2\alpha^2}{4} \Rightarrow \omega'' \approx \frac{\omega_0 \alpha}{2}$$ как в случае выше

02.05.23г. **Возбуждение волноводов.**



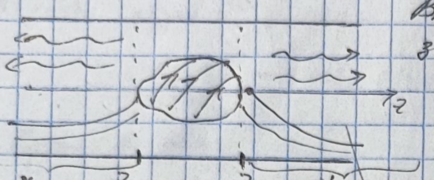
$\vec j^{(e)} = \vec j^{(m)} = 0$

Решения ур-я Максвелла в виде бегущих и нераспростр. волн:

$\vec E, \vec H \sim e^{i\omega t \mp ihz}$

$\vec E, \vec H \sim e^{i\omega t \mp |h| z}$

Но мы не задавались вопросом как возникают эти волны.



ур-е Максв. без ист. в огр-ной в пр-ве

ур-е Максв. без ист.

Внутрь волновода помещаем токи с зав-ю

$\vec j^{(e)}, \vec j^{(m)} \sim e^{i\omega t}$

$z_1 < z < z_2$

→ суперп. распр. и нераспр. волн.

δE_{mn} ; δM_{mn}

$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \to \varkappa$ будем обозначать номер в пор-ке возраст. волн. чисел.

$\vec E_1, \vec H_1 \sim e^{i\omega t - ih_1 z}$

$\vec E_2, \vec H_2 \sim e^{i\omega t - ih_2 z}$

$\vdots$

$\vec E_p, \vec H_p \sim e^{i\omega t - ih_p z}$

Для волн в противоп. напр-ии:

$\vec E_{-p}, \vec H_{-p} \sim e^{i\omega t + ih_p z}$

$$h_{-p} = h_p = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa_p^2}$$

$z > z_2$:

$$\vec E = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \vec E_p$$
$$\vec H = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \vec H_p$$

$z < z_1$:

$$\vec E = \sum_{p=1}^{\infty} a_{-p} \vec E_{-p}$$
$$\vec H = \sum_{p=1}^{\infty} a_{-p} \vec H_{-p}$$

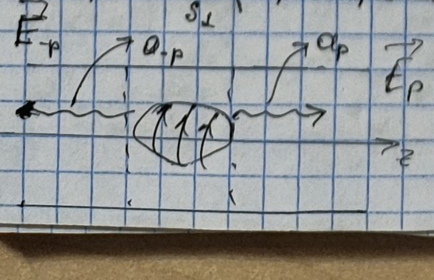
Задача теории волн найти амплит. коэф-ты: a_p и a_{-p}

Просто запишем ф-лы:

$$a_p = \frac{1}{N_p}\iiint_V \left(\vec j^{(e)}\vec E_{-p} - \vec j^{(m)}\vec H_{-p}\right) dV$$

$$a_{-p} = \frac{1}{N_p}\iiint_V \left(\vec j^{(e)}\vec E_{p} - \vec j^{(m)}\vec H_{p}\right) dV$$

$$N_p = \frac{c}{4\pi}\iint_{S_\perp}\left([\vec E_p \times \vec H_{-p}] - [\vec E_{-p}\times \vec H_p]\right)\cdot \vec z_0\, dS \; (*)$$ — норма волны.



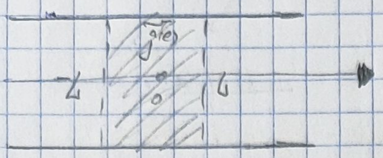
$(*) = \pm 4 P_p$ $\left\{ \begin{matrix} \text{"+"} & \delta M \\ \text{"−"} & \delta E \end{matrix} \right\}$

№10.38

$a > b$; $\vec j = \begin{cases} \vec y_0\, j_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ipz}, & |z| \le L \\ 0, & |z| > L \end{cases}$ возбуждает моду TE_{10}

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

Найти: $\frac{P_+}{P_-}$ – ? отн. потоков энергии в направ-ии $+z$ и $-z$



Такие токи будут возб. только моду TE_{10}

$z > L$:

$$\vec E_1 = \vec y_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ih_1 z}$$

$$\vec E = a_1 \vec E_1 \quad ; \quad h_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = p$$

