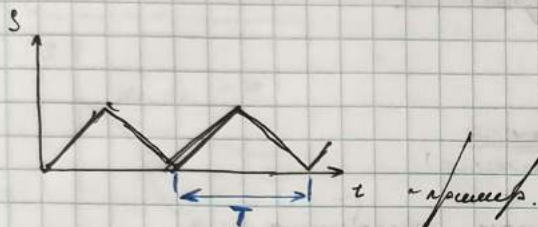


Колебательные системы.

Колебательный процесс ($S(t)$) - процесс, повторяющийся периодически, если $S(t) = S(t+\tau)$, задается периодической φ -ой (τ - период колебаний, $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ - циклическая частота, $\nu = \frac{1}{\tau}$ - частота.)

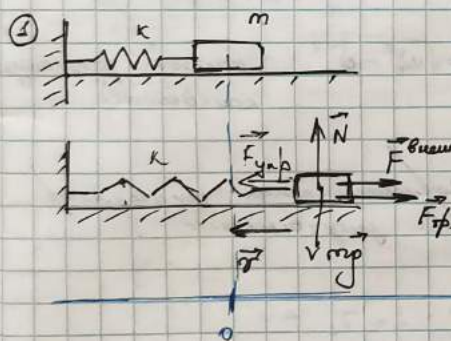


Гармонические колебательные процессы.

$$S(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Линейные колебательные системы с одной степенью свободы.

Колебательная система $\equiv$ осциллятор



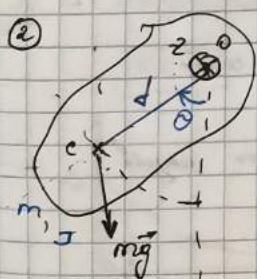
$$m\vec{a} = \underbrace{m\vec{g} + \vec{N}}_{=0} + \vec{F}_{упр} + \vec{F}_r + \vec{F}_{внеш}(t)$$

$$F_{упр}x = -kx; \quad F_{tr} = -h\dot{x}$$

$$F_{tr}x = -h\dot{x} \quad (\text{пусть трение вязкое, зависит от скорости})$$

$$Ox: m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F_{внеш}(t)$$

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_{внеш}(t)}{m}$$



Физический маятник.

J - момент инерции.

$$\text{Закон моментов: } \frac{dN}{dt} = M$$

$$\vec{N} = J\vec{\omega}; \quad M_{тр} = -h\dot{\omega}$$

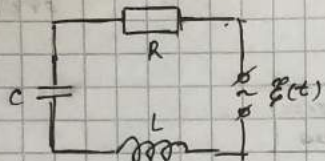
$$Oz: J\ddot{\theta} = -mgd \sin\theta - h\dot{\theta} + M_{внеш}(t)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{J}\dot{\theta} + \frac{mgd}{J} \sin\theta = \frac{M_{внеш}(t)}{J}$$

Пусть θ - малый угол $\Rightarrow \sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{h}{J}\dot{\theta} + \frac{mgd}{J}\theta = \frac{M_{внеш}(t)}{J}$$

а)



$$U_R + U_L + U_C = E(t)$$

~ 4-й Кирхгофа.

$$U_R = IR = \dot{q} R$$

$$U_C = \frac{q}{C}$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = L \ddot{q}$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{E(t)}{L}$$

Единое модальное уравнение

$$\ddot{s} + 2\delta \dot{s} + \omega_0^2 s = f(t)$$

Свободные колебания
(собственные колебания)

$$f(t) = 0 \rightarrow \ddot{s} + 2\delta \dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \sim \text{свободные колебания}$$

$$\lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Случаи:

а) $\omega_0^2 > \delta^2$

пов. пруж.

опис. затухание системы

~ описывает контурную дугу с.м. ~ колебательный процесс

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i \omega_s$$

Решение уравнения записывают в виде:

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

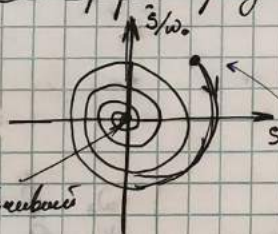
~ частота затухающих колебаний

$$s(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_s t + \varphi)$$

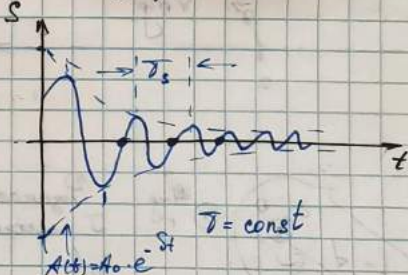
амплитуда затухающих колебаний

~ затухающий синусоидальный сигнал с затуханием

Разобьем портрет (линейное по фазовой м-ти)



с.р. устойчивый фокус



Решая точку на фазовой м-ти находим изобразительную точку

Пусть $\delta = 0$

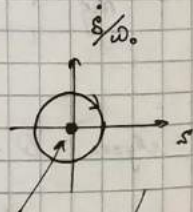
$$s = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{s} = -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{s}{A_0} = \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{\dot{s}}{A_0 \omega_0} = -\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\left(\frac{s}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{\dot{s}}{A_0 \omega_0}\right)^2 = 1$$



состояние равновесия (центр)

с.р. в ко



$$\delta) \delta^2 = \omega_0^2$$

$$s(t) =$$



$$\delta) \delta^2 = \omega_0^2$$

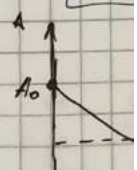
$$\lambda_{1,2} =$$

$$s(t) =$$



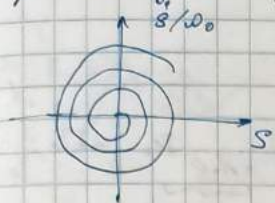
1) δ - коэфф

$$\zeta =$$



2) N - чис

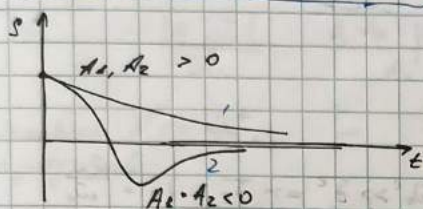
ср. в какую сторону может двигаться система?



~ может ли такое быть. (в вк.)

а) $\delta^2 > \omega_0^2$ - аперидимический режим.

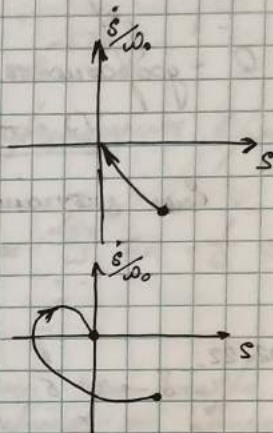
$$S(t) = A_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} + A_2 \cdot e^{-\lambda_2 t}$$



на фазовой пл-ти:



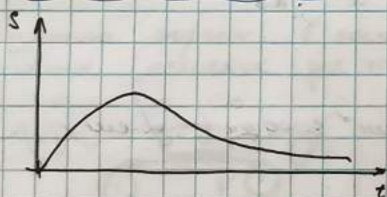
2:



б) $\delta^2 = \omega_0^2$ ~ критический режим (неперидимический)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$$

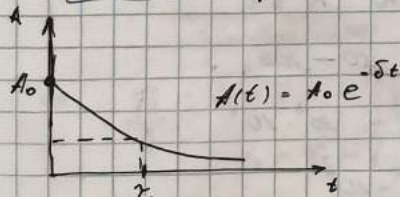
$$S(t) = A_1 \cdot e^{-\delta t} + A_2 t \cdot e^{-\delta t}$$



Характеристики затухания:

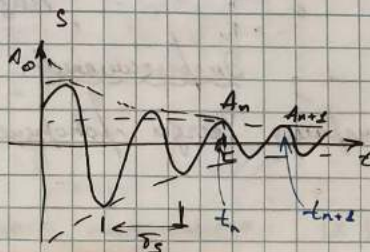
1) δ - коэффициент затухания

$\tau = 1/\delta$ ~ время затухания (время спада амплитуды в e раз.)



2) N - число колебаний до затухания.

$$N = \frac{\tau}{T_s}$$



3) $d = \frac{1}{N}$ - логарифмический декремент затухания.

$$d = \frac{T_0}{\tau} = \delta T_0$$

$$A_n = A_0 e^{-\delta t_n}$$

$$A_{n+1} = A_0 e^{-\delta(t_{n+1})} = A_0 e^{-\delta(t_n + T_0)} = \underbrace{A_0 e^{-\delta t_n}}_{A_n} \cdot e^{-\delta T_0} = A_n e^{-\delta T_0}$$

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^d \rightarrow d = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

4) Q - добротность

$$Q = \pi N = \frac{\pi}{d}$$

Если затухание не слишком велико: $\omega_0^2 \gg \delta^2 \Rightarrow T_0 \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ($\omega_1 \approx \omega_0$)

$$Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\pi \omega_0}{\delta \cdot 2\pi} \approx \frac{\omega_0}{2\delta}$$

07.02.22.

$$\delta \rightarrow \tau = \frac{1}{\delta}$$

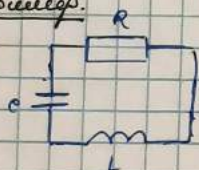
$$N = \frac{\tau}{T_0} \rightarrow d = \frac{1}{N}$$

$$Q = \pi N = \frac{\pi}{d}$$

$$\rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0$
Затухания малы, если $\delta^2 \ll \omega_0^2$
 $\Rightarrow Q \approx \frac{\omega_0}{2\delta}$

Пример.



$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\ddot{S} + 2\delta \dot{S} + \omega_0^2 S = 0$$

~ сопоставили с общим уравн.

$$\Rightarrow \delta = \frac{R}{2L}; \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_0 \gg \delta: \frac{1}{\sqrt{LC}} \gg \frac{R}{2L} \rightarrow R \ll 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{тогда } Q \approx \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{L}{\sqrt{LC} \cdot R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Характерные значения для добротности: Радио: $Q \sim 10 - 100$

Радиолокация: $Q \sim 10^3 - 10^4$

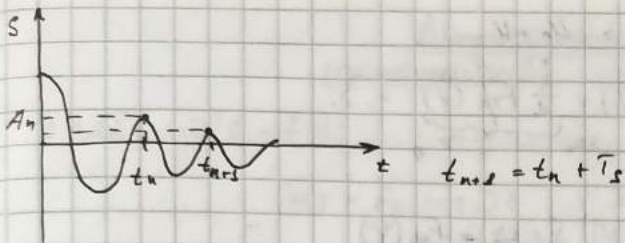
Лазеры: $Q \sim 10^5 - 10^6$

Энергетический смысл добротности Q

$W \sim A^2$ (энергия всегда пропорциональна квадрату амплитуды) $\rightarrow W_{\text{эф}} = \frac{\pi \kappa^2}{2}$

$$\delta W \sim 2A \delta A$$

$$W_{\text{зн}} = \frac{q^2}{2C}$$



$$|\Delta W| = 2A_n \cdot |\Delta A_n|$$

$$|\Delta A_n| = A_n - A_{n+1}$$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t}$$

$$\Rightarrow A_n = A_0 \cdot e^{-\delta t_n} ; A_{n+1} = A_0 \cdot e^{-\delta t_n} \cdot e^{-\delta T_s}$$

$$\Rightarrow |\Delta A_n| = A_n - A_{n+1} = \underbrace{A_0 \cdot e^{-\delta t_n}}_{A_n} (1 - e^{-\delta T_s})$$

Относительное изменение энергии за период:

$$\frac{|\Delta W_n|}{W_n} = \frac{2A_n \cdot |\Delta A_n|}{A_n^2} = \frac{2A_n (1 - e^{-\delta T_s})}{A_n} = 2(1 - e^{-\delta T_s})$$

при условии: $\delta^2 \ll \omega_0^2 \rightarrow \delta T_s = \frac{\delta \cdot 2\pi}{\omega_s} \ll 1$ (можем разложить в ряд)

$$\frac{|\Delta W_n|}{W_n} = 2(1 - 1 + \delta T_s) = 2\delta T_s = \frac{2\delta}{\omega_s} \approx \frac{2\delta}{\omega_0} \cdot 2\pi \approx \frac{2\delta}{\omega_0} \cdot 2\pi = \frac{1}{Q} \cdot 2\pi$$

$$\rightarrow Q = \frac{2\pi W_n}{|\Delta W_n|}$$

показыв. отн. убыль энергии (как быстро или медленно расходуется энергия за каждый период с точностью до 2π).

Математический осциллятор с отрицательным трением.

Источник энергии в самой системе нет, т.е. это не вынужденные колебания (источник где-то вне).



$$m\ddot{x} + \underbrace{h\dot{x}}_{\text{вязкое трение}} + \underbrace{kx}_{F_{упр.}} = \underbrace{F_{тр} \cdot x}_{\text{сухое трение между m и пружиной}}$$

платформа транспортера

Через преобразования Лапласа:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$$

скорость ленты транспортера

$$\text{ок: } \frac{v_x}{\dot{x}} = u_x + V \quad (V_x = V)$$

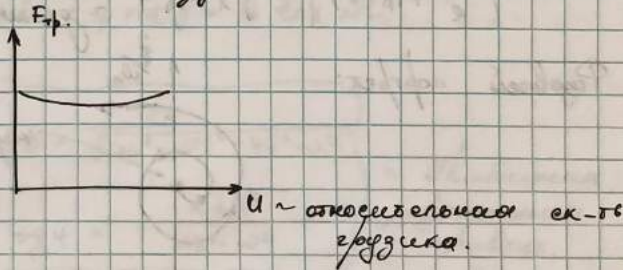
$$u_x = v_x - V$$

Начальный этап: $|v_x| < V$

$$u = |u_x| = V - v_x = V - \dot{x}$$

$$F_{тр}(u) = F_{тр}(V - \dot{x})$$

Получаем тем, что движение только начинается $|\dot{x}| \ll V$



Рассматриваем в /ар в а/т. $U_0 = V$

$$\Rightarrow F_{rp}(U) = F_{rp}(V - \dot{x}) = F_{rp}(V) - \dot{x} F'_{rp}(V) + \frac{\dot{x}^2}{2} F''_{rp}(V) - \dots$$

Тогда ур-е колебаний:

$$m \ddot{x} + (h + F'_{rp}(V)) \dot{x} + kx = F_{rp}(V)$$

просто находится
постоянное равновесие.

$$x_0 = \frac{F_{rp}(V)}{k}$$

Введем новую координату:

$$\begin{aligned} y &= x - x_0 \\ \dot{x} &= \dot{y} \\ \ddot{x} &= \ddot{y} \end{aligned}$$

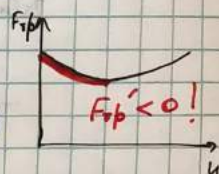
$$\rightarrow m \ddot{y} + (h + F'_{rp}(V)) \dot{y} + ky = 0 \quad / : m$$

$$\ddot{y} + \frac{h + F'_{rp}(V)}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \delta = \frac{h + F'_{rp}(V)}{m}$$

Мы получили в "этикеточном времени", т.е. $\delta < 0$

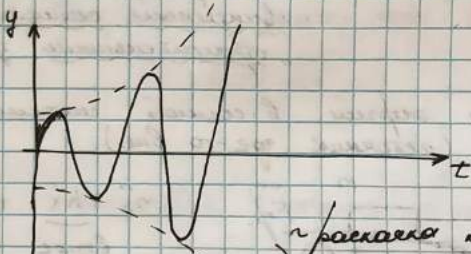
Если $h < -F'_{rp} \Rightarrow \delta < 0$
поэф. др.



$$\rightarrow y(t) = A_0 \cdot e^{|\delta|t} \cos(\omega_s t + \varphi)$$

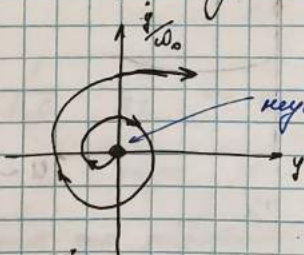
$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Но далеко рисовать не можем, мы договариваемся рассматривать малые колебания. Тогда решение будет выглядеть другим образом.

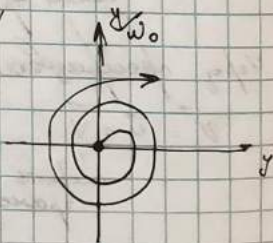


$$\left| \frac{\dot{x}^2}{2} F''_{rp}(V) \right| < \left| \dot{x} F'_{rp} \right| \sim \text{доказано выполняется}$$

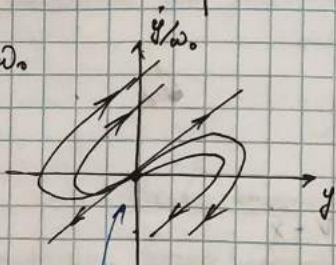
Фазовый портрет:



неустойчивый фокус.

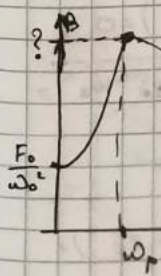


Если $|\delta| > \omega_0$



неустойчивый узел.

~ всё принципиально меняется.
колебаний нет ~ скучно.



Вынужденные колебания гармонического осциллятора с затуханием

$$\ddot{s} + 2\delta \dot{s} + \omega_0^2 s = f(t) \quad \sim \text{математическое уравнение}$$

$$f(t) = F_0 \cos \omega t \quad \sim \text{гармоническое воздействие}$$

не аддитивная сила

ω ~ частота внешнего воздействия

Частное решение неоднородного ур-я (ЧРНУ): $s(t) = B \cos(\omega t - \varphi)$

Есть в однородном уравнении ОРОУ: $s(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$
 A_0, φ - из нач. условий!

B, φ ~ показываются самой внешней силой!

Ищем B, φ :

МКА

$$\hat{f} = F_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \hat{F}_0 = F_0$$

$$\hat{s} = \underbrace{B e^{-i\varphi}}_{\hat{B}} e^{i\omega t} = \hat{B} e^{i\omega t}$$

$$\hat{\dot{s}} = i\omega \hat{B} e^{i\omega t}; \quad \hat{\ddot{s}} = -\omega^2 \hat{B} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow -\omega^2 \hat{B} + 2\delta i\omega \hat{B} + \omega_0^2 \hat{B} = F_0$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta i\omega}$$

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

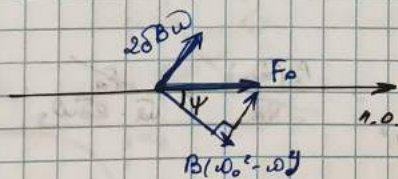
$$\left\{ \begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{\text{Im } \hat{B}}{\text{Re } \hat{B}} = -\frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned} \right.$$

МКА

$$\dot{s} = -B\omega \sin(\omega t - \varphi) = +B\omega \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{s} = -B\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) \quad \sim \text{переводим в уравнение}$$

$$B(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \varphi) + 2\delta B\omega(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) = F_0 \cos \omega t$$

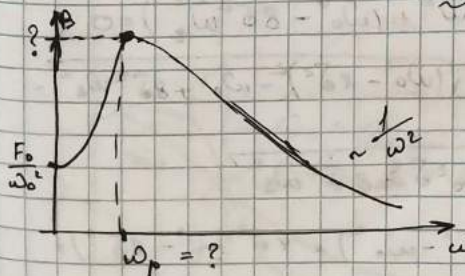


$$\left\{ \begin{aligned} B &= \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \\ \tan \varphi &= -\frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned} \right.$$

~ Уравнения резонансных кривых.

Резонансные кривые

ω_r ~ резонансная частота



Ср. Резонансные кривые. Резкое увеличение амплитуды вынужденных колеб. (по уравнению осциллятора для постоянного воздействия) при некоторой амплитуде внешнего воздействия.

