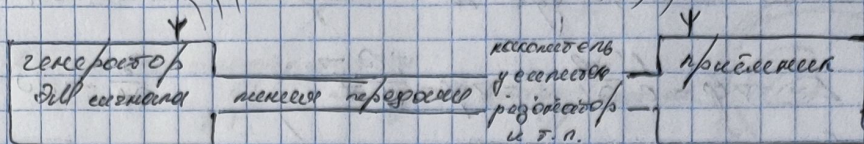


08.02.2023

Применение электродинамики

Лекция

Гинзбург Владимир Борисович



1. Канал передачи.
 2. Канал резонатора.
 3. Элементы теории дифракции.
- с особенност. точки зрения: это явление связано с электродинамикой.

Будем рассматривать гармонические поля.

$$\vec{E}_{\text{набл}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$$

комплексный вектор

$$\vec{E}_{\text{набл}} = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

комп. амплитуда

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

Это означает:

фаза

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$E_x = \text{Re} E_x + i \text{Im} E_x = |E_x| e^{i\varphi_x}$$

$$E_y = |E_y| e^{i\varphi_y} \dots$$

$$|E_x|(x, y, z), \varphi_x(x, y, z)$$

$$\Rightarrow E_{\text{набл}} = \text{Re} \left(|E_x| e^{i\varphi_x} \cdot e^{i\omega t} \right) = |E_x| \cos(\omega t + \varphi_x)$$

комплексная амплитуда

амплитуда

фаза

зависит от координат и др. параметров.

З-я Максвелла в компл. форме: (для компл. амплитуд)

$$\text{rot} \vec{H} = e^{-i\omega t} i \omega \vec{E}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -i \omega \vec{H}$$

$$\text{div}(\epsilon \vec{E}) = 4\pi \rho$$

$$\text{div}(\mu \vec{H}) = 0$$

 $\vec{J}$ и ρ - электрические источники.- заряды
плотность электрического тока.Сфера хар-ей параметров ϵ, μ и в общем случае комплексные. $\vec{E}, \vec{H}$ - комплексные векторы. (зависят от координат.)
причем $\vec{J}, \rho$ тоже комплексные.Подставим вместо компл. амплитуды $\vec{E}(\vec{r})$, тогда получим уравнение поле:

$$\vec{E}_{\text{набл}} = \text{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \sim \text{электрическая индукция.}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \sim \text{магнитная индукция.}$$

З-е непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0 \quad \rightarrow \quad i\omega \rho + \text{div} \vec{J} = 0$$

Потенциальное описание колеблющихся полей.

Из $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, где $\vec{A}$ - векторный потенциал.

Канонические: $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{i\omega}{c} \vec{A}$ $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$

φ - скалярный потенциал. вводится просто для удобства.

Удовлетворяют ур-ю Дельмонта:

$\Delta \vec{A} + \kappa^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$, $\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu$

это
ур-во
связи
ср-во
и
врем
диффр.

$\Delta \varphi + \kappa^2 \varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho$

κ - волновое число фреа.

Справедлива при канонич. нормировке:

$\text{div } \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

при гармонической зависимости: $i\omega \epsilon \mu \varphi + \text{div } \vec{A} = 0$

$\varphi = + \frac{ic}{\omega \epsilon \mu} \text{div } \vec{A}$

т.е. можно ограничиться только векторным потенциалом.
Волновые ур-я при произвольной зав-ти от времени:

$\Delta \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$

$\Delta \varphi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho$

← тут только без ускорения.
т.е. $\epsilon = \mu = \text{const}$.

Пусть исходных источников нет, т.е. $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$. Свободные ур-я Максвелла:

$\Delta \vec{A} + \kappa^2 \vec{A} = 0$

$\Delta \varphi + \kappa^2 \varphi = 0$

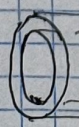
$\vec{A} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{B}$

? $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon \mu} (\nabla \text{div} + \kappa^2) \vec{A}$ ← исп-я канонич. нормировки.

где $\kappa_0 = \frac{\omega}{c}$, $\kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$

Важно в анализе излучения.

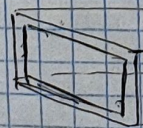
Набор элементарных (дизъюнктивных) элементов излучения:



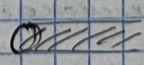
— круговой вибратор.



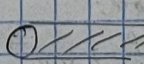
— стержнев.

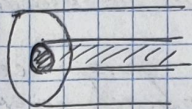


— прямоугольный вибратор.



— двойной вибратор.





и поперечное
излучение.

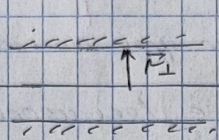
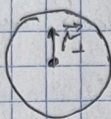
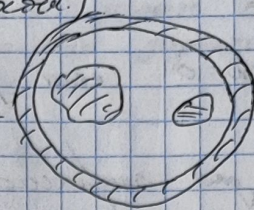
По сути это моды
цилиндрической системы
(т.е. не зависит от поперечной
координаты).

Вводится координата:

x, y

по пути цилиндрической

z - продольная.



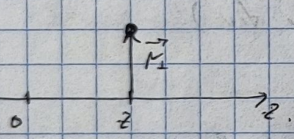
$z, \vec{r}_\perp(x, y)$

Моды передачи назыв. регулярной - если свойства не
зависят от поперечной координаты (единич. сечения).
Токо будет зависеть $\epsilon, \mu = \text{const}$.

Моды назыв. регулярной, если она изготвл. из цилиндрических
проводников $\rightarrow \infty$
В них возникло свободные волны - в отсутствие
сторонних источников

$$\vec{E}, \vec{H} \sim e^{i(\omega t - kz)}; \quad \vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}_\perp) e^{i(\omega t - kz)}$$

15.02.23г.

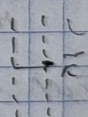


z - задает продольную координату.
 $\vec{r}_\perp$ - поперечное направление

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

k - продольное волновое число (постоянная распространения волны)

В плоскости координат было: $e^{i(\omega t - kz)}$ волновое число.
 $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$



Тока это ω и k - некоторые произвольные числа.

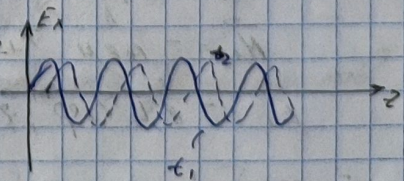
$\vec{r}_\perp \in \{x, y\}$, если продольная ось z .

Тогда функции можно записать: $E_x = |E_{0x}| e^{i(\omega t - kz - \varphi_{0x})}$

$$E_{x \text{ макс}} = |E_{0x}| \cos(\omega t - kz - \varphi_{0x})$$

Бегущая волна: (может двигаться и в обратную) - волна, зависящая
полей во времени t по оси распространения:

Тока будет зависеть от диаметра
сферы, где $\epsilon, \mu = \text{const}$.



Предположим, что решение для
векторного потенциала имеет вид:

$$(*) \quad \vec{A} = \vec{z}_0 \cdot \varphi(\vec{r}_\perp) e^{i(\omega t - kz)}$$

(это не обязательно потенциал, но такое скал. ф-я.)

При гармонической зав-ти во времени оно удовлет-т
уравн. Гельмгольца:

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$$

$\varphi(\vec{r}, t) \sim$ поперечная волновая функция (электр. или магнитная)
 Введем также обозначения: $\text{div} \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \sim$ векторный потенциал.

т.к. $\text{div} \vec{D} = 0$ (если $\rho = 0$), то $\vec{D} = \text{rot} \vec{A}^m \sim$ магнитный векторный потенциал.

Обычно для электромагнитного вол. по. берут "е" по типу:

$$\left\{ \vec{A}^m = \vec{z}_0 \varphi^m(\vec{r}_\perp) e^{i(\omega t - kz)} \right\}$$

— это по сути амплитудный множитель

Если предположить (*) в ур-е Гельмгольца:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = -k^2 \vec{A}, \text{ тогда получим:}$$

$$\Delta_\perp \varphi^e + (\kappa^2 - k^2) \varphi^e = 0 \quad \text{ур-е для поперечной волновой функции.}$$

Введем обозначения: $\kappa^2 - k^2 = \chi^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - k^2$

$\Delta_\perp \varphi^e + \chi^2 \varphi^e = 0$! χ — поперечное волновое число.

Выразимся для полей (д.е. приписывая rot и div):

ТМ:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= i\kappa\epsilon\mu \varphi^e \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\kappa_0\epsilon\mu} \nabla_\perp \varphi^e \\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi^e, \vec{z}_0] \end{aligned} \right\} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \quad \Delta_\perp \varphi^e + \chi^2 \varphi^e = 0$$

ТЭ — поперечное к оси распространения магнитное поле ($H_z = 0$)

где $\nabla_\perp = \kappa_0 \frac{\partial}{\partial x} + \kappa_0 \frac{\partial}{\partial y} = \nabla - \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$

ТЕ: поперечная электромагнитное поле ($E_z = 0$)
 Можно считать функцию пересеченной зигзагообразной.

$\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \vec{H} \rightarrow -\vec{E}, \vec{E} \perp \vec{H}$ — без потерь.

$$\left. \begin{aligned} H_z &= i\kappa\epsilon\mu \varphi^m \\ \vec{H}_\perp &= -\frac{1}{\kappa_0\epsilon\mu} \nabla_\perp \varphi^m \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\epsilon} [\nabla_\perp \varphi^m, \vec{z}_0] \end{aligned} \right\} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \quad \Delta_\perp \varphi^m + \chi^2 \varphi^m = 0$$

Если еще предположить отсутствие волн ТЭВ — типа ($E_z = 0, H_z = 0$)
 В плоскости из ТЕ и ТМ нулево полагать $\chi = 0$

т.е. $\chi = \kappa - \kappa_0 \sqrt{\epsilon\mu}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \nabla_\perp \varphi^e \\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi^e, \vec{z}_0] \end{aligned} \right\} e^{i(\omega t - kz)} \quad \Delta_\perp \varphi^e = 0 \quad \text{ур-е Лапласа}$$

поле E и H имеют составленную структуру, т.е. являются полей
 $\nabla \varphi \rightarrow \vec{E}$ - это потенциалы.

Следует на формулы, ясно, что дост. задать E_z и H_z .
 Для опис. дивергентного поля нужно задать 2 кол. ф-ии.

Угловое соотношение.

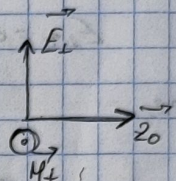
Полное поле можно свести к угловому соотношению.

$$\left\{ \vec{E} = \sum_{\vec{k}} \vec{e}_{\vec{k}} \cdot \left[H_{\vec{k}}, \vec{z}_0 \right] \right\}, \text{ где } \underline{E_{10}} = \sqrt{\frac{H'(\kappa)}{h}} \begin{matrix} \text{дл} \\ \text{волн} \end{matrix}$$

Для ТЕМ волны:

$$\underline{E_{10}} = \sqrt{4}$$

$$\underline{E_{10}} = \frac{E_z}{H_z}$$



Угловое соотношение только для бегущей волны!

Если $h > 0 \rightarrow$ волна бежит по oz
 $h < 0 \rightarrow$ волна бежит против z - ось

Это соотношение в терминах поля! Возмем в терминах тока (то об этом позже).

ТЕМ волны еще называются "главными".

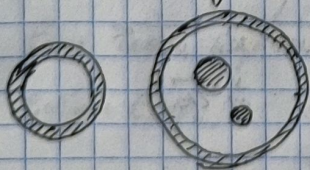
Волны в идеальных линиях / передача.
 среда с бесконечной проводимостью. (всп-м идеализации, когда $\gamma \rightarrow \infty$, такая линия идеальна)

$$\underline{E_z = 0} \text{ или } \underline{H_z = 0}$$

Судите из $\vec{j} = \vec{\nabla} \varphi$ и φ -ий Максвелла.

Внутри идеальной проводимости полей нет.

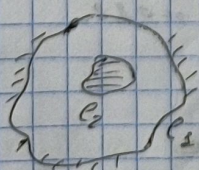
Волны в идеальной линии:



и т.п.

Должны удовл. ГУ: $E_z = 0, H_z = 0$

Запишем условия φ^e, φ^m

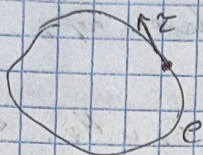


E_z и H_z - функции координат проводников
 $E_z = 0$
 $H_z = 0$

Далее для ТЕМ-волны: $E_{10} = 0, H_{10} = 0$ бегущая через φ^e

$$E_z \sim \varphi^e; E_z \sim \varphi^m \rightarrow (E_z)_z \sim \frac{\partial \varphi^e}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \left\{ \varphi^e|_c = 0 \rightarrow \frac{\partial \varphi^e}{\partial z}|_c = 0 \right\}$$



Рассмотрим по условию:

$$\varphi^{(e)}/e = 0$$

Для TE-волн:

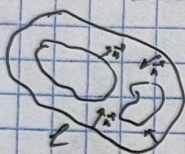
$$\left. \begin{array}{l} E_{\perp e} = 0 \\ H_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \partial \varphi^m / \partial n \\ \varphi^m \end{array} \right|_e = 0$$

Для TEM-волн:

$$E_{\perp e} = 0 \Rightarrow \varphi^{(e)}/e = \text{const} \Rightarrow \varphi^{(e)}/e_i \text{ (TEM)} = C_i$$

22.02.23г.

Матем. формулировка задачи на отыскание волн в линии передачи с идеальным диэлектриком



1) Для TE-волн: нулево по порядку ф-я:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{\perp} \varphi^e + k^2 \varphi^e = 0 \\ \varphi^e / e = 0 \end{array} \right\}$$

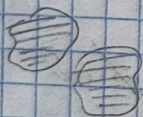
~ задача Дирихле.
задача о разности по форме
полюсов

2) Для TE-волн - //

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{\perp} \varphi^m + k^2 \varphi^m = 0 \\ \partial \varphi^m / \partial n|_e = 0 \end{array} \right\}$$

~ задача Неймана
задача о разности со свободными
границей

3) Для TEM-волн - //



$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{\perp} \varphi^e = 0 \\ \varphi^e / e_i = C_i \end{array} \right\} \sim \text{ф-я Лапласа}$$

i - номер сектора (отделение контура)

Решение:

1) TEM:



Решение эту-т можно для дискретного набора значений k и соответствующих значений.

Если линия ф. провод. и бесконечное число, то зависит от разности контура

$$\begin{array}{c|c|c|c} 0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ \hline \varphi_1(r_1) & \varphi_2(r_2) & \varphi_3(r_3) & \end{array}$$

$$\varphi_i \rightarrow E_i(r_i), H_i(r_i)$$

~ разность структура поля, $\omega = 0, \omega_1, \omega_2$

т.е. можно разбить на много волн

Для TE-волн по сути тоже самое, но с ф-я ф-я

На общей числовой оси:

$$(0) \quad k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \varphi_1(r_1) & \varphi_2(r_2) & \varphi_3(r_3) & \varphi_4(r_4) \\ \hline \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{array}$$

$\mathcal{E}$ - действительное

$$\mathcal{E}^2 > 0$$

Из уравн. - это получается из волн. ф-ции, коэффициенты для квант. сч. ф-ции φ и ψ .

$$\nabla(\varphi \cdot \nabla \psi) = \varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi$$

интегр. по объему. $\int_V$

$$\int_V [\varphi \Delta \psi + (\nabla \varphi, \nabla \psi)] dV = \int_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

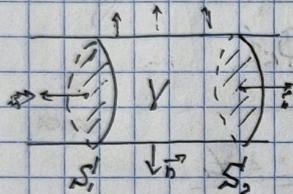
$$(\nabla \psi)_n \equiv \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

$$\left\{ \int_V [\varphi \Delta \psi + (\nabla \varphi, \nabla \psi)] dV = \int_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \right\} \text{ - 1-я ф-ла Грина}$$

$\varphi \leftrightarrow \psi$ и наоборот, получим 2-ю ф-лу Грина:

$$\left\{ \int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \int_V \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \right\}$$

$\mathcal{E}^2 > 0$ дока-ся по 1-й ф-ле Грина.



$$\varphi = \varphi_n^*$$

$\psi = \varphi_n$ - n-ая собственная функция, заданная в 1-й ф-ле Грина.

$$\int_V \varphi_n^* (-\Delta \varphi_n) dV + (\nabla \varphi_n^*, \nabla \varphi_n) dV = 0 \quad \Delta \varphi_n = -\mathcal{E}_n^2 \varphi_n$$

→ выразим:

$$\mathcal{E}_n^2 = \frac{\int_V |\nabla \varphi_n|^2 dV}{\int_V |\varphi_n|^2 dV} > 0 \Rightarrow \mathcal{E}^2 > 0$$

Свойство ортогональности для р-об:

Пусть есть 2 решения φ_m, φ_n

$$(\mathcal{E}_m^2 - \mathcal{E}_n^2) \cdot \int_V \varphi_m \varphi_n dV = 0$$

→ следует из 2-й ф-лы Грина.

$m \neq n; \mathcal{E}_m \neq \mathcal{E}_n$:

$$\int_V \varphi_m \varphi_n dV = \int_A \delta_{mn} dV, \quad m \neq n$$

→ ф-ла ортогональности волн.

Если есть 2 решения φ_m и φ_n , то решением является

$$C_1 \varphi_m + C_2 \varphi_n \rightarrow \text{мы можем выбрать такие } C_1^{(1)}, C_2^{(1)} \text{ и } C_1^{(2)}, C_2^{(2)} \text{ удовл. усл. ортогональности}$$

Распределение ф-е для волн в узком трубчатом канале

Рассеяние волны, что имеет ω

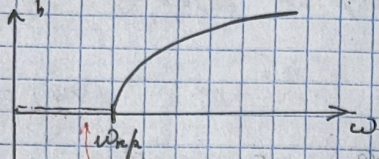
$$\Rightarrow \mathcal{E}^2 = \underbrace{k_0^2}_{k^2} \varepsilon \mu - k^2 \Rightarrow \mathcal{E}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - k^2$$

из соотв. заданы частоты $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n, \dots$ то говорят, что мы имеем расп. соотношения $k(\omega)$ или $\omega(k)$.

Перепишем в явном виде:

$$k_n = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2 \epsilon \mu} - \beta_n^2}, \quad n = 1, 2, 3$$

каждый отдельный тип волны называется модой.
моды.



ω_{cr} - граница по частоте:

при $\omega > \omega_{cr} \Rightarrow k$ - действит. - распространяющаяся волна
при $\omega < \omega_{cr} \Rightarrow k$ - мнимая

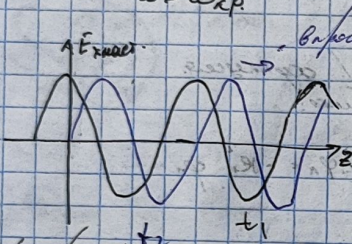
$$k_n = \pm i \sqrt{\beta_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon \mu}}$$

Если $\omega > \omega_{cr}$:

$$\text{Re}(e^{i(\omega t - kz)}) = \cos(\omega t - kz)$$

График:

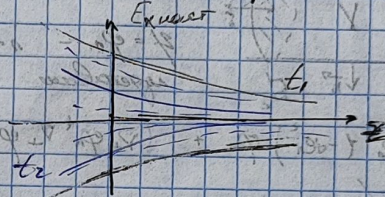
$\omega > \omega_{cr}$



и распространяется вправо

волна $k > 0$

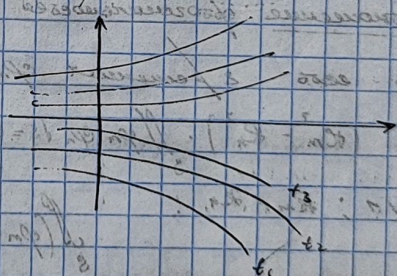
$\omega < \omega_{cr}$



Если $\omega < \omega_{cr}$:

$$\text{Re}(e^{i(\omega t - kz)}) = \cos \omega t \cdot e^{\pm i k z}$$

и распространяется влево



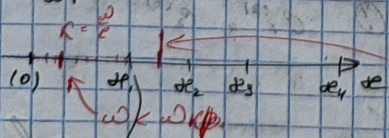
Эта волна затухающая волна при увеличении z уменьшается.