$z < -L$:

$$\vec E = a_{-1} \vec E_{-1}$$

$$\vec E_{-1} = \vec y_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{+ih_1 z}$$

нужно подставить $\vec j$ и $\vec E$

$$a_1 = \frac{1}{N_1} \iiint_V \vec j^{(e)} \vec E_{-1}\, dV$$

$$a_{-1} = \frac{1}{N_1} \iiint_V \vec j^{(e)} \vec E_1\, dV$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{N_1} \iiint_V j_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ipz} \cdot e^{ipz}\, dV = \frac{j_0}{N_1} \int_0^a dx \int_0^b dy \int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dz =$$

$$= \frac{j_0\, ab\, 2L}{N_1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{j_0\, abL}{N_1}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{N_1} \int_0^a \int_0^b \int_{-L}^{L} j_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ih_1 z} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ih_1 z}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{j_0}{N_1} \cdot \frac{a}{2} \cdot b \int_{-L}^{L} e^{-2ih_1 z}\, dz = \frac{j_0\, ab}{2N_1} \cdot \frac{1}{-2ih_1} e^{-2ih_1 z} \Big|_{-L}^{L} =$$

$$= \frac{j_0\, ab}{4N_1 h_1}\, i \cdot \left(e^{-2ih_1 L} - e^{+2ih_1 L}\right) = \frac{-2i \cdot i\, j_0\, ab}{4N_1 h_1} \sin(2h_1 L) =$$

$$= \frac{j_0\, ab}{2N_1 h_1} \sin(2h_1 L)$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{N_1} j_0\, abL \quad ; \quad a_{-1} = \frac{1}{N_1} j_0\, abL \frac{\sin(2h_1 L)}{2h_1 L}$$

Можно как в 10.19. через вектор Пойнтинга:

$$P_1 = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re} \frac{1}{\eta_1} \iint_{S_1} |\vec E_1|^2 dS = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\, \eta_1 \iint_{S_1} |\vec H_1|^2 dS$$

$$P_+ = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\eta_1} \iint_S |a_1|^2 |\vec E_1|^2 dS = \left\{ \eta_1^{(TE)} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{k}{h}\right) \right\} =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \frac{h}{k_0} |a_1|^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dy\, dx = \frac{c}{8\pi} \frac{h}{k_0} |a_1|^2 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$P_- = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\eta_1} \iint |a_{-1}|^2 |\vec E_{-1}|^2 dS = \frac{c}{8\pi} \frac{h}{k_0} |a_{-1}|^2 \frac{ab}{2}$$

$$\Rightarrow P_+ = |a_1|^2 P_1 \quad ; \quad P_- = |a_{-1}|^2 P_1$$

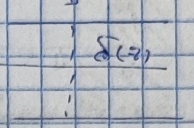
$$\frac{P_+}{P_-} = \frac{|a_1|^2}{|a_{-1}|^2} = \left(\frac{2h_1 L}{\sin(2h_1 L)}\right)^2$$

Поэтому $P_+ \neq P_-$, рассм-м пред случаи:

1) $hL \to 0$ $\quad L << \lambda_0 \quad \Rightarrow \frac{P_+}{P_-} \to 1$

2) Если $h_1 L = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{P_+}{P_-} \to \infty$

Т.к. представл. из себя тоже волну.



№10.39

$a,\ b = \frac{a}{2}$, диполь $\vec{p} = \vec{y}_0 p_0 e^{i\omega t}$

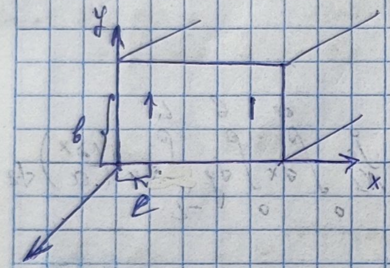
$c,\ d$

$z >> a$: $\vec{E}$ - ? P - ?