От чего зависит острота?

$$f(t) = F_0 \cos \omega t$$

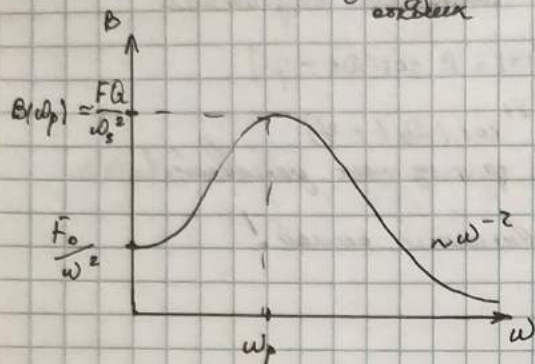
$$\ddot{s} + 2\delta \dot{s} + \omega_0^2 s = f(t)$$

$$B(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

↓
амплитудная резонансная кривая

4P44: $s(t) = B \cos(\omega t - \varphi)$

↑
полная амплитуда
колебаний



$$g(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2$$

$$g'(\omega) = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\delta^2 \omega \Big|_{\omega = \omega_p} = 0$$

$$\omega_0^2 - \omega_p^2 = 2\delta^2$$

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 < \omega_0^2$$

$$g(\omega_p) = (\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2) = 4\delta^4 + 4\delta^2\omega_0^2 - 8\delta^4 =$$

$$= 4\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2) = 4\delta^2\omega_s^2$$

$$B(\omega_p) = \frac{F_0 \cdot \omega_s}{2\delta \omega_s \cdot \omega_s} = \frac{F_0}{\omega_s^2} Q \approx \frac{F_0}{\omega_0^2} Q \sim \text{на резонансной частоте.}$$

$$\frac{\omega_s}{2\delta} = Q$$

Если $\delta^2 \ll \omega_0^2 \Rightarrow \omega_s^2 \approx \omega_0^2 \Rightarrow$

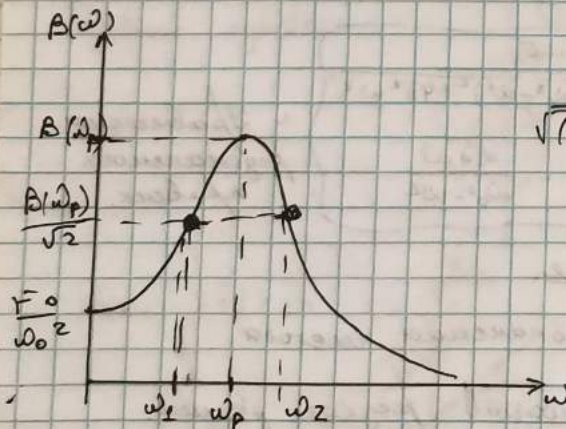
Отклик системы в 2 раз больше
значения отклика при постоянной
возбуждении.

~ Это еще одно следствие резонанса.

Ширина резонансной кривой
(разброса ρ/κ)

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2; \quad B(\omega_p) = \frac{F_0}{\omega_s^2} Q \approx \frac{F_0}{\omega_0^2} Q$$

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$$



$$\left. \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \right|_{\omega_{1,2}} = \frac{B(\omega_p)}{\sqrt{2}} = \frac{F_0}{\sqrt{2} \cdot 2\delta \omega_s}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 = 8\delta^2 \omega_s^2$$

$$\omega^4 + (4\delta^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + (\omega_0^4 - 8\delta^2 \omega_s^2) = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2 - 2\delta^2 \pm \sqrt{(\omega_0^2 - 2\delta^2)^2 - \omega_0^4 + 8\delta^2 \omega_s^2}}{2}$$

$$= \omega_p^2 \pm \sqrt{4\delta^4 - 4\omega_0^2 \delta^2 + 8\delta^2 \omega_s^2}$$

$$- 4\delta^2 \omega_0^2 + 8\delta^2 \omega_s^2 = 4\delta^2(2\omega_s^2 - \omega_0^2) = 4\delta^2(2\omega_0^2 - 2\delta^2 - \omega_0^2) = 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2) =$$

$$= 4\delta^2 \omega_p^2$$

$$\omega_{s,z}^2 = \omega_p^2 \pm 2\delta \sqrt{\delta^2 + \omega_p^2} = \omega_p^2 \pm 2\delta \omega_s$$

$$\omega_0^2 - \delta^2 = \omega_s^2$$

$$\omega_{s,z} = \sqrt{\omega_p^2 \pm 2\delta \omega_s} = \omega_p \sqrt{1 \pm \frac{2\delta \omega_s}{\omega_p^2}} \approx \omega_p \cdot \left(1 \pm \frac{1}{Q}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \omega_p \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)$$

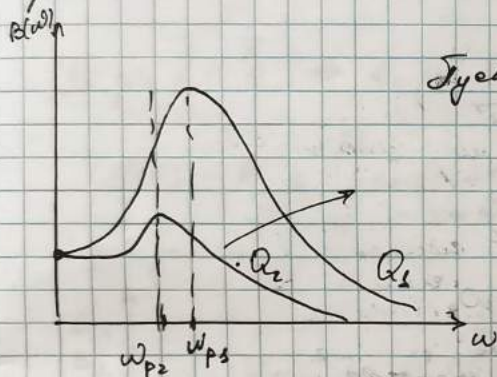
$$\delta^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \frac{2\delta \omega_s}{\omega_p^2} \approx \frac{2\delta \omega_s}{\omega_s^2} = \frac{2\delta}{\omega_s} = \frac{1}{Q} \ll 1$$

$$\Delta \omega = \omega_z - \omega_s = \omega_p \left(1 + \frac{1}{2Q} - 1 + \frac{1}{2Q}\right) = \frac{\omega_p}{Q}$$

Относительная ширина: $\boxed{\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}}$ — функция от ω_0 , ω_s и ω_p

Относительная острота: $\boxed{\frac{\omega_0}{\Delta \omega} = Q}$

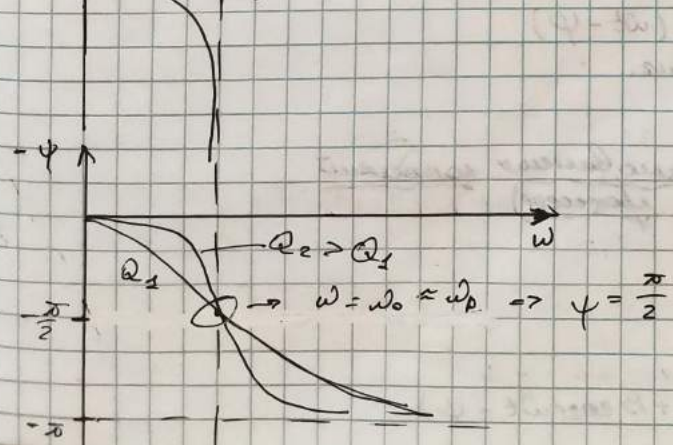
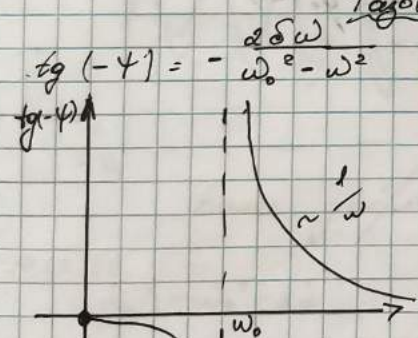
Резонансная кривая показывает, насколько острый является резонансная кривая.



$$\text{Если } R_2 > R_1 \Rightarrow \delta_2 > \delta_1 \Rightarrow Q_2 < Q_1$$

Вся кривая Q_2 ниже Q_1 , без пересечения.

Резонансная кривая.

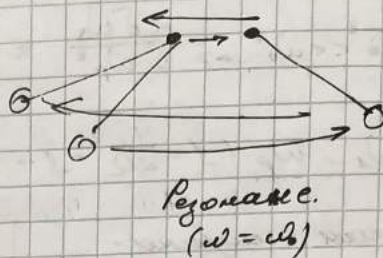
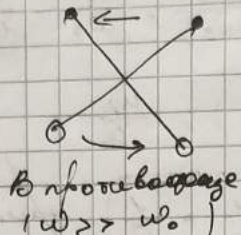
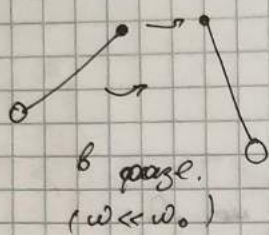


На больших частотах колебания противоположны.

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = - \frac{\frac{R}{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0 - \omega^2}}{\frac{\omega}{\omega_0 - \omega^2}} = - \frac{1}{Q} \frac{\omega_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad - \text{если дана } Q, \text{ то } R \text{ не считается}$$

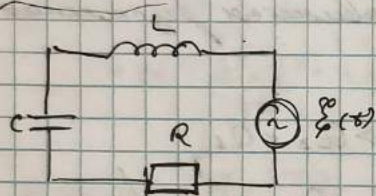
$$\approx \frac{1}{Q}$$

(А) $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$



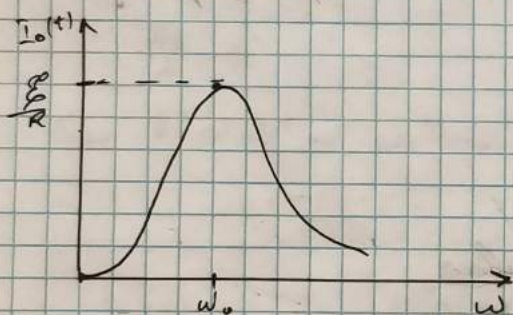
$$2\delta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}$$



$$I(t) = \frac{U(t)}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2}}$$

$$I_0(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2}}$$



$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C}$$

$$\omega_p^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

Но почему $\omega_0^2 = 2\delta^2$

или $I_0(\omega)$, а не $q_0(\omega)$

Почему так $\ddot{s} + 2\delta \dot{s} + \omega_0^2 s = f(t)$

или иначе:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{U(t)}{L}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \rightarrow q(t) = B \cos(\omega t - \varphi)$$

$$i(t) = -B\omega \sin(\omega t - \varphi)$$

ср. вкл.

Процессы установившегося колебания
(переходные процессы)

$$\ddot{s} + 2\delta \dot{s} + \omega_0^2 s = f(t) = f_0 \cos \omega t$$

ОРМУ = ОРОУ + ПЧРМУ

$$s(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(\omega t - \varphi)$$

переходный процесс завершится, когда запасное становится мало.

Нач. уел.: $\begin{cases} s(0) = 0 \\ \dot{s}(0) = 0 \end{cases} \quad A_0, \varphi = ?$

① Резонансное возмущение

$$\omega = \omega_p \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{s}(t) = -A_0 \delta e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - A_0 \omega e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - B \omega \sin(\omega t - \psi)$$

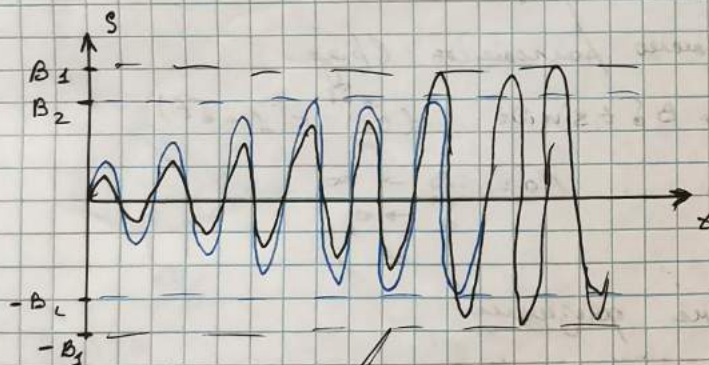
$$\begin{cases} A_0 \cos \varphi + B \cos \varphi = 0 & (s(0) = 0) \\ -A_0 \delta \cos \varphi - A_0 \omega \sin \varphi + B \omega \sin \varphi = 0 & (\dot{s}(0) = 0) \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A_0 \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{1} \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -A_0 \omega + B \omega = 0 \Rightarrow \boxed{A_0 = B} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow A_0 = -B < 0 \quad \times$$

$$s(t) = B \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + B \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = B(1 - e^{-\delta t}) \sin \omega t$$



$$\delta t \ll 1 \Rightarrow$$

$$s(t) = B(1 - 1 + \delta t) \sin \omega t = B \delta t \sin \omega t$$

$$\delta_2 > \delta_1 \Rightarrow Q_2 < Q_1$$

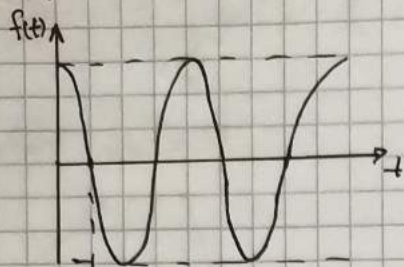
$$\tau_2 < \tau_1 \quad (\tau = \frac{1}{\delta})$$

более затухающая система "растягивается" временем.

10.02.22.

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$$

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$$



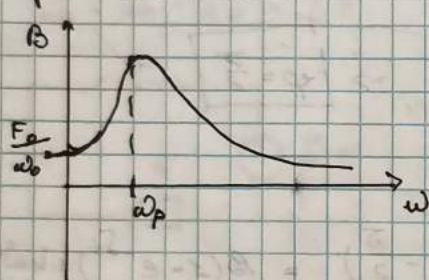
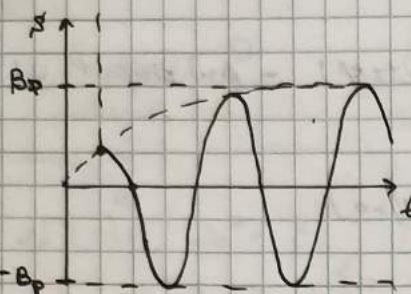
$$f(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$\omega = \omega_0, \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

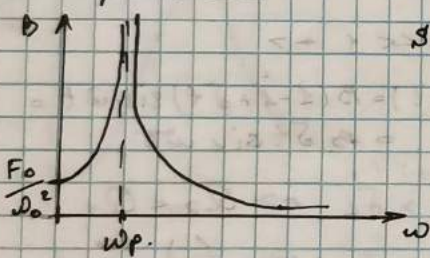
$$S(t) = B(1 - e^{-\delta t}) \sin \omega t$$

$\delta^2 \ll \omega_0^2$: когда можно пренебречь потерями? $\omega_0 \approx \omega_s \approx \omega_p$

$$B(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$



Преобразование δ :



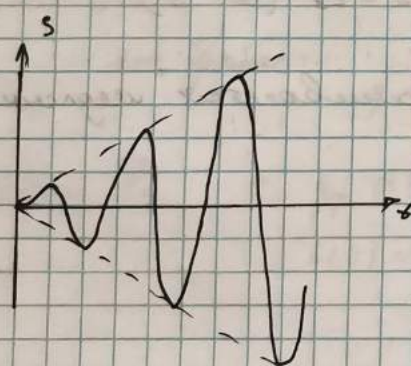
$S(t)$ можно разложить в ряд

$$S(t) = B \delta t \sin \omega t \quad (e^{-\delta t} \approx 1 - \delta t)$$

$$\text{Но: } B \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0$$

не физично

Выбор: уменьшить потери или увеличить ω_p .



Нереzonансное воздействие на колебательную систему

$$\ddot{S} + 2\delta \dot{S} + \omega_0^2 S = f(t) = F_0 \cos \omega t \quad (\omega \neq \omega_p)$$

$$S(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(\omega t - \psi)$$

Математическое отложение.
Сложение колебаний с близкими частотами.

Интересно, когда ω близки $\omega_1 \Rightarrow$ близкие частоты (*)

$$S_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

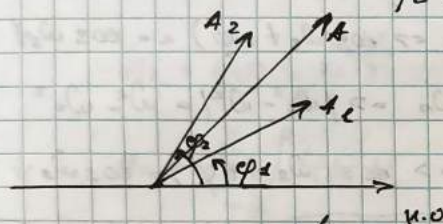
$$S_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$S(t) = S_1 + S_2 = ?$$

$$(*) \Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_{1,2}$$

Предположим, что $\omega_2 > \omega_1$, т.е. $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$

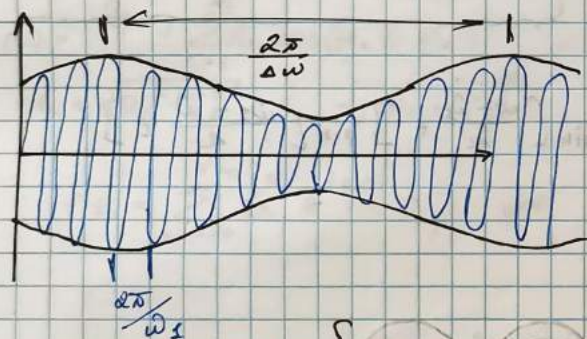
$$S_2(t) = A_2 \cos(\omega_1 t + \underbrace{\Delta\omega t + \varphi_2}_{\varphi_2^*(t)}) = A_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_2^*(t))$$



Из (*): φ_2^* - мгновенная ф-та времени.

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2^* - \varphi_1) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta\omega t) \end{aligned}$$

A зависит от времени. На векторной диаграмме A будет поворачиваться.
 $A \in [A_1 - A_2, A_1 + A_2]$, $S(t) = A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi)$



$$S(t) = A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

Биленькая - результат сложения колебаний с близкими частотами.

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ \dot{S}(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} 1) & \omega_1 \ll 1 \\ 2) & |\omega - \omega_0| \ll \omega_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= A_0 e^{-\delta t} (-\delta \cos(\omega_3 t + \varphi) - \omega_3 \sin(\omega_3 t + \varphi)) - \\ &= B \omega_3 \sin(\omega_3 t - \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_0 \cos \varphi + B \cos \psi = 0 \\ A_0 \delta \cos \varphi - A_0 \omega_3 \sin \varphi + B \omega_3 \sin \psi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 \cos \varphi = -B \cos \psi \\ A_0 \sin \varphi = -A_0 \frac{\delta}{\omega_3} \cos \varphi + B \left(\frac{\omega}{\omega_3} \right) \sin \psi \end{cases} \rightarrow \delta \text{ мало} \rightarrow \omega \approx \omega_3$$

$$\begin{cases} A_0 \omega_3 \varphi = -B \cos \psi \\ A_0 \sin \varphi \approx B \sin \psi \end{cases} \rightarrow A_0^2 \approx B^2 \Rightarrow A_0 \approx B$$

$$\tan(-\psi) = -\frac{\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \rightarrow 0$$

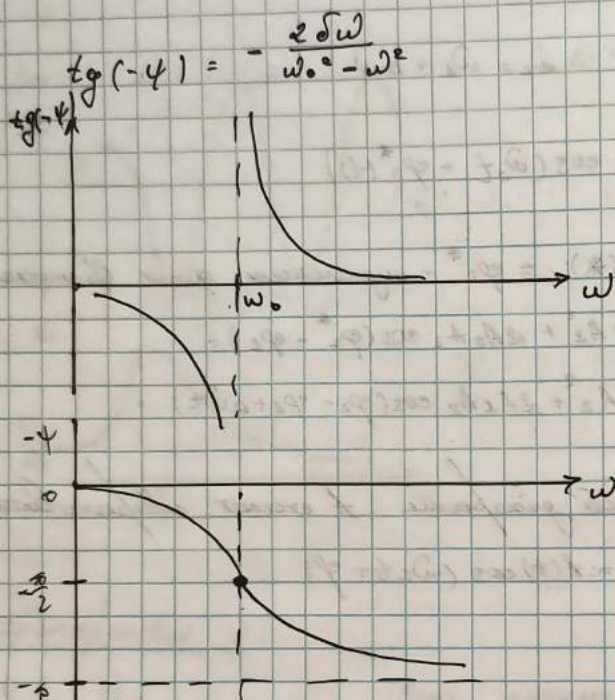
у нас замедляется δ , но $\omega_0^2 - \omega^2$ не замедляется, т.к. стала от резонанса.

$$\psi_1 = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$\psi_2 = \pi \Rightarrow \varphi = 0$$

$$B(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{F_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

$$s(t) = \frac{F_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|} (e^{-\delta t} \cos(\omega_s t + \varphi) + \cos(\omega t - \varphi))$$



$$\omega < \omega_0: \varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \pi$$

$$\omega > \omega_0: \varphi_2 = \pi \Rightarrow \varphi_2 = 0$$

$$\bullet \omega < \omega_0 \Rightarrow |\omega_0^2 - \omega^2| = \omega_0^2 - \omega^2$$

$$\varphi = \pi \Rightarrow \cos(\omega_s t + \varphi) = -\cos \omega_s t$$

$$\bullet \omega > \omega_0 \Rightarrow |\omega_0^2 - \omega^2| = \omega^2 - \omega_0^2$$

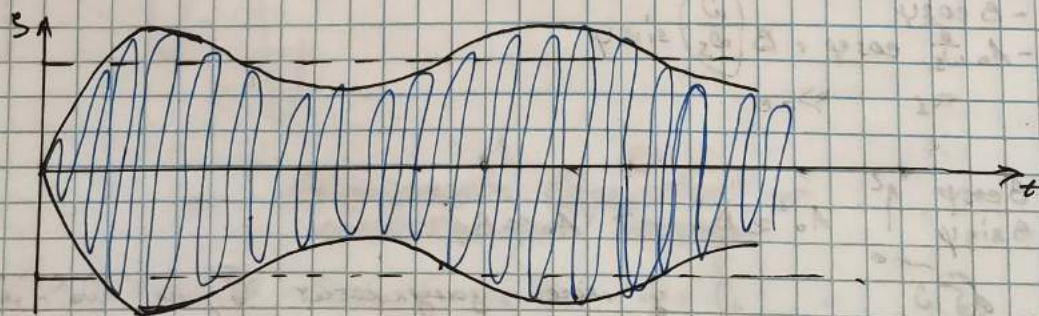
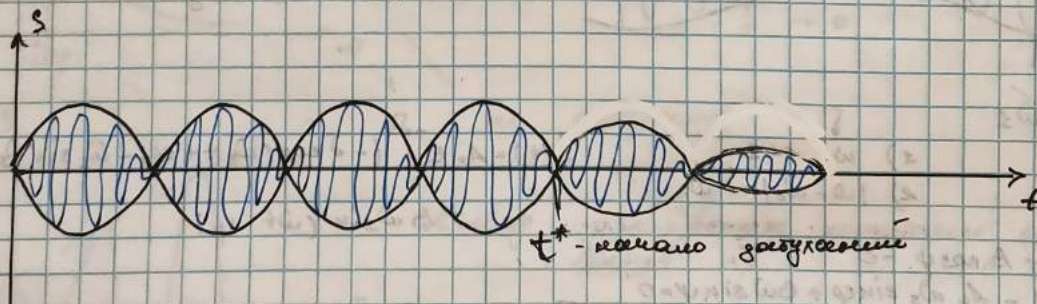
$$\varphi = 0 \Rightarrow \cos(\omega_s t + \varphi) = \cos \omega_s t$$

$$s(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (-e^{-\delta t} \cos \omega_s t + \cos \omega t) =$$

$$= \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - e^{-\delta t} \cos \omega_s t)$$

$$r) \delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \omega t - \cos \omega_s t = 2 \sin \left[\frac{\omega + \omega_s}{2} t \right] \sin \left[\frac{\omega_s - \omega}{2} t \right]$$

$\Rightarrow$ бeззaмaм.