Но что все зависит от ω .

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} \geq \beta$$

Волна является волной кт.

Здесь отсюда: k_{cr} - частота, для волны



$$k_{cr} = \frac{\omega_{cr}}{c} \sqrt{\epsilon \mu} = \beta_1 \Rightarrow \omega_{cr} = \frac{c \beta_1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$$\omega_{cr} = \frac{c \beta_1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$$\omega_{cr} = \frac{c \beta_1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$\beta_1 = \min \beta_n$ - наименьшая мода

свойств: k_{cr} - частота, для волны

$$\omega_{\text{мин.}} = \min \{ \omega_{\text{кр.}n} \}$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_n &= \kappa_n \\ \omega &= \omega_{\text{кр.}} \end{aligned} \right\} \rightarrow h=0$$

низшая ледра - первая распр. волна.

1.03.23в.

Болло: $\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu = \kappa^2 = h^2 + \epsilon^2 \rightarrow h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - \epsilon^2}$

ϵ - никак не зависит от частоты. $\Rightarrow \omega_{\text{кр.}} = c \cdot \kappa_{\text{кр.}}$

Скоростально: $\omega_{\text{кр.}} = \frac{c \epsilon}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

где $\kappa_{\text{кр.}} = \kappa$

критическое волновое число

$\lambda_{\text{кр.}}$ - длина волны в свободном пр-ве с $\omega_{\text{кр.}}$
в свободной среде:

$$\lambda^{(0)} = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi c}{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}$$

тогда:

$$\lambda_{\text{кр.}} = \lambda^{(0)} (\omega = \omega_{\text{кр.}}) = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{кр.}} \sqrt{\epsilon \mu}}$$

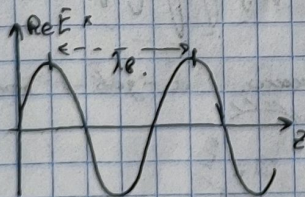
Случай распространяющейся волны: $\omega > \omega_{\text{кр.}}$ или $\lambda^{(0)} < \lambda_{\text{кр.}}$ (или $\kappa > \kappa_{\text{кр.}}$)

Случай не распространяющейся волны: $\omega < \omega_{\text{кр.}}$ или $\lambda^{(0)} > \lambda_{\text{кр.}}$ ~ с.р.

Подробнейшее математическое
соотношение для бегущих волн в
волноводе.

$$e^{i(\omega t - h z)} \sim \cos(\omega t - h z)$$

1) Число волн поперек о длине волны, групповой с-ты и т.д.
($\lambda_{\text{в.}}$, $v_{\text{г.}}$, $v_{\text{ф.}}$, ω), ледра $\omega > \omega_{\text{кр.}}$ (с.е. для распр. волны)



Длина волны - пространственный период $\lambda_{\text{в.}}^{(0)}$

$$\lambda_{\text{в.}} = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - \epsilon^2}} = \frac{\lambda^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\kappa^2}}}$$

гру. с-ты - с-ты длины волны

$$\lambda_{\text{в.}} = \frac{\lambda^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{кр.}}^2}{\omega^2}}} > \lambda^{(0)} \text{ в случае распр. волны}$$

Когда $\omega \rightarrow \infty \rightarrow \lambda_{\text{в.}} \rightarrow \lambda^{(0)}$ с длине волны однородной волны в среде.

2) Фазовая с-та описана $\cos(\omega t - h z)$. Зафиксируем фазу:

$$\omega t - h z = \varphi_0 \Rightarrow z = \frac{\omega}{h} t - \frac{\varphi_0}{h}$$

$$\Rightarrow v_{\text{ф.}} = \frac{\omega}{h}$$

~ с-та перемещения волнового фронта (пов-то по фазе)

Знаешь разницу между скоростью волны на шнуре и светом?

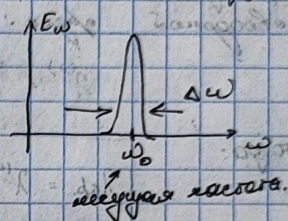
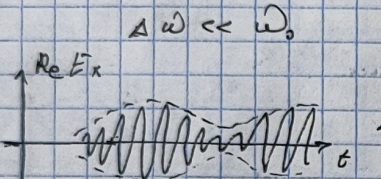
$$\Rightarrow v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - \epsilon^2}} = \frac{v_{\phi}^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\kappa^2}}} > v_{\phi}^{(0)}$$

где $v_{\phi}^{(0)} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{\omega}{\kappa}$ - эк-та плоской волн в шнуре.

Можно сказать, что волны в волновде явл. дисперсионными, если $\epsilon \neq 0$.

3) Частота - физический параметр волны: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

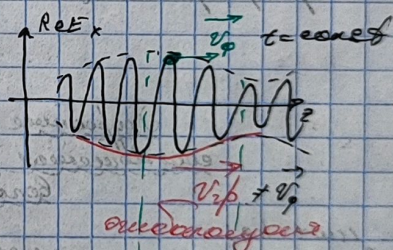
4) Групповая скорость волны - эк-та перемещения огибающей электромагнитного волнового пакета. (т.е. имеет физ. смысл по пакетам.)



Доп. на данной ндре представл. собой совокупность волн на близк. частотах.

В зависимости от разб. коэффиц. огибающая.

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\omega_0}$$



Запишем дисперсионное уравнение:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu = k^2 + \epsilon^2$$

$$\frac{\omega^2}{v_{\phi}^{(0)2}} = k^2 + \epsilon^2 \Rightarrow \frac{d\omega}{d\omega_0} \frac{d\omega_0}{dk} = \frac{2k}{2k} = 1$$

т.е. $\epsilon = 0$ - т.е. волновод из идеального проводника. ϵ - разб-е только от размеров - параметр волновода. $\epsilon = const$.

$$\Rightarrow v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{1}{\omega_0} \right) \frac{d\omega_0}{dk} = \frac{1}{\omega_0} \frac{h}{\hbar} = \frac{1}{\omega_0} \frac{h}{\hbar} = v_{\phi}^{(0)}$$

$$\Rightarrow v_{gr} = \frac{v_{\phi}^{(0)2}}{v_{\phi}} = v_{\phi}^{(0)} \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\kappa^2}} = v_{\phi}^{(0)} \sqrt{1 - \frac{\omega_{ph}^2}{\omega^2}}$$

или получили формулу в прямоугольном волновде, что не зависит от ω

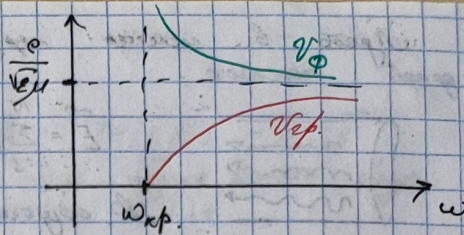
$$v_{\phi}^{(0)} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} - \text{для любой частоты составляющей.}$$

Перепишем в более удобном виде:

$$v_{\phi} \cdot v_{gr} = v_{\phi}^{(0)2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu}$$

$$\Rightarrow v_{gr} < v_{\phi}^{(0)}$$

Найдем фазовые $v_{\phi}(\omega)$, $v_{gr}(\omega)$:



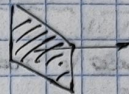
Поток энергии в линии передачи.

Плотность энергии (в отсутствие дисперсии): ~ средняя по времени.

$$w = \frac{\epsilon |E|^2}{16\pi} + \frac{\mu |H|^2}{16\pi} \sim \text{энергия в единицу объема.}$$

Плотность потока энергии (вектор Пойнтинга):

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} [\text{Re} \vec{E}, \text{Re} \vec{H}]$$



$$\vec{E}_{\text{real}} = \text{Re} \vec{E}$$

Удобнее использовать $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в комплексной форме, но тогда нужно брать среднее таких величин. Например:

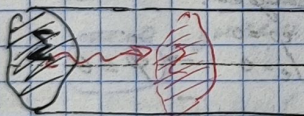
$$\vec{I} \sim e^{i\omega t}$$

$$V \sim e^{i\omega t}$$

$$Q = \text{Re} I \cdot \text{Re} V \Rightarrow \bar{Q} = \frac{1}{2} \text{Re} (I \cdot V^*)$$

Средний по времени вектор Пойнтинга:

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*]$$



Поток энергии:

$$\bar{P} = \iint_{\Sigma} \vec{S}_z dS = \iint_{\Sigma} \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*]_z dS$$

Далее — переносим подынтегральное не выходя.

Можно использовать алгебраическое соотношение:

$$\vec{E}_{\perp} = \zeta_{\perp\theta} [\vec{H}_{\perp}, \vec{z}_0] \quad \text{тогда упростится выражение для } \bar{P}$$

$$\Rightarrow \vec{S}_z = \frac{c}{8\pi} (\text{Re} \zeta_{\perp\theta}) \cdot |\vec{H}_{\perp}|^2$$

$$\Rightarrow \bar{P} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} \zeta_{\perp\theta} \iint_{\Sigma} |\vec{H}_{\perp}|^2 dS$$

~ полный поток энергии в линии передачи.

Иногда удобно выразить через $\vec{E}$ поле.

$$\bar{P} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} \left(\frac{1}{\zeta_{\perp\theta}} \right) \cdot \iint_{\Sigma} |\vec{E}_{\perp}|^2 dS$$

Выражение для волнового импеданса:

$$\zeta_{\perp\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \left(\frac{k}{h} \right)^{-1}$$

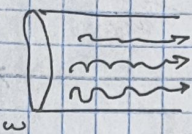
"+" для TE, "-" для TM.

Видно, что если волна не распространяется $\rightarrow \bar{P} = 0$:

$$\omega > \omega_{kr} \Rightarrow \text{Re} \zeta_{\perp\theta} = \zeta_{\perp\theta}$$

$$\omega < \omega_{kr} \Rightarrow \text{Re} \zeta_{\perp\theta} = 0 = \text{Re} \left(\frac{1}{\zeta_{\perp\theta}} \right)$$

Пусть в линии передачи есть нек. генов. Волн на границе раздела:



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i; \quad \vec{H} = \sum_{i=1}^N \vec{H}_i \quad \sim \text{по принципу суперпозиции.}$$

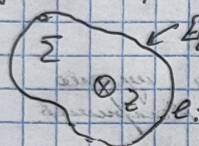
В общем случае для потока энергии применим о.п. не справедливы.

Но если мы рассматриваем идеальную линию передачи, то условия ортогональности $\vec{E}^0(\dots) \cdot \vec{E}^1(\dots) \int ds = 0$ и тогда следует:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_i \quad \text{— полный поток равен сумме парциальных.}$$

Оставшихся волнах в линии передачи.

Главная волна такая, где $\varphi = 0$ (т.е. $n = k$) — ТЕМ волна. Пусть поперечный сечение имеет форму круга.



Существует ли здесь главная волна? Т.е. нужно проверить.

$\Delta \varphi = 0$ — существует ли нетрив. решение?

$$\varphi = \cos \varphi / \epsilon$$

Можно рассмотреть волну в виде $\varphi = \cos \varphi$.

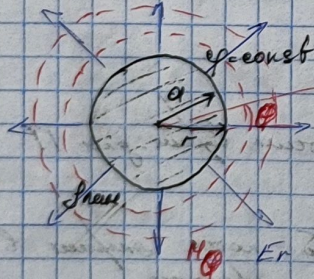
1) внутренняя задача.

Сред-е только трив. решение $\varphi = \cos \varphi \Rightarrow E, H \sim \nabla \perp \varphi = 0$ т.е. нетривиальное решение не существует. $\rightarrow$ нет главной волны. не может рассматриваться.

$$\Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_{\epsilon=0} = 0 \rightarrow \varphi = 0?$$

2) внешняя задача.

Нужно с учетом круглой формы: (без длинных выкладок) рассмотреть $\varphi = \cos \varphi$.



$$\Delta \varphi = 0$$

Волна вне трубы: $E_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $E_z = 0$

— ТЕМ волна:

$$\frac{E_r}{H_0} = 1 \quad \text{из уравнения Лапласа}$$

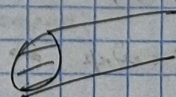
$$E_r = H_0 = \frac{2 \cdot 0.1 \text{ мВ}}{r}$$

Какая энергия они переносят?

$$\vec{P} \sim \int_{\text{внешн. сеч.}} |\vec{E}_r H_0| ds \sim \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^2 \cdot 2\pi r dr \sim \ln r \Big|_0^\infty \rightarrow \infty$$

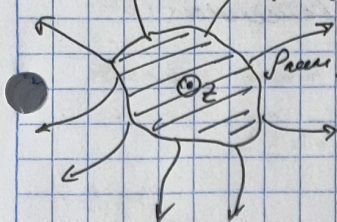
$\Rightarrow$ Линии передачи в виде стержня физически (энергетически) не реализуемы. Вообще говоря, идеальное решение не существует.

$\Rightarrow$ Волна не существует.



15.03.23.

Что если проводник не круглый?

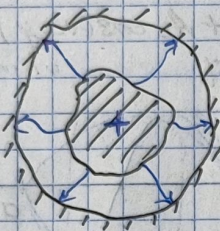


В этом случае слова: $|H| = |E|$; $\vec{H} + \vec{E}$
Но при $r \rightarrow \infty$ поля будут иметь вид
как у заряженной нити.

$$\Pi \rightarrow \ln \frac{\infty}{a} \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ Внешняя задача имеет только тривиальное
решение.

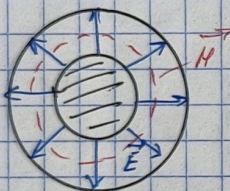
В каких случаях передачи возможны стоячие волны? Нужно
чтобы поле быстро сменялось
и добавились еще для проводника.



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + [\vec{H}, \vec{z}_0], \quad \vec{E}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H}$$

т.е. $\vec{E} = 0$; $h = k$ для стоячей волны.

Рассмотрим круглые проводники:
~ коаксиальная линия.

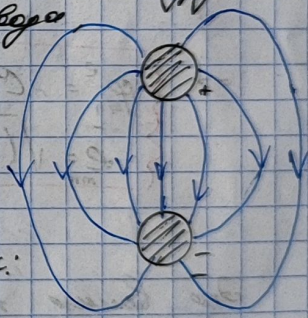


Не обязательно должны быть внешние контуры
в другом, два разнесенных проводника
напряжения.

Получается на поле диполя, а для
него знаем: $\vec{E} \sim \frac{1}{r^2}$; $|\vec{H}| = |\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$

Тогда $\vec{E}_2 \sim \frac{1}{r^4}$, а следовательно полей неток.

$\Pi = \iint \vec{E}_2 + \vec{S}$ - интеграл Бурда сходящийся.

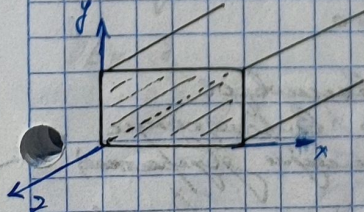


$\Rightarrow$ $\vec{E} \sim \frac{1}{r^2}$ возможна только в линиях, передачи, где число
проводников ≥ 2 . (т.е. полный заряд системы $= 0$)
это обеспечит быстрое спадание полей.

Исследование волн в коаксиальных
линиях передачи.

1. Прямоугольный волновод.

Введем с.к. сферическим координат (x, y, z) :



Пусть $a > b$. На
граничной поверхности (проводник)
должно быть $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$$

Для ДП волн:

$$\Delta \perp \varphi^{(e)} + \epsilon^2 \varphi^{(e)} = 0$$

$$\varphi^{(e)}/e = 0 \rightarrow \text{задана функция.}$$

Нужно найти $\varphi^{(e)}$, e -? Методом разделения переменных

$$\varphi^{(e)}(x, y) = X(x) Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(e)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(e)}}{\partial y^2} + e^2 \varphi^{(e)} = 0 \quad / \cdot \frac{1}{X Y}$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + e^2 = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -e_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -e_y^2$$

$$\text{примем } e_x^2 + e_y^2 = e^2$$

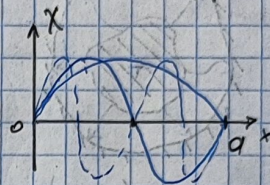
$$X'' + e_x^2 X = 0$$

$$Y'' + e_y^2 Y = 0$$

$$X = C_1 \sin(e_x x) + C_2 \cos(e_x x); \quad Y = A_1 \sin(e_y y) + A_2 \cos(e_y y)$$

$$\text{ГД: } x=0, a \quad y \rightarrow \varphi^{(e)} = 0$$

$$y=0, b \quad \Rightarrow C_2 = A_2 = 0$$



$$\Rightarrow e_x a = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$e_y b = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$e^2 = e_x^2 + e_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \varphi_{mn}^{(e)} &= C \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \\ e_{mn} &= \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \end{aligned} \right., \quad m, n = (0), 1, 2, 3, \dots$$

при 0 получаем тривиальное решение.

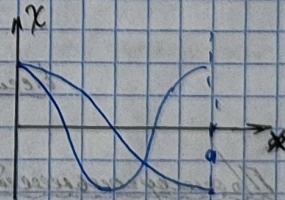
Это волны так и называются TE_{mn} ($T_{1,2}, T_{2,5}, \dots$)

Для TE волны (та все становится ясно):

$$\Delta_x \varphi^{(m)} + e^2 \varphi^{(m)} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial n} \Big|_e = 0 \rightarrow \text{решается аналогично.}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{mn}^{(m)} &= C \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \\ e_{m,n} &= \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \end{aligned} \right.$$



$$m, n = (0), 1, 2, 3$$

- здесь для e_x может быть 0

назовем типовые волны в прямоугольном волновом.

TE_{mn}, TM_{mn} - разные моды. (при этом есть вырождение по волновому числу, как минимуме дублируется)

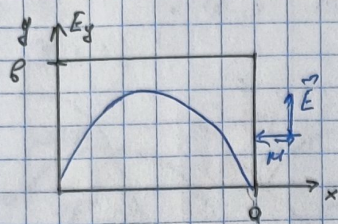
т.е. для одного e_{mn} есть TE и TM волны, но сформулированы они разные

$$\varphi = \min, \quad \varphi_{\text{фр.}} = \pi/2$$

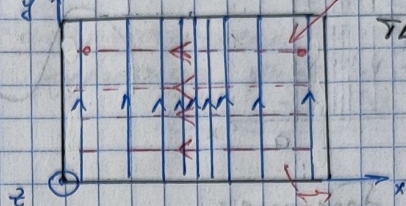
ТЕМ волна здесь невозможна! Проверим сдм.