для случаев: а) $\frac{\pi}{a} < \frac{\omega}{c} < \frac{2\pi}{a} \to TE_{10}$

б) $\left(\frac{2\pi}{a}\right) < \frac{\omega}{c} < \frac{\sqrt{5}\pi}{a} \to TE_{10}, TE_{20}, TE_{01}$

в) $\frac{\omega}{c} < \frac{\pi}{a} \to$ нет



$$h = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - ae_{mn}^2}$$

TE_{mn}
TM_{mn}

$$ae_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2$$

$$ae_{10} = \frac{\pi}{a}$$

$TE_{20} \longleftarrow \quad ae_{20} = \frac{2\pi}{a}$

$TE_{01} \quad ae_{01} = \frac{2\pi}{a}$

$TE_{11}\ TM_{11} \longleftarrow \quad ae_{11} = \frac{\sqrt{5}\pi}{a}$

Для диполя:

$$\vec{j} = i\omega \vec{p}\, \delta(x-c)\, \delta(y-d)\, \delta(z)$$

а)

$z>0$: $\vec{E_\Sigma} = a_1 \vec{E_1}$ + нераспр.

$z<0$: $\vec{E_\Sigma} = a_{-1} \vec{E_{-1}}$ + нераспр.

$\vec{E_1} = \vec{y_0} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{\mp i h_1 z} \to \vec{H} \to$ сосчитать поток вектора и проверить, что равно $\pm 4P$,

б) $\vec{E_\Sigma} = a_1 \vec{E_1} + a_2 \vec{E_2} + a_3 \vec{E_3}$ + нераспр.

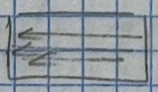
$TE_{10} \to \vec{E_1} = \vec{y_0} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ih_1 z}$

$TE_{20} \to \vec{E_2} = \vec{y_0} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-ih_2 z}$, где $h_2 = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}$

$TE_{01} \to \vec{E_3} = \vec{x_0} \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) e^{-ih_3 z}$, где $h_3 = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} =$

$\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$

$= \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}$

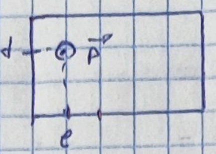


16.05.23г.

№10.40. Диполь ориентирован вдоль оси волновода (аналогичная 10.39.)

а) $\frac{\sqrt{5}\pi}{a} = \varkappa_{11} < \frac{\omega}{c} < \frac{\sqrt{8}\pi}{a}$; $b = a/2$

б) $\frac{\omega}{c} < \frac{\sqrt{5}\pi}{a}$



$|z| >> a$ $\quad \vec E$ - ? $\quad P$ - ?

В зав-ти от частоты будут распр. разные моды.

$\varkappa_{11} \to TE_{11}, TM_{11}$

$$\varkappa_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2} = \frac{\pi}{a}\sqrt{m^2+4n^2}$$

=> TE_{10}, TE_{20}, TE_{01}, TE_{11}, TM_{11} ~5 распр. мод.

Для точечного диполя:

$$\vec j = i\omega \vec z_0 p_0 \delta^3(\vec r - \vec r_д)$$

Для коэф-в возбужд:

$$a_{\pm p} = \frac{1}{N_p}\iiint_V \vec j^{(e)} \cdot \vec E_{\mp p}\, dV$$

У TE $\vec E = \vec E_\perp \perp \vec z_0$ => т.е. вклада не дают, для них $a=0$

Будут возбуждаться только волны TM типа $E_z \neq 0$.

$$\Delta_\perp \varphi^{(e)} + \varkappa^2 \varphi^{(e)} = 0 \quad ; \quad \varphi^{(e)}\big|_L = 0$$

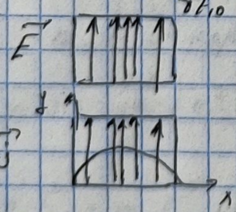
$$\varphi^{(e)} = C \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

... и т.д. дорешивать не будем

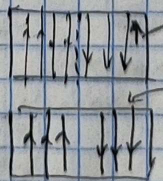
Наиболее эффективно возбужд. волны за счёт токов по структуре $\vec j^{(e)} \sim \vec E_p$

Например, если возб. TE_{10} → нужно созд. структуру тока точно такую же

TE_{10}

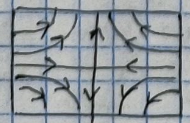


TE_{20}



такой диполь будет возб. TE_{10} и TE_{20} и т.д. зависимо от места проволочки с током