Спектральное представление сигналов. Разложение периодической функции в ряд Фурье.

Φ -я периодическая, если $f(t) = f(t+T)$

Условия Дирихле:

- 1) У ф-ии могут быть только конечные скачки. $f(t)$ имеет на периоде T конечное число точек разрыва 1-го рода. (конечных скачков)
- 2) Период T можно разбить на конечное число интервалов, на которых $f(t)$ непрерывна.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \Omega_k t + b_k \sin \Omega_k t)$$

$$\Omega_k = k \Omega = k \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k \Omega t) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k \Omega t) dt$$

Можно перейти к другой форме записи:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k)$$

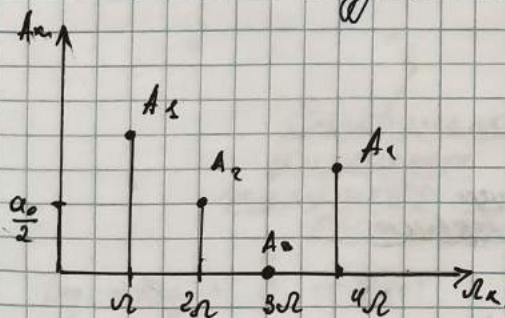
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{b_k}{a_k}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{C}_k e^{i \Omega_k t}$$

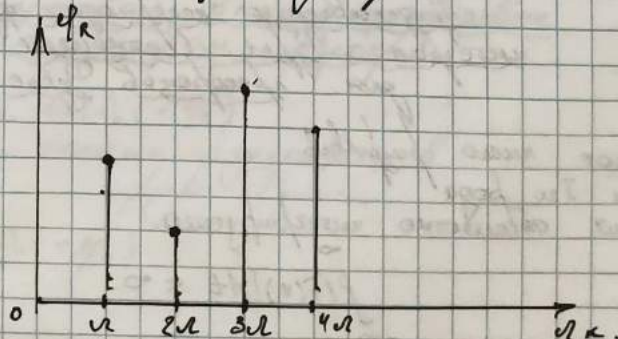
$$\text{где } \hat{C}_k = \frac{1}{2} A_k e^{-i \varphi_k}$$

$$\hat{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i \Omega_k t} dt$$

Амплитудный спектр
(амплитудная спектрограмма)



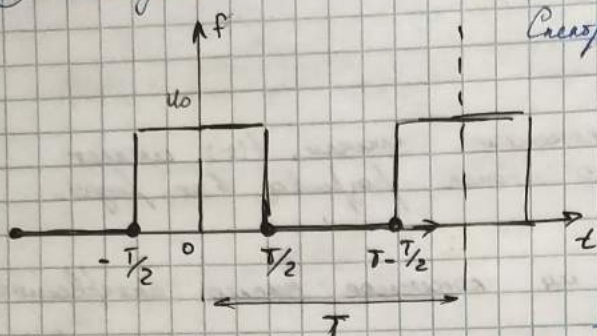
Фазовая спектрограмма: →



У периодической ф-ии спектр всегда дискретен.

18.02.22.

II) Последовательность прямоугольных импульсов (машинный спектр меандра?)



1) Функция удовлетв. умов. ряд Фурье

$$f(t) = \begin{cases} U_0, & t \in [-T/2, T/2] \\ 0, & t \in (T/2, T - T/2) \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U_0 dt = \frac{2}{T} U_0 T$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\kappa_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U_0 \cos(\kappa_n t) dt = \frac{2U_0}{T \kappa_n} \cdot 2 \sin(\kappa_n \frac{T}{2}) =$$

$$= \frac{4U_0 \sin(\frac{\kappa_n T}{2})}{T \kappa_n}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\kappa_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U_0 \sin(\kappa_n t) dt = 0$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = \frac{4U_0}{T} \cdot \frac{2}{\kappa_n} \left| \sin\left(\frac{\kappa_n T}{2}\right) \right| \cdot \frac{T}{T} \ominus$$

$$\text{tg } \varphi_n = \frac{-b_n}{a_n} = 0$$

~ фазы каждой гармоники

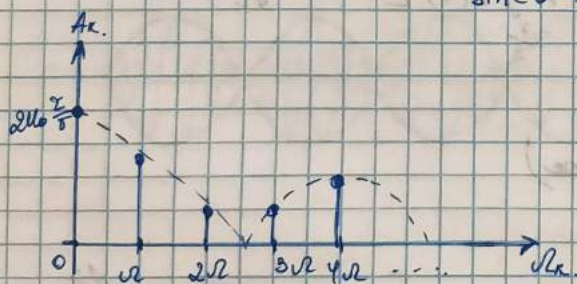
$$\ominus \frac{4U_0}{T} \cdot \frac{2}{\kappa_n T} \cdot \left| \sin\left(\frac{\kappa_n T}{2}\right) \right| = \frac{4U_0 T}{T} \cdot \left| \text{sinc}\left(\frac{\kappa_n T}{2}\right) \right|$$

$$\rightarrow \frac{\sin x}{x} = \text{sinc } x$$

$$\text{sinc } 0 = 1$$

$$\kappa_n = \frac{2\pi}{T}$$

$$\kappa_n T = \frac{2\pi T}{T}$$



Функция период. → спектр дискретен

Представление непрерывных функций
интеграл Фурье. Собственные неопределен.
для преобразов. Фурье.

① Конечное число разрывов

② Разрывы 1-го рода

③ Функция абсолютно интегрируема.

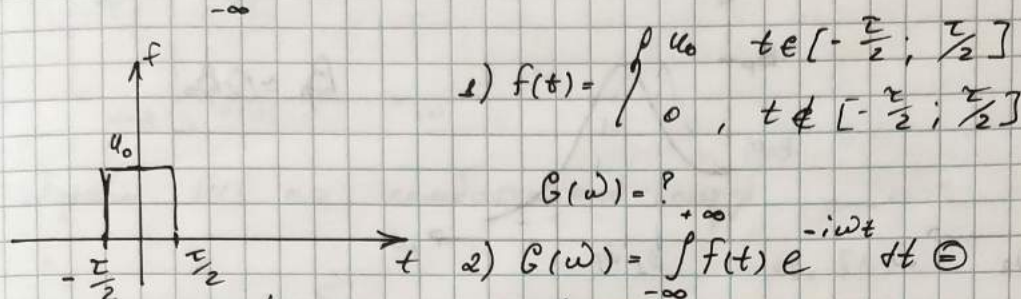
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

↑ спектральная плотность

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

прямое и обратное преобразование Фурье.



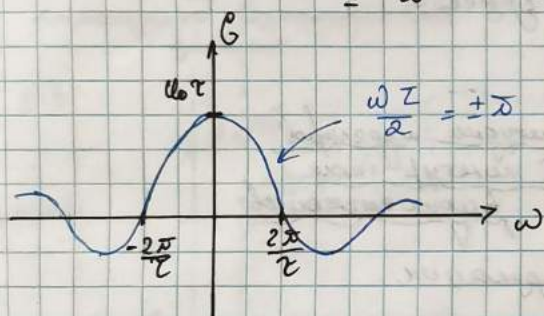
$$G(\omega) = ?$$

$$2) G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \ominus$$

~ Непрерыв. → Ряд Фурье невозможен.

$$\ominus \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_0 e^{-i\omega t} dt = \frac{u_0}{-i\omega} (e^{-i\omega \frac{\tau}{2}} - e^{i\omega \frac{\tau}{2}}) =$$

$$= \frac{2}{\omega} u_0 \cdot \sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \cdot \frac{\tau}{2} = u_0 \tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$



$\Delta t_c = \tau$ (длительность сигнала)

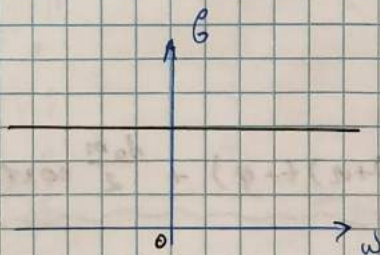
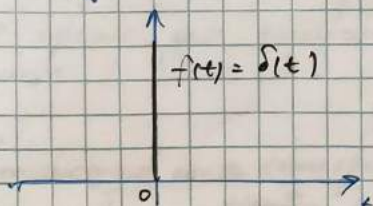
$\Delta \omega = \frac{2\pi}{\tau} \sim$ (ширина спектра)

$$\boxed{\Delta \omega \Delta t_c \approx 2\pi} \sim \text{соотношение неопределенности для ряда Фурье}$$

Это соотношение всегда будет выполняться по мере увеличения.

• Чем уже функция → тем шире спектр функции.

17) δ -функция.



Спектральное разложение как физическое явление. Отклик линейного осциллятора на произвол. внешн. воздействие. Канон. соотн., как спектры прилив.

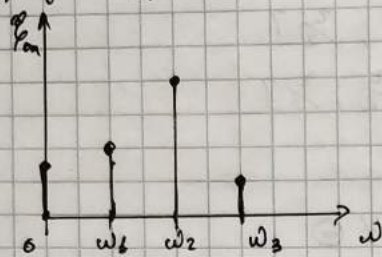
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{0n} \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

~ можно представить в ряд Фурье

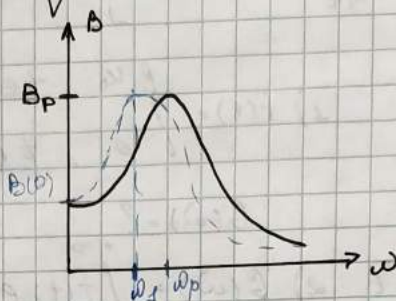
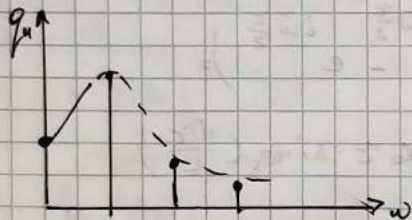
$$\ddot{q} + \underbrace{\left(\frac{R}{L}\right)}_{\omega_0} \dot{q} + \underbrace{\left(\frac{1}{LC}\right)}_{\omega_0^2} q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{0n}}{L} \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (\omega_n t - \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{0n} / L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + 4\delta^2 \omega_n^2}} \cos(\omega t - \varphi_n)$$

(общий спектр. на внеш. воздейств. или сразу представим в виде ряда Фурье.)



Резонансная частота $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$



$$B_p \approx Q B_0$$

(Контур описывает спектр в других параметрах)

(При изменении не добавляется новых гармоник, но и не меняется полностью устройство устройств.)

Принцип радиосвязи. Амплитудно-модулированный сигнал и его спектр. Канал, контур, как селективный приемник радиосигналов.

Ам - амплитуда.

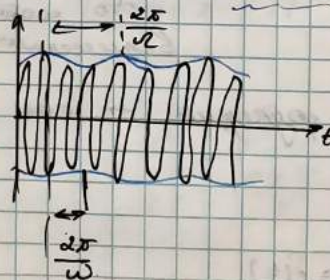
модулирует модуляцию.

$$f(t) = A(t) \cos \omega t = A_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos (\omega t + \varphi) = A_0 \cos (\omega t + \varphi) \quad (+)$$

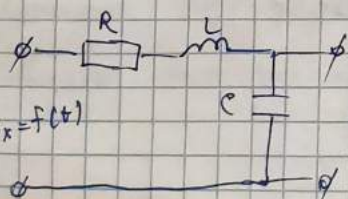
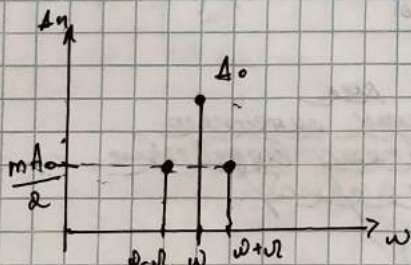
$A(t)$
($m < 1$)

$$\Omega \ll \omega$$

ω - несущая частота.

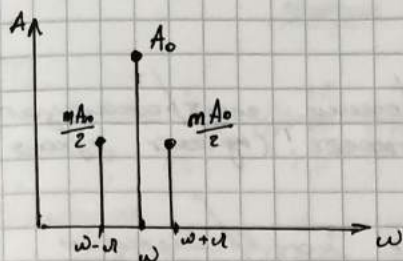


$$④ \quad \frac{A_0 m}{2} \cos ((\omega + \Omega)t + \varphi) + \frac{A_0 m}{2} \cos ((\omega - \Omega)t + \varphi)$$



$$U_{max} = U_C = ?$$

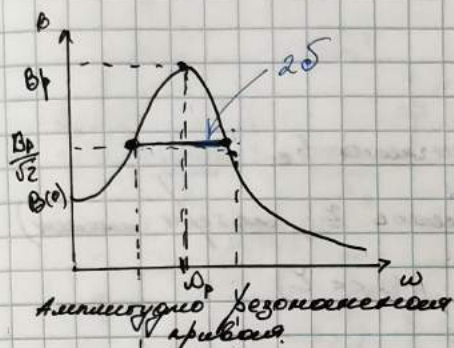
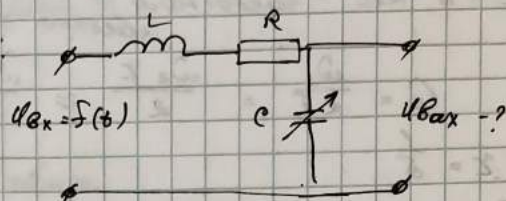
$$f(t) = A_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega t + \varphi)$$



$m < 1$ ~ глубина модуляции.

$$\Omega \ll \omega$$

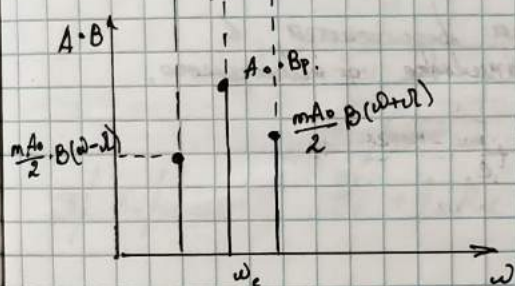
Подать $f(t)$ на колебательный контур:



$$U_c = \frac{q}{C}$$

$$q \sim B$$

$$B_r \approx Q B(0)$$

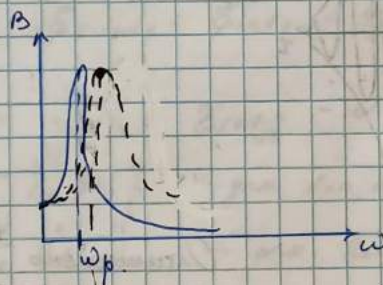


Если будем $Q \uparrow$ (2Δω мало):

Но сигнал искажается $\Rightarrow$ теряется информация.

Плохо для передачи инф-ии.

Но хорошо для спектрального анализа.



~ Селективный резонатор

Дл. резонансная сл-ть (селективный резонатор)

$$R = \frac{\Delta \omega_{\text{раб}}}{\Delta \omega}$$

полоса частот, в которой "пачки" сигналов различаются хорошо

$$\omega_{\text{раб}} = \omega_c = \omega_r$$

$$\Delta \omega \approx 2\Delta\omega$$

Подставляя: $R = \frac{\omega_r}{2\Delta\omega} \quad (\Delta\omega^2 \ll \omega_0^2) \Rightarrow \omega_r \approx \omega_0$

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\Delta\omega^2$$

$$\omega_s^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{\omega_0}{2\delta} \approx \frac{\omega_s}{2\delta} = Q$$

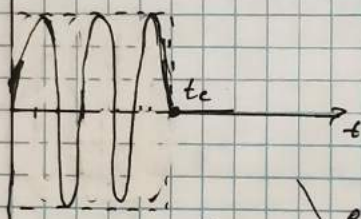
Т.е. чтобы сделать хороший спектральный анализ, нужна высокая добротность! (прямая резонансная кривая)

Для рассуждений о передаче информации лучше на временном графике (а не частотном) рассмотреть затух. колеб.

$$Q = \frac{\omega_s}{2\delta} = \frac{\omega_s \tau}{2} \approx \frac{\omega_c \tau}{2}$$

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$

На графике $f \leftarrow$

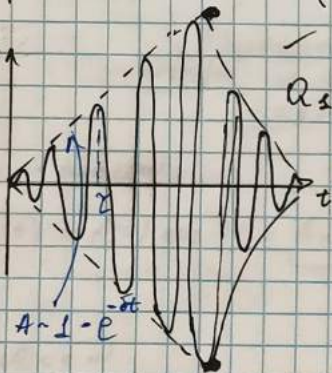


Оформление гр-ка сигнала t_c .

$Q \gg 1$ (люб. большое τ , потерь мало)

$Q_2 \gg 1 \Leftrightarrow \tau \uparrow$ ($t_c \ll \tau$)

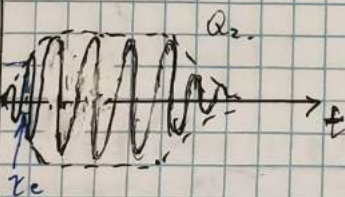
Частота



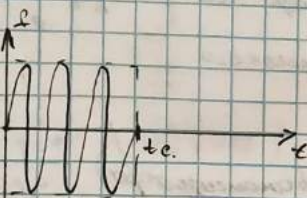
Сигнал нет, но реакция продолжается, в итоге полученный сигнал отличается от идеального.

$Q_1 < Q_2$, $\tau \ll t_c$.

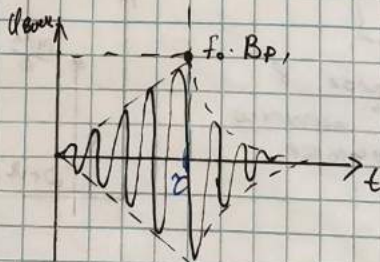
Частота



Оптимально $\tau \approx t_c$



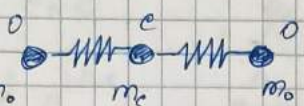
$$\Rightarrow t_c \approx \tau$$



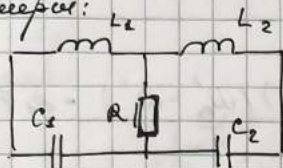
$$\Delta \omega \cdot t_c = 2\delta$$

связь выполняется

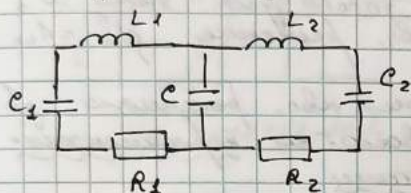
Линейные колебательные системы с нелинейными элементами
связи. Связанные колебания.

$CO_2 \rightarrow$  - атлас, прил. могут колеб. в Н. гидроа, при отр-об генератора.