Нужная нрз та, для которой $\varphi_{\text{мин}} \Rightarrow 350 \text{ } \partial E_{10} \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b} \right)$

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_0, \quad k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

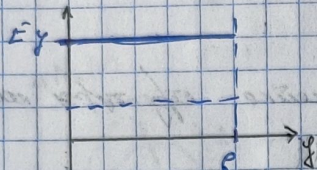


картина силовых линий: *гориз. вдоль стенок.*



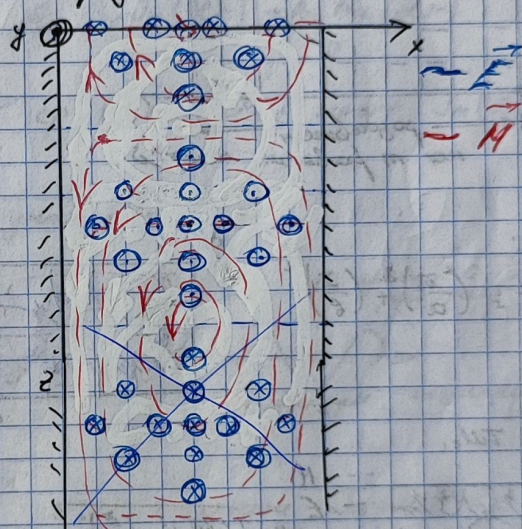
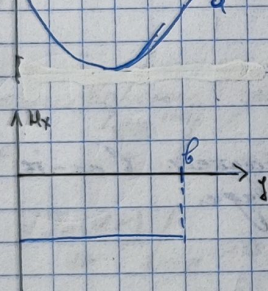
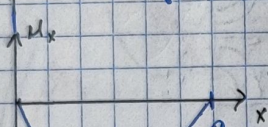
$$TE: E_z = 0$$

$$E_x = 0$$

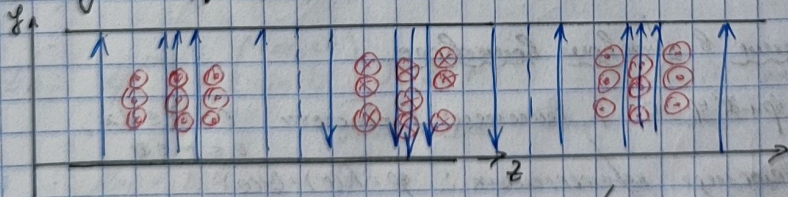


Величина изображается гребенкой

Вид сверху: (рисует магнитный ток)



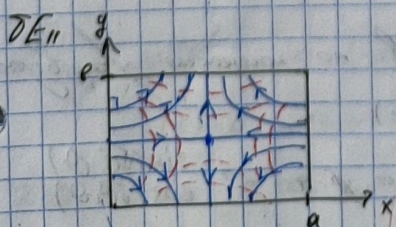
Вид сбоку:



! Нужно преобразовать

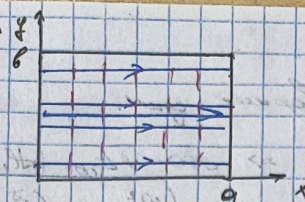
Силовые линии не линии. *продольная составляющая совпадает с линиями срезом.*

Что для внешних нрз?



$$\varphi_{11} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

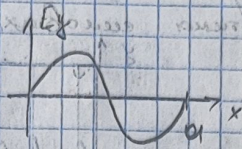
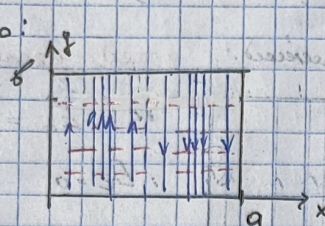
$\vec{E}_{os}$:



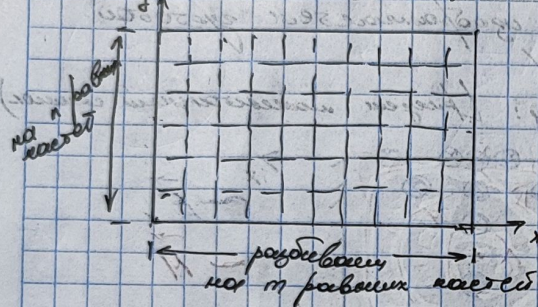
поворнуто на 90°

$$\vec{E}_{os} = \vec{E}$$

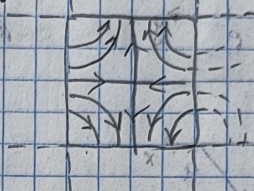
$\vec{E}_{zo}$:



Если a и b большие:

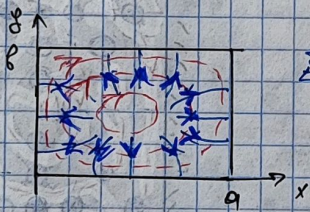


В каждой ячейке структура как в $\vec{E}_{z1}$



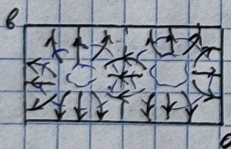
$\vec{E}_{z1}$:

$$E_{z1}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$$



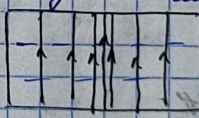
$\vec{E}$ выдвигается в m -го герце.

12.03.23, $\vec{E}_{z1}$

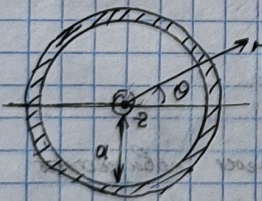


$$E = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

$\vec{E}_{z1}$ — излучает свет.



Решение в фазовом пространстве.



$$\Delta \varphi + \kappa^2 \varphi = 0; \text{ Решение в области } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R$$

Решение уравнения: $\varphi = R(r) \cdot \varphi(\theta)$ в цилиндрической с.с.

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + \kappa^2 \varphi = 0$$

уравнение из системы производных $\rightarrow$ фаз. по времени производные.

$$(1) \frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \kappa^2 r^2 = C_1 \quad \text{и} \quad \varphi = -C_1 \quad (2)$$

$$\varphi: \varphi'' + C_1 \varphi = 0 \rightarrow \varphi(0) = \varphi(2\pi) \rightarrow \text{реш. ф-я} \rightarrow \begin{matrix} \sin(\sqrt{C_1} \varphi) \\ \cos(\sqrt{C_1} \varphi) \end{matrix}$$

$$\text{возможны } \sqrt{C_1} = m, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

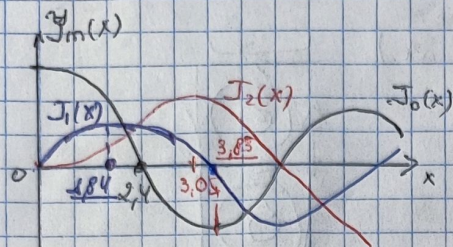
Решение в виде:

$$\varphi = A_1 \cos m\varphi + A_2 \sin m\varphi$$

$$C_1 = m^2$$

$$\Rightarrow R'' + \frac{1}{r} R' + (R^2 - \frac{m^2}{r^2}) R = 0 \quad \text{и } \varphi - \text{е Бесселя (лиш. 2-го порядка)}$$

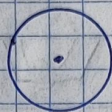
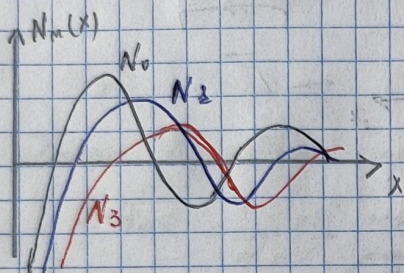
Решение: • φ -я Бесселя 1-го рода $J_m(x)$
 • φ -я Неймана (Бесселя 2-го рода) $N_m(x)$



асимптотически похожа на $\sin$ и $\cos$

рекуррентная ф-ла:

$$J_1(x) = -J_0'(x)$$



Решение в круге не должно иметь особенностей, т.е.

φ -я Неймана не подходит

$$R = B_1 J_m(xr) + B_2 N_m(xr)$$

$$\Rightarrow \varphi = (C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi) J_m(xr)$$

Удовлетворение граничным условиям:

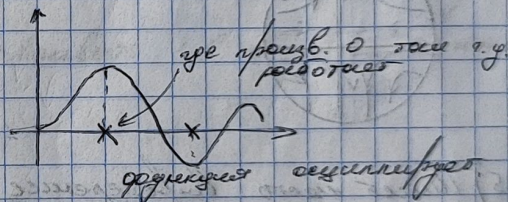
$$1. TE: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$$

$$\frac{J_m'(x)}{J_m(x)} \Big|_{r=a} = 0; \quad J_m'(x) = 0$$

$$x = \mu_{m,n}, \quad n=1, 2, 3,$$

$$\alpha = \mu_{m,n}; \quad \mu_{m,n} = \frac{\mu_{m,n}}{\alpha}$$

$$\mu_{11} = 1.84 \quad (TE_{11}, \quad \mu_{11} = \alpha)$$



$$\text{осциллирует} \quad J_m'(\mu_{m,n}) = 0$$

$$TE_{11}: \quad \varphi_{11}^{(m)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} J_1(\mu_{11} r) \quad \text{— наименьшая степень}$$

записываем координаты

$$\mu_{21} = 3.05$$

$$TE_{21}: \quad \mu_{21} = \frac{3.05}{\alpha}$$

$$\mu_{01} = 3.83 \quad TE_{01}: \quad \mu_{01} = \frac{3.83}{\alpha}$$

$$TE_{01}: \quad \varphi(r) \Big|_{r=a} = 0 \rightarrow J_0(\mu_{01}) = 0$$

$$J_m(x) = 0 \quad \leftarrow \quad \mu_{m,n} = \frac{\mu_{m,n}}{\alpha}$$

$$TE_{02}: \quad \mu_{02} = 2.405; \quad \mu_{02} = \frac{2.405}{\alpha}$$

$$TE_{12}: \quad \mu_{12} = 3.83; \quad \mu_{12} = \frac{3.83}{\alpha}$$

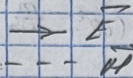
Кривизны силовых линий:

1) Низкая мода TE_{11} :

$$R_{11} = \frac{1.84}{a}$$

$$\epsilon_r^{(m)} = \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) J_{11} \left(\frac{1.84}{a} r \right)$$

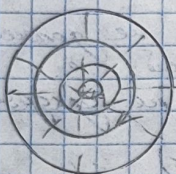
векторное представление
силы полярность 1 ось симметрии dx



и полевые на границе. Везде

2) Низкая мода TE_{02} :

$$R_{02} = \frac{2.405}{a}$$



3) TE_{22} $R_{22} = \frac{3.05}{a}$



4,5) Низкая мода векторное

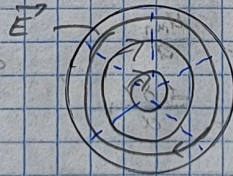
TE_{01}, TE_{11}

не зависит от
адиант. ун.

$$R_{01}^{TE} = \frac{3.83}{a}$$

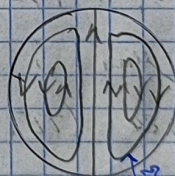
$$R_{11}^{TE} = \frac{3.83}{a}$$

TE_{01}

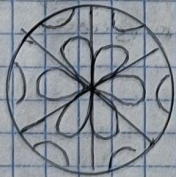


max по
сегменту

TE_{11}

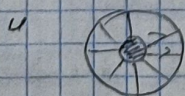


Высокая мода:



Кривизны:

$\square$ или $\bigcirc$ TE_{01}



TE_{01}
 $R=0$

$\rightarrow$ много это будет TE и TM ?

или

$C_1 J_m(x)$



$C_2 N_m(x)$

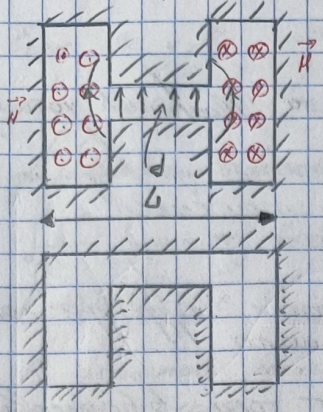
$$E_z - H_0 = \frac{e}{r}$$

$$E_z = 1$$

29.03.22

Ряды волноводов.

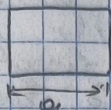
1) H и П - образные волноводы.



Если узкий зазор $\rightarrow$ аналогичен конденсатору.

Для него: $\lambda_{кр} \gg b$ - коэф.ного материала.

Для круглого и квадратного.



$$\lambda_{кр} \sim a$$

В коаксиальной линии:



$$E=0 \Rightarrow \lambda_{кр} = \infty$$

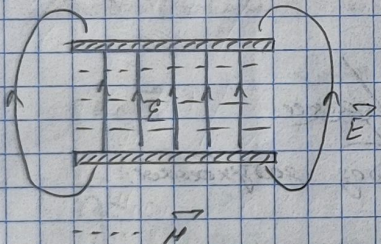
$$\lambda < \lambda_{кр}$$

Такие волноводы могут быть описаны в терминах E и $H_{кр}$

$$E \sim \frac{a^2}{\sqrt{\epsilon}}$$

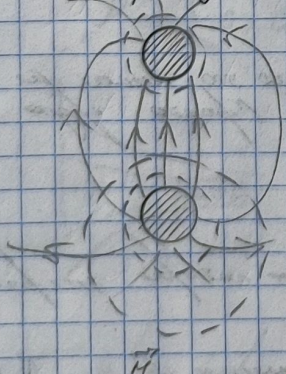
Это поле имеет сферическую симметрию, H и E разнесены в ф-ве.

2) Главные волноводы применяются в плоской линии - 2 проводника.



Задано поперечное сечение (в виде плоской схемы).

3) Двухпроводная линия:



То есть поле аналогичное диполю

Задача: о попер. токах и зарядах на срезах волновода. Если в линии различны фазы, волнов. со сдвигом E и H связаны $\vec{J}_{пов} = \nabla \phi$ и $\vec{J}_{пов} = \nabla \phi$. С помощью граничных условий:

$$\vec{J}_{пов} = \frac{c}{4\pi} [\vec{n}_2, \vec{n}_1] \quad (\vec{n} - \text{внешняя нормаль})$$



$\vec{J}_{пов}$ - кол-во зарядов на поперечном срезе. Вд.

$$\left\{ \delta = \frac{c}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon}} \right\}$$

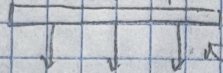
$$J_{\text{пов}} = \frac{c E_n}{4\pi}$$

Это важно при проверке эксперимента. Коэффициент холла измеряется поле внутри



Кудряков предложил формулу для расчета холла (т.е. $J_{\text{пов}}$ предел. — поле не выкаблито) Но так, чтобы структура поля не искажалась мало

Для этого нужно сделать так, чтобы ток в вольмовете



и не изгибается, а если угол сделать больше

после не изгибается, т.е. угол должен быть больше, чем угол изгиба



Если хотим сделать антенну — нужно подобрать форму и обертку концы

Помощники в волнах в пространстве



Если волна распространяется без затухания:

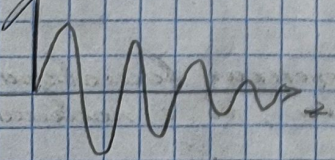
$$1) \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$2) \quad \sim e^{i(\omega t - kx)} \rightarrow e^{i\omega t} e^{-ikx}$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - \epsilon \mu^2}$$

Если $\omega < \omega_{\text{кр}}$: поле будет убывать, но это не связано с потерями (просто эффект непрозрачности)

Наибольшие потери будут в тепловых потерях — потери энергии в реальных волноводах



Три причины потерь (затухания волн):
1) потери энергии в диэлектрике, записан в волновод (в вакууме потери нет)

$$2) \quad \epsilon = \epsilon' + i\epsilon''; \quad \mu = \mu' + i\mu''$$

$$3) \quad \text{потери в стенках}$$

Волны будут иметь $\alpha = \delta$

$$\epsilon'' = -i \frac{4\pi \sigma}{\omega}$$

Гребень пока остается практически постоянным

из дисперсионного уравн:

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon'' - \epsilon'^2}$$

Есть ϵ' и ϵ'' . $\Rightarrow h = h' + i h''$

усть $\mu = 1$; $\epsilon = \epsilon' + i \epsilon''$: $h'^2 - h''^2 + 2i h' h'' = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' - \epsilon'^2 + i \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon''$

приравняем вещественные и мнимые части:

$$\begin{cases} h'^2 - h''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' - \epsilon'^2 \\ 2i h' h'' = i \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon'' \end{cases} \rightarrow h'' = \frac{\omega^2 \epsilon''}{2 c^2 h'}$$

— в будущем сигнал
наименьшей ф-ции.
— константа затухания.

В реальных материалах затухание есть, тогда будем считать, что $h'' < h'$

$$\Rightarrow h' = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' - \epsilon'^2}$$

$$h'' = \frac{\omega^2}{2 c^2 h'} \epsilon''$$

— в будущем сигнал затухает

$$E, H \sim e^{-i h z} = e^{-i h' z} e^{-h'' z}$$

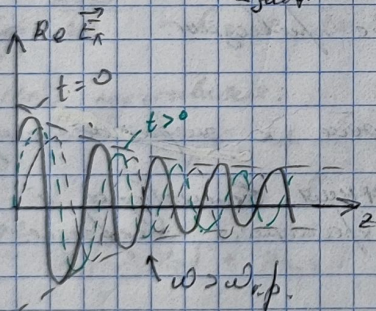
где $h' > 0$

$$h'' = -|h''|$$

$$\Rightarrow \text{Re } E \sim \cos(\omega t - h' z) e^{-|h''| z}$$

Можно говорить о коэффициенте затухания:

$$\Delta_{\text{зат}} = \frac{1}{h''}$$



$$\epsilon' = -\frac{\omega^2}{\omega_{кр}^2} \text{ когда } \omega < \omega_{кр}$$

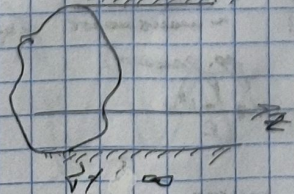
$$h'' \sim \frac{1}{h'} \epsilon'', \quad h' \rightarrow 0 \Rightarrow h'' \rightarrow \infty$$

т.е. если $\omega \rightarrow \omega_{кр}$, то затухание сильно возрастает.

Вводится понятие угла потерь:

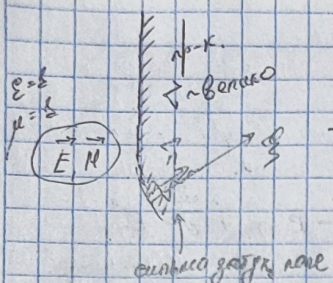
$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}, \quad h'' \sim \epsilon''$$

2) Потери энергии в средах волноводов. Пусть волновод имеет не заполненную среду.



Здесь γ — коэффициент затухания по пути между сосед. проводниками

Используем ТУ Леонтовича



$$\rightarrow p \approx i\epsilon' = -i \frac{4\omega\gamma}{\omega} \Rightarrow \kappa = \frac{2}{c} \sqrt{i\epsilon'}$$

$\Rightarrow$ пока совсем дешево и вероятно структуру

$$I_{\text{пов}} = \sqrt{\frac{H}{E}}$$

Для простоты рассмотрим $\mathbb{R}$ действительных.

$$Z_{\text{пов}} = \sqrt{\frac{1}{i80}} = \sqrt{-i957}$$

$$\left\{ E = \int_{\text{об}} [R, \vec{R}] \right\} \text{ или } \int_{\text{об}} = \frac{E}{N.L}$$

Пу для поля внутри волновода на его границе.

$\nabla \varphi = 0$ в 0 предполагается. Но в л. ф. б. $\vec{E}$ появляется, а $\vec{H}$ исчезает само.

$$\delta = \frac{e}{\sqrt{2\pi} \gamma \mu \omega}$$

ГД можно использовать, когда Г велико, насколько?

✓) $\sqrt{\lambda} \gg \omega \Rightarrow (\mathcal{E}_K \approx i\mathcal{E}^H)$ — пер. хромосома возмущена.

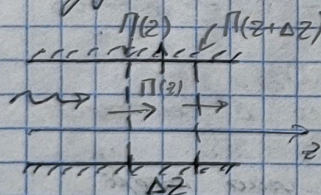
2) $\delta \ll L$ (много меньше всех хор-х масштабов).

$$L = \min(D, R_{кр})$$

допускается
свойство

разрешено
приведено.