TE_{11}

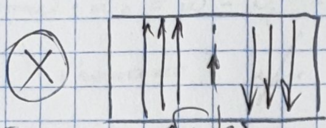


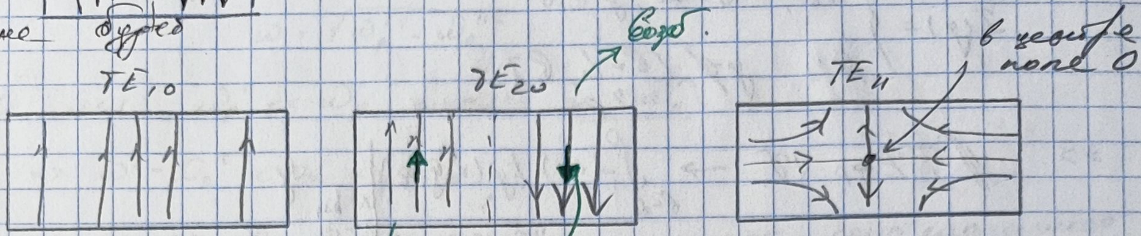
– как? Как например создать диполем

$$a_{\pm p} = \frac{1}{N_p}\iiint_V \vec j^{(e)} \vec E_{\mp p}\, dV = i\omega \vec p \cdot \vec E_p\big|_{\vec r = \vec r_д}$$

диполь нужно ставить, где поле максимальное

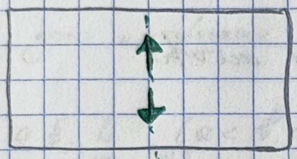
Если поместить диполь там где $\vec E = 0$ → моды возб. не будут.





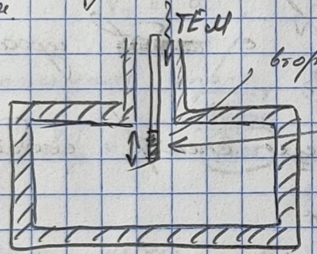
Хотим возб. только TE_{20} ? Исп-м неск. диполей — диполи сдвинуты по фазе — для TE_{10} компенсир.

Как эффективно возб. TE_{11} ?



↳ на оси TE_{20} не будет, а для TE_{10} — компенсир.

Что в действительности вместо диполей? Коаксиальная линия.



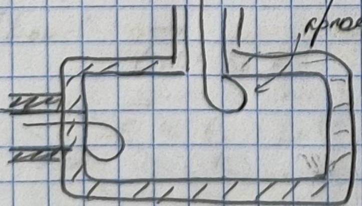
Если

$$\varkappa_{10} < \frac{\omega}{c} < \varkappa_{остальные}$$

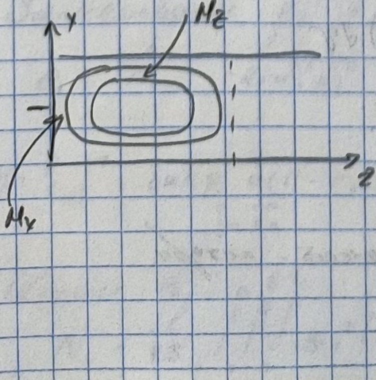
Подробно в учебнике Гольдштейна

Можно учесть $\vec{j}^{(e)} \vec{E}_{\mp p} - \vec{j}^{(m)} \vec{H}_{\mp p}$

т.е. можно сделать подобие магнитного диполя. Только теперь вспомним структуру магнитного поля.



— возбуждение с пом-ю петли.



к 10.41

$$\vec j = \vec y_0\, I(y)\,\delta(x-L_1)\,\delta(z)$$

$$I(y)=\begin{cases} I_0, & b-L<y<b \\ 0, & y\notin[b-L,\, b]\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \iiint \vec j\, \vec E_{\mp p}\, dV \;\to\; \int\limits_{b-L}^{b} I(y)\, E_y(x,y,z)\Big|_{\substack{x=L_1\\ z=0}} dy$$

Если в случае точечн. диполя: $\vec j \sim i\omega \vec p$

$$a_{\mp p} \sim i\omega p\, E_y$$

то в случае штыря:

$$a_{\mp p} \sim I_0 L \cdot E_y$$

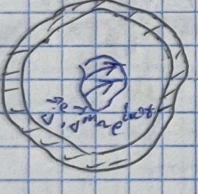
на длину штыря

Т.е. формальная замена:

$$i\omega p \to IL$$

Возбуждение резонаторов.