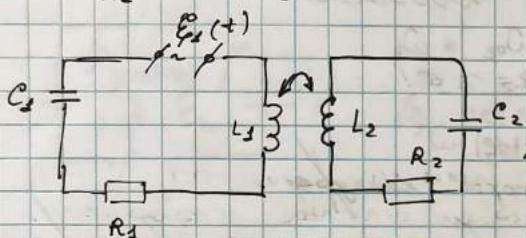
Примеры:



~ резистивная связь.



~ емкостная связь.



~ индуктивная связь.

$M_{12} = M_{21}$ - коэф. взаимной индукции

↓ рас-м этих примеров

Пр. Кирхгофа: $\frac{q_1}{C_1} + \dot{q}_1 R_1 = \mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_{\text{инд}1} + \mathcal{E}_{\text{инд}2} = \mathcal{E}_1(t) - L_1 \ddot{q}_1 - M \ddot{q}_2$

$\mathcal{E}_{\text{инд}2} = -M \frac{dI_{1,2}}{dt}$

$\ddot{q}_1 + \frac{R_1}{L_1} \dot{q}_1 + \frac{1}{L_1 C_1} q_1 = \frac{\mathcal{E}_1(t)}{L_1} - \frac{M}{L_1} \ddot{q}_2$ ~ для 1-го контура.

Аналогично: $\ddot{q}_2 + \frac{R_2}{L_2} \dot{q}_2 + \frac{1}{L_2 C_2} q_2 = -\frac{M}{L_2} \ddot{q}_1$ ~ для 2-го контура.

Вниманием $\mathcal{E}_1(t)$, Пусть: $\mathcal{E}_1 = 0$ (зарядка конденсатор.)
 $R_1 = R_2 = 0$ (пренебрегаем потерями)

$\frac{1}{L_1 C_1} = \omega_{01}^2$
 $\frac{1}{L_2 C_2} = \omega_{02}^2$

парциальные частоты (отр-е) ~ собственные частоты колебаний.

$\frac{M}{L_{1,2}} = k_{1,2}$

- коэффициенты связи.

$M \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

$\ddot{q}_1 + \omega_{01}^2 q_1 = -k_{12} \ddot{q}_2$
 $\ddot{q}_2 + \omega_{02}^2 q_2 = -k_{21} \ddot{q}_1$

~ описывает взаимн. колебания, МКА.
ищем решение в виде:

$\hat{q}_{1,2} = \hat{A}_{1,2} e^{i\omega t}$

~ предполагаем вид решения.
 ω - дано и до нас

$$\ddot{q}_{1,2} = -\omega^2 \hat{A}_{1,2} e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} (\omega_{01}^2 - \omega^2) \hat{A}_1 = +\kappa_1 \omega^2 \hat{A}_2 \\ (\omega_{02}^2 - \omega^2) \hat{A}_2 = +\kappa_2 \omega^2 \hat{A}_1 \end{cases}$$

Решение $\exists$, если $\Delta = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_{01}^2 - \omega^2 & -\kappa_1 \omega^2 \\ -\kappa_2 \omega^2 & \omega_{02}^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - \kappa_1 \kappa_2 \omega^4 = 0$$

только для такой ω удовл. решение $\ddot{q}_{1,2} = A_{1,2} e^{i\omega t}$

$\Rightarrow \omega$, которое явл. решением ур-я, удовлетворяет корреляционной частоте.

Пусть $L_1 = L_2$, $C_1 = C_2 \Rightarrow \omega_{01} = \omega_{02} \equiv \omega_0$
 $\kappa_1 = \kappa_2 \equiv \kappa$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \kappa^2 \omega^4 \rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 = \pm |\kappa| \omega^2$$

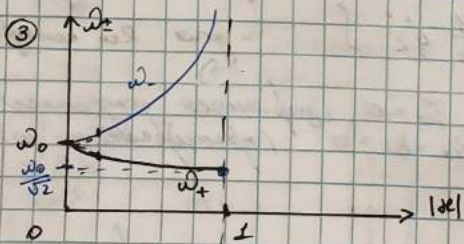
ω_0^2 — собственная частота контура.

$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_0^2}{1 \pm |\kappa|}$ т.е. колебания возможны на двух нормальных частотах:

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm |\kappa|}} = \omega_0 (1 \pm |\kappa|)^{-1/2}$$

Свойства: ① Нормальных частот 2: ω_+ , ω_- .

② $\omega_{\pm} \neq \omega_0$



$$0 \leq |\kappa| \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

$$0 \leq |\kappa| \leq 1$$

$\Downarrow$

$$0 \leq |\kappa| \leq 1$$

④ Для $|\kappa| \ll 1$

$$\omega_+ \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} |\kappa| \right)$$

$$\omega_- - \omega_+ \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} |\kappa| - 1 + \frac{1}{2} |\kappa| \right) = \omega_0 \cdot |\kappa|$$

Найдем $\hat{A}$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \hat{A}_1 = +\kappa \omega^2 \hat{A}_2$$

$$\left(\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{1 \pm |\kappa|} \right) \hat{A}_1 = \kappa \frac{\omega_0^2}{1 \pm |\kappa|} \hat{A}_2$$

$$(1 \pm |\kappa| - 1) \hat{A}_1 = \kappa \hat{A}_2$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \pm \hat{A}_2$$

два возможных решения: (то что с + будем писать с этим напомним):

25.08.22.

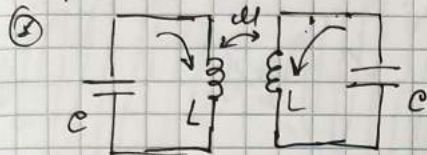
① $\hat{q}_{\text{нр}} = \hat{A}_+ e^{i\omega_+ t}$; $\hat{q}_{\text{нр}} = \hat{A}_+ e^{i\omega_+ t}$

симметричные нормальные колебания.

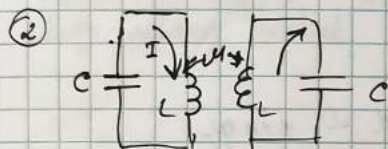
② $\hat{q}_{\text{нр}} = \hat{A}_- e^{i\omega_- t}$; $\hat{q}_{\text{нр}} = -\hat{A}_- e^{i\omega_- t}$

~ антисимметричные колебания.

Пример:



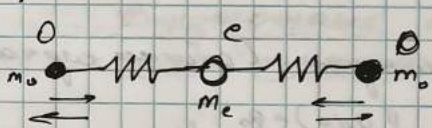
на частоте $\omega_+ < \omega_0$, т.е. колеблется синфазно относительно друг друга.



за счёт взаим. инд. колебания противофазно друг друга.

Частоту нормальных колебаний можно узнать:

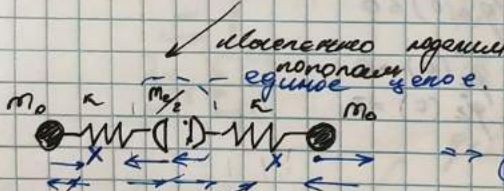
Сое.



То т.о. центр масс, движущийся равномерно и прямолинейно.

=> ① симметр. $\omega_+ = \sqrt{\frac{k}{m_0}}$

масса движущаяся равномерно.



=> ② антисимметр. колебания

«бег» центра масс.

Приведенная масса: $m_{\text{пр}} = \frac{m_0 \cdot m_c/2}{m_0 + m_c/2}$

движется колеб. на расстоянии относительно центра масс.

$\omega_- = \sqrt{\frac{k}{m_{\text{пр}}}} = \sqrt{\frac{k(m_0 + m_c/2)}{m_0 \cdot m_c/2}}$

=> $\omega_- > \omega_+$

Решение задачи (окончательное):

$\hat{q}_1 = \hat{A}_+ e^{i\omega_+ t} + \hat{A}_- e^{i\omega_- t}$
 $\hat{q}_2 = \hat{A}_+ e^{i\omega_+ t} - \hat{A}_- e^{i\omega_- t}$

$\rightarrow q_1(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$

$q_2(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$

ампл. в фазе из нач. усл.

Примеры: ① Для сов. колеб.: $\begin{cases} q_1(0) = q_2(0) \\ \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) \end{cases}$ - совмещен.

$$\begin{cases} A_+ \cos \varphi_+ + A_- \cos \varphi_- = A_+ \cos \varphi_+ - A_- \cos \varphi_- \\ -A_+ \omega_+ \sin \varphi_+ - A_- \omega_- \sin \varphi_- = A_+ \omega_+ \sin \varphi_+ + A_- \omega_- \sin \varphi_- \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A_- \cos \varphi_- = 0 \\ 2A_- \sin \varphi_- = 0 \end{cases} \quad \omega_- \neq 0$$

$$\Rightarrow A_- = 0$$

$$\Rightarrow q_1(t) = q_2(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \quad \checkmark$$

② Чообар билим аниқлашсан, нач. усл. аниқлашсан:

$$\begin{cases} q_1(0) = -q_2(0) \\ \dot{q}_1(0) = -\dot{q}_2(0) \end{cases} \text{ - аниқлашсан.}$$

$$\begin{cases} A_+ \cos \varphi_+ + A_- \cos \varphi_- = -A_+ \cos \varphi_+ + A_- \cos \varphi_- \\ -A_+ \omega_+ \sin \varphi_+ - A_- \omega_- \sin \varphi_- = +A_+ \omega_+ \sin \varphi_+ - A_- \omega_- \sin \varphi_- \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_+ = 0$$

$$q_1(t) = -q_2(t) = A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \quad \checkmark$$

③ Чо бугае при произвольных нач. усл. (общий случай):
Зададим 4-ые нач. условия

$$\begin{cases} q_1(0) = q_0 \\ q_2(0) = 0 \\ \dot{q}_1(0) = 0 \\ \dot{q}_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_+ \cos \varphi_+ + A_- \cos \varphi_- = q_0 \\ A_+ \cos \varphi_+ - A_- \cos \varphi_- = 0 \\ -A_+ \omega_+ \sin \varphi_+ - A_- \omega_- \sin \varphi_- = 0 \\ -A_+ \omega_+ \sin \varphi_+ + A_- \omega_- \sin \varphi_- = 0 \end{cases}$$

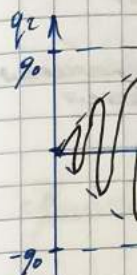
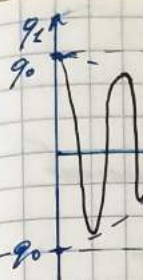
$$\begin{cases} -2A_+ \sin \varphi_+ = 0 \rightarrow \sin \varphi_+ = 0 \\ 2A_- \sin \varphi_- = 0 \rightarrow \sin \varphi_- = 0 \end{cases} \rightarrow \cos \varphi_+ = \cos \varphi_- = 1$$

$$\begin{cases} A_+ + A_- = q_0 \\ A_+ - A_- = 0 \end{cases} \Rightarrow A_+ = A_- = \frac{q_0}{2}$$

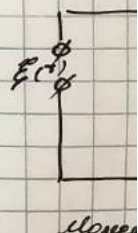
Если $\varphi_+ = \varphi_- = 0$

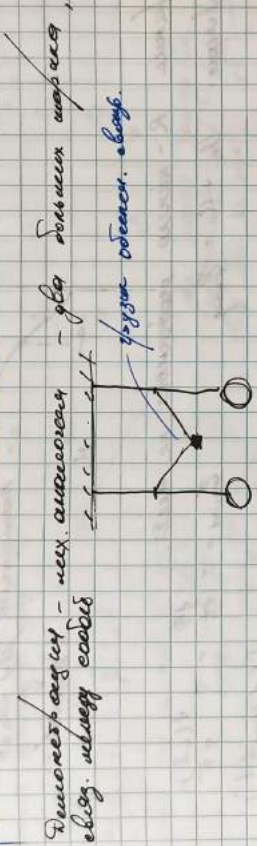
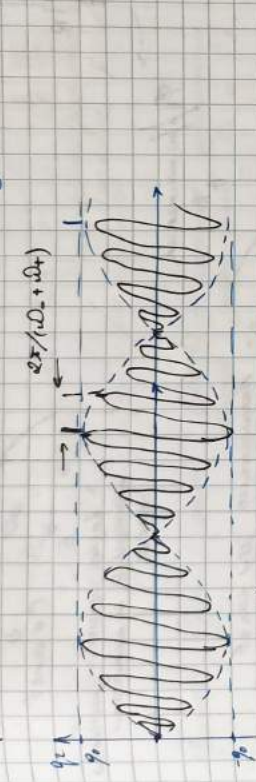
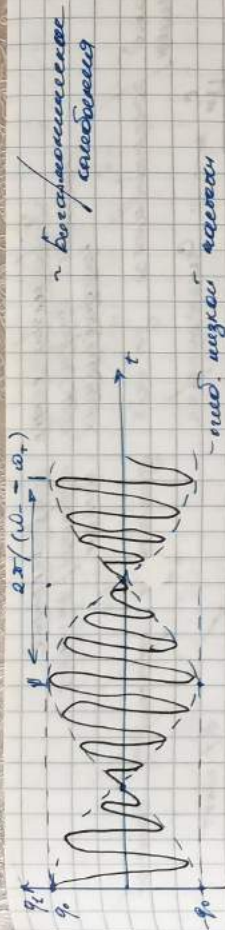
$$\begin{cases} q_1(t) = \frac{q_0}{2} (\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)) \\ q_2(t) = \frac{q_0}{2} (\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{q_1(t)} &= q_0 \cos \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t \\ q_2(t) &= q_0 \sin \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t \end{aligned}$$

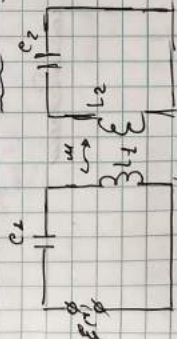


Движение





Взаимная индукция
с магн. экраном



$$E_1(t) = E_0 e^{i\omega t}$$

$$E_2(t) = 0$$

$$q_1(t) = q_0 e^{i\omega t}$$

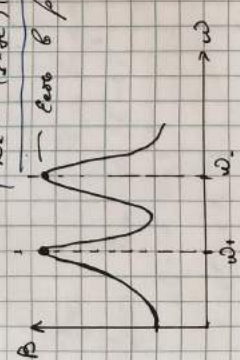
$$L_1 = L_2 = L$$

Можно проанализировать, но сразу к ответу:

$$P_k = \frac{R \omega^2 E_0^2}{(1 - \kappa^2)(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2}$$

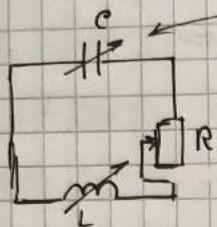
~ при ант. резонансе

~ при резонансе R → минимуме P



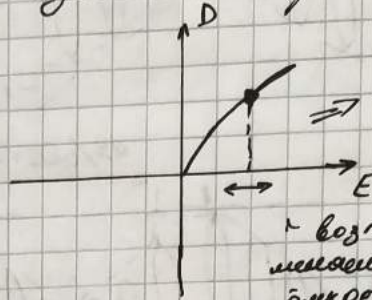
Параметрические колебательные системы. Энергетика колебательных систем.

~ колеб. раскачиваются за счёт изменения параметров самой системы.



Сетевое индуктив.

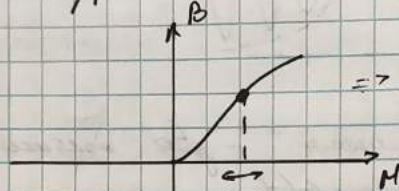
Резистор.



$E \neq \text{const}$

$C \neq \text{const}$

↑ возле этого значения меняется E → меняется ёмкость.



⇒ Аналогично $M \neq \text{const}$

$L \neq \text{const}$

Изменяется R - ничего особенного не несёт.

2 пр. Кирхгофа: $U_R + U_C = E_{\text{инд}}$

$$E_{\text{инд}} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(LI)}{dt} \quad (L \neq \text{const!})$$

$$\begin{aligned} IR + \frac{q}{C} + \frac{d(LI)}{dt} &= 0 \\ L\ddot{q} + \dot{q}(R + \dot{L}) + \frac{q}{C} &= 0 \\ \ddot{q} + \dot{q} \frac{R + \dot{L}}{L} + \frac{q}{LC} &= 0 \end{aligned}$$

$$I = \dot{q}$$

~ гр-е колебательный

28.02.22 Пусть $L = L(t)$, $C = C(t)$

$$\ddot{q} + \frac{L + R}{L(t)} \dot{q} + \frac{1}{L(t)C(t)} q = 0$$

Как изменяется энергия? Рассмотрим энергию на I

$$\begin{aligned} \frac{d(LI)}{dt} + RI + \frac{q}{C} &= 0 \quad / \cdot I \\ I^2 \frac{dL}{dt} + LI \frac{dI}{dt} + RI^2 + \frac{Iq}{C} &= 0 \end{aligned}$$

$$W_{\text{ин}} = \frac{LI^2}{2} \Rightarrow \frac{dW_{\text{ин}}}{dt} = \frac{I^2}{2} \frac{dL}{dt} + LI \frac{dI}{dt}$$

$$W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C} \Rightarrow \frac{dW_{\text{эл}}}{dt} = \frac{1}{C} q \frac{dq}{dt} - \frac{q^2}{2C^2} \frac{dC}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dt} + LI \frac{dI}{dt}}_{\frac{dW_{el}}{dt}} + \underbrace{\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} - \frac{U_0^2}{2} \frac{dC}{dt}}_{\frac{dW_{on}}{dt}} = \underbrace{-I^2 R}_{P_{ame}} - \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dt} - \frac{U_0^2}{2} \frac{dC}{dt}$$

$$W = W_{el} + W_{on}$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = -P_{ame} + P_p, \text{ где } P_p = \left(-\frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dt} - \frac{q^2}{2C^2} \frac{dC}{dt} \right) \sim \text{мощность паразитической накачки.}$$

Рассмотрим поперек. $\downarrow$
То, что изменяется паразитной системой (от антенны ρ - радиус)

Пример: Пусть $L = \text{const}$, $C = C(t) \sim$ скачком изменяется площадь конденсатора

конденсатор изменяется скачком

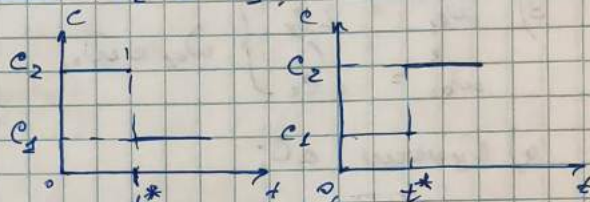
$$1) q(t^-) = q(t^+)$$

$$2) \dot{q}(t^-) = \dot{q}(t^+)$$

Если это не так:

$$P_{amp} \sim L \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 \rightarrow \infty$$

но $P_{int} \neq \infty$



Не можем заряд накапливать скачком!

Если бы не так: $\frac{dq}{dt} \rightarrow \infty$ но $\Rightarrow I \neq \infty$

$\Delta t \rightarrow 0$ (маленький скачок)

$$\Delta W = \underbrace{-P_{me} \cdot \Delta t}_{\rightarrow 0} + \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right)$$

зависимость от знака скачка конденсатора по-прежнему, так и закон энергии.

1) Пусть $C_2 < C_1 \Rightarrow P_p > 0$ ~ энергия в контуре будет накапливаться ~ раскачка.

2) $C_2 > C_1 \Rightarrow P_p < 0$

3) При $q=0 \Rightarrow P_p=0$ Если конденсатор не был заряжен, то как бы не изменилась емкость $\rightarrow$ ничего не происходит.

Пусть $C(t=0) = C_1$, выходя из равновесия, пусть $C_2 < C_1$

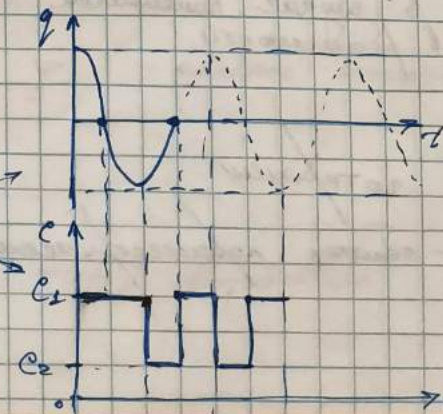
Пусть $P_{ame} \rightarrow 0$ ($R \rightarrow 0$)

$$\Delta C = |C_1 - C_2|$$

$$\Delta C \ll C_1, C_2$$

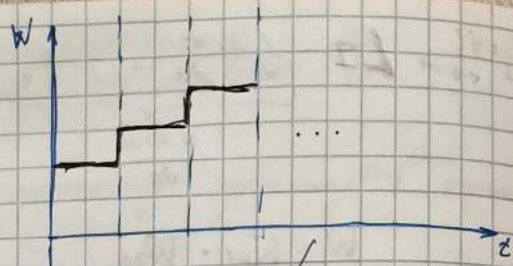
Частота накачки должна быть в два раза больше, чем колебания

$$\omega_s = \omega_0 (\delta=0); \quad \omega_p = 2\omega_0 - \text{стационарного}$$



$$\omega_p = \frac{\omega_0}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Но в реальной цепи потери есть.