Основываясь на этих условиях переходя к энергетическому методу:



Рассел-м 2 близлежащих селения Вальсдорф и
запасенный закон сохранился Эберсбах.

$$h = h' + i h''$$

5.04.23₂

Объемная кон-та аде светому урину Гауса: $\Gamma \approx 5 \cdot 10^{-17} \frac{1}{\text{с}}$

$$\omega \sim 50^{10} \div 10^{11} \text{ (об/с.)}$$

$$P(z) = P(z + \Delta z) + \Delta P_{\text{ст.}} \quad \text{стенки}$$

$$\frac{\pi(z + \Delta z) - \pi(z)}{\Delta z} = -\frac{\Delta P_{es}}{\Delta z}$$

$$= ? \frac{dI}{dP} = -P_{EW}$$

и переводим в лит
4370

где $\rho_{\text{ср}} = \rho_{\text{ли}} \frac{\Delta \rho_{\text{ср}}}{\Delta z}$ — масса воздуха в единицу длины.

$$\Pi \sim |E| |M| \sim |M|^2 \sim E^2, \text{ or } E, M \sim e^{-i\hbar\tau} = e^{-i\hbar\tau} e^{i\hbar\tau}$$

т. е. если $h'' < 0$, то линия выпукла.

$$\Rightarrow \Pi \sim e^{-2h''z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Pi}{dz} = 2h'' \cdot \Pi$$

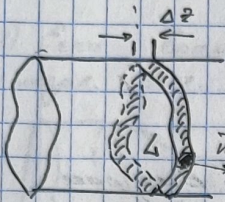
$$\Rightarrow h'' = + \frac{P_{cs}}{2\Pi}$$

~ это есть поверхностная ЗСЗ;

Кинематическое это описание $\frac{P_{cs}}{\Pi}$.

$$\Pi = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \oint_{\Sigma} |\vec{H}_z|^2 ds$$

Σ - поверхность сечения.



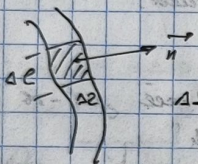
$$\Delta S = \Delta z \cdot L$$

Рассеивание поперечных волн боковой поверхностью. Волна может излучаться через тангенциальную об-сть.

$$\Delta P_{cs} = \frac{c}{8\pi} \oint_{\Delta S} \operatorname{Re} \eta_s \cdot |\vec{H}_z|^2 ds$$

$$\eta_s = \sqrt{\epsilon_{\text{соединяющая}}} = \sqrt{\frac{i\omega}{4\pi\sigma}}$$

$$\vec{E}_z = \eta_s [\vec{H}_z, \vec{n}]$$



$$\Delta S = \Delta z \cdot \Delta l$$

Тогда поверхностная ΔP_{cs} в др. виде:

$$\Delta P_{cs} = \frac{c}{8\pi} \oint_L \operatorname{Re} \eta_s |\vec{H}_z|^2 dl \cdot \Delta z$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta P_{cs}}{\Delta z} = P_{cs} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \eta_s \oint_L |\vec{H}_z|^2 dl$$

Все переобъединяем:

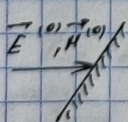
$$h'' = + \frac{\operatorname{Re} \eta_s \oint_L |\vec{H}_z|^2 dl}{2 \operatorname{Re} \oint_{\Sigma} |\vec{H}_z|^2 ds} \quad [\eta_s] = [\xi_+]$$

$$\operatorname{Re} |\vec{H}_z|^2 = |\vec{H}_z|^2 + |\vec{H}_{Lz}|^2; \quad \vec{H} = \vec{e}_0 H_z + \vec{H}_L$$

Чтобы найти величину тангенциальной волны нужно знать это поле. А мы знаем как существует поле только для излучения. Но и это можно считать как нулевое приближение.

$$H_z \approx H_z^{(0)}, \quad H_L \approx H_L^{(0)}$$

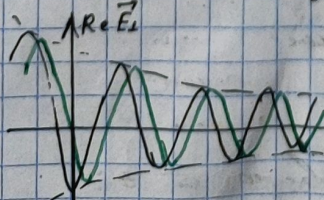
(0) - для изл. волны



Если излучение в РЧ не возбуждено - то поля уменьшаются мало.

Что с E_L ? $E_L^{(0)} = 0$ - но тогда $E_L \neq 0$ в неупр. среде.

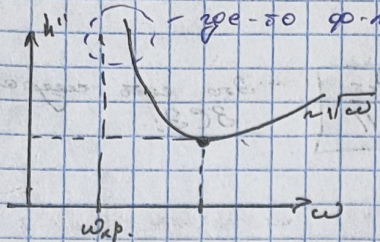
А что H_L излученное мало.



Если это мало потери - волна затухает вдоль оси распространения.

Если $\omega \rightarrow \omega_{кр}$, то величина $h'' \rightarrow \infty$, а $h' \rightarrow 0$

Зав-то h'' от ω :



где-то ф-ла есть, которая не нрав-ся?
 что в области больших частот?
 предпр-м:

$$\oint |\vec{H}_z|^2 dV = |\vec{H}_z|^2 \cdot L$$

$$\oint |\vec{H}_z|^2 dS = |\vec{H}_z|^2 \cdot \Sigma$$

$m=1$

приближенно при $\omega \gg \omega_{кр}$, так, что $\omega = \omega_{кр} + \Delta\omega$, тогда.

$$\eta_s \sim \sqrt{\frac{1-i\omega}{1+\omega}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{1+\omega}} \Rightarrow \text{Re } \eta_s \sim \sqrt{\frac{\omega}{1+\omega}}$$

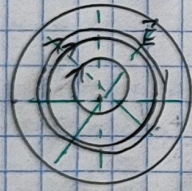
Если брать график. $\rightarrow$ у h'' есть минимум. Вспомогательная работа на этом поле.
 Если делать это приближ. для h'' получим:

$$h'' \sim -\sqrt{\frac{\omega}{1+\omega}} \cdot \frac{L}{\Sigma} \quad \Sigma \sim L^2$$

$$\Rightarrow \left\{ h'' \sim \sqrt{\frac{\omega}{1+\omega}} \cdot \frac{1}{L} \right\} \text{ или малый размер, тем больше затухание.}$$

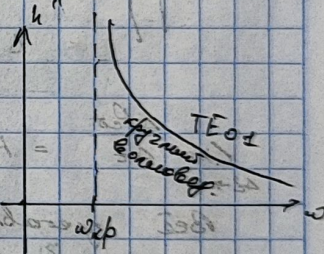
Но! Есть такая мода, для которой это не так, для нее зав-то $h''(\omega)$:
 $TE_{01} \rightarrow$ связано со структурой поля.
 в круглой в-р-е.

TE_{01} - первый в-р.

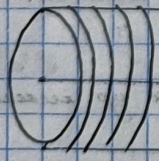


$$\Rightarrow M_z = M_z$$

когда $\omega \rightarrow \infty$, $M_z \rightarrow 0 \Rightarrow k' \rightarrow k = \frac{\omega}{c}$; $M_z \sim \frac{1}{k}$



т.е. момент исп-ть TE_{01} , но есть особенность. Из-за наличия пересечения этой среды будет переходить на более низкие.



Можно наглядно на графике показать, как...

Другие порядки и описания в малых пределах.

1) или суммарно некая мощность, волны:

$$E(\vec{r}_1) e^{i(\omega t - kz)}$$

В то же время не забываем о зав-но от z :

$$E(\vec{r}_1) e^{i\omega t} f(z)$$

тогда получим уравнение: (исходя из деления на косинусы).

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + h^2 f = 0 \Rightarrow f(z) \sim C_1 e^{-ihz} + C_2 e^{ihz} \quad (*)$$

Geo. Symes, center $h=0$? $\Rightarrow \frac{\nabla^2 f}{\sqrt{z^2}} = 0 \Rightarrow f = A_1 + A_2 z$

Кажется, что (*) в пределе не даст нем. зав-го. Но
констатируем, что при $\epsilon \rightarrow 0$ $C_2 = -C_1 \rightarrow 0$

2) Если вращение происходит в его собственной плоскости (мерз. сн. его диаметр вращается) $\frac{1}{10^9}$

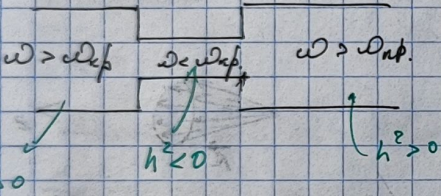
$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \mathcal{H}^2(z)}$$

$h(z)$ должно быть пер. м.о. р-я.

Упр-ея метод ВКБ. Продвиг. решение замк. в виде:

$$\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{2}} \ll 1 \quad : \quad \mathcal{P} = \frac{C_1}{\sqrt{\lambda}} e^{-i \int h(z) dz} + \frac{C_2}{\sqrt{\lambda}} e^{+i \int h(z) dz}$$

3) Пусть есть вешиновар, а между ещё осен., "ишем"



Тогда между поле горючего экр.
забуксало. В лодок эфиреи:

$$17 \sim \operatorname{Re} \left(\frac{\kappa}{h} \right)^{1 \pm i} \approx 0$$

Д.е. подорож энергии неб.

$\Rightarrow$ и волна как бы дальше идти не может.

Будем делать это умнее. Рассмотрим, что
имеется, что П-0, но тогда будут ~~неуместны~~

$$\eta = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{\kappa}{h} \right) \pm \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \int_0^\infty |\vec{H}_\Delta|^2 dS$$

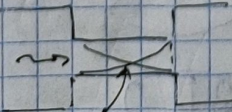
Витер из парадокса. но ф-ла для потока секв. вана не.

$$\vec{E}_\perp = \gamma_{\text{rel}} [\vec{H}, \vec{v}] ; \quad \gamma_{\text{rel}} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

интегральная св-во ср-ва только для
Li нормальных металлов давших $e^{-1.4}$.

Т.е. по сравнению с тем в каком случае в среднем →
 дадут в разных измерениях, т.е. интернальное
 сообщ. дает измерение.

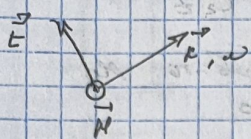
$g_{\pm 0} = \frac{FV}{H_{\pm}}$ - в будущей цене!



как это объясняется и почему. Впр. почему.

12.04.23.

1) Комплексная Брэггумма — поле любой волны в плоскости перпендикулярно направлению распространения в виде суперпозиции плоских волн.



Плоскостное гр-е плоской волны:

$$k = \frac{\omega}{c \sqrt{\epsilon \mu}}, \quad \vec{E} = E_0 [\vec{k}, \vec{n}], \quad \text{где } E_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}, \vec{H} \perp \vec{E} \quad (\text{нот} = k_z)$$

$$\vec{k} = k \cdot \vec{n}$$

Это точная дифференциальная волна — пов-ть пов. фазы совп. с пов-ью пов. ампл.

Волны и медл. волны, когда $k \rightarrow$ комплекс.

Разложение по плоским волнам. — как разложение в ряд Фурье.

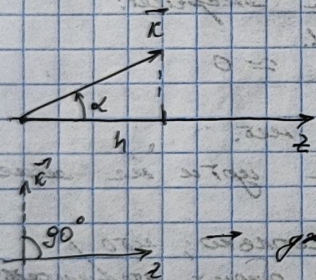
$$\vec{E}_{tot} = \sum_{m,n} \vec{E}_{k,m,n} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{— пов. распр-ия и медл. сф.}$$

$\varphi^{(e)}, \varphi^{(m)}$ можно представить в виде интеграла Фурье. $(\varphi^{(e)}(\vec{r}_2), \varphi^{(m)}(\vec{r}_2))$

У всех $k_z = h$, а $|\vec{k}| = k$ (но $\vec{k}$ вообще разное, разное направление)

$$\Rightarrow \vec{k} = 20h + \vec{k}_\perp$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{k}$$



Из этого ф-лы видно что, зависимость волн.

— две волны не распр-ся.

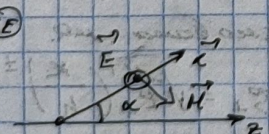
$$\omega = \Omega_{kf} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Рассмотрим отдельно TE и TM волны:

$$\vec{E} = E_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{H} = H_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

TE

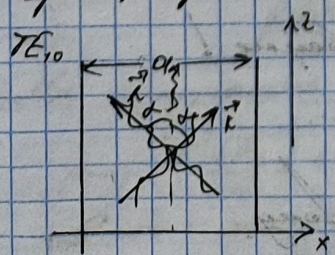


$$\frac{E_z}{H_z} = \frac{E_0}{H_0 \cos \alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{k}{h} = Z_+$$

TM

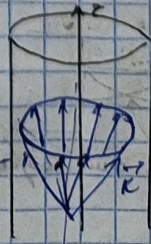
$$Z_+ = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{h}{k}$$

Пример: разложение волны на плоские волны.



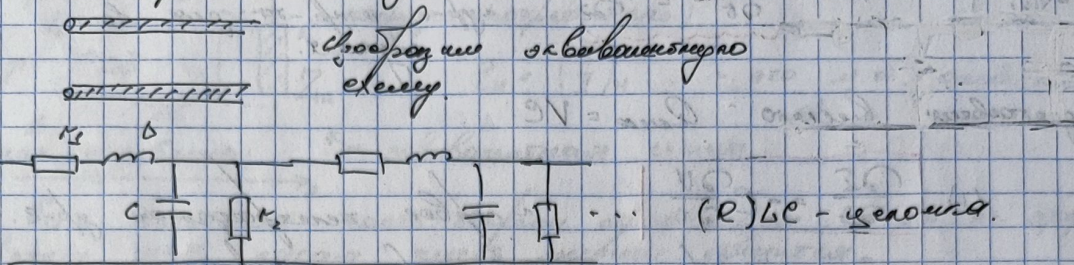
а.з.в.

Круглый волновод — все волны.



тогда поле в каждой точке — вол.

Телеграфные ур-я.
в линейных цепях.
описание волн в переменном токе и некоррелирует.
Рассеиваем только для волн типа ТЕ₁₁.



Если уменьшить размеры цепи $\rightarrow 0$, то у нас на ур. др.
будет только одна цепочка на ур. др. цепи.

$$L, C, \Delta z, \Delta L = L \cdot \Delta z, \Delta C = C \cdot \Delta z$$

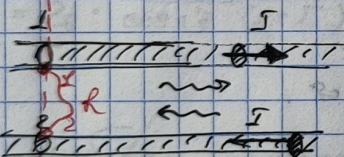
Ограничимся только идеальными без потерь. $\rightarrow$ LC-цепочка.

L, C - основные параметры. Записали двумя проводниками.

Начиная с волн структура линейной цепи.

$$Z, t, e^{i\omega t}$$

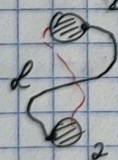
Вместо E и H введем $V(z)$ и $I(z) \rightarrow$ опис-е э-м величины



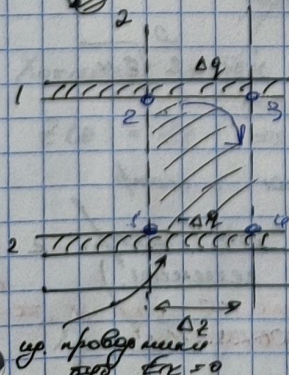
$$V = \int E \cdot dz$$

(z - z , который меняется в поперечном сечении)

В поперечном сечении (если такой видовой сечения поперек, иначе опис.)



$I(z, t), V(z, t)$ - поперечные ур-я для этих величин.



Достаточно знать закон Кирхгофа.
пред Δq - заряд в z проводке на срезе Δz .

$$\Rightarrow \Delta q = Q_{лин} \cdot \Delta z \Rightarrow Q_{лин}(z, t)$$

Тогда во z срезе $\rightarrow -\Delta q$

$\Delta(\Delta q)$ - приращение Δq за Δt .

$$\Rightarrow \Delta(\Delta q) = \Delta q(t + \Delta t) - \Delta q(t)$$

Закон сохранения заряда:

$$\frac{1}{\Delta z \Delta t} \Delta(\Delta q) = -I(z) \Delta t - I(z + \Delta z) \Delta t \rightarrow$$

получили LC закон Кирхгофа.

$$\frac{\Delta(\Delta\varphi)}{\Delta t \Delta z} = \frac{\Delta(Q_{\text{линей}} \cdot \Delta z)}{\Delta t \Delta z} = \frac{\partial Q_{\text{линей}}}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\text{div} \vec{J}\right) \Rightarrow \frac{\partial Q_{\text{линей}}}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z} \quad \text{уравнение непрерывности для тока}$$

Предположим линейно $Q_{\text{линей}} = VC$

$$(1) \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{— первое телеграфное уравнение}$$

Применяем дб з.к. Кирхгофа, трансформируем уравнение по координатам 1-2-3-4 (1'-2'-3'-4')

$$\oint E_z d\ell = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial t} \quad \text{Вклад в циркуляцию только 3-4 и 1-2}$$

$$V(2+\Delta z) - V(z) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi$$

По опр по координатам стационарных: $\Delta\varphi = \frac{\Delta L}{c} I$ (с-то света)

$$\Delta L = L \cdot \Delta z$$

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{c^2 L} \frac{\partial I}{\partial t} \quad \text{— второе телеграфное уравнение}$$

Рассмотрим это смешанное уравнение Максвелла (но в 1D случае)

$$V \leftrightarrow E; \quad I \leftrightarrow H$$

Возьмем второе производное

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{LC}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad \text{— волновое уравнение}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \frac{LC}{c^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0$$

Их решение

$$V = f_1(z - v_\phi t) + f_2(z + v_\phi t), \quad v_\phi = \frac{c}{\sqrt{LC}}$$

Но для ТЕДВ получаем, что с-то равно скорости света

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \boxed{LC = \epsilon\mu}$$

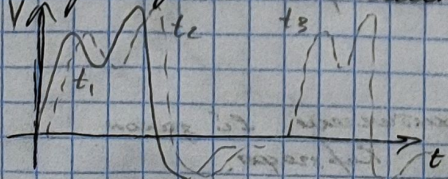
Пусть есть бегущая волна $e^{i(\omega t - kz)}$ $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}$

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{C}$$

Опр. Волновое сопротивление в линии передачи — это коэффициент пропорциональности между напряжением и током в бегущей волне (в идеале — опр-ие единичное)

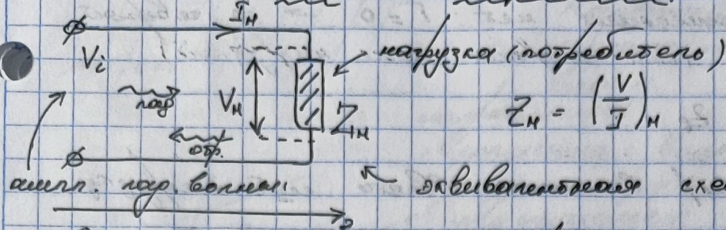
Нормируем моментально передаваемую мощность

— без дисперсии



19.04.23.

Отражение волн в терминах тока и напряжения.



$$Z_n = \left(\frac{V}{I}\right)_n \quad \sim \text{это м.б. комб. контур и др.}$$

Если большая часть энергии отражается, то это не эффективно. Хотим знать какая часть энергии отражается.

Вводится ещё один коэффициент: $\Gamma(z) = \frac{V(z)}{I(z)}$ — коэффициент в данной точке линии.

$V(z)$ и $I(z)$ опр.-ся суммой опр. и пар. волн.