Пусть есть нек. объемный резонатор с ~~...~~ идеал. стенками



TE_{mnp}
TM_{mnp}

Пусть нам знаем спектр. собств. частот: ω_p

$$\vec E_p,\ \vec H_p \sim e^{i\omega_p t}$$

Поместим гармон. токи внутрь

Аналогично, любое поле можно разложить по собств. Но немного сложн. На самом деле, есть потенц. и вихревая составл. И только вихревая составл. может быть разл. по собств. модам.

$$\vec E = \vec E_п + \vec E_в \qquad \vec E_в = \sum_{p=1}^{\infty} e_p(\omega)\, \vec E_p(\vec r)\, e^{i\omega t}$$

$$\vec H = \vec H_п + \vec H_в \qquad \vec H_в = \sum_{p=1}^{\infty} h_p(\omega)\, \vec H_p(\vec r)\, e^{i\omega t}$$

$$e_p = \frac{i}{N_p}\,\frac{1}{\omega^2-\omega_p^2}\iiint\limits_V \left(\omega\, \vec j^{(e)} \vec E_p - \omega_p\, \vec j^{(m)} \vec H_p\right) dV$$

$$h_p = \frac{i}{N_p}\,\frac{1}{\omega^2-\omega_p^2}\iiint\limits_V \left(\omega_p\, \vec j^{(e)} \vec E_p + \omega\, \vec j^{(m)} \cdot \vec H_p\right) dV$$

Норма волны:

$$N_p = \frac{1}{4\pi}\iiint \varepsilon \vec E_p^2\, dV = -\frac{1}{4\pi}\iiint \mu \vec H_p^2\, dV$$

М.б. резонанс при $\omega=\omega_p$? Нужно учесть потери

$$\omega_p = \omega_p' + i\omega_p''$$

$-\omega^2-\omega_p^2 = \omega^2 - \omega_p'^2 - 2i\omega_p'\omega_p'' + \omega_p''^2$

Резонанс, при наличии потерь, возникает на частоте:

$$\omega = \sqrt{\omega_p'^2 - \omega_p''^2}$$

Но если $\omega_p'' \ll \omega_p'$ $\Rightarrow$ $\underline{\omega \approx \omega_p'}$

$\Rightarrow \omega^2-\omega_p^2 \approx -2i\omega_p'\omega_p''$

$\Rightarrow e_p,\ h_p \sim \frac{1}{2\omega_p'\omega_p''}$ → особ. одно слагаемое, оно сильнее всех прочих

$\vec E \approx e_p \vec E_p e^{i\omega t}$

$\vec H = h_p \vec H_p e^{i\omega t}$

Ещё одно интересное св-во: $e_p \approx h_p$.

№10.47. a, b, L $(a<b<L)$ В центре полого резонатора — $\vec P = \vec p_0 e^{i\omega t}$ диполь, параллельн. наименьш. ребру.
Q — для низшей моды

Найти мощность отд. диполем $P_{изл}$ — ? для низшей моды

$$x_d = \frac{a}{2},\quad y_d = \frac{b}{2},\quad z_d = \frac{L}{2}$$

Вспомним опр-е добротности:

$$Q_p = \omega_p \frac{W_{зап}}{P_{пот}},\quad P_{пот} \equiv P_{изл}$$

Энергия диполя компенс. потери

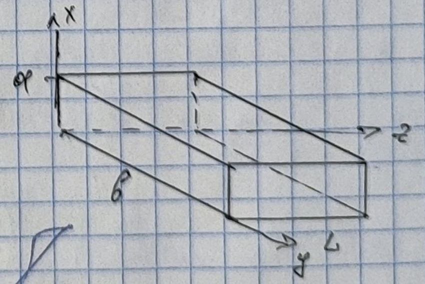
Низшая мода: $p=1$; $P_{пот} = \omega_1' \frac{\overline{W_{зап}}}{Q}$

Запасённая энергия:

$$\overline{W_{зап}} = W_E + W_H = 2\overline{W_E} = \frac{1}{8\pi}\iiint_V \varepsilon |\vec E|^2\, dV$$