Задача: 2) $W \rightarrow \infty$ 3) мы не учитывали потери $R_{\text{вн}} \neq 0$

3) $C = C(t)$ ~ емкость становится непостоянной
 $\Rightarrow$ Емкость начинает зависеть от заряда
 $(C = C(q))$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_0 \neq \text{const} \text{ и выйдем из условия } \omega_0 = \omega_p$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{01}^2 &= \frac{1}{LC_1} \\ \omega_{02}^2 &= \frac{1}{LC_2} \end{aligned} \right\} \omega_{01} \approx \omega_{02}$$

4) Изменим ΔC :

$$\begin{aligned} \frac{W}{\Delta W_{\text{вн}}} &= \frac{1}{2q} \sim \text{при затухающих колебаниях} (\delta \neq 0) \\ \Delta W_p &= \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = \frac{q^2 (C_2 - C_1)}{2C_1 C_2} \approx \frac{q^2 \Delta C}{2C_1^2} = W \cdot \frac{\Delta C}{C_1} \\ \Rightarrow \Delta W_{p2} &= 2 \Delta W_p = 2W \cdot \frac{\Delta C}{C} \end{aligned}$$

за период.

$$\frac{\Delta W_{p2}}{\Delta W_{\text{вн}}} = \frac{\Delta C}{C} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta C}{C_1} > 1} \sim \text{должно быть выполнено это условие для заправки}$$

Важно, чтобы время измерения $C_1 \rightarrow C_2 \ll T$ - периода.

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + m \cos \omega_p t}, \quad m < 1$$

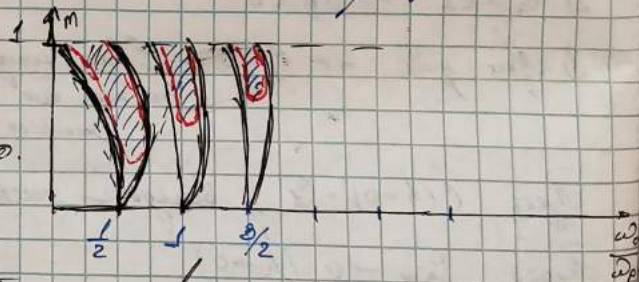
частота модуляции.

Этот процесс можно считать.

--- в случае плавности.
 — в реальности.

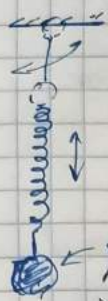
— с потерями

|||| - без потерь



Также показаны процессы, при них нет потерь.

Нелин. дей: маятник Гюйгенса, ~ можно рассматривать как маятник, к-й и физ-ий маятник.



период $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, но l - меняется.

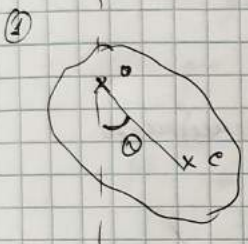
формула $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

колебания поперечные, продольные переходят в колебания поперечные.

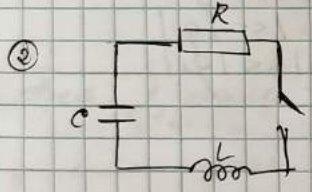
ср* на сколько пружинка должна быть растянута в начальном состоянии (в состоянии покоя), чтобы была горизонтальной пружинка. (как эта пружина связана со сдвигами в маятнике до натяжения).

Особенности нелинейного осциллятора.



$I\ddot{\theta} + mg l \sin \theta = 0$ ($F_{собр} = 0$)

~ пример нелинейного осциллятора.



$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{CL}q = 0$

Нелинейная может оказаться любой из элементов.

$I = I(\theta) \Rightarrow R = R(I) = R(I)$

$C = C(q)$ ~ для сегнетоэлектриков.

$L = L(I)$ ~ ферромагн. сердечник

Особенности:

1) Даже при $R=0$, $q(t) \neq q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ~ т.е. пример потерь энергии. ~ алгебраизация.

2) $T = T(A)$ ~ период зав. от амплитуды (неизохронность)

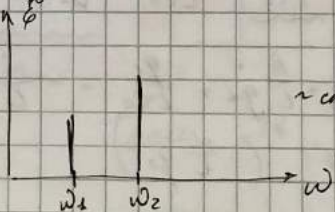
вынужденное колеб-я: $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$

Б. 03. 22

Лин. с-ма: $q_{вынужд} = Q(\omega) \cos(\omega t - \varphi)$ ~ частное решение.

Нелинейная с-ма: $\omega_{вынужд} \neq \omega$

Пусть в $\mathcal{E}$ $\omega_1 \neq 0$
 $\omega_2 \neq 0$



~ спектр возмущения

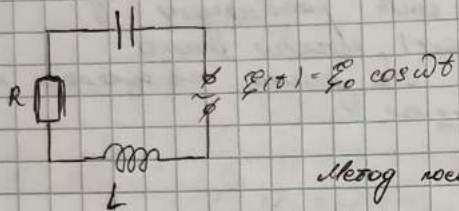
$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 \neq 0 \\ \omega_2 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_{\text{суммар}} = n\omega_1 \pm m\omega_2, \text{ где } n, m = 0, 1, \dots$$

- комбинация целых частот

Пример. Качающееся расщеп-е
собственных колебаний
по форме контура с нелинейн.

Пусть $R = \text{const}$, $L = \text{const}$; $C = C(q)$

$$U_C = \frac{q}{C(q)}$$



$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C(q)} = E(t)$$

Метод послед-х приближений:

в ряд Тейлора: $\frac{1}{C(q)} = \frac{1}{C_0} + \alpha q^2 + \beta q^4 + \dots$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C_0} + \alpha q^3 + \beta q^5 + \dots = E(t)$$

квадрат. и кубич. нелинейность.

Представим решение в виде ряда:

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t) + q_2(t) + \dots, \text{ справедливо при } |q_1| \ll |q_0|, |q_2| \ll |q_1|$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C_0} = E_0 \cos \omega t - \alpha q^3 - \beta q^5 - \dots$$

Временно забудем про E нелинейн.
 $\Rightarrow$ в 0 приближении:

$$q = q_0$$

$$\ddot{q}_0 + \frac{R}{L}\dot{q}_0 + \frac{q_0}{LC_0} = \frac{E_0}{L} \cos \omega t$$

$$q_0 = B(\omega) \cos(\omega t - \varphi)$$

$$B(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \text{ где } F_0 = \frac{E_0}{L}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}, \delta = \frac{R}{2L}$$

1 приближение: в первом члене представл. $q = q_0 + q_1$, а в втором q_0 , т.е. $|q_1| \ll |q_0|$ ~ можно считать пренебречь

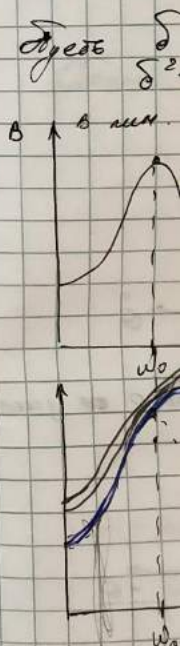
$q = q_0 + q_1$ - в пов. член!

$$\ddot{q}_0 + \ddot{q}_1 + \frac{R}{L}\dot{q}_0 + \frac{R}{L}\dot{q}_1 + \frac{q_0}{LC_0} + \frac{q_1}{LC_0} = \frac{E_0}{L} \cos \omega t - \frac{\alpha}{L} q_0^3 - \frac{\beta}{L} q_0^5$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 + \frac{R}{L}\dot{q}_1 + \frac{q_1}{LC_0} = -\frac{\alpha}{L} q_0^3 - \frac{\beta}{L} q_0^5$$

1) квадратичная нелинейность: $(-\frac{\alpha}{L} q_0^3)$

2) кубичная



$$\begin{aligned} \frac{F_{\text{вагр.}}}{L} &= -\frac{\alpha}{L} q_0^2 = -\frac{\alpha}{L} B(\omega) \cdot \cos^2(\omega t - \psi) = \\ &= -\frac{\alpha}{2L} B^2(\omega) (1 + \cos(2\omega t - 2\psi)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ получили линейную систему с
внеш. силой на частоте 2ω и на
0 частоте.

$q_1 \rightarrow \cos(\omega t - \psi)$ частоты составл.
 $q_2 \rightarrow \cos(2\omega t - 2\psi)$ фазы отклика $\neq 2\psi$

3) кубическая нелинейность: $(-\frac{\beta}{L} q_0^3)$

$$\begin{aligned} \frac{F_{\text{куб.}}}{L} &= -\frac{\beta}{L} B^3(\omega) \cos^3(\omega t - \psi) = \\ &= -\frac{\beta B^3(\omega)}{4L} (3 \cos(\omega t - \psi) + \cos(3\omega t - 3\psi)) \end{aligned}$$

появится отклик на 3ω .

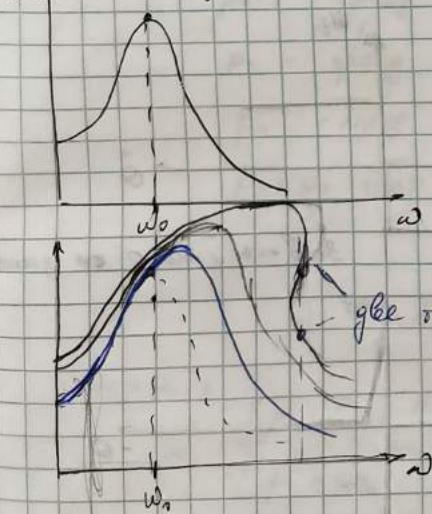
" так далее ... будет даваться отклик на других частотах...
 $\Rightarrow$ можно использовать для преобразования частоты.

$q_1 \rightarrow \cos(\omega t - \psi_\omega)$
 $q_2 \rightarrow \cos(3\omega t - \psi_{3\omega})$

Взаимодействие на резонансную частоту.

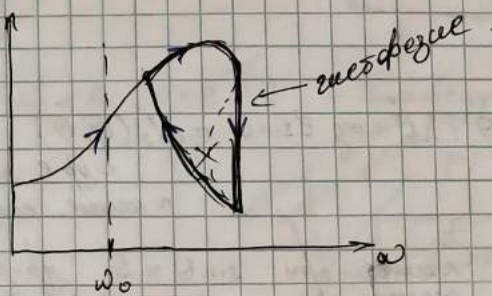
Пусть δ мало $\Rightarrow \omega_0 \approx \omega_{\text{рез.}}$
 $\delta^2 \ll \omega_0^2$

ω в мн. случаях.



Пусть $\alpha = 0, \beta \neq 0, \beta > 0$ ~ кубич. нелинейность.

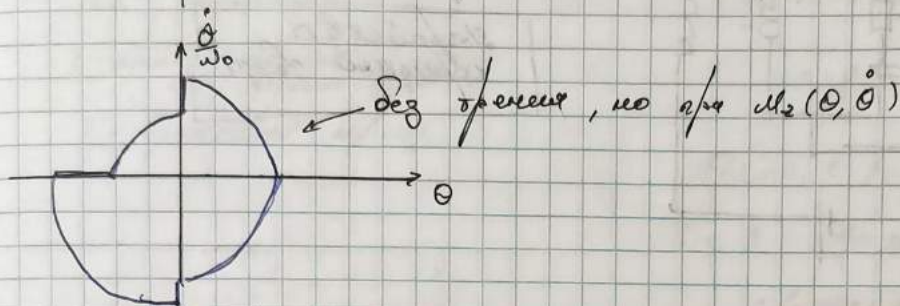
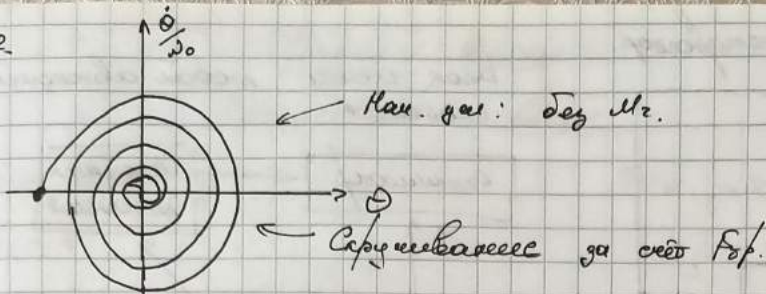
- увелич. внешнее возд.
две точки, так не бывает!



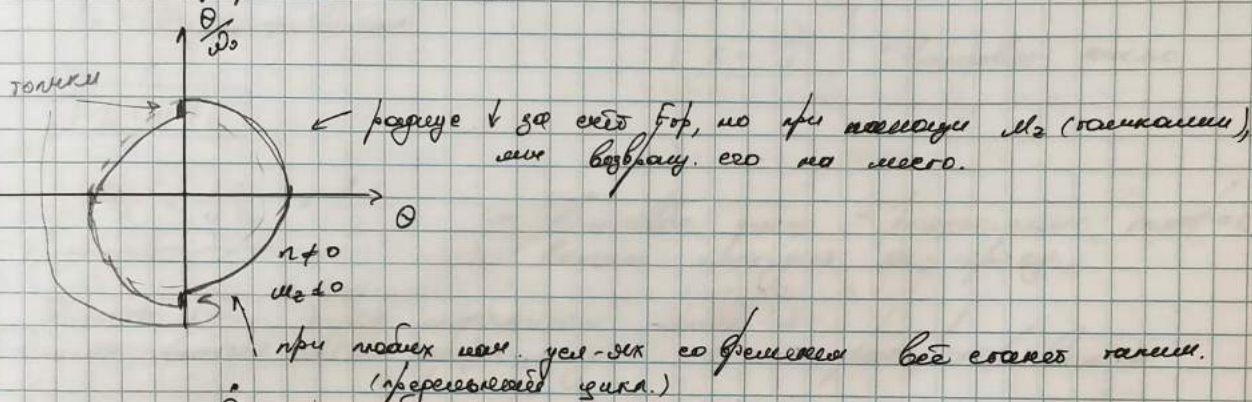
$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_0} + \alpha q + \beta q^2 + \dots$$

если $\omega \downarrow$, то обратнo пойдет по графику

7.03.22.



в каждой F0r. точке M2:



Обозн: $R = \frac{\theta}{\omega_0} \sim$ амплитуда (обобщенная)

R_{n-1} - сразу после $n-1$ толчка

R_n - сразу после n толчка

R_n' - перед n -м толчком

$R_n = R_n' + \Delta R$ - это и есть "толчок".

$$R_n' = R_{n-1} e^{-\frac{d}{2}} \quad \text{— дефрмент за цикл.}$$

Установившееся решение (пред. цикл)

$$R_n = R_{n-1}$$

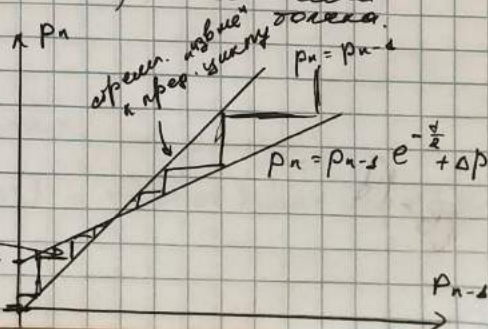
$$\begin{cases} R_n = R_{n-1} e^{-\frac{d}{2}} + \Delta R \\ R_n = R_{n-1} \end{cases}$$

$$\Delta R = R_n (1 - e^{-\frac{d}{2}}) \quad \text{— величина толчка.}$$

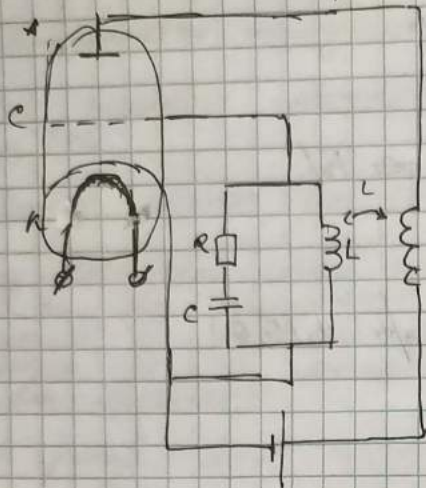
При $d \ll 1$: $e^{-\frac{d}{2}} \approx 1 - \frac{d}{2}$

$$\Delta R \approx \frac{d}{2} R_n$$

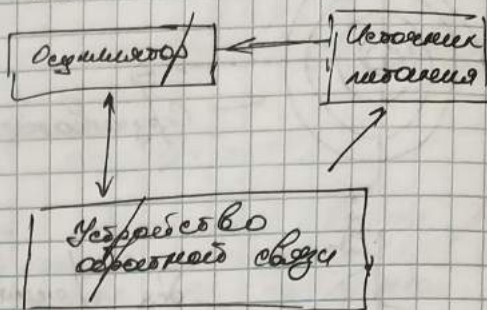
при сбросе "излучения" к пред. циклу



Пример: ламповый генератор.



Блок-схема любой автомат. системы:



Р. и для
 $f(\vec{r}, t)$

$f(\vec{r}, t) =$

2

7

to

$k =$

Число
Длина

$\Rightarrow$

$\varphi = \omega t -$



16-17

Раздел II. Волны Кинематика волн

Ф.я для волн

$$f(\vec{r}, t)$$

$$f(\vec{r}, t) = f(\vec{r} + \vec{r}, t + \tau)$$

$\vec{r}$ - пространственный перем.
(длина волны)
 τ - временной перем.



$$t_0 = \frac{x}{u} \text{ - ск-ть волны.}$$

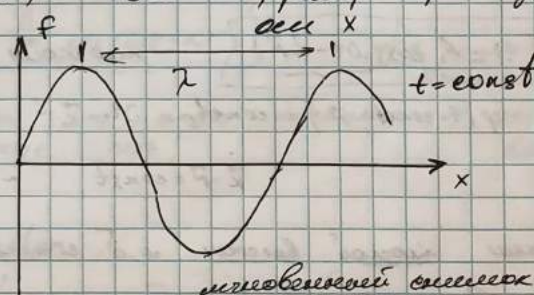
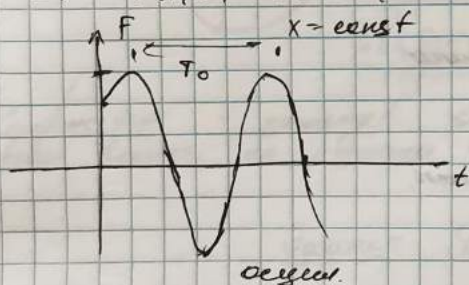
$$\boxed{\lambda = u \tau_0}$$

$$k = \frac{\omega_0}{u} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\rightarrow$ волновое число - расстояние, которое волна проходит за период.

Частота (ω_0) опред непрерывн колеб-ть
Длина волны (λ) опред средой, в кот. распростран. волна.

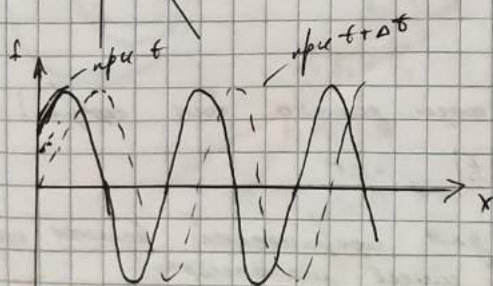
$$\Rightarrow f(x, t) = A_0 \cos(\omega_0 t - kx) \text{ - волна, распростран. вдоль}$$



$$\varphi = \omega t - kx \text{ - фаза волны}$$

$$f(x, t) = A_0 \cos(\omega_0 t - kx) \text{ - бегущая вдоль } x$$

$$F(x, t) = A_0 \cos(\omega_0 t + kx) \sim \text{бегущая против } x$$



$$\Delta t < \tau$$

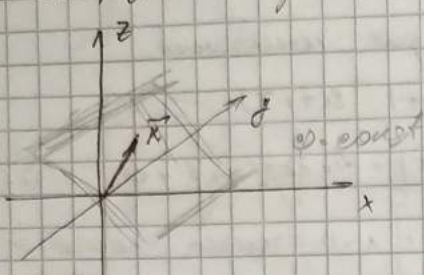
$$\varphi(x, t) = \omega t - kx$$

$$\varphi(x + \Delta x, t + \Delta t) = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x) \quad \textcircled{E}$$

$$\odot \varphi(x+\Delta x, t+\Delta t) - \varphi(x, t) = \omega \Delta t - k \Delta x = \omega \Delta t - \frac{\omega}{v} \Delta x \quad \odot ?$$

и фазовая скорость.