В общем случае имеем в виде:

$$V(z) = V_i e^{-ikz} + V_r e^{+ikz}$$

$$I(z) = I_i e^{-ikz} + I_r e^{+ikz}$$

пар. и опр. волны.

$$\frac{V_i}{I_i} = Z_0, \quad \frac{V_r}{I_r} = -Z_0$$

$\kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$

подставляем в $\Gamma(z)$:

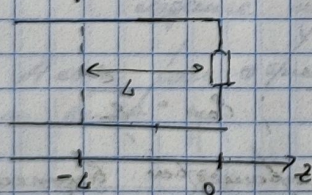
$$\Gamma(z) = \frac{V_i e^{-ikz} + V_r e^{+ikz}}{\frac{V_i}{Z_0} e^{-ikz} - \frac{V_r}{Z_0} e^{+ikz}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{пр. вол.} \\ \text{отр. вол.} \end{array} \right\} = \text{получили из телеграфных ур-ий}$$

$$= Z_0 \cdot \frac{\cos kz \cdot (1 + \Gamma) + i \sin kz (\Gamma - 1)}{\cos kz (1 - \Gamma) + i \sin kz (\Gamma + 1)}$$

где $\Gamma = \frac{V_r}{V_i}$

взятая на нагрузке (на конце линии)

Выберем начало отсчёта на нагрузке.



$$z=0: Z_{\text{от}} Z_n = Z_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

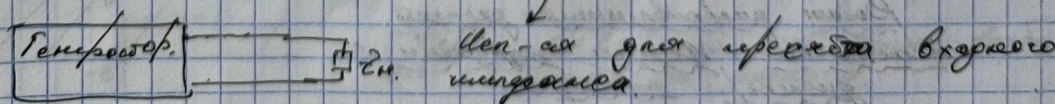
$$\Rightarrow \Gamma = \frac{Z_n - Z_0}{Z_n + Z_0}$$

Формула пересчёта импеданса

Хотим найти связь импеданса на расстоянии L от нагрузки:

$$Z(z) = Z_0 \cdot \frac{\cos kz (1 + \Gamma) + i \sin kz (\Gamma - 1)}{\cos kz (1 - \Gamma) + i \sin kz (\Gamma + 1)} \cdot \frac{1}{(1 - \Gamma) \cos kz}$$

$$\Rightarrow Z(-L) = Z_0 \cdot \frac{Z_n + i Z_0 \tanh kL}{Z_0 + i Z_n \tanh kL}$$

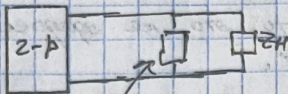


Согласование волн в линии передачи.

Если на нагрузке отражения нет: $\Gamma = 0 \rightarrow$ то говорится, что линия согласована. (векторная диаграмма напряжений)

$$\Gamma = 0 \Rightarrow Z_n = Z_0$$

Как согласовать? Напряжением в линию ввести нужную нагрузку.



это экв. конт. контур, всё что угодно.

Коаксиальная линия:



$$Z_0 = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$E_r = \frac{\rho_{lin}}{\epsilon r} \Rightarrow V = \int_a^b E_r dr = \frac{\rho_{lin}}{\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q_{lin}}{V}$$

Потенциал:

$$C = \frac{\epsilon}{2 \ln \frac{b}{a}}$$

Найдём индуктивность: рассмотрим магнитное поле, создаваемое током.

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$$

$$\mu = \frac{B}{H}$$

$$\Rightarrow Z_0 = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a} \quad \text{— это в СИ}$$

Удобно использовать в системе СИ.

$$Z_0^{(СИ)} = 60 \sqrt{\frac{\mu_{отн}}{\epsilon_{отн}}} \ln \frac{b}{a}, \quad \mu_{отн} = \frac{\mu}{\mu_0}; \quad \epsilon_{отн} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

можно получить:

μ_0, ϵ_0 — постоянные вакуума.

$$C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}$$

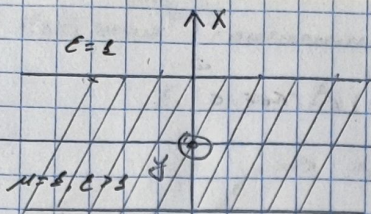
$$\Rightarrow Z_0(\text{Ом}) = Z_0(\text{Гейс}) \cdot \frac{c}{4\pi}$$

представим

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_{отн}}{\epsilon_{отн}}} \ln \frac{b}{a} = 60 \sqrt{\frac{\mu_{отн}}{\epsilon_{отн}}} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{Ом})$$

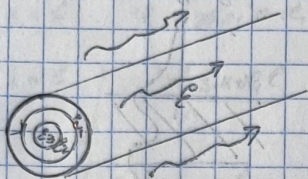
Волны направленные диэлектрик, магнетик, вакуум, диэлектрик, вакуум.

Поскольку $\mu = 1, \epsilon = 1$ вакуум, а скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

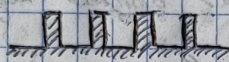
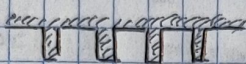
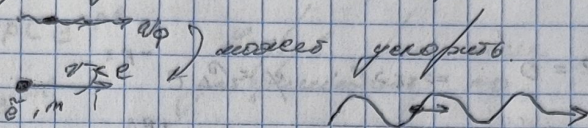


Обобщенная модель диэлектрического волновода.

Например это диэлектрические структуры, которые могут направлять волны.



нормированное
Мероприятие волны: $\gamma < \epsilon$
сод. для эрмитового, волнод. с
двухлучевым электроном.

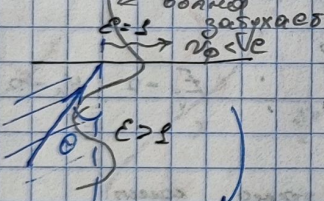


срезенки

Например, чтобы избежать таких дисперсии → у которых есть
максим. угол потерь:

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \approx 10^{-8}$$

или рассматриваем двумерную систему: $E, H(z, x)$
покажем, что существуют волны в диэлектрике, которые
Основа на явлении полного внутреннего отражения.

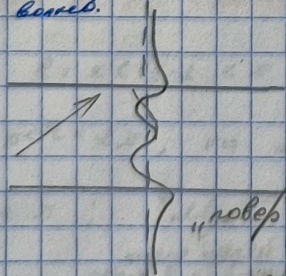


$$D > D_{\text{крит.}} \Rightarrow \sin^2 \theta \neq \epsilon$$

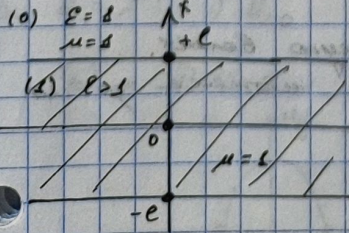
$$\frac{\sin \theta_{\text{вотр.}}}{\sin \theta_{\text{пад.}}} = 1; \quad \frac{\sin \theta_{\text{вотр.}}}{\sin \theta_{\text{пад.}}} = \sqrt{\epsilon/4}$$

создание мнимой волны.

А если рассмотреть слои, то и в др. слои будет сф.
мн. волн.



"поверхностная" ≡ "поверхностная"
локализована вблизи пов-ти.



2. 04.23г.
Продолжим рассуждения о волнах
в диэлектрике (1) - в плоскости, (0) - вне

Если $0 < \epsilon < 1$, то пов. волна вообще не
 $\epsilon < 0$ - в вакууме, не рассматриваем.

(0) $\epsilon = 1$
 $\mu = 1$
Длина $\sim \epsilon$

h-график. в р-вах сфер (матрица не имеет уровн. γ²)

(0): Для парабол в-ой функции:

$$\Delta_\perp \varphi + \kappa_0^2 \varphi = 0, \quad \kappa_0^2 = \kappa_0^2 - h^2, \quad \kappa_0 = \frac{\omega}{c}$$

(3): $\Delta_\perp \varphi + \kappa_1^2 \varphi = 0, \quad \kappa_1^2 = \kappa_0^2 \epsilon - h^2$

Как электроны показывали, функция волны массивна. Вне поля должны присутствовать (контр. м.б. только из-за внешнего источника, но их нет). Тогда $\kappa_0^2 < 0$

$|x| > l$:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \kappa_0^2 \varphi = 0 \Rightarrow x > l: \varphi = C_1 e^{-\rho x}$$

$$\rho^2 = -\kappa_0^2 \quad x < l: \varphi = C_2 e^{+\rho x}$$

$$\Rightarrow \kappa_0 = \pm i\rho, \quad \rho > 0$$

(0): $h^2 = \kappa_0^2 + \rho^2 > \kappa_0^2 \Rightarrow h > \kappa_0 \Rightarrow$ волна налив. черенков.

т.е. если поле локализовано, то волна будет вогнута черенков (поверхностная волна $\rightarrow$ черенковская волна). Из этих соотношений также следует: (1) - (0).

$$\epsilon_1^2 + \rho^2 = \kappa_0^2 (\epsilon - 1) \quad (**)$$

В области $|x| < l$: $\varphi = A_1 \cos \kappa_1 x + A_2 \sin \kappa_1 x$

2) Рассматриваем волну типа ШЛ: $\varphi \equiv \varphi^{(e)}(x)$
имеем выражение для полей:

$$E_z = \frac{\hbar^2}{i\kappa_0 \epsilon} \varphi; \quad E_x = -\frac{\hbar}{\kappa_0 \epsilon} \frac{d\varphi}{dx}; \quad H_y = -\frac{d\varphi}{dx}; \quad E_y = 0, \quad H_x = 0$$

Необходимо удовлетворить Г.У.: $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ там, где $\vec{n}$ - норм. к поверхности. E_z, H_z на $x = \pm l$

$$\Rightarrow E_z, H_y - \text{норм.}$$

$$\frac{\hbar^2}{\epsilon} \varphi \quad \frac{d\varphi}{dx} \sim \text{норм.}$$

$$x = l: \quad \frac{\hbar^2 \varphi(l-0)}{\epsilon} = -\rho^2 \varphi(l+0)$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(l-0) = \frac{d\varphi}{dx}(l+0)$$

Нужно рассмотреть отдельно четную и нечетную волны.
а) Четная (симметричная) - поперечные комп. четные φ -норм

$$E_x(x) = E_x(-x); \quad H_y(x) = H_y(-x)$$

$$E_z \sim \varphi - \text{нечетная}: \quad \varphi(x) = -\varphi(-x)$$

(2): $\varphi = A \sin \kappa_1 x$ - нечетная φ -норм

б) Косинусная (антисимметричная) волна - парная:

$$E_x(x) = -E_x(-x) ; H_y(x) = -H_y(-x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(-x)$$

можно рассмотреть ГУ для косинус и синусов волн.

а) $-l < x < l$: $\varphi = A \sin \kappa x$, $x > l$: $\varphi = C e^{-\rho x}$ ← ГСН.

$$x=l: \begin{cases} \kappa A \sin \kappa l = -\rho C e^{-\rho l} \\ \kappa A \cos \kappa l = -\rho C e^{-\rho l} \end{cases}$$

Решив, получим если детерминант = 0

$$\frac{\kappa l}{\epsilon} \text{ где } \kappa l = \rho l$$

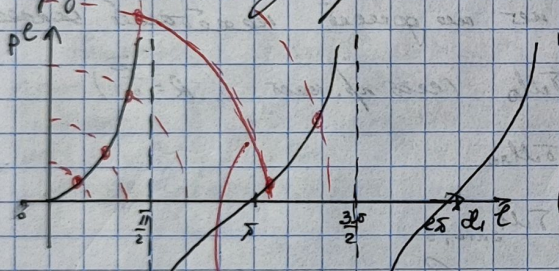
← делаем так κl , чтобы образовать выражения.

$$\Rightarrow (\kappa l)^2 + (\rho l)^2 = (\kappa l)^2 (\epsilon - 1) \quad \text{из } (**)$$

→ округляем

из этих κ и ρ . т.е. эти ур-я связывают κ и ρ .

Это система трансцендентных ур-ий. Решения можно представить графически.



$$R = \kappa l \sqrt{\epsilon - 1}$$

это определяет возможное κ волны.

При заданном R можно найти κ .

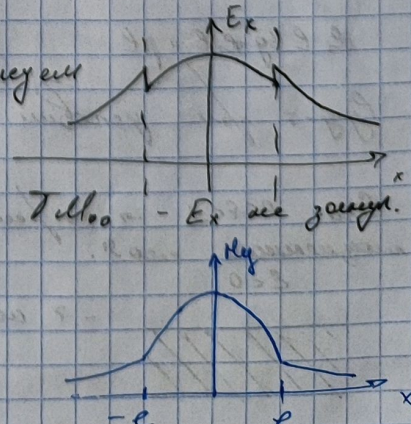
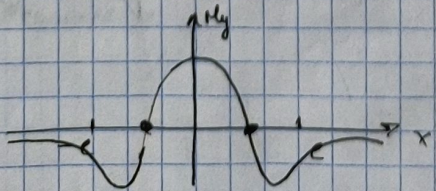
при $R > \pi$ - неволн. κ волны; $R < \pi$ - 1 волна.

если $R = \kappa l \sqrt{\epsilon - 1} < \pi$, то 1 волна
если $\pi < R < 2\pi$, то 2 волны } → количество и вид волн

При $R < \pi$: $T_{\text{полн}}$ макс., что не гов-т об γ .
можно найти γ по формуле $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - \rho^2}$ → рисунок

При $R > \pi$: $T_{\text{полн}}$

Для $T_{\text{полн}}$:



При $R > \pi$ - $T_{\text{полн}, 0}$ $n=0, 1, 2, 3, \dots$

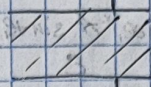
Можно найти приближенную частоту.

$$R = \frac{\omega l}{c \sqrt{\epsilon - 1}} > n\pi; \quad \omega_{np} > \frac{n\pi c}{l \sqrt{\epsilon - 1}}$$

Наименьшая частота при $n=0 \rightarrow \omega_{np} = 0 \Rightarrow \text{Тилло} - \text{свч}$

Здесь немного другое понятие крит. частоты. Здесь вообще не задается, а просто переводится в понятие волновой (с.е. поведенческой).

при $\omega \rightarrow \omega_{np}; \quad p \rightarrow 0; \quad k \rightarrow k_0$



д) Кольцевые волны. Для них имеется характеристическое уравнение:

$$|x| < l; \quad \varphi = A \cos k_1 x$$

$$\text{з.у.} \quad \frac{2A \cos k_1 l}{\epsilon} = -p^2 C e^{-pl}$$

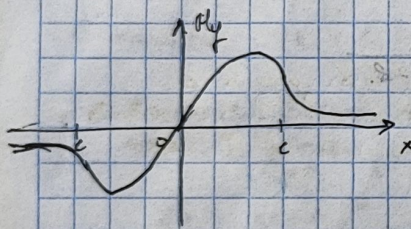
рассуждаем аналогично.

$$-k_1 A \sin k_1 l = -p^2 C e^{-pl}$$

$$\frac{k_1 l}{\epsilon} \text{ от } 0 \text{ до } \pi, \quad l = p l$$

исследовать так же графически.

$$k_1^2 l^2 + p^2 l^2 = k_0^2 (l^2 - 1)$$



Если $R < \frac{\pi}{2}$: нет ни одной колебательной волны.

Если $R > \frac{\pi}{2}$: Тилло (свч пр. част. $R = \frac{\pi}{2}$)

Если $R > \frac{3\pi}{2}$: Тилло

$$R > (2n+1)\frac{\pi}{2}; \quad \text{Тилло}_{2n+1,0}$$

Можно определить в 1S записи все волны:

Тилло, $n=0, 1, 2, 3, 4, \dots$ Тилло свч свч свч свч свч Тилло

2) Абс. аналогично рассужд. $\text{TE} - \text{волны}$

четные;

нечетные;

$$k_1 l \text{ от } 0 \text{ до } \pi, \quad l = p l$$

$$-k_1 l \text{ от } \pi \text{ до } 2\pi, \quad l = p l$$

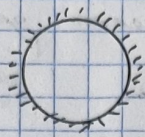
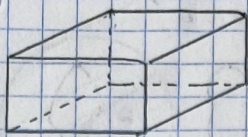
Сущ-т при условии: $R > 2$ (для наименьшей част. свч частоты)

Если $0 < \epsilon < 1 \rightarrow$ то режимов нет. При $\epsilon < 0$ режимов вообще нет.

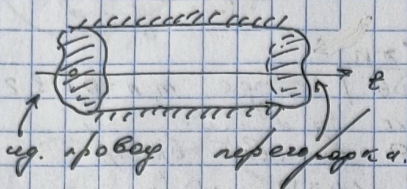


$\rightarrow$ исп. в фотонике.

2-й канонический / в резонансе
 Глобальный резонатор - поверхность, охватывающая некоторую область.
 колебания внутри полости, от провод.

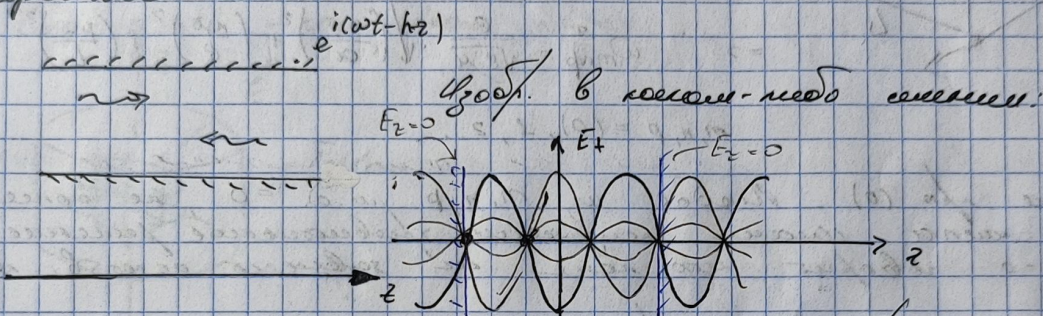


Рассеянная структура резонатора
 сч. виро. - "закрытый
 вибратор".



Собственные и вынужденные колебания
 сдв. конд. - 50 нб.

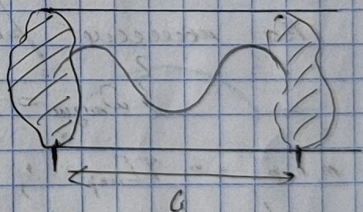
Рассеянная структура вибратора, в которой разл. две
 встречные волны:



Будем искать решение уравнения, соответствующее волне. Обр. удаляем
 проводники, заменяем их точками (концентрация зарядов). 03.05.23г.
 в две узловых точки. Это не исключает Б.З., если
 или $E_z = 0$. Для этого рассматриваем
 между проводниками:

$$L = p \cdot \frac{\lambda}{2}, \text{ где } p = (0, 1, 2, 3)$$

Тогда нам нужно решить уравнение Максвелла и
 Б.З. на боковой поверхности.



Когда $p=0$, а когда $p \neq 0$?
 Если волна типа TE : $E_z \sim \sin(hz)$,
 если $h=0 \rightarrow p=0 \Rightarrow E_z \equiv 0$

$$\left\{ h = \frac{\pi p}{L} \right\}, p = (0, 1, 2, 3, \dots)$$

Тогда мы получили полное зависящее решение, тогда
 для TE : $p = 1, 2, 3, \dots$

А в ТМ есть еще $E_z \neq 0$ для $p=0$ мы можем быть $p=0, 1, 2, \dots$
 при $p=0 \rightarrow E_z \neq 0$, но не зависит от z .

Поскольку у нас есть дисперсионное уравнение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu = k^2 + h^2$$

$$k^2 = k^2 + \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2$$

~ полное волновое число для данной
 моды

Тогда частота: $\left\{ \omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{k^2 + \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2} \right\}$ ~ частота свобод. колебаний.