В случае резонанса:

$$\vec E \approx e_p \vec E_p e^{i\omega t}$$



TE_{011}: $\vec E_1(\vec r) = \vec x_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$

$\vec E \approx e_1 \cdot \vec E_1(\vec r)$ ← амплитуда здесь

Записываем e_1 с учётом всех преобр.:

$$e_1 = \frac{i}{N_1}\cdot\frac{1}{-2i\omega_1'\omega_1''}\iiint \omega\, \vec j^{(e)} \vec E_1\, dV \ \circleddash$$

ω_1' — на резон. совпадает

$\circleddash \left\{\vec j = i\omega \vec P_0\, \delta(\vec r-\vec r_d)\right\} = -\frac{1}{N_1 2\omega_1''} i\omega_1' (\vec p\cdot \vec E_1)\Big|_{\vec r=\vec r_d} = -\frac{i\omega_1'}{2N_1\omega_1''}\cdot p_0$, $\vec P_0 = p_0 \vec x_0$

Ищем N_1:

$$N_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^a\int_0^b\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) dx\, dy\, dz = \frac{abL}{16\pi}$$

$\Rightarrow \quad e_1 = -i \dfrac{8\pi \omega_1'}{abL\, \omega_1''} p_0$

Запасённая энергия

$$\overline{W_{зап}}^{\,\tau} = \frac{1}{8\pi} \iiint |e_1|^2 |\vec{E}_1|^2 \, dV = \frac{1}{8\pi} |e_1|^2 \frac{abL}{4} = \frac{abL}{32\pi} \cdot \frac{64\pi^2 \omega_1'^2 p_0^2}{a^2 b^2 L^2 \omega_1''^2} =$$

$$= \frac{2\pi \omega_1'^2 p_0^2}{abL\, \omega_1''^2}$$

$$\omega_p = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}$$

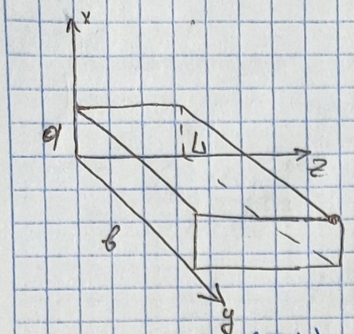
$$\Rightarrow \quad \omega_1' = \pi c \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{L^2}}$$

Как найти ω_1''? Через добротность.

$$Q = \frac{\omega_1'}{2\omega_1''} \longrightarrow \omega_1'' = \frac{\omega_1'}{2Q}$$

$\Rightarrow$ Всё подставить

№10.48.



Резонатор возбуждается объёмным распр. плотности тока:

$$\vec j = \vec x_0\, j(y,z)\, e^{i\omega t}$$

Построить графики зависимости запас. в резонаторе эл.м. энергии W от частоты, для тока:

а) $j = j_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$

$$e_p = \frac{1}{N_p}\,\frac{i}{\omega^2-\omega_p^2}\iiint_V \omega\, \vec j^{(e)} \vec E_p^{*}\, dV$$

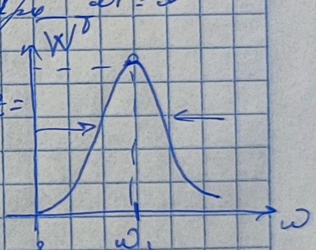
Вид j совпадает с полем моды TE_{011}:

$$\vec E = \vec x_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)e^{i\omega_1 t}$$

$\Rightarrow$ возбуждает TE_{011} $\Rightarrow$ $p=1$.

$$\Rightarrow \overline{W_{зап}}^{T} = \frac{1}{8\pi}\iiint_V |e_1|^2 E_1^2\, dV \sim |e_1|^2$$

$\rightarrow$ и следовательно резонанс по частоте будет при $\omega_1 = \omega$



$$|e_1| = \frac{1}{N_1}\cdot\frac{1}{(\omega^2-\omega_1^2)}\int_0^a\int_0^b\int_0^L \omega j_0 \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cdot E_0\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{a\omega j_0 E_0}{N_1(\omega^2-\omega_1)^2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{L}{2} = \frac{abL\cdot\omega j_0 E_0}{4N_1(\omega^2-\omega_1^2)}$$

$$\Rightarrow W \sim \frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_1^2)^2}$$