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$



$$\vec{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \omega t - (\vec{k}, \vec{r})$$

Тогда: $f(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}))$ - плоская волна

Иногда пишут:

$$\text{при } t = \text{const} \rightarrow \varphi = \frac{\omega t}{\text{const}} - (\vec{k}, \vec{r}) = \text{const} \quad \text{т.е. все перпендикулярно поверхности - перпен. фазам.}$$

→ для φ -я перпен. фазам:

$$(\vec{k}, \vec{r}) = \text{const} \Rightarrow \text{пов-ть: } \varphi \text{ - перпен. } \perp \vec{k} \Rightarrow \text{плоская волна}$$

Опр. Фронт волны - совокупность точек (пов-ть), на которых в данный момент времени $(t = \text{const})$, $f(x, t) = \text{const}$

→ у плоской волны волновой фронт - плоскость.

→ фазов. скор-ть - скор-ть движения фазового фронта

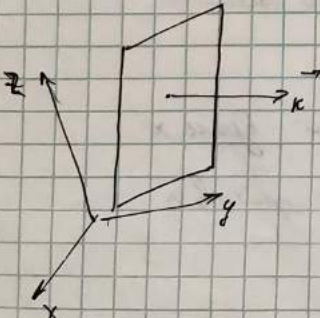
11.03.22.

$$\textcircled{1} f(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \text{плоская волна}$$

$$\varphi(t = \text{const}, \vec{r}) = \text{const}_2 = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const} \quad \sim \text{плоскость}$$

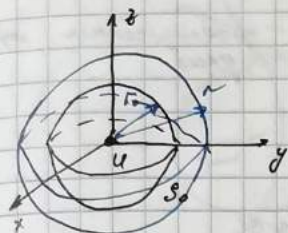
Итак, плоская волна и фронт волны.



② Сферическая волна (поверхность перпен. фазам является сфера.)

$$\varphi(r, t) = \text{const} \rightarrow \varphi(r, t|_{\text{const}}) = \omega t|_{\text{const}} - kr$$

Без векторов! → для сферической волны нам не нужны значения



Волна распр во все стороны одинаково.

Поток энергии: $\Phi_W(r_0) \sim W_0 S_0 \sim A_0^2 \cdot 4\pi r_0^2$

$$\Phi_W(r) \sim A^2 \cdot 4\pi r^2$$

Поток энергии через две сферы должен быть одинаковым. (энергия никуда не уходит)

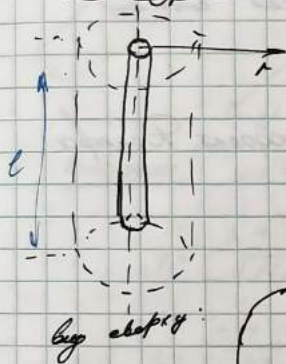
$$\Rightarrow \Phi_W(r_0) = \Phi_W(r)$$

$$A_0^2 r_0^2 = A^2 r^2 \rightarrow A = \left(A_0 \frac{r_0}{r} \right) \equiv \frac{\alpha}{r}$$

Амплитуда волны спадает как $\frac{1}{r}$ (просто сферическое распр).

$$\Rightarrow f(r, t) = \frac{\alpha}{r} \cos(\omega t - kr) \sim \text{у-е сферической волны.}$$

③ Цилиндрическая волна



$r = \text{const.}$

$$\varphi(r, t) = \omega t - kr$$

Поток передается через боковую пов-сть. Аналогично со сферой.

$$\Phi_W(r_0) \sim A_0^2 \cdot S_{\text{бок}} = A_0^2 \cdot 2\pi r_0 l$$

$$\Phi_W(r) \sim A^2 \cdot 2\pi r l$$

$$A_0^2 \cdot r_0 = A^2 r \rightarrow A = A_0 \sqrt{\frac{r_0}{r}} \equiv \frac{\beta}{\sqrt{r}}$$

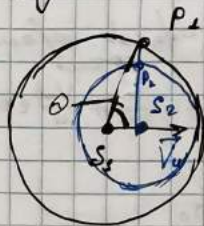
$$\Rightarrow f(r, t) = \frac{\beta}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr) \sim \text{у-е цилиндрической волны.}$$

Сферич-ая и цилиндрич. волны на очень больших r ведут себя как плоск. волны, но разница в фазе есть! (будет разница в $\pi/2$ или π)

Эффект Доплера.

① В акустике. (все к-ти, о которых мы будем говорить - отн. среды)

а) движение источника (точечного)



$\Delta t = T_0$ - за такое время из-д источника выйдут колеб. самого источника.

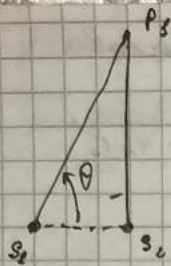
$v_u < u$ - фазовая сл-ть

$$S_1 S_2 = v_u \cdot T_0$$

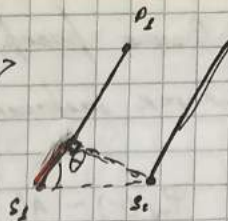
$$P_1 P_2 = \lambda$$

$$S_1 P_1 = S_2 P_2 + 4\delta_0 \sim \text{из-д сл-ти фазовой сл-ти.}$$

Вдоль линии, по которой P_1 и P_2 движется.



Если $S_1 P_2 \gg S_1 S_2 \Rightarrow$



и приближенные формулы.

$$S_2 P_2 \approx S_2 P_1 + S_2 S_1 \cos \theta = S_2 P_1 + V_u \cdot T_0 \cos \theta$$

$$S_2 P_2 = S_2 P_1 + u T_0$$

$$\omega = \frac{(S_2 P_1 - S_2 P_2)}{P_1 P_2} + V_u T_0 \cos \theta - u T_0$$

$$(u - V_u \cos \theta) T_0 = \lambda \cdot \frac{1}{u}$$

$$\kappa = \frac{\omega}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{1 - \frac{V_u}{u} \cos \theta}$$

$$\frac{\lambda}{u} = \frac{2\pi}{\omega} = \left(1 - \frac{V_u \cos \theta}{u}\right) \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}$$

каждому в фазе.

Если посылается наблюд. в r, P_2 или P_2 от приемств сигнала частоты ω , а излучает для ω_0

$\Rightarrow$

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{V_u}{u} \cos \theta}$$

~ ф-ла, зордент Дольфа.

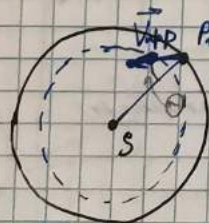
1) $\theta = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{V_u}{u}} > \omega_0$

2) $\theta = \pi \Rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{V_u}{u}} < \omega_0$

3) $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \omega_0$ ~ эффект не обнаружен

Если $V_u \ll u \Rightarrow \omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V_u}{u} \cos \theta\right)$

б) движение приемника



$$SP_0 = r_0$$

$$SP = r$$

Для $SP_0 \gg PP_0 \Rightarrow r_0 = r + V_u t \cos \theta$ ~ ф-ла, найдем.

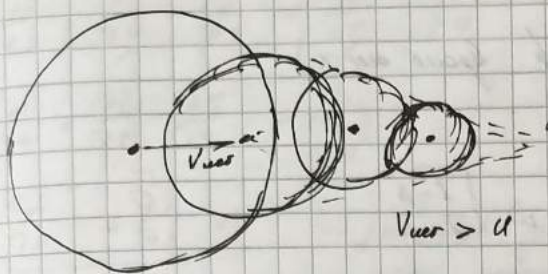
$$f(r, t) = A(r) \cos(\omega_0 (t - \frac{r}{u})) = A(r) \cos(\omega_0 (t - \frac{r_0}{u} + \frac{V_u t \cos \theta}{u}))$$

$$= A(r) \cos(\underbrace{\omega_0 (1 + \frac{V_u}{u} \cos \theta)}_{\omega} t - \underbrace{\frac{\omega_0 r_0}{u}}_{\varphi_0})$$

посл. фазы.

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 (1 + \frac{V_u}{u} \cos \theta)$$

~ наблюд. эффект Дольфа, когда движение приемника

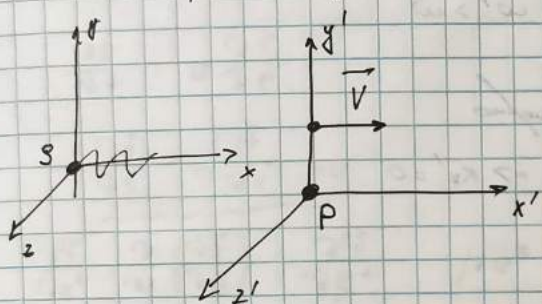


лучи света, идущие
не рассматриваются.

2) В опике.

$$\vec{E}(\vec{r}, t)$$

Есть 2 с.о., S - неподвижен, S' со скоростью $\vec{V}$ вдоль x



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{A}_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

Вспомогат. $u = c$, величина преобр-я Лоренца.

$$x = \frac{x' + V_x t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{V_x}{c}; \quad y = y', \quad z = z'$$

$$t = \frac{t' + x' V_x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{A}_0 \cos\left(\omega \frac{t' + x' V_x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - k_x \frac{x' + V_x t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - k_y y' - k_z z'\right) = \text{сгруппируем} = \\ &= \vec{A}_0 \cos\left(\frac{(\omega - k_x V_x)}{\sqrt{1 - \beta^2}} t' - \frac{(-\omega V_x / c^2 + k_x) x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - k_y y' - k_z z'\right) \end{aligned}$$

$$\vec{E}'(\vec{r}', t') = \vec{A}_0' \cos(\omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z')$$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{\omega - k_x V_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

~ эффект Доплера в оптике.

$$k'_x = \frac{k_x - \omega V_x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

~ оптическое aberration (отклонение) света.

$$k'_y = k_y$$

$$k'_z = k_z$$

Обратное преобразование:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega' + k'_x V_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ k_x &= \frac{k'_x + \omega' V_x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

Частотные случаи:

а) $K_x \neq 0, K_y = 0, K_z = 0$ (волна распространяется вдоль оси x)

$$K = \frac{\omega}{c} = k$$

$$\omega' = \frac{\omega - K_x V_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\omega(1 - \frac{V_x}{c})}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

$$\beta = \frac{V_x}{c}$$

для $\beta \ll 1 \Rightarrow \omega' = \omega \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta)(1 - \frac{1}{2}\beta)}{1} \approx (1 - \beta)\omega$

тогда $V_x > 0 \Rightarrow \omega' < \omega$
 $V_x < 0 \Rightarrow \omega' > \omega$

б) Наблюдение ведётся перпендикулярно

$$\vec{k}' \parallel \vec{e}_y, \text{ (или } \vec{k}' \parallel \vec{e}_z) \Rightarrow K_y' = 0$$

$$\omega = \frac{\omega'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

если $\beta \ll 1 \Rightarrow \omega \approx \omega' (1 - \frac{\beta^2}{2})$

— эффект Доплера

— поперечный эффект Доплера (или аналогичный в акустике для поперечного эффекта)

появл. из-за преобразования времени

14.03.22.

Общий случай плоских бегущих волн. Волновое уравнение.

$f(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ — волна распространяется вдоль оси x (это частный случай).

Пусть $\vec{k}$ паралл. направлению движения оси x :

$$\vec{k} \parallel \vec{r} = kx$$

$$f(x, t) = f(x - ut)$$

аргумент $x - ut$ — координата с учетом времени (движется вправо)

Пусть $x - ut = \xi$ (где ξ — расстояние)

Величина колебания: $\ddot{\xi} + 2\omega \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$

$$\xi = \xi(t)$$

— единственная аргумент

В нашем случае ξ — будет в тех же преобразованиях:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad | \cdot 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -4 \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + 4 \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \sim \text{решение даёт волну бегущую вправо (по x), но она может бежать и в другую сторону.}$$

$$\text{Тогда } f(x, t) = f(x + ut) \quad \sim \text{бежит против x.}$$

$$x + ut = \xi; \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = u$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad | \cdot 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = u \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - u \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad | \cdot u^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -4 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = +u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

↓
бежит вправо по x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

для волны, бег. в другую напр-цу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - u^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - u^2 \Delta f = 0$$

* ур-е Даламбера
просто по форме

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \right\} \sim \text{волн. ур-е в 1D}$$

решение этого ур-я:

$$f(x, t) = f_1(x - ut) + f_2(x + ut)$$

~ вид ф-ции зависит от начальных и граничных условий

~ волновое уравнение

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \sim \text{лапласиан}$$

$$\nabla^2 = \Delta$$

Скалярные и векторные волны.
Поляризация волны.

$$f(\vec{r}, t) \equiv p(\vec{r}, t) \quad \sim \text{может быть скалярное давление звуковой волны}$$

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \sim \text{поперечность эл. поля (векторное)}$$

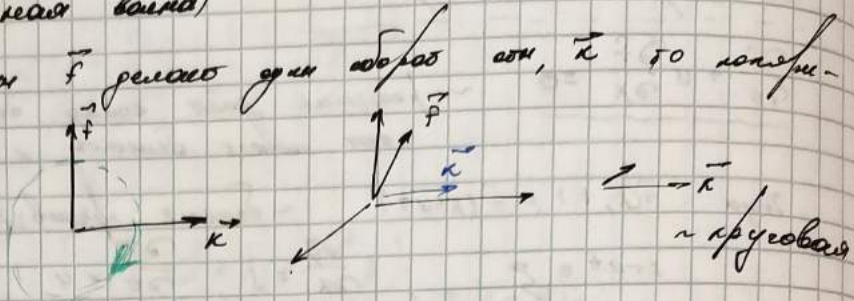
Для векторных волн также справедливо волновое уравнение

$$\textcircled{1} \vec{f} \parallel \vec{k} \quad \sim \text{продольная волна}$$

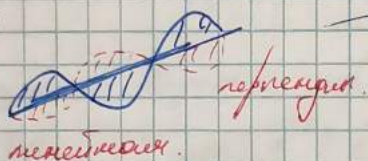
② $\vec{f} \perp \vec{k}$ - поперечная волна (электромагнитная волна - поперечная)
 В этом случае можно говорить о поляризации.

а) Если $\vec{f} \perp \vec{k}$ всегда, то поляризация называется линейной.
 (линейно поляризованная волна)

б) Если на длине волны $\vec{f}$ делает один оборот оси, $\vec{k}$ то поперечная волна круговая.



в) Если вектор $\vec{f}$ делает неполный оборот на длине волны, то поляризация эллиптическая.
 Модель: загруженность



Волновая дисперсия.
Особенности распространения
квази-гармонических сигналов
групповая скорость.

Опр. Дисперсия - это явление зависимости фазовой скорости от частоты.
 v - фазовая скорость $\rightarrow v = v(\omega)$ $\rightarrow$ явление дисперсии

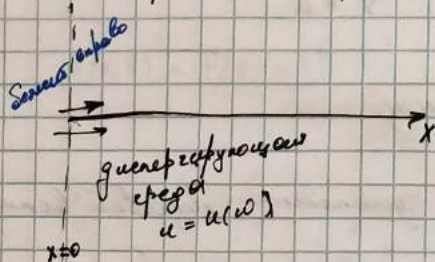
$$v = v(k)$$

$$v = v(\lambda)$$

Опр. Диспергирующая среда - среда, в которой наблюдается волновая дисперсия.

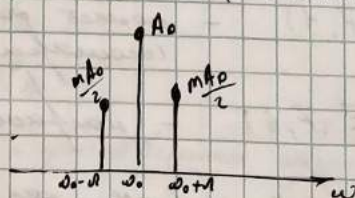
Для гармонических волн эффекта дисперсии - нет!
 (правильно, когда в среде больше 1ой гармонической)

На примере - распространение Ал-сигнала.



$$f(x=0, t) = A_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t =$$

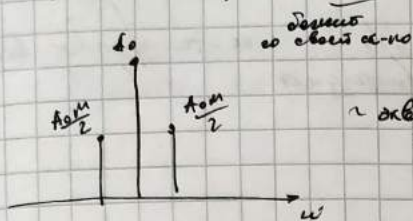
$$\left. \begin{matrix} \Omega \ll \omega_0 \\ m < 1 \end{matrix} \right\} = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos((\omega_0 + \Omega)t) + \frac{A_0 m}{2} \cos((\omega_0 - \Omega)t)$$



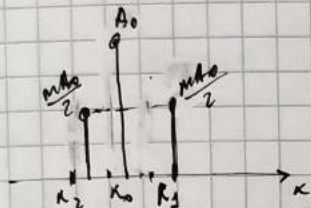
$$f(x, t) = ?$$

Введем промежуточные обозначения: $\omega_0 + \Omega \equiv \omega_1$; $\omega_0 - \Omega \equiv \omega_2$; $k = \frac{\Omega}{u}$

$$f(x, t) = A_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) + \frac{mA_0}{2} \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \frac{mA_0}{2} \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (1)$$



~ обобщающий вектор.



~ носитель волны движется.

$$= A_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) + \frac{mA_0}{2} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right)$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0; \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \Omega$$

Обозначим: $\frac{k_1 - k_2}{2} \equiv K$

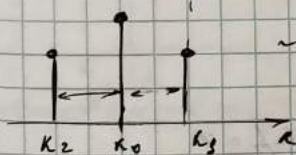
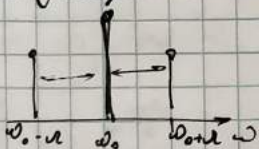
$$\checkmark f(x, t) = A_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) + mA_0 \cos(\Omega t - Kx) \cos(\omega_0 t - \frac{k_1 + k_2}{2} x)$$

~ основное колебание (носитель)

без дисперсии: $u = \frac{\omega}{k} = \text{const}$ на-ов одинакова у всех

$$\Rightarrow \frac{k_1 + k_2}{2} = k_0$$

но не интересно!



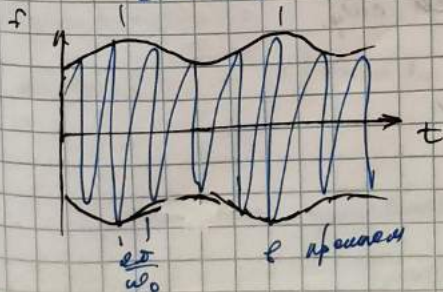
~ станет очевидным.

Случай слабой дисперсии, тогда $\frac{k_1 + k_2}{2} \approx k_0$

$$\Rightarrow f(x, t) \approx A_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) + mA_0 \cos(\Omega t - Kx) \cos(\omega_0 t - k_0 x) =$$

$$\approx A_0 (1 + m \cos(\Omega t - Kx)) \cos(\omega_0 t - k_0 x)$$

~ очень медленно меняется, но фигурка!



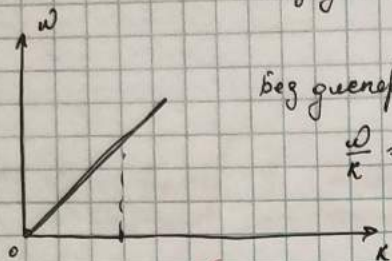
$$u = \frac{\omega_0}{k_0} \sim \text{фазовая скорость}$$

$$\frac{K}{k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}; \quad \omega_1 \text{ и } \omega_2 \text{ близки } \omega_0, \text{ т.к. } \Omega \ll \omega_0$$

$$\lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1, k_2 \rightarrow k_1} \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_0} \quad \text{на суру (опр-е производной)}$$

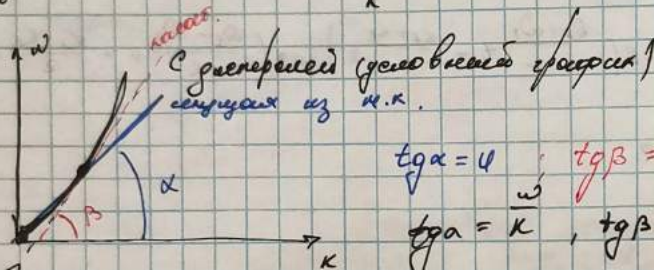
$$u_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

~ групповая скорость волны (опр/с) ~ ск-ть группы волн, ск-ть, с которой распр. информация
без дисперсии $u_{gr} = u$.