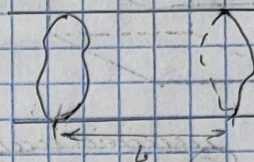
TE:

$$H_z = i\omega\epsilon\mu \varphi^{(m)} e^{-ik_z z} + i\omega\epsilon\mu \varphi^{(m)} e^{+ik_z z} = i\omega\epsilon\mu \varphi^{(m)} 2 \cosh z$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon} [P_1 \varphi^{(m)}, z_0] 2 \cosh z$$

$$H_z \sim \sinh z$$

Оселед можно выразить
α мелед γα cos z = 0



Рассеяние "прямоугольного" резонатора -
характеристики

$$k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \text{ где } m, n = (0), 1, 2, \dots$$

Тогда можно вывести вектор

$$k_{mnp}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 = \frac{\omega_{mnp}^2}{c^2} \epsilon\mu$$

$$\Rightarrow \omega_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}$$

$$m, n, p = (0), 1, 2, \dots$$

Говорим про (0) ... Любое из m, n, p м.д. = 0, не более
одного из них может быть нулем, т.е. тривиальное решение.
m, n, p = 0 говорит что поле не зависит от координат.

Квантовая теория резонатора - теория с наименьшей
энергией называется.

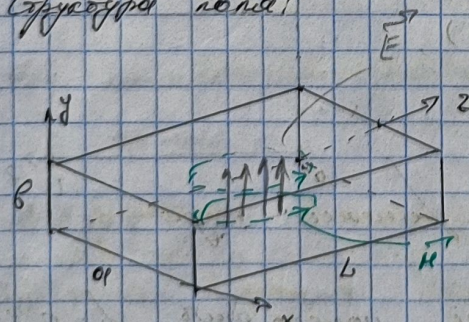
Зависит от размеров волновода. Если a малая → m=0,
b → n=0 и др.

На рисунке рисунка b < a < L

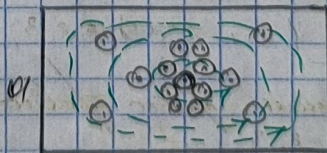
$$\left\{ \omega_{mnp} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \right\} \quad m=1, n=0, p=1$$

$$m, n, p \rightarrow TE_{mnp}, \quad \omega_{mnp}$$

Структура поля



Вид сверху:

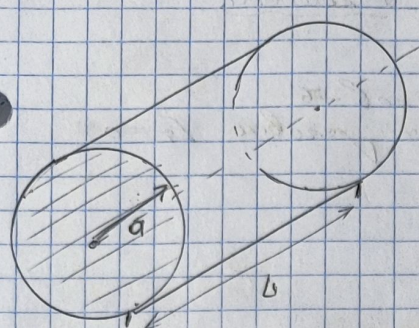


Квантовая теория: TE_{101} : $E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{i\omega t}$, $E_x = E_z = 0$
выражается при $\vec{H} \sim \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{i\omega t}$ и $\vec{E} \sim \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{i\omega t}$

$$\vec{H} \sim e^{i\omega t} = e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$\vec{E} \sim e^{i\omega t}$$

Круговой (аксиальный) резонатор:

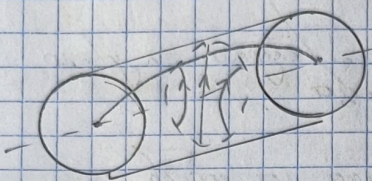


$$Q = \int \frac{H_{mn}}{a} - \text{числа ор- и нули ф-ии Бесселя или ее производных}$$

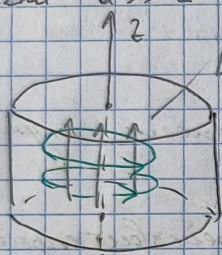
$$K_{mn}^2 = Q_{mn}^2 + \left(\frac{p\sigma}{L}\right)^2, \quad m, n = 0, 1, 2, 3$$

Круглая камера зависит от a и L :

$L \gg a$: структура поля



Если $a \gg L$ - консервная банка.

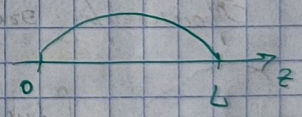
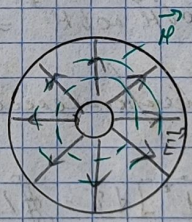
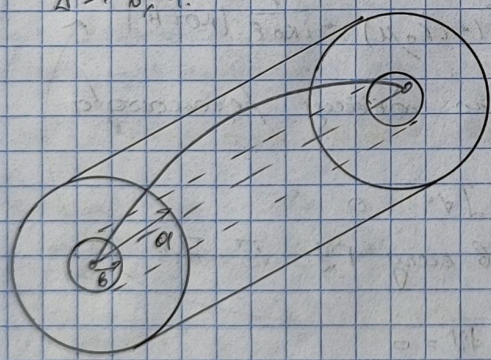


Теллоид

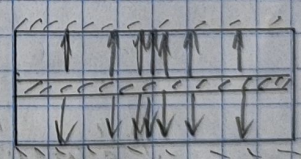
Коаксиальная линия:

$L \gg b, a$

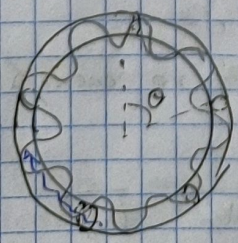
Теллоид



Сверху



Кольцевой резонатор - резонатор с замкнутой (аксиальной) формой. Вертикально или горизонтально. Волна должна пройти само в себя.

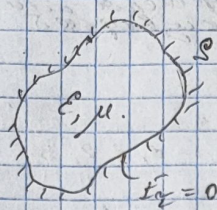


$$h = \frac{2\pi p}{L}$$

и кругового сечения углов. угловых чисел волн.

где $p = 0, 1, 2, 3, \dots$

Общая постановка задачи о
собственных колебаниях в полостях,
резонаторах.



S -задача. Ищем ел. пов-сть
на границе выполняется условие $E_t = 0$

Из ур-ий Максвелла:

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon \mu \vec{E} = 0$$

$$E_t = 0 / S$$

$$\Delta = -\text{rot rot } \vec{E} + \delta \text{ div}$$

в итоге преобразуем к ур-ю
Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = 0 \\ E_t = 0 / S \\ \text{div } \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$$

Задача на собств.
ф-ции и собств. значения

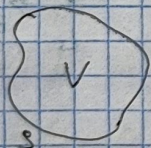
Решение в виде: $\vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}$ и $\vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t}$

Ке канонизирован формулу резонатора, можем получить
св-ва

1) ω - собств. частоты действительные (при действительных ϵ, μ)
Получим квадратичную форму. ($\epsilon, \mu > 0$)

$$\begin{aligned} \text{div} [\vec{E}, \vec{H}^*] &= \vec{H}^* \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \text{rot } \vec{H}^* = \{ \text{из ур-я Максвелла} \} \\ &= \vec{H}^* (-i\kappa_0 \mu \vec{H}) - i\kappa_0 \epsilon \text{rot } \vec{H} \text{rot } \vec{H}^* = |\vec{H}|^2 (-i\kappa_0 \mu) - i\kappa_0 \epsilon |\text{rot } \vec{H}|^2 \end{aligned}$$

Применяя это выражение, по формуле резонатора



$$\int_V \text{div} [\vec{E}, \vec{H}^*] dV = \oint_S [\vec{E}, \vec{H}^*] \cdot \vec{n} dS = 0$$

в силу ГН $\vec{E}_t = \vec{H}_t = 0$

$$\oint_V (\dots) dV = 0$$

$$\Rightarrow \kappa_0^2 = \frac{\int_V \epsilon |\text{rot } \vec{H}|^2 dV}{\int_V \mu |\vec{H}|^2 dV} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Или переопределим, что $\epsilon, \mu > 0$, тогда $\kappa_0^2 > 0 \Rightarrow \omega^2 > 0$
- ко. имеет реал. ω - действ. число, т.е. р.

Т.е. если резонатор сф. идеал. проводимости, то электр.
его собств. частоты имеют действительное.

2) равенство фазовых запасов энергии $\overline{W_E} = \overline{W_H}$

Экспериментально, что $\epsilon > 0, \mu > 0$. Следовательно ур-ие Максвелла

$$|\text{rot } \vec{H}|^2 = \kappa_0^2 \epsilon^2 |\vec{E}|^2$$

$$\int_V \epsilon |\vec{E}|^2 dV = \int_V \mu |\vec{H}|^2 dV \rightarrow \text{тогда верно, если в сфере нет дисперсии, т.е.}$$

$$\frac{1}{16\pi} \int_V \epsilon |\vec{E}|^2 dV = \overline{W_E} = \frac{1}{16\pi} \int_V \mu |\vec{H}|^2 dV = \overline{W_H}$$

тогда, когда ϵ и μ не зависят от координат.

$$\overline{W_E} = \overline{W_H}$$

Задачи собственных колебаний в резонаторах.

1) Потери энергии в заполненной сфере. Если

$$\epsilon = \epsilon' + i\epsilon'' \quad \text{или} \quad \mu = \mu' + i\mu''$$

ограничимся случаем, когда $\mu = 1$. Запишем уравнение для собственных частот резонатора:

$$\omega = \frac{ck}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad \text{также} \quad E_r = 0; \quad r_{\text{стенки}} = \infty$$

$$\rightarrow \int \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \text{зав-е от } \epsilon, \mu$$

$$\left. \begin{matrix} E_r = 0 \\ |_S \end{matrix} \right\} \quad \text{где} \quad k = \frac{\omega}{c \sqrt{\epsilon\mu}} \quad \text{зависит от геометрии зеркала}$$

ϵ - компл. $\Rightarrow \omega$ - компл.

$$\omega' + i\omega'' = \frac{ck}{\sqrt{\epsilon' + i\epsilon''}} \quad \Leftrightarrow \quad (\omega' + i\omega'')^2 = \frac{k^2 c^2}{\epsilon' + i\epsilon''}$$

Если стенки идеально проводящие, то k чисто действител. - Ю.О.С. 232.

$$\omega'^2 - \omega''^2 + 2i\omega'\omega'' = \frac{k^2 c^2 (\epsilon' - i\epsilon'')}{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}$$

Разделим на Re и Im частей:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega'^2 - \omega''^2 &= \frac{k^2 c^2 \epsilon'}{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} \\ 2\omega'\omega'' &= \frac{-k^2 c^2 \epsilon''}{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} \end{aligned} \right. \quad \text{где} \quad \epsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

$$e^{i\omega t} = e^{i\omega' t} e^{-\omega'' t} \quad \omega'' \gg 0 \rightarrow \text{имеет место затухание}$$

Пусть $\omega'' \ll \omega'$, $\epsilon'' \ll \epsilon'$, тогда можно упростить:

$$\omega' \approx \frac{ck}{\sqrt{\epsilon'}} = \frac{ck}{\sqrt{\epsilon'}} \quad \omega'' = -\frac{k^2 c^2 \epsilon''}{\epsilon'^2 \omega'} = -\frac{\omega' \epsilon''}{\epsilon'}$$

соот. ϵ'' зависит в основном от ω' и потерь материала.

2) Потери энергии в стенках резонатора. Т.е. у стенки локальная проводимость, но

$$\gamma \gg \omega \rightarrow \delta \ll r, \quad \delta \ll R$$

кар-ть неслучайна.

Здесь справедливо ДУ Лежандра.



Исп.-м энергетический метод. Можем, упр. в электр. поле

$$\frac{dW}{dt} = -P_{\text{ср}}; \quad W \sim |E|^2 \sim e^{-2\omega''t}$$

применяем формулу в формуле энергии: $|E|e^{-\omega''t}$
 $\rightarrow -2\omega''W = -P_{\text{ср}} \Rightarrow \left\{ \omega'' = \frac{P_{\text{ср}}}{2W} \right\}$

$$\omega'' > 0 \Rightarrow W = 2W^{(1)} = 2W^{(2)} = \frac{1}{8\pi} \int_V |E|^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int_V |H|^2 dV$$

Структура поля сложная, это при малом, это в среднем поле. Поэтому, поле можно представить, как в среднем поле.

Именно $P_{\text{ср}}$:

$$P_{\text{ср}} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \sum_{\text{пов}} \oint |H_z|^2 dS = \left\{ \begin{array}{l} \text{мел-ли } \gamma \text{ } \text{Нормована} \\ E_z = \sum_{\text{пов}} [H_z n] \end{array} \right\}$$

Мел-ли
Единица

$$\sum_{\text{пов}} = \sqrt{\frac{4\pi}{V}}$$

$$E'' = \frac{4\pi}{\omega} \rightarrow \omega < \omega'$$

$$\Rightarrow \left\{ \omega'' = \frac{P_{\text{ср}}}{2W} = \frac{c \operatorname{Re} \sum_{\text{пов}} \oint |H_z|^2 dS}{2 \int_V |H|^2 dV} \right\}$$

по H поместится, когда стены уменьшаются. (0-2)
 (единица)

$$\operatorname{Re} \sum_{\text{пов}} = \operatorname{Re} \sqrt{\frac{4\pi}{V}} = \frac{\omega' \delta}{2c} \leftarrow \text{если } \delta \text{ мало, то } \delta = \sqrt{\frac{c}{2\pi \omega' \mu}}$$

Если это мало, то можно показать. (из теоремы о среднем)

$$\omega'' \sim \frac{\frac{1}{H^2} \cdot S}{\frac{1}{H^2} \cdot V} \cdot \frac{\omega' \delta}{c} \sim \text{связь с тем же}$$

Если параметр ω'' - связанный
 $\Rightarrow \frac{\omega''}{\omega'} \sim \frac{\delta}{V}$ - связь резонанса.

Чтобы снизить потери, нужно увеличить резонанс

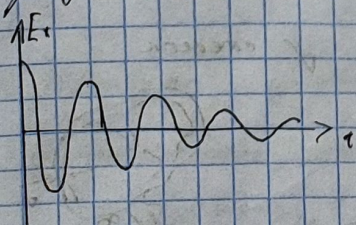
$$S \sim L^2, \quad V \sim L^3 \Rightarrow \frac{\omega''}{\omega'} \sim \frac{1}{L}$$

Добротность резонатора.

$$Q = \frac{\omega'}{2\omega''} \sim \frac{L}{\delta}, \quad Q \sim \frac{W}{P}$$

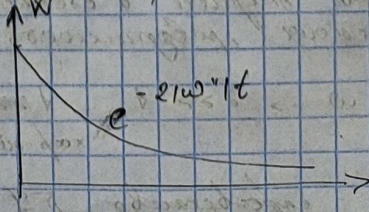
хар-э параметр резонатора.

Нам нужно зав-ть поля во времени.



$$\sum_{\text{пов}} = \frac{1}{\omega''}$$

Если хорошо не представляется,



Действительность пол-го кол-во колебаний ро. ускорения.
в е раз.

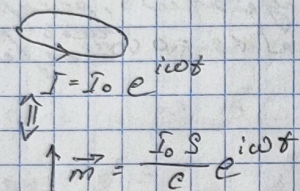
возбуждение волны в линии передачи
затрагивает стороны не-шлей.
(отражает).

Ур-я Максвелла, включая магнитное поле (сравним и гармонические поля):

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{i\omega}{c} \vec{E} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{i\omega}{c} \vec{H} \end{cases}$$

$\vec{J}^e, \vec{J}^m$ - т-ли эл-х и магнитных токов. (добавим ток этого рода вводя, на самом деле их нет)

Электрич.

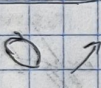


$$\vec{I} = I_0 e^{i\omega t}$$

$$\vec{m} = \frac{I_0 S}{c} e^{i\omega t}$$

 ~ сечение можно рассмотреть как магнитный ток

Пусть шлейф взаимодействует с зарядной системой собственным полем:



Самостоятельно докажем формулу Лоренца:
пусть есть некоторая среда $\epsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r})$
пусть известны два решения ур-я Максвелла (шлейф с зарядом, разнесенным источниками)

$$\begin{aligned} 1) \vec{J}_1(\vec{r}) \rightarrow \vec{E}_1(\vec{r}), \vec{H}_1(\vec{r}) &\sim e^{i\omega t} \\ 2) \vec{J}_2(\vec{r}) \rightarrow \vec{E}_2(\vec{r}), \vec{H}_2(\vec{r}) &\sim e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Док-во:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_1 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \frac{i\omega}{c} \vec{E}_1 \\ \text{rot } \vec{E}_1 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} - \frac{i\omega}{c} \vec{H}_1 \\ \text{rot } \vec{H}_2 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} + \frac{i\omega}{c} \vec{E}_2 \\ \text{rot } \vec{E}_2 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_2}{\partial t} - \frac{i\omega}{c} \vec{H}_2 \end{aligned}$$

Сложим все 4 ур-я

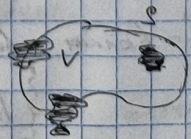
Дел-я тождество:

$$\text{div} [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{A} \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \text{rot } \vec{A}$$

$$\text{div} [\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1] = \left(\vec{J}_1 \vec{E}_2 - \vec{J}_2 \vec{E}_1 + \vec{J}_2 \vec{H}_1 - \vec{J}_1 \vec{H}_2 \right) \frac{1}{c}$$

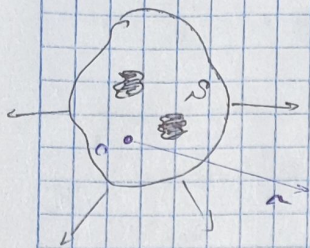
Принципиально по формуле (произвольности)

$$\int_V [\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1] \text{div} = \frac{1}{c} \int_V (\vec{J}_1 \vec{E}_2 - \vec{J}_2 \vec{E}_1 + \vec{J}_2 \vec{H}_1 - \vec{J}_1 \vec{H}_2) \text{div}$$



~ лемма Лоренца

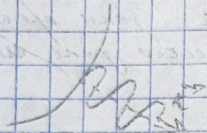
Рассеяние волн на неоднородностях среды. Рассмотрим область $S \rightarrow S_\infty$ по величине r и воспользуемся условиями излучения.



Если $\vec{j}_{1,2}^{(m)}$ распр. в окр. области r в $\vec{r}$ тогда поля представляются суммой волн с радиус-сферическими волнами, т.е.:

$$\vec{E}, \vec{H} \sim e^{i(\omega t - kr)} \cdot \frac{1}{r}$$

На величине рассеяния, волну можно считать локально плоской. Тогда как бег. волн (поля) выглядят как $\vec{E}, \vec{H}$ на $S_\infty \rightarrow \text{сфера}$



$$\vec{E}_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\vec{N}_1, \vec{n}]$$

$$\vec{n} \in \vec{n}_0$$

Можно показать (сам-мо): $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ представлено, распр. в $\vec{r}$ и $\vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$ (используя теорему Гаусса)

$$\Rightarrow \int_V (j_2^e \vec{E}_2 - j_2^m \vec{H}_2 + j_2^e \vec{E}_1 - j_2^m \vec{H}_1) dV = 0$$

теорема взаимности

$$\int_V (j_2^e \vec{E}_2 - j_2^m \vec{H}_2) dV = \int_V (j_2^e \vec{E}_1 - j_2^m \vec{H}_1) dV$$

Теорема взаимности проверяется для линейных сред, т.е. $\vec{E} \propto \vec{H}$ и $\vec{H} \propto \vec{E}$ не зависит от поля. или $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$

2) изотропной среды $\rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ в общем случае, если анизотропны

$$\vec{D}_i = \epsilon_{ik} \vec{E}_k, \vec{B}_i = \mu_{ik} \vec{H}_k, \text{ неперм. если тензорное}$$

Докажем соотношение ортогональности:

Здесь есть две волны.

$$\int_V (\vec{E}_p \cdot \vec{H}_q - \vec{E}_q \cdot \vec{H}_p) dV = 0, \text{ } p \neq q \text{ (} h_p \neq h_q \text{)}$$

соотношение ортогональности для собственных волн p, q - индекс волн $p, q = \pm 1, \pm 2, \dots$; $q = \pm 1, \pm 2, \dots$

$h_p = -h_q$ $\rightarrow$ волны распр. в $+z$ направлении; $h_p = h_q$ $\rightarrow$ волны распр. в $-z$ направлении

18.05.23г.