б) $j = j_0\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\left[\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)+\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\right]$

По виду тока понятно будет теперь 2 моды: TE_{011} и TE_{012}

и $\vec E_\Sigma = e_1\vec E_1 + e_2\vec E_2$

$$\vec E_2 = \vec x_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)e^{i\omega_2 t}$$

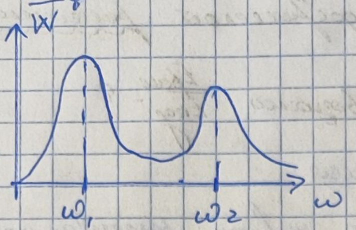
$$|e_2| = \frac{1}{N_2}\cdot\frac{1}{(\omega^2-\omega_2^2)}\iiint_{000}^{abL} \omega j_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\Big[\underbrace{\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)}_{\text{вклада не даёт}}+\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right)\Big]\cdot$$

$$\cdot E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{N_2}\,\frac{1}{\omega^2-\omega_2^2}\int_0^a\int_0^b\int_0^L \omega j_0 E_0 \underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)}_{b/2}\underbrace{\sin^2\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}_{L/2} dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{abL}{4N_2}\,\frac{\omega j_0 E_0}{(\omega^2-\omega_2^2)}$$

Аналогично:



$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_V \left(|e_1|^2 E_1^2 + |e_2|^2 E_2^2\right) dV \Rightarrow W \sim \frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_2^2)^2} + \frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_1^2)^2}$$

№11.2. Тело, помещённое в поле плоской электромагнитной волны, является источником расход. от него сферической рассеянной волны

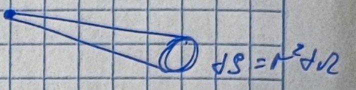
1) Док-ть, что $S_{расс} = \sigma_d \cdot \frac{S_{пад}}{r^2}$; как связаны $\frac{E_{расс}}{E_{пад}}$?

По опр-ю дифф-ое сечение рассеяния:

$$\sigma_d = \frac{dP}{d\Omega}\cdot\frac{1}{S_{пад}}$$, где $\frac{dP}{d\Omega}$ — поток энергии, рассеиваемого в единицу телесного угла в данном направлении

Поток энергии связан с вектором Пойнтинга:

$$dP = S_{расс}\cdot dS = S_{расс}\cdot r^2 d\Omega$$



$$\Rightarrow \quad \sigma_d = S_{расс}\cdot\frac{r^2}{S_{пад}} \quad \Rightarrow \quad S_{расс} = \sigma_d \frac{S_{пад}}{r^2}$$

2) Это справедливо для дальней зоны, когда волна представляет расходящуюся сферич. волну.

$$\vec E_{расс}(r,\theta,\varphi) = \vec F(\theta,\varphi)\frac{e^{-ikr}}{r}$$

① $r \gg L$ — дальняя зона

② $r \gg \lambda$ — волновая зона

③ $\sqrt{\lambda r} \gg L$ — зона Фраунгофера

$$\vec S = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\vec E, \vec H^*] = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\vec F\frac{e^{-ikr}}{r}\times[\vec r_0,\vec F^*]\frac{e^{ikr}}{r}\right] =$$

$$= \frac{c}{8\pi}\frac{1}{r^2}\mathrm{Re}[\vec F,[\vec r_0,\vec F^*]] = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{r^2}\mathrm{Re}\left(\vec r_0|\vec F|^2 - \vec F^*\underbrace{(\vec r_0\vec F)}_{=0}\right) =$$

$$= \frac{c}{8\pi}\frac{|\vec F(\theta,\varphi)|^2}{r^2}\vec r_0$$

3) Найти полное сечение рассеяния, считая $\sigma_d(\theta,\varphi)$ известным.

По опр-ю:

$$\sigma_{полн} = \iint_{4\pi}\sigma_d(\theta,\varphi)\,d\Omega = \frac{\int dP}{S_{пад}} = \frac{P_{расс}}{S_{пад}} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma_d(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$$

$\sigma_{полн}$ — площадка, если её поставить ⊥-но напр-ю распр-я $\vec k_{пад}$, то пойдёт поток энергии через неё → это полный поток энергии рассеянной волны по всем направлениям.