без дисперсии

$$\frac{\omega}{k} = \frac{d\omega}{dk} \Leftrightarrow u = u_{gr}$$



$$\begin{aligned} \tan \alpha &= u & \tan \beta &= u_{gr} & \rightarrow u \neq u_{gr} \\ \tan \alpha &= \frac{\omega}{k} & \tan \beta &= \frac{d\omega}{dk} \end{aligned}$$

Ленз димонстр. (две расхо́дки, синхронно и асинхронно, → движение группы волн.) интересно взять расхо́дки с разными периодами.

Зависимость $\omega(k)$ назыв. дисперсионная кривая

Пример задачи сврзть фазовой и групповой скоростей.

$$u_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\textcircled{1} u = \frac{\omega}{k} \rightarrow \omega = uk$$

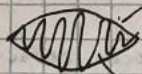
$$\Rightarrow u_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(uk)}{dk} = u + k \frac{du}{dk}$$

Сразу видно: без дисперсии $u = \text{const} \Rightarrow u_{gr} = u$

$$\textcircled{2} u_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \left(\frac{d \frac{\omega}{u}}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{u}{1 - \frac{\omega}{u} \frac{du}{d\omega}}$$

$$k = \frac{\omega}{u}$$

$$\begin{aligned} 18.03.22. \quad u &= \frac{\omega}{k} \\ u_{gr} &= \frac{d\omega}{dk} \end{aligned}$$



опережающая движется с u_{gr} .

высшая част. движется с u

$$u_{gr} = \frac{u}{1 - \frac{\omega}{u} \frac{du}{d\omega}}$$

Опр. Дисперсия позитв. нормальная (отражательная), если $\frac{d\omega}{dk} < 0 \Rightarrow u_{gr} < u$

Опр. Дисперсия позитв. аномальная (поглощающая), если $\frac{d\omega}{dk} > 0 \Rightarrow u_{gr} > u$

Пример: плазма (ионизованной газ)

Разовая с-та волн в плазме: $u = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (*)$

ω - частота волны

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (СИ) \sim \text{плотность электронов, } n - \text{концентр. электронов}$$

$\Rightarrow$ Необходимо: $\omega > \omega_p \Rightarrow u > c \sim$ этой с-ты движение волновой группы! абстрактная вещь - такое возможно.

$u_{gr} = ?$

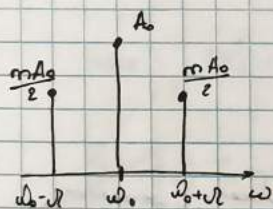
$$u_{gr} = \frac{d\omega}{dk}; \quad u_{gr} (*) \rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$c^2 k^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \omega^2 - \omega_p^2 \quad \bigg/ \cdot \frac{d}{dk}$$

$$c^2 \cdot 2k = 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dk}$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{k \cdot c^2}{\omega} = \frac{c^2}{u} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$$

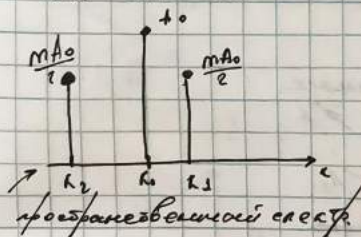
Когда справедливо 1-ое приближение теории дисперсии?



$$\omega_0 + R \equiv \omega_2$$

$$\omega_0 - R \equiv \omega_1$$

$$f(x, t) = A_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) + \frac{mA_0}{2} (\cos(\omega_2 t - k_2 x) + \cos(\omega_1 t - k_1 x))$$



$$\frac{k_1 + k_2}{2} \approx k_0 \quad (\text{условие для теории дисперсии})$$

$$\approx A_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) + \frac{mA_0}{2} \cos(\omega_0 t - \frac{k_1 + k_2}{2} x) \cos(Rt - \frac{k_1 - k_2}{2} x)$$

$$\frac{k_1 - k_2}{2} \equiv K$$

$$mA_0 \cos(\omega_0 t - \frac{k_1 + k_2}{2} x) \rightarrow mA_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x)$$

$$\Delta = mA_0 \left| \cos(\omega_0 t - \frac{k_1 + k_2}{2} x) - \cos(\omega_0 t - k_0 x) \right| =$$

$$= 2mA_0 \left| \sin\left(\frac{k_0 - \frac{k_1 + k_2}{2}}{2} x\right) \right| \cdot \left| \sin\left(\omega_0 t - \frac{k_0 + \frac{k_1 + k_2}{2}}{2} x\right) \right|$$

Необходимо

$$\frac{k_1 + k_2}{2} \equiv k'$$

Докажем

справедливости с тем, что $1.1 \leq 1$

$$2mA_0 \left| \sin \frac{k_0 - k'}{2} x \right| \ll mA_0 \Rightarrow \left| \sin \frac{k_0 - k'}{2} x \right| \ll \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha \leq \alpha \sim \text{всегда}$$

$\Rightarrow$ Теория справедлива:

$$|(k_0 - k') x| \ll 1$$

Справедливо не для всех x (1-ое приближение)

Пусть мы знаем зав-ю $K(\omega) = F(\omega)$

$$\begin{aligned} K_1 &= K_1(\omega_1) = F(\omega_0 + \Delta) \approx \\ K_2 &= K_2(\omega_2) = F(\omega_0 - \Delta) \\ K_0 &= F(\omega_0) \end{aligned}$$

Положим предполо, что $\Delta \ll \omega_0$

$$K_1 = K_1(\omega_1) = F(\omega_0 + \Delta) \approx F(\omega_0) + \frac{dF}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \Delta + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} \Delta^2$$

$$K_2 = K_2(\omega_2) = F(\omega_0 - \Delta) \approx F(\omega_0) - \frac{dF}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \Delta + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} \Delta^2$$

$$K' = \frac{K_1 + K_2}{2} = \underbrace{F(\omega_0)}_{K_0} + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} \Delta^2$$

$$|(K_0 - K')X| = \left| \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} \Delta^2 X \right| \ll 1$$

$$\Rightarrow X \ll \left| \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} \Delta^2 \right|^{-1}$$

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{dK}{d\omega}$$

Чем больше Δ тем больше правая часть, $\rightarrow X \downarrow$ (уменьши дисперсия)
Чем шире спектр $\Delta \uparrow \Rightarrow X \downarrow$

Понятие групп. ра-ти имеет место, когда выполняется это неравенство

Интерференция волн.

Мы рассматриваем только гармонические волны!

Случай скалярных волн.

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r}, t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1(\vec{r})) \\ f_2(\vec{r}, t) &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2(\vec{r})) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Знающие когда волны были в фазе.} \\ \omega_1 = \omega_2 = \omega \end{array} \right\} \text{ — синхронные.}$$

$$f(\vec{r}, t) = f_1(\vec{r}, t) + f_2(\vec{r}, t) = ?$$

$$f(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t + \varphi(\vec{r}))$$

$$\textcircled{1} \cos \Delta \varphi(\vec{r}) = 1 \quad - \text{max.}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

$$\Rightarrow A^2 > A_1^2 + A_2^2$$

(в оптике — интерференция)

$$I \equiv A^2 - \text{интенсивность.}$$

$$\Rightarrow I > I_1 + I_2 \quad \sim \text{интерференционный максимум}$$

$$\textcircled{2} \cos \Delta \varphi(\vec{r}) = -1 \quad - \text{min}$$

$$A^2 = (A_1 - A_2)^2$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2(\vec{r}) - \varphi_1(\vec{r}))$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

В равных частотах пр-ва такая же, как и в оптике

$$I < I_1 + I_2$$

интерференционный максимум.

$$\cos \Delta \varphi(\vec{r}) = 0$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$

$$I = I_1 + I_2$$

интерференция нет!

Опр. Интерференция - это усиление или ослабление волн в разл. точках пространства при наложении волновых полей.

Важный случай:

② Плоские волны:

$$\varphi_1(\vec{r}) = \vec{k}_1 \vec{r} + \varphi_{01}$$

$$\varphi_2(\vec{r}) = \vec{k}_2 \vec{r} + \varphi_{02}$$

Волны когерентны и распр. в одной и той же среде.

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \rightarrow u_1 = u_2 - \text{одна среда}$$

$$u = \frac{\omega}{k} \Rightarrow |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k$$

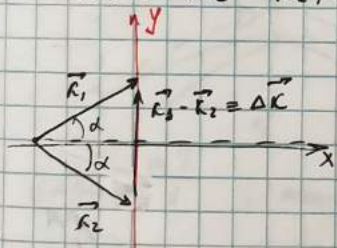
Но волны могут быть пер. разными фазами.

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = \varphi_2(\vec{r}) - \varphi_1(\vec{r}) = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r} + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \varphi_0$$

Где φ_0 есть max или min

$$\text{max: } (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r} + \varphi_0 = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

губ-я плоскости перпен. разностному вектору.

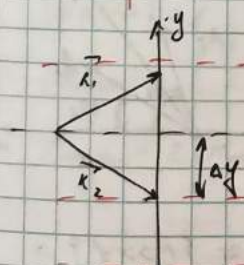


$$(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r} = \Delta k \cdot y = 2k \sin \alpha \cdot y$$

$$\Delta k = 2k \sin \alpha$$

$$\text{Пусть } \varphi_0 = 0$$

$$2k \sin \alpha \cdot y = 2\pi m$$



max
т.е. на этих максимумах

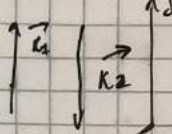
$$k \sin \alpha \cdot y_m = \pi m$$

$$k \sin \alpha \cdot y_{m+1} = (m+1)\pi$$

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m$$

$$\Delta y = \frac{\pi}{k \sin \alpha} = \left\{ k = \frac{2\pi}{\lambda} \right\} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$$

$$\Delta y = \text{min при } \sin \alpha = 1 \quad (\alpha = \frac{\pi}{2})$$



Случай встречных волн.
Свободная волна

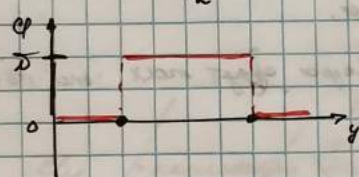
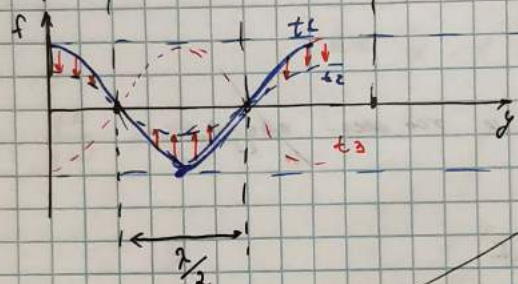
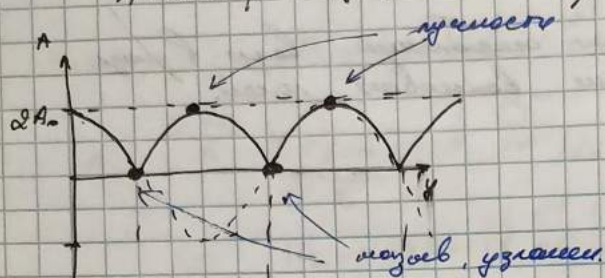
$$f_2(y, t) = A_2 \cos(\omega t - ky)$$

$$f_2(y, t) = A_2 \cos(\omega t + ky)$$

Далее $A_1 = A_2 \equiv A_0$

$$\Rightarrow f(y, t) = f_1(y, t) + f_2(y, t) = 2A_0 \cos(ky) \cos(\omega t)$$

$A = 2A_0 \cdot |\cos(ky)|$ ~ ампл. разность в разных точках пространства



Если в бер. волне фаза меняется, то сейчас:

2.1.03.22.

Интерференция сферических волн.

$$f_1(r, t) = A_1(r) \cdot \cos(\omega t - kr_1)$$

$$f_2(r, t) = A_2(r) \cos(\omega t - kr_2)$$

Пусть P достаточно далеко, что:

$$A_1(r) \approx A_2(r) \approx A_0$$

и тогда можно повторить все рассуждения.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2(r) - \varphi_1(r))$$

$$\Delta \varphi(r) = \varphi_2(r) - \varphi_1(r) = k(r_2 - r_1)$$

из геометрии:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= -\frac{d}{2} + \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= +\frac{d}{2} + \vec{r} \end{aligned}$$

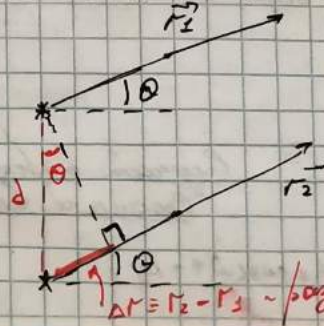
$$\begin{aligned} r_{1,2}^2 &= \frac{d^2}{4} + r^2 \mp 2\left(\frac{d}{2}, \vec{r}\right) \approx \left\{ r \gg \frac{d}{2} \right\} \approx r^2 \left(1 \mp \frac{d}{r} \sin \theta \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = r \left(1 \mp \frac{d}{r} \sin \theta \right)^{\frac{1}{2}} \approx r \left(1 \mp \frac{d \sin \theta}{2r} \right)$$

$r_2 - r_1$ - разность хода волн.

$$\Delta \varphi = k \cdot \left(-\frac{d \sin \theta}{2} \right)$$

P - далеко. Волны фронтально параллельны



На больших расстояниях сферич. и плоский волновой фронт будет практически совпадать.

$$\Delta r = r_2 - r_1 = d \sin \theta \rightarrow \Delta \varphi = k \cdot (-d \sin \theta) = -k \Delta r \text{ по сдв. приближ. паралл. лучей.}$$

Интерференционный max: $\cos \Delta \varphi = 1$.

$$\Delta \varphi = 2\pi m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$k d \sin \theta_m = 2\pi m, k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

умнож. на λ , сдв. условием.

$$\sin \theta_m = \frac{m \lambda}{d}$$

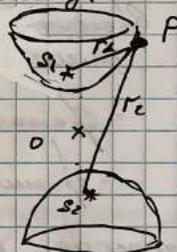
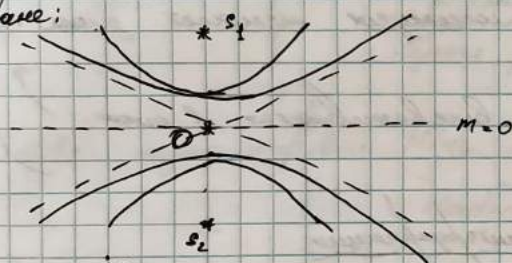
min: $\cos \Delta \varphi = -1$
 $\Delta \varphi = \pi + 2\pi m, m = 0, \pm 1, \pm 2$

$$\sin \theta_m = \frac{m \lambda}{d} + \frac{\lambda}{2d}$$

Минимум не зависит от рас-я r . Те пов-ти, на которых наблюд. max или min (т.е. где $\Delta r = \text{const}$) ~

$$\Delta \varphi = \text{const} \Rightarrow \Delta r = \text{const} \Rightarrow \text{Пов-ть} \sim \text{сферический гиперболоид}$$

На экране:



$$\sin \theta_m = \frac{m \lambda}{d} \text{ (какое наиб. } m \text{?)}$$

$$|\sin \theta_m| \leq 1$$

$$|m_{\max}| = \left[\frac{d}{\lambda} \right]$$

$$N_{\max} = 2|m_{\max}| + 1 \sim \text{кол-во максимумов}$$

Особенности интерференции в оптике

1) Оптическая волна - электромагнитная волна (т.е. векторная)
 Векторные волны:

$$\vec{r}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \varphi_1(\vec{r}))$$

$$\vec{r}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \varphi_2(\vec{r}))$$

2-ортогоналы!

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \varphi(\vec{r}))$$

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2(\vec{E}_{01}, \vec{E}_{02})$$

интерференционное сложение

Если $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2 \Rightarrow$ интерференции нет!

т.е., чтобы была интерференция $(\vec{E}_1, \vec{E}_2) \neq \frac{\pi}{2}$
 ~ неох, но несовместимое

② Флуктуации фазы источников. (Например лампочка не даёт фазовой когерентности, если лишь накаля, разогнать на мелкие участки, то определяю эти источники независимыми).

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r} + \varphi_{01}(t))$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{02} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r} + \varphi_{02}(t))$$

$$E_{01} = E_{02} = E_0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{~ пусть} \\ \vec{E}_{01} \parallel \vec{E}_{02} \end{array} \right\} \rightarrow \text{получаем сложение (без света)}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t) = E_0 \cdot 2 \cos\left(\omega t - \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2} \vec{r} + \frac{\varphi_{01}(t) + \varphi_{02}(t)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\vec{k}_1 - \vec{k}_2}{2} \vec{r} + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right)$$

Измер. прибор реагирует на интенсивность: $I = A^2$
 (за единицу времени)

$$I(\vec{r}, t) = 4E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2} \vec{r} + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\Delta \vec{k} \vec{r}}{2} + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right)$$

Если за время ускорения колеблется несколько раз много раз, то всё "замыливается".

$\tau \sim 10^{-10}$ с. ~ время, за которое высеиваются 1 свет.

$\Delta t \sim 0,2$ с. ~ принимаем глаз.

Сущ-ет 2 способа наблюдения интерференции:

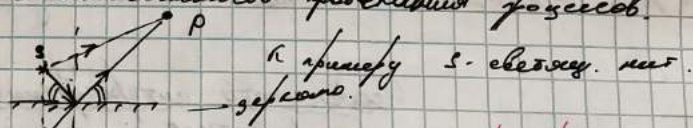
1) Разделение источника (разделением источника).

2) Разделение (разделение) волнового фронта.

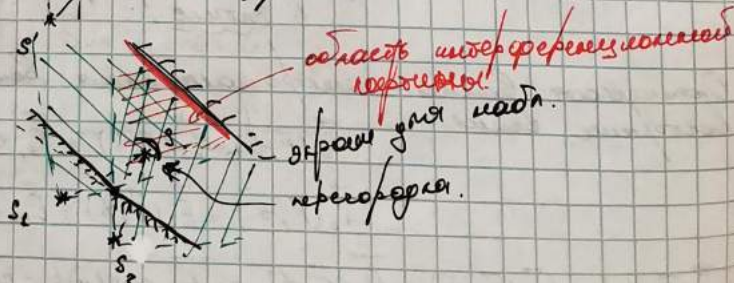
Про 1 способ: Необходимо $\varphi_{01}(t) - \varphi_{02}(t) = \text{const}$ (когерентные источники)

Когерентность - согласованность фазовая фазисов.

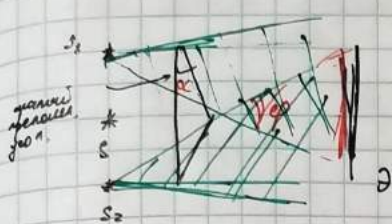
1) Зеркало Майера



2) Бисеркала Френеля



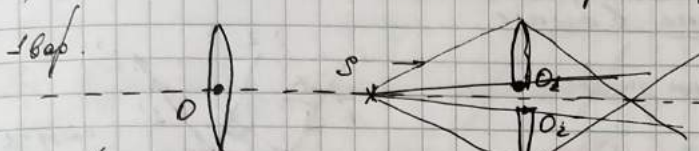
3) Дифракция Френеля.



— на экране интерф. картина

$$\varphi = (n-1)x$$

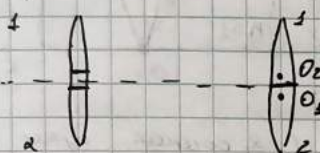
4) Бинжа Бийе. (точка собир. линза разрезана на две части.)



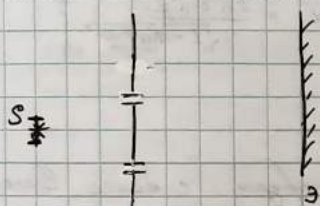
через центр пройдёт без преломления.

S - центр, первый из-ти рисунка.

2 вар. (просто вынули центр.)

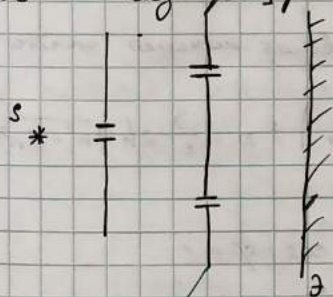


Солнечный первый опыт 1801г. - опыты Фраунгофера.
(источник - Солнце)



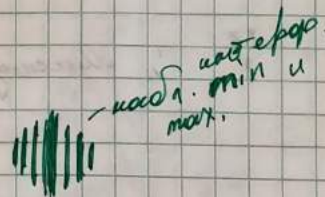
Интерференция не наблюд. из-за того, что Солнце имеет по сути большие размеры (лучи не параллельны) - не видн. чётк. не перекр. усл.