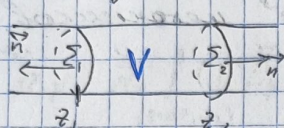
и прообразы: $i\omega t = e^{i(\omega' + i\omega'')t} = e^{i\omega't} e^{-\omega''t}$

$\omega'' > 0 \sim$ затухание

$\omega'' \sim -\theta''$ (поверх в среде), где $\epsilon'' < 0$

$$\omega'' = + \frac{\text{Re} \sigma}{2W}$$

Доказываем с помощью образцов:



Максимально, величину поремента к вектору $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ (к образцам, между собой)

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_p; \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_g$$

$$H_1 = H_p; \quad H_2 = H_g, \quad p, g = \pm 1, \pm 2$$

т.к. это собственные волны, то $\vec{z}_{1,2} = 0$

$$\Rightarrow \oint (\dots) \vec{n} dS = 0$$

где $\oint = \oint_{\vec{z}_1} + \oint_{\vec{z}_2} + \oint_{\vec{z}_0} = 0$

$\vec{z}_0 \rightarrow \vec{n} = \vec{z}_0 \rightarrow \vec{z}_0$

$\vec{z}_0 = 0, \text{ т.к. } E_z = 0$

тогда получаем:

$$\oint_{\vec{z}_1} (\dots) \vec{z}_1 dS = - \oint_{\vec{z}_2} (\dots) \vec{z}_2 dS$$

они образ. только вектр. полевые

Замечая $\vec{n} \rightarrow \vec{z}_0$ можно равенство переписать:

$$\oint_{\vec{z}_1} (\dots) \vec{z}_0 dS = \oint_{\vec{z}_2} (\dots) \vec{z}_0 dS$$

$$\oint_{\vec{z}_1} ([\vec{E}_p \vec{H}_g] - [\vec{E}_g \vec{H}_p]) \vec{z}_0 dS = \oint_{\vec{z}_2} ([\vec{E}_p \vec{H}_g] - [\vec{E}_g \vec{H}_p]) \vec{z}_0 dS$$

т.к. $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ взаимно произвольны, то об $\vec{z}$ можно не заботиться, но как-то к м.б. - поля зависят от $\vec{z}$.

$$[\vec{E}_p \vec{H}_g] \sim e^{-i(k_p + k_g)z}$$

какая еще м.б.? Проверка условия ортогональности

$$\oint_{p,q} (z=0) = 0, \text{ (либо } k_p = -k_g)$$

Вводится новая величина, норма волны (для упрощения формул):

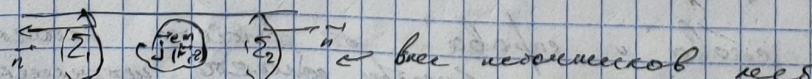
$$N_{p,-p} = \frac{c}{2} N_p$$

размерность = мощность

Можно показать, что $\{ N_p = \pm 4 P_p \}$

"+" для TE волны; "-" для TE волны

Максимально, где $\vec{z}$ величину поремента, но тем, что абсолютно взаимно ортогональны:



Принимая $\vec{j}^{e,m} \propto e^{i\omega t}$

$\vec{E}_1 = \vec{E} ; \vec{H}_1 = \vec{H}$; $\vec{E}_2 = \vec{E}_q, q > 0$; $\vec{H}_2 = \vec{H}_q, q = 1, 2, 3$; $\vec{j}^{e,m} = 0$

поля могут быть
 произвольными

При $z \geq z_2$: поля существуют в вакууме:

$\vec{E} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \vec{E}_p (p > 0)$ и поля в вакууме, собствен. мод.
 $\vec{H} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \vec{H}_p$ $p > 0$ - из граничных условий
 разложить в ряд по источникам

В области $z \leq z_1$:

$\vec{E} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \vec{E}_{-p} (p > 0) ; \vec{H} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \vec{H}_{-p}$

a_p, a_{-p} - скалярные коэффициенты

Именно в вакууме таких сумм нужно представить поле в вакууме по разложению:

$\oint_S [\vec{E} \cdot \vec{H}_q] - [\vec{E}_q \cdot \vec{H}] dV = \frac{1}{c} \int_V (\vec{j}^e \cdot \vec{E}_q - \vec{j}^m \cdot \vec{H}_q) dV$

$S = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2$; $\oint_{S_{\text{бок}}} (\dots) = 0$, т.к. $E_z = 0$

$\Rightarrow \oint_{S_1} \dots \int_V \vec{H} \cdot d\vec{S} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{-p} \int_V \vec{H}_{-p} \cdot d\vec{S} = 0$ в силу ортогональности
 одного знака

$\oint_{S_2} \dots \int_V \vec{H} \cdot d\vec{S} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \int_V \vec{H}_p \cdot d\vec{S} = a_q \int_V \vec{H}_q \cdot d\vec{S} = a_q \cdot \frac{4\pi}{c} N_q = \frac{1}{c} \int_V (\vec{j}^e \cdot \vec{E}_p) - (\vec{j}^m \cdot \vec{H}_p) dV$
 (р = q) ; все = 0 ; $p = q$

Сделаем преобразование $q \rightarrow p$
 $a_p = N_p \int_V [(\vec{j}^e \cdot \vec{E}_p) - (\vec{j}^m \cdot \vec{H}_p)] dV$

p - сор-б поля, берущие начало

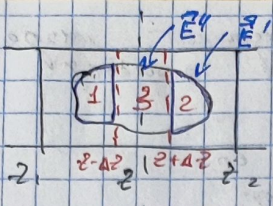
Для разлб берущих начало всё делается аналогично, но выбираются другие поля

$\vec{E}_1, \vec{H}_1$ - известные поля ; $\vec{E}_2 = \vec{E}_q, q > 0$
 $\vec{E}, \vec{H}$; $\vec{H}_2 = \vec{H}_q$

теперь надо будет записать другие результаты

$a_p = \frac{1}{N_p} \int_V [(\vec{j}^e \cdot \vec{E}_p) - (\vec{j}^m \cdot \vec{H}_p)] dV$

$\Rightarrow$ можно поля "слова" и "слова" об области источников
 Но ещё не можно поля внутри области источников



Разделим неоднородность на 3 области. Тогда
опр-ся как супер-поз. этих полей.

Поле, соотв. суб. 1 и 2, мы для них
найдем:
 $E^{(1,2)}$

$$a_p = a_p(z) ; a_{-p} = a_{-p}(z)$$

$$a_p = \frac{1}{N_p} \int_{(z_1, z-\Delta z)} (\vec{j}^e E_p - \vec{j}^m H_p) dV$$

поле порожд. суб., лежа. в обл. 1

$$a_{-p} = \frac{1}{N_p} \int_{(z+\Delta z, z_2)} (\vec{j}^e E_p - \vec{j}^m H_p) dV$$

поле порожд. суб., лежа. в обл. 2

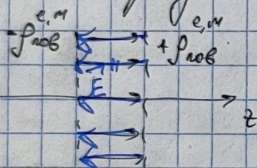
Остаток поле, порожд. обл. 3: $\Delta z \rightarrow 0$; $E^{(3)}$ - ?

т.к. $\Delta z \rightarrow 0$, можно неоднородность представить:

$$\vec{j}^{e,m} = \frac{\vec{j}^{e,m}}{z} \cdot z_0 + \vec{j}^{e,m}_0$$

т.к. поверхн. ток. $\Delta z \rightarrow 0$

Нас интересует только касательные токи



← порожд. нулевое поле.

т.е. нечего искать, как для конденсатора

Можно написать фазовые фр-е несферической

$$\frac{\partial j_{\text{пов}}^{e,m}}{\partial z} \Big|_{z \pm \Delta z} = \pm \frac{j^{e,m}}{\Delta z} \rightarrow \frac{j^{e,m}}{z \pm \Delta z} = \pm \frac{j^{e,m}}{i\omega}$$

$$\vec{E} = -z_0 \cdot \frac{1}{8} \frac{1}{i\omega} \frac{j^e}{\Delta z} \Rightarrow \vec{H} = -z_0 \frac{1}{4} \frac{1}{i\omega} \frac{j^m}{\Delta z}$$

поверхн.

Тогда найдем все поля.

Обсудим, поприпомним взаимосвязи.

1) Поле порожд. некоторым током. Поле имеет ту же частоту, что
и ток.

$j^{e,m}$ — это поверхностный ток (а не связь с полем, поверхность,
текущий по поверхности)

Решим задачу, только тогда эти токи заданы.

$$2) a_p \sim \frac{1}{N_p} \int (\vec{j}^e E_p - \vec{j}^m H_p) dV$$

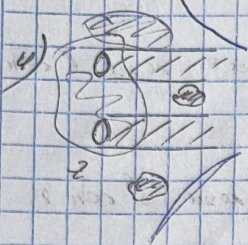
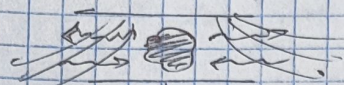
т.к. зависит только от амплитуды тока

$$\Rightarrow \vec{E} = \sum a_p \vec{E}_p$$

3) Но, если вообще не считать-е? Они экв. спадает, когда при выводе это не требуется. $\rightarrow$ без остатка

Ос. Дир.

Везде есть беск. кол-во взаимодействий экр. экр.



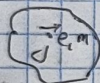
Сравнимо по для такой линии линии выкладки.

Сравнимо для локальных точек, для $\vec{E}$ экр. $\rightarrow$ экр. $\rightarrow$ возмущения

Но линия поля не не найдена, т.к. есть экр. $\rightarrow$ экр. $\rightarrow$ возмущения

5) Как должно быть вычислено экр. $\rightarrow$ экр. $\rightarrow$ возмущения

$$\vec{E} = \sum a_p \vec{E}_p \quad \text{и от чего зависит коэф-т } a_p?$$



Курсово, экр. $\rightarrow$ экр. $\rightarrow$ возмущения

$$a_p = \frac{1}{N_p} \int \vec{E}_p \cdot \vec{E}_p dV$$

Чтобы экр. не было $\rightarrow a_p = 0 \rightarrow \int \vec{E}_p \cdot \vec{E}_p dV = 0 \Rightarrow \vec{E}_p \sim \vec{E}_q, q \neq p$

но это экр. $\rightarrow$ экр. $\rightarrow$ возмущения

$$\int (\vec{E}_p \cdot \vec{E}_q) dV = 0, p \neq q$$

т.е. если ток повтор. экр. $\rightarrow$ экр. $\rightarrow$ возмущения



Как тогда должно зависеть от z ?

$$a_p \sim \int \vec{E}_p \cdot \vec{E}_p dV = \int \vec{E}_p \cdot \vec{E}_p dV$$

$\vec{E}_p \sim e^{-i k_p z}$ $\rightarrow$ $k_p > 0$

Курсово, экр. $\rightarrow$ экр. $\rightarrow$ возмущения

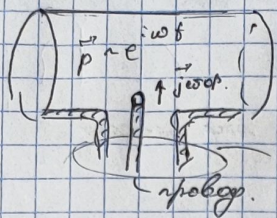


$\vec{E} \sim e^{-i k_p z}$

Тогда должно быть $\rightarrow$ экр. $\rightarrow$ экр. $\rightarrow$ возмущения

6) Обобщение способа возмущения

а) Возбуждение ищущими



по сути = вращению радиуса в вихревой плоскости.

$$\int \vec{j} d\vec{\tau} = i\omega \vec{r}$$

Его можно вводить в том месте, где макс. $(\vec{j}, \vec{E}-\vec{r})$ максимален. $\Rightarrow \vec{r} \parallel \vec{E}-\vec{r}$.

24.05.23

Возбуждение полей резонаторов в замкнутой полости



Пусть в полости заданы некоторые источники. Если $\vec{j}_{em}(\vec{r}) \sim e^{i\omega t}$, то и поля будут возб. на этой же частоте - средние величины $\vec{j}$ -но малы.

Пусть в резонаторе есть собственные моды:

$$\vec{E}_p(\vec{r}) e^{i\omega_p t}, \quad \vec{H}_p(\vec{r}) e^{i\omega_p t}, \quad p=1, 2, 3, \dots$$

Поля будут искать в виде суммар (разложения по собствен. модам):

$$\vec{E} = \sum_{p=1}^{\infty} \vec{E}_p \vec{E}_p \cdot e^{i\omega_p t}; \quad \vec{H} = \sum_{p=1}^{\infty} \vec{H}_p \vec{H}_p \cdot e^{i\omega_p t}$$

$\vec{E}_p$ и $\vec{H}_p$ - совп. по структуре с модами, но со временем ω_p и амплитудой $\vec{E}_p$ и $\vec{H}_p$ зависят от времени не зависят.

Будем решать задачу для идеального резонатора:

$$E_{rz} = 0/s$$

Составляем уравнения соотношения ортогональности

$$\text{div} [\vec{E}_p, \vec{H}_q] = \vec{H}_q \text{ rot } \vec{E}_p - \vec{E}_p \text{ rot } \vec{H}_q = -i \frac{\omega_p}{c} \mu (\vec{H}_p \vec{H}_q) - \frac{i\omega_q}{c} \epsilon (\vec{E}_p \vec{E}_q)$$

$$\Rightarrow \oint (\vec{E}_p \vec{H}_q) d\vec{\tau} = 0, \quad \text{т.к. } E_z = 0/s$$

Введем обозначения:

$$a = \int \mu (\vec{H}_p \vec{H}_q) dV; \quad b = \int \epsilon (\vec{E}_p \vec{E}_q) dV$$

можно тогда переписать в виде равенства:

$$\begin{cases} \omega_p a + \omega_q b = 0 \\ \omega_q a + \omega_p b = 0 \end{cases} \quad \Delta = 0$$

если право запишем то мы получим для др. модов:

$$\Delta = 0 \Rightarrow \omega_p^2 = \omega_q^2 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \omega_p = \omega_q \end{matrix} \right\} \text{ условие ортогональности}$$

тогда $a = -b$

Пусть есть выходящее: $\vec{D}_p = \vec{D}_q \Rightarrow p = q$

Если есть выходящее и входящее, то это линия
электростатического поля.

Тогда:

$$\int_V \varepsilon (\vec{E}_p)^2 dV = - \int_V \mu (\vec{H}_p)^2 dV$$

~ по сути энергия и работа
тока, что линия сжимается по полю.

$\vec{E}_p \sim \pm i \vec{H}_p$

Введем пометки полей:

$$\left\{ \begin{aligned} N_p &= \frac{1}{4\pi} \int_V \varepsilon \vec{E}_p^2 dV = - \frac{1}{4\pi} \int_V \mu \vec{H}_p^2 dV \end{aligned} \right\} \text{ ~ удобно ввести}$$

$$\int_V \varepsilon (\vec{E}_p, \vec{E}_q) dV = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 4\pi N_p, & p = q \end{cases}$$

~ условие ортогональности

Теперь помечено то, что как-то в каждом поле
есть пометочное поле:

$$(1) \begin{cases} \vec{E} = \sum_{p=1}^{\infty} e_p \vec{E}_p + \vec{E}_n = \vec{E}_{\text{вихровое}} + \vec{E}_{\text{потенц.}} \\ \vec{H} = \sum_{p=1}^{\infty} h_p \vec{H}_p + \vec{H}_n \end{cases}$$

Вихровое: $\text{div} \vec{E}_p = 0$; Потенциальное: $\text{rot} \vec{E}_n = 0$

По теореме из ВДЭ: любое вект. поле можно
представить в виде вихр. и пот. полей.

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_n$$

$$\vec{A} = \frac{\nabla \psi}{\vec{A}_n} + \vec{A} - \frac{\nabla \psi}{\vec{A}_0} \Rightarrow \text{div}(\vec{A} - \frac{\nabla \psi}{\vec{A}_0}) = 0 \Rightarrow \Delta \psi = \text{div} \vec{A}$$

Представим (1) в ур-я Максвелла; тогда получим:

$$\begin{aligned} \sum_p h_p \text{rot} \vec{H}_p + \text{rot} \vec{H}_n &= \frac{1}{c} \varepsilon (\sum_p e_p \vec{E}_p + \vec{E}_n) + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \sum_p e_p \text{rot} \vec{E}_p + \text{rot} \vec{E}_n &= - \frac{i\omega}{c} \mu (\sum_p h_p \vec{H}_p + \vec{H}_n) - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m \end{aligned}$$

Далее из-за условия ортогональности:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H}_p = \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E}_p \\ \text{rot} \vec{E}_p = - \frac{i\omega}{c} \mu \vec{H}_p \end{cases}$$

Если среда с дисперсией $\rightarrow \varepsilon = \varepsilon(\omega)$,
 $\mu = \mu(\omega)$, каковы законы Фарадея?

$$\begin{aligned} \text{Но! } \left\{ \begin{aligned} \vec{E}_p(\vec{r}) \\ \vec{H}_p(\vec{r}) \end{aligned} \right\} \cdot e^{i\omega_p t} \\ \text{интер. поля на частоте } \omega \end{aligned}$$

Везде про $\omega = \omega_p$. Но как
тогда $\varepsilon = \varepsilon(\omega_{\text{инт}})$, $\mu = \mu(\omega_{\text{инт}})$

Представим $\vec{A}$ совсем свобод. поле
пот. в свобод. пространстве $\rightarrow$ где-то источник создается.

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$

$$(2) \begin{cases} -i\epsilon \sum_p (\omega_p \vec{e}_p - \omega_p \vec{h}_p) \vec{E}_p = 4\pi \vec{j}^e + i\omega \epsilon \vec{E}_n \\ -i\mu \sum_p (\omega_p \vec{e}_p - \omega_p \vec{h}_p) \vec{H}_p = -4\pi \vec{j}^m - i\omega \mu \vec{H}_n \end{cases}$$

неизвестны $\vec{E}_n$ и $\vec{H}_n$ и ϵ_p, h_p .

$$\int_V (\vec{E}_p \cdot \vec{E}_n) dV = 0 \quad \text{— по теореме Гаусса, так как поле электромагнитное}$$

$$\vec{E}_n = -\nabla \varphi \rightarrow E_z = 0$$

Найдём скалярное произведение полей. Требуется определить $\text{div}(\vec{E}_n)$ на обо-
их ур-я.

Продифференцируем

$$\vec{E}_n = -\nabla \varphi^e$$

$$\vec{H}_n = -\nabla \varphi^m \Rightarrow$$

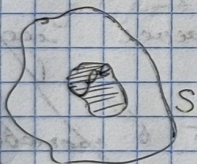
$$\text{div}(\epsilon \vec{E}_n) = -\frac{4\pi}{\epsilon \omega} \text{div} \vec{j}^e = 4\pi \rho^e$$

$$\text{div}(\mu \vec{H}_n) = -\frac{4\pi}{\mu \omega} \text{div} \vec{j}^m = 4\pi \rho^m$$

Для простоты возьмём $\epsilon, \mu = \text{const}$

$$\Delta \varphi^e = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho^e \quad + \text{з.г.: } \varphi^e / s = \text{const} \quad \leftarrow \text{из } E_z = 0$$

$$\Delta \varphi^m = -\frac{4\pi}{\mu} \rho^m \quad \text{аналогично } \rightarrow \text{аналогично решению}$$



По (2) же дифференцируем на $\vec{E}_p$, а $\vec{E}$ на $\vec{H}_p$ и интегрируем по объёму резонатора, + учтём ортогональность $p \neq q$

$$\epsilon_p = \frac{1}{N_p (\omega^2 - \omega_p^2)} \int_V (\omega \vec{j}^e \cdot \vec{E}_p - \omega_p \vec{j}^m \cdot \vec{H}_p) dV$$

$$h_p = \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2} \cdot \frac{1}{N_p} \int_V (\omega_p \vec{j}^e \cdot \vec{E}_p - \omega \vec{j}^m \cdot \vec{H}_p) dV$$

Замечания:

$$1) \vec{E}_0 = \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon_p \vec{E}_p \cdot e^{i\omega t} \quad ; \quad \vec{H}_0 = \sum_{p=1}^{\infty} h_p \vec{H}_p \cdot e^{i\omega t}$$

здесь только из коэффициентов, $\vec{E}_p(\vec{r})$

2) Коэф-ты $\epsilon_p \neq h_p$ в общем случае.

В волноводы для них $\epsilon_p = h_p \rightarrow \vec{E}_p, \vec{H}_p$

3) Резонансные явления.

Видно, что ϵ_p и h_p имеют полюсы совпадающие.
При $\omega \rightarrow \omega_p$; ϵ_p и $h_p \rightarrow \infty$
В резонансных емкостях есть потери.

$\Rightarrow$ частота комплексная

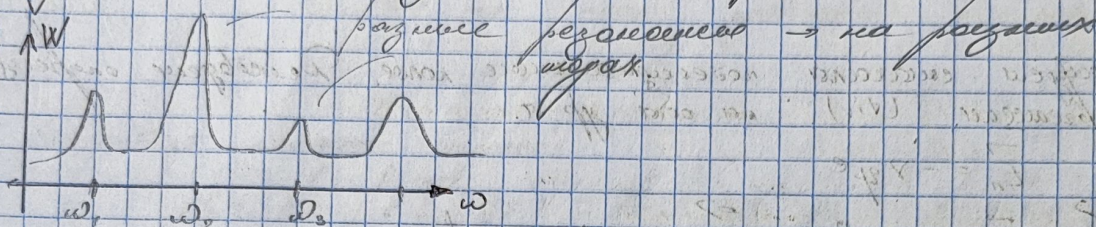
$$\omega^2 - \omega_p^2 = \underbrace{\omega^2 - \omega_p'^2}_{=0} + 2i\omega_p'\omega_p''$$

$$\Rightarrow \omega_p = \omega_p' + i\omega_p'' \Rightarrow \epsilon_p \sim \frac{1}{\omega_p''}$$

Если γ мала, то резонансная добротность Q резонатора

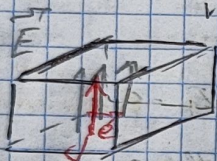
$$Q = \frac{\omega_p'}{2\omega_p''} \gg 1 \Rightarrow \epsilon_p \approx h_p$$

Пусть W - полная запасенная энергия:



Напряженность поля возбуждает электроны $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})e^{i\omega t}$

$$\rho_p = 0: \int (\vec{j} \cdot \vec{E}_p) dV = 0 \quad \text{раскр. по координатам}$$



$$\vec{j} = \alpha \vec{E}_p$$

в этом усл. фактору отталкивания нет, т.е. возбуждается

$\vec{E}_p(\omega = \omega_p)$ тогда эффект резонанса, отталкивание нет, возбуждается

$$\vec{E} \approx \epsilon_p \vec{E}_p \sim -\kappa \vec{j} \quad \text{т.к. а поле будет в проводнике}$$

из закона сохр. энергии

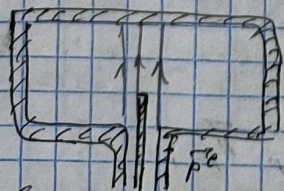
$$P_{\text{вст}} = P_{\text{потери}} \approx 2\omega'' W = \frac{W\omega_p''}{Q}$$

где $Q = \frac{\omega_p'}{2\omega_p''}$ добротность резонатора

т.е. запас. энергия: мощность

$$W = \frac{P_{\text{вст}} Q}{\omega_p'}$$

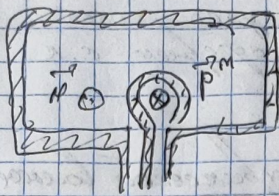
Часто возд. резонатор изготавливают из металла



$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} = i\omega \vec{p} \cdot \vec{e}$$

бронь имеет толщ.

"Штырь"



полюсу. брешь. также. также. поле $1/r^2$.

31.05.23г.

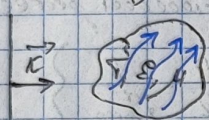
Эффекты теории дифракции.

Дифракция (в классическом смысле) - все определяется из законов геометрической оптики. (ожидаемые волновые явления пренебрежимо малы)

Дифракция (в квантовом смысле) - нестационарная задача для сф. поля в констр. точке пр-ва.

Задача задачи дифракции:

①



рассеяние на каком-то теле некоей волной.

Вращение не бр-ва. волна некая или некоррелированная.

$$\sim e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Поле приходящей волны некая из-за координатных полей стоячих (в теле) вращающихся векторов.

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{отр}} + \vec{j}_{\text{ров}} + \vec{j}_{\text{поляриз}} + \vec{j}_{\text{магнетизм}}$$

$\frac{\vec{r}}{E}$ $\frac{\vec{r}}{\partial t}$ $\frac{\vec{r}}{\partial t}$ $\frac{\vec{r}}{\partial t}$

Задача рассеяния

наверняка (интерференция) тоже

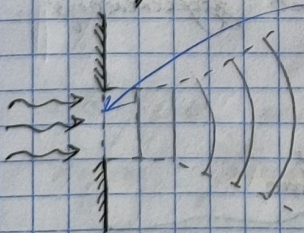
Суммарное поле тогда можно считать в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{отр}} + \vec{E}_{\text{ров}}$$

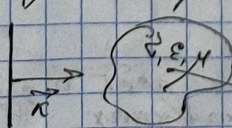
②

Обратим в обратном.

то заданное на поверхности вращающихся векторов



Мы будем рассуждать в 3-м порядке. Прямое поле некоего, что будет с полем на большой расстоянии (идея $E_{\text{ров}}$).



Рассеянное поле в далекой зоне

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \gg \frac{1}{L} \quad \lambda \gg \lambda \quad (\lambda \gg \lambda)$$

$\sim$ закон Фраунгофера.

В этой зоне поле представит из себя уже более сложную структуру, чем в сферич. с.к.:

$$E_{\text{рас}} = \vec{F}(0, \varphi) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \quad | \cdot e^{i\omega t}$$

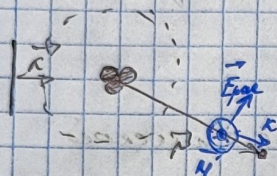
поле распространяется сферической волной.

$\vec{F}(0, \varphi)$ — как раз зависит от источника, чтобы её можно было рассчитать.

Следовательно: $|\vec{F}|^2(0, \varphi)$ — диаграмма направленности.

Понятие дифф-ого и полного сечения рассеяния.

Смещаем зарядку в дальнюю зону:



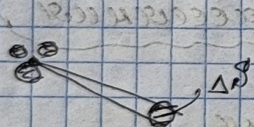
Спр-дифф-овое сечение рассеяния — величина:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\text{диф}} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta P}{\Delta S} \right) \cdot \frac{1}{S_{\text{пад}}} = \frac{\Delta P}{\Delta S} \cdot \frac{1}{S_{\text{пад}}} \end{aligned} \right\}$$

где $S_{\text{пад}} = \frac{c}{8\pi} E_0^2$ — вектор Пойнтинга

интенсивное соотношение: $\frac{E_{\text{рас}}}{E_{\text{рас}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

Всперем узкий конус воль направляется к какой-то точке и касательная потоку энергии.



То спр-по телесного угла.

$$\Delta S = \frac{\Delta \Omega}{r^2}$$

ΔP — полная рассеянная мощность воль такого конуса.

$$\Delta P = S_{\text{рас}} \cdot \Delta S = S_{\text{рас}} \cdot \frac{\Delta \Omega}{r^2} \cdot r^2$$

Это позволяет рассчитать рассеянное поле по заданному направлению.

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\text{диф}} &= \frac{S_{\text{рас}} \cdot r^2}{S_{\text{пад}}} \end{aligned} \right\}$$

иногда даже $\epsilon = \mu = 1$

и тогда $E_{\text{рас}} = \frac{c}{8\pi} E_{\text{рас}}^2$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{диф}} = \frac{S_{\text{рас}} \cdot r^2}{S_{\text{пад}}} = \frac{E_{\text{рас}}^2}{E_0^2} \cdot r^2 \Rightarrow \left\{ E_{\text{рас}} = E_0 \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{\text{диф}}}{r^2}} \right\}$$

$\sigma_{\text{диф}} = \sigma_{\text{диф}}(0, \varphi)$ — это от-я углов.

Спр-д. Полное сечение рассеяния

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\text{пол}} &= \int_{(4\pi)} \sigma_{\text{диф}} \cdot d\Omega = \frac{P_{\text{рас}}}{S_{\text{пад}}} \end{aligned} \right\}$$

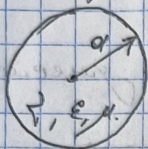
речь идёт о сферич. диаграммах

Спр. 3. Селемил пожебукемел:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Плот} = \frac{\text{Розл.}}{\text{Загр.}} \end{array} \right\}$$

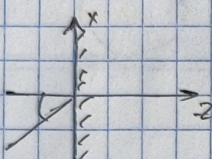
История развития теории диффузии.

- 1) Точные методы: метод разд. переменных (для задачи с простейшей геометрией), метод и др. методы. Конфигурация рассейания на шаре.



2) Случай - рассейание на цилиндре.

Решение в виде φ -ий Бесселя



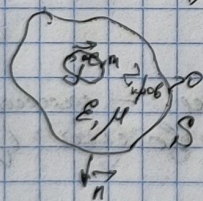
Рассейание на п-то

При этом у тел должно быть $\gamma = \infty$, чтобы выполнялось ГЗ, иначе метод разделения не работает.

Таким образом мало! (Их совсем мало - для сравнения, так это плохо).

- 2) Приближенные методы

Теорема (единственности решения для гармонических полей)



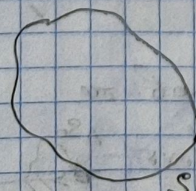
Если в оор. пов-ти S заданы:

- 1) Потенциал $\varphi_{\text{ем}} \sim e^{i\omega t}$ и E, H
- 2) На границе S задано E_T или H_T или E_N или H_N

тогда, если задано, то решение существует.

гранич $K_0 \varphi_{\text{пов}} > 0$

- 3) В сфере есть малый погреш $\varphi_{\text{пов}} > 0$ (мало и $\gamma \rightarrow 0$) тогда решение будет единственно.

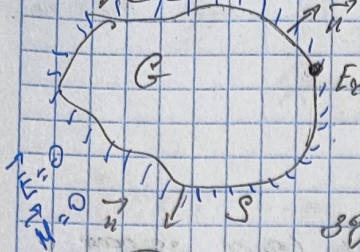


Если заданы все граничные условия на границе и еще + добавлено условие излучения на поля (сфер. излучение радиор. волны).

$$E, H \sim e^{i(\omega t - kr)}$$

теорема единств. работает и вне S .

Граница (с живыми токами)



Пусть есть пов-сть S и заданы в каждой точке токи на границе.

Если E_z и H_z заданы, выведем, что они заданы неразрывными образом.

Для каждой точки внутри можно сказать, что на пов-ти заданы некоторые жив. токи:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{J}_{\text{об. пов}} &= \frac{c}{4\pi} [\vec{H}_z, \vec{n}] \end{aligned} \right\}; \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{J}_{\text{об. пов}} &= -\frac{c}{4\pi} [\vec{E}_z, \vec{n}] \end{aligned} \right\}$$

и можно считать токи по токам (это мы доказали уже)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_S \frac{\vec{J}_{\text{об. пов}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' \quad \text{где } R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

и можно считать:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \text{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

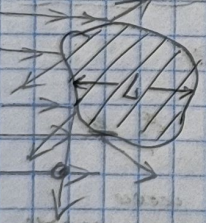
То, приближенные методы.

$\lambda \gg L$ - зависит от соотношения.

$$\lambda \ll L$$

③ Метод волн оптики: выведено с тем же подходом как и у.

и получается то же самое, когда $\lambda \rightarrow 0$



$$\lambda \ll L, \text{ и } R_{\text{ф}} \gg \lambda$$

Решение так называемое уравнение - волны, брешь, пробоина, распр. несвязь волна (брешь в них распр. энергия).

Во известном направлении волны, нужно чтобы отражение было (законно или нет) $\Rightarrow$ возникает колебание лучей

В каждой точке есть поле как и в известном из лучей $\Rightarrow$

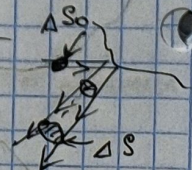
$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{пад}} + \vec{E}_{\text{отр}} \\ \vec{E}_0 e^{-ikz}$$

расхождение от $\vec{E}$ отраж. до точки рассей.

φ_0 - фаза в т. отраж. пов-ти.

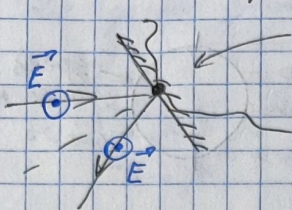
Амплитуда, которая по известному направлению. Спросит, почему - брешь, которая есть энергия

$$\frac{|\vec{E}_{\text{отр}}|}{|\vec{E}_{\text{пад}}|} = \sqrt{\frac{\Delta S_0}{\Delta S}} \leftarrow \text{из соотношения известной брехи.}$$



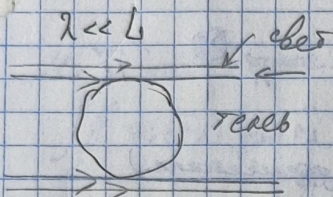
Набег фазы брасс лучей: $\Delta\varphi = nL$

Что с поляризованным?



Замечаем п-но (формула локальности) и вышер. по законам геом. оптики.

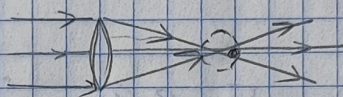
~ работает в о.р. области.



поверхность сломок, что не уровн. границ. условия.

1) бр. обл. тела.

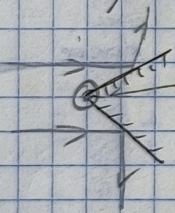
2) Карстиса - коэффициент фазы.



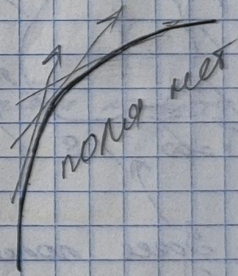
~ не работает геом. оптика

Свет пов-ть, окол. лучи - это и свет карстиса

3) Зависимость или условия



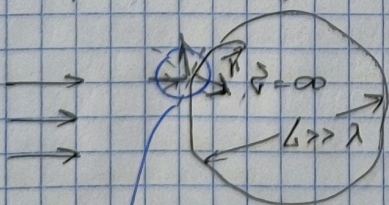
здесь $R_{\text{фаз}} = 0$ и геом. оптика не работает.



2) История зеркальных слоев. (метод геометрической оптики)

$$\lambda \ll L$$

~ применим для зеркала с условно-грав. телами.



Световое из-д 2х слоев:

1. Свечение, что приближается геом. оптики, (тогда поле для тела, как пов-ть тела).

=> можно считать возмущенное поле: $\vec{J}_{\text{пов}}^{(e)}$

$$\vec{J}_{\text{пов}}^{(e)} = \frac{c}{4\pi} [\vec{H}_E, \vec{n}]$$

$\vec{n}$ - в касательном направлении поверхности.

сумма излучений в о.р. вылетит

$$\vec{H}_E = \vec{H}_{\text{пад}} + \vec{H}_{\text{отр}} = 2\vec{H}_{\text{пад}}$$

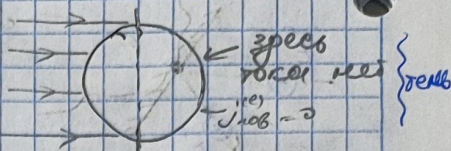
$$\vec{H}_{\text{отр}} = \vec{H}_{\text{пад}} \quad (\text{д.к. } r \rightarrow \infty); \quad \vec{E}_{\text{отр}} = -\vec{E}_{\text{пад}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \vec{r}(e) \right\}_{\text{нов.}} = \frac{c}{2\delta} [\vec{H}_{\text{пор}}, \vec{n}]$$

приближ. зависимость тока.

0 нули поля излучения этого тока

$$\vec{A}(e) = \frac{1}{c} \iint \frac{\vec{j}_{\text{нов}}(e)}{R} e^{-ikR} dS$$

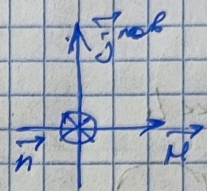
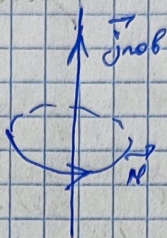
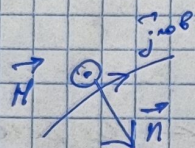


Как ор-та нормаль?

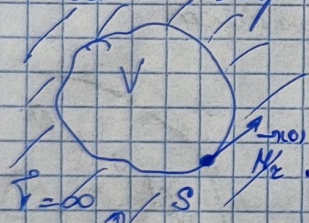
используем формулу Гю:

$$[\vec{H}_z, \vec{n}] = \frac{c}{\delta} \vec{j}_{\text{нов.}}$$

это для сферы. (если в др. геометрии поля заметны.)



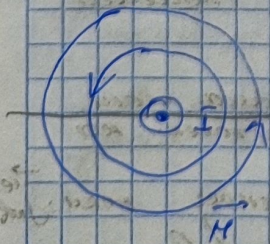
Как-то определить об эволюционности токов и полей:



как-то направляется. Нули поля внутри.

Замечание: и вено поверх-ть вне. Здесь полей нет.

Поле на границе есть поле - это возможно только если по пов-ти декарт ток.



поворот пов-ти

Соотношение ортогональности для φ :

$$\text{div}(\varphi_n \nabla \varphi_m) = \varphi_n \Delta \varphi_m + \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_m$$

для φ -из грани:

$$\int_V (\varphi_n \Delta \varphi_m - \varphi_m \Delta \varphi_n) dV = \oint_S (\varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} - \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial n}) dS = 0$$

$$(\epsilon_n^2 - \epsilon_m^2) \int_V \varphi_n \varphi_m dV = 0$$

соотношение ортогональности.

Но это тогда:

$$\int_S \varphi_n(\vec{r}_s) \varphi_m(\vec{r}_s) dS dz \Rightarrow \int_S \varphi_n(\vec{r}_s) \varphi_m(\vec{r}_s) dS = 0$$

$\rightarrow \varphi$ -ы не зависят от z .

В области неоднородностей

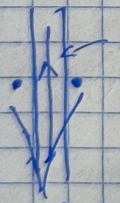
$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$$

$$\vec{E}''$$

в т.з.:

Тогда разбиваем на две части:

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{j}_1 + \epsilon_0 \vec{j}_2$$



$$\vec{j}_{\text{пов.}} = \vec{j} \cdot \Delta z$$

если $\vec{j} \rightarrow \text{конечное}$.

$\Rightarrow$ вклад не даёт

создаёт поверхностные заряды, а уже они создают поле.