1807г. модифицировал Юнг. (опыт Юнга)



Наблюдается интерференция.

НА: опыты Фраунгофера (с цел. и лазер.)



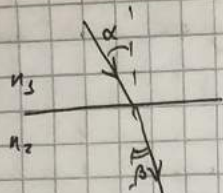
По 2 способ: Расщепление волнового фронта

Предварительные замечания: 1) Луч - понятие из класс. оптики, это линия, вдоль которой распространяется свет. В случае плоской волны луч - это линия, параллельная волновому фронту. В случае сферич. волн - линия, перпендикулярная волновому фронту.

2) Фазовая сл-ть волн в фазе ($n = \frac{c}{v}$): c - сл-ть света в вакууме, n - показатель преломления среды.

Но лучше: $n = \frac{c}{v}$ - сфр.

3) Закон преломления:



$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{n_2}{n_1}$$

23-й Снелля

25.03.22.

Интерференция света в тонких пленках. Пленки равной толщины. Просветление в оптике.

слой тонкий

Будет плоская волна (значит от далекого)

$$n = \frac{c}{u}$$

$$\varphi_1 = \vec{k}_1 \vec{r}_1 = k_1 r_1 = k_1 (AO + OB) = 2 \cdot \frac{\omega}{u} \cdot AO =$$

$$= \frac{2\omega n}{c} \cdot \frac{h}{\cos \beta} = \frac{\omega}{c} n \cdot \frac{2h}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{3-й Снелля} \\ \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta} = n \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\omega}{c} \cdot \frac{2hn}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha'}} = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{2hn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

$$\varphi_2 = \vec{k}_2 \vec{r}_2 = k_2 r_2 = \frac{\omega}{c} \cdot BC \quad \text{--- волновой фронт}$$

$$\text{--- 1-2 фронта. лучи, но фазы разнятся в разных точках}$$

$$\left\{ BC = AB \cdot \sin \alpha = 2h \cdot \tan \beta \cdot \sin \alpha = \frac{2h \sin \alpha}{n \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{c} \cdot \frac{2h \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

✓ Учет фаз! (пока без объяснения): При отраж. от сферы с более высоким показателем преломления фазы скачком изменяются на π .

т.е. $\varphi_{12} = \varphi_2 \pm \pi$

не важно, что + или - → но от этого зависит начало отсчета m

$$\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_{12} = \frac{\omega}{c} \cdot 2h \left(\frac{n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \pm \pi = \frac{\omega}{c} \cdot 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \pi$$

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}; \text{ Максимум наблюдается, когда: } \cos \Delta \varphi = 1$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \pi = 2\pi m$$

условие макс. ~

$$2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (m \pm \frac{1}{2}) \lambda$$

$m = 0, 1, 2, \dots$
(е.н. - "фронт бесконечной величины")

Если $\cos \Delta \varphi = -1$ ~ условие минимум.
 m - порядок интерференционного максимума.

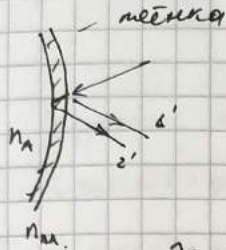
$$2hn \cos \beta = (m \pm \frac{1}{2}) \lambda$$

При выполнении такого усл-ия пленка будет просв. или полупросв. (т.е. показатели постоянны) → n, n и $\lambda = \text{const}$ → $m = \text{const}$

условие min: $\cos \Delta \varphi = -1$

$$2hn \cos \beta = m \lambda$$

как можно избавиться от бликов? (как полки в космосе.)



n_1 - показатель преломления
За счёт отражения от двух пов-ей 1' и 2' формируются блики друг друга → избав. от бликов.

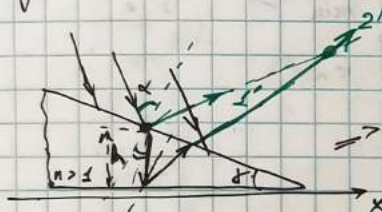
$$n_{пл} = \sqrt{n_1} \quad \text{— полное покрытие}$$

~ просветление оптики.

Что будет, если менять параметры плёнки?

① Если в материале плёнки $n = n(\vec{r}) \Rightarrow \max$ и $\min$ в разных местах $\Rightarrow$ где-то яркое покрытие, где-то нет $\Rightarrow$ покрытие неравномерное (показателя преломления) ~ можно реализовать.

② Пусть меняется толщина плёнки.



Реально $\delta \ll \lambda$.

В отличие от накл. $(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \neq 0$ этот угол даёт выравнивание максимумов и минимумов.

Пусть при h - выводе, где максимум, где-то есть минимум $\rightarrow h$ меняется $\rightarrow$ где-то будет ещё максимум а между ними где-то будет минимум (выравнивание $\max$ и $\min$) ~ минимизация разницы.

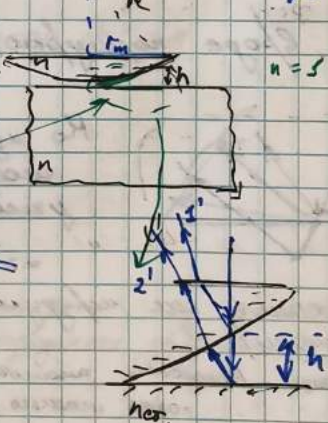
$$h = h(x)$$

плоская равная толщина

Пример: кольца Ньютона.

Свет падает на наклонную пластину линза с боковым радиусом R $\rightarrow$ тонкая плёнка

Между 1' и 2' небольшой угол



$$\alpha > 0 \Rightarrow \beta \approx 0$$

$$\max: 2hn \approx (m + \frac{1}{2})\lambda$$

Требования к толщине плёнки (плёнки) и углового размера источника.

③ Толщина h :

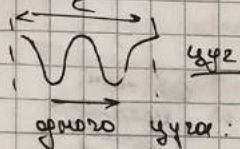
Время вынужденных колебаний, хар-ое для атомного перехода.

$$\tau \approx 10^{-10} \text{ с}$$

$$\text{диаметр узла} - \ell = c\tau = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 10^{-10} \text{ с} \approx 3 \text{ нм}$$

Разность хода должна быть меньше

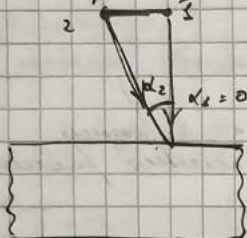
$$\Delta r = \frac{\Delta \varphi}{k} < \ell$$



Пусть $\alpha = 0 \Rightarrow \cos \beta = 1$;
 $n = \frac{\omega}{c} \rightarrow \Delta r = \frac{\Delta \varphi}{k} = 2hn < c$

$h < \frac{c}{2n} \sim \text{требование}$

② Условий размер источника (конфигурация имеет максимальная)



Если $\alpha_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \Rightarrow \Delta \varphi_{(1)} = \frac{\omega}{c} \cdot 2hn \pm \pi$

для $\beta_2 = 0$ и $\beta_1 = 0$

$\alpha_2 \neq 0 \Rightarrow \beta_2 \ll 1 \Rightarrow \Delta \varphi_{(2)} = \frac{\omega}{c} 2hn \cos \beta \pm \pi \approx$

$\approx \frac{\omega}{c} \cdot 2hn \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \pm \pi$

Разность разности фаз должна быть $< \pi$
 Для того чтобы разделялись max и min $\rightarrow$, т.е.

$\Delta \varphi_{(1)} - \Delta \varphi_{(2)} < \pi \Rightarrow \left(\frac{\omega}{c}\right) \cdot 2hn \cdot \frac{\beta^2}{2} < \pi$

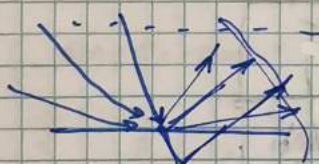
$\beta^2 < \frac{\lambda}{2hn}$

но, с другой стороны

$\beta^2 = \frac{\alpha_2^2}{n^2} = \frac{\alpha_{\max}^2}{n^2}$

$\alpha_{\max} < \frac{2hn}{\lambda} \sim \text{требование на угловой размер волны. (исходное условие)}$

На рисунке, в виде нарисовано, но есть "кривые" картинны.



Но из всего набора α -х углов $\rightarrow$ наименьший виден источник из них (т.е. угловые размеры источника миним.)

$\Rightarrow$ т.е. источник $\rightarrow$ критический.

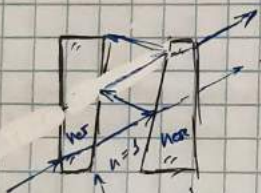
МН: Объяснить как диффракция волны и как уменьшается размер?

Калибра Норманна аналогично тому по кругу толщина диска.

- более можно объяснить

28.03.22.

Интерференция Рэбры-Перо
 Многочисленная интерференция.



наименого сближения (углы наклона волны)

$\Delta \varphi = 0$

$\Delta \varphi = \Delta \varphi$

$\Delta \varphi = 2\Delta \varphi$

Соб. волн. источник с границей разн. фазы

Прямой

$$\Delta\varphi = \kappa \cdot 2\pi \cos\beta ; \quad \beta \approx \text{углу падения}$$

$\Rightarrow$ Получили набор колебаний с общей ампл. $\varphi_1 = (N-1)\Delta\varphi$

$$S_1 = A_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$S_2 = A_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$S_3 = A_0 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

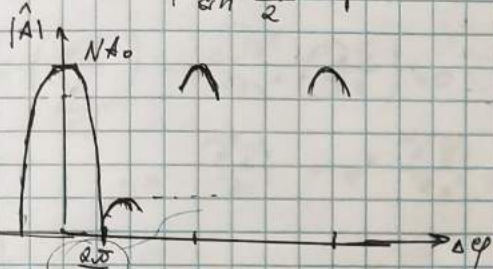
$$S_N = A_0 \cos(\omega t + \varphi_N)$$

$$S_N = A_0 e^{i\omega t} \cdot e^{i(N-1)\Delta\varphi}$$

$$S = \sum_{i=1}^N S_i$$

$$\hat{A} = A_0 (1 + e^{i\Delta\varphi} + \dots + e^{i(N-1)\Delta\varphi}) = A_0 \cdot \frac{1 - e^{iN\Delta\varphi}}{1 - e^{i\Delta\varphi}} = A_0 \cdot \frac{e^{i\frac{N\Delta\varphi}{2}} (e^{-i\frac{N\Delta\varphi}{2}} - e^{i\frac{N\Delta\varphi}{2}})}{e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} (e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}} - e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}})}$$

$$\Rightarrow |\hat{A}| = A_0 \cdot \left| \frac{\sin \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \right|, \quad \Delta\varphi \text{ оп-ся конструкцией}$$



$$\begin{cases} \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 0 \\ \sin \frac{N\Delta\varphi}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \max$$

по Лемма-Вейерштрасса

$$|\hat{A}|_{\max} = NA_0$$

$$|\hat{A}| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{N\Delta\varphi}{2} = 0 \\ \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{N\Delta\varphi}{2} = \pi \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

Используется большое $N \rightarrow$ чтобы была узкой кривая.

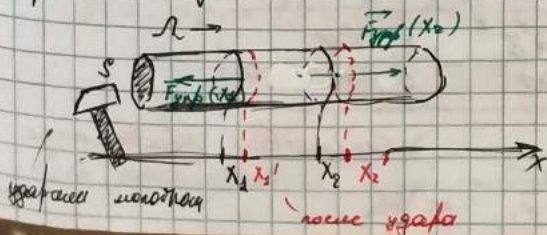
Динамические волны

Найдем:

1. Вол-то, его время упр-ло.
2. Групповую скорость волны.
3. Групповую фазовую для волны.
4. Вол-то, свободное распр-е в резонаторных фаз.
5. Вол-то, энергию волны.

Упругие волны
(сигналы)
Продольные упругие волны
в стержне, выбор волнового
уравнения.

Прямой и достаточно тонкий стержень, (материал без дилатации) Пренебр. изогн. поперечная деформация



$$v = \text{const.}$$

Считаем, что $v = \text{const}$ $\rightarrow$ не меняется скорость.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$x_1, x_2 - \text{const}$$

$$x'_1 = x_1 + \xi_1(x, t)$$

$$x'_2 = x_2 + \xi_2(x, t)$$

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1$$

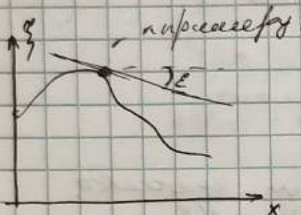
Абсолютное изменение длины: $\Delta l = \Delta x' - \Delta x = (x'_2 - x'_1) - (x_2 - x_1) = \xi_2(x, t) - \xi_1(x, t) \equiv \Delta \xi$

① Относительное изменение длины:

$$\frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \sim \text{более информативного перебора и перебора}$$

$$\rightarrow \epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

ϵ - отн. изменение
 ξ - абс. изменение



② $v_x = \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ (с.к. $x_{1,2} = \text{const}$)

$$a_x = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

III закон Ньютона: $\Delta m a_x = \sum f_{x \text{ упр.}}$

в. приближен или $\Delta m = \rho_0 \cdot S \Delta x$

$f_{x \text{ упр.}} = \frac{\partial S}{\partial t^2}$ упругое напряжение

$$\rho_0 S \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S (\vec{v}(x_2) - \vec{v}(x_1))$$

$\vec{v}(x_2) - \vec{v}(x_1) = \vec{v}(x_1 + \Delta x) - \vec{v}(x_1) = \text{вектор скорости в с.к. } x_2$

$$= \vec{v}(x_1) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \Delta x - \vec{v}(x_1)$$

Будем считать, что не считали малые деформации, когда не вернемся к рассмотрению малых деформаций.

линейные деформации:

$\vec{v} = E \epsilon$, E - модуль Юнга (модуль упругости)
з-н Гука.

$$\Rightarrow \vec{v} = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\rho_0 S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \Delta x \cdot E \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

волновое уравнение

$\left\{ \begin{matrix} E \\ \rho_0 \end{matrix} \right\}$ - с-во.

$$u^2 = \frac{E}{\rho_0} \rightarrow u = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \text{ (фазовая ск-сть)}$$

Пример: сталь. $E = 2 \cdot 10^{12} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$ (CGS)

$$\Rightarrow u \approx 5 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

$$\rho_0 = 7,8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

$\Rightarrow$ действительно существует волна.

Связь между колебаниями
различных величин. Волновое
соотношение.

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}; \quad \epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Волновое уравнение $\rightarrow \xi(x, t) \rightarrow$ можно найти v_x и ϵ .

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad | \cdot \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) - u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$$

значит, что возмущения ск-ти будут с той же самой фаз-ой ск-тью.

$$2) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} = 0$$

~ опять та же самая ск-ть.

$\Rightarrow$ возмущения всех величин будут по сравнению с фазой и той же скоростью. (проверим всех волн подробно)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$\xi(x, t) = f_1(x - ut) + f_2(x + ut)$$

прямая волна

обратная волна

Рассмотрим прямо волну:

$$\xi(x, t) = f_1(x - ut) = f_1(\xi)$$

$$\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi}$$

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u \frac{\partial f_1}{\partial \xi}$$

$$v_x = -u \epsilon = f_1 \cdot u \frac{\partial f_1}{\partial \xi} = -\frac{u}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} = \left\{ u = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \right\} = -\frac{1}{\sqrt{E \rho_0}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi}$$

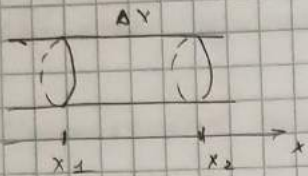
$$\text{или } v = -\sqrt{E \rho_0} v_x \quad \text{для прямой волны.}$$

Если аналогично рассмотрим для обратной волны.

$$\vec{v} = +\sqrt{E\rho_0} V_k \text{ — сбр. волна.}$$

$$Z_0 = \sqrt{E\rho_0} \sim \text{волновое сопротивление.}$$

Энергетические соотношения в упругой волне.



$$\Delta W_k = \frac{\Delta m v^2}{2} = \left\{ \Delta m = \rho_0 \cdot S \Delta x \right\}$$

полная кин. энергия прихор. на кусок.

Плотность кин. энергии:

$$w_k = \frac{\Delta W_k}{\Delta V} = \frac{\rho_0 v^2}{2} \text{ — сбр. волна}$$

$$\Delta W_n = |A_{\text{упр.}}|^2 = \frac{\kappa_0 (\Delta \xi)^2}{2}$$

$$f_{\text{упр.}} = \kappa_0 \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = S \sigma = S E \epsilon = S E \cdot \frac{\Delta \xi}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \kappa_{\text{упр.}} = \frac{S E}{\Delta x}$$

$$\Delta W_n = \frac{S E (\Delta \xi)^2}{2 \Delta x} = \frac{S \Delta x \cdot E (\Delta \xi)^2}{2 (\Delta x)^2} = \frac{\Delta V \cdot E (\Delta \xi)^2}{2 (\Delta x)^2} = \frac{\Delta V E}{2} \cdot \epsilon^2$$

$$\Rightarrow w_n = \frac{\Delta W_n}{\Delta V} = \frac{E \cdot \epsilon^2}{2} \text{ — сбр. волна.}$$

Для бегущей волны:

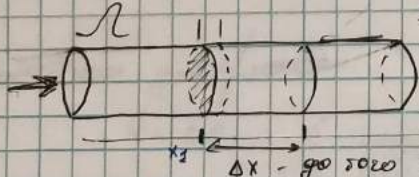
$$\vec{v} = \pm Z_0 V_k \text{ ("+" — к бегущей волне, "-" — к встречной)}$$

$$\Rightarrow w_k = \frac{\rho_0 v^2}{2} = \frac{\rho_0 \vec{v}^2}{2} = \frac{\rho_0 \vec{v}^2}{2 E \rho_0} = \frac{E^2 \epsilon^2}{2 E} = \frac{E \cdot \epsilon^2}{2} = w_n$$

$$w = w_k + w_n = E \cdot \epsilon^2 \quad - 2w_k = 2w_n$$

1.04.22

Поток энергии в упругой волне.
Вектор Пуанкаре.



Δx — до того как приближался импульс возмущения
когда возмущение из кусочка "пробежит" энергия в
кусочке восстановится.

Поток энергии:
(опр.)

$$\Pi = \frac{dW}{dt}$$

$$W = W_n + W_k$$

$\Pi > 0$ — "втекающая" (например через сечение x_1)

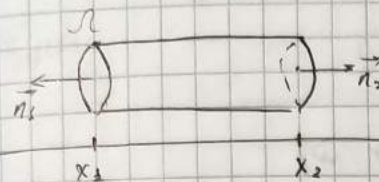
$\Pi < 0$ — "вытекающая" (энергия выходит через сечение x_2)

Возьмем бес. малое приращ. энергии: (равно работе dW - x см.)

$$|dW| = |dA_{\text{упр.}}| = |F_{\text{упр.}} \cdot d\xi| = \underbrace{|F_{\text{упр.}}|}_{G_n S} \cdot |d\xi|$$

$d\xi$ - смещение элемента

$$\Rightarrow |\Pi| = \left| \frac{dW}{d\xi} \right| = |G_n S \nu_x|$$



G_n , $\vec{n}$ - правильно выбирать во внешнее кр-во.

$\Rightarrow \begin{cases} G_n < 0 & \text{- сжатие,} \\ G_n > 0 & \text{- растяжение.} \end{cases}$

$$\boxed{\Pi = -S G_n \nu_x}$$

$\Pi > 0$ при $x = x_1$
 $\Pi < 0$ при $x = x_2$

$\{q = \frac{\Pi}{S}\}$ - плотность потока энергии.

$$q = -G_n \nu_x$$

$$\boxed{\vec{q} = -G_n \vec{\nu}} \text{ - вектор Пюва.}$$

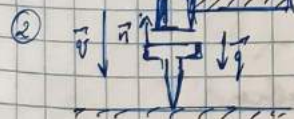
Примеры проявления вектора плотности потока энергии.

① "Бурляки на Волге"



$$\begin{aligned} G_n &> 0 \\ \vec{q} &= -G_n \vec{\nu} \end{aligned}$$

В начальный момент, когда дёрнули канат $\rightarrow$ канат сдвинулся, но не стал $\vec{\nu} = \text{const}$, однако $\vec{q}$ всё равно справедливо (это более универсальная вещь.)



Забываем о воде.

$$G_n < 0 \rightarrow \vec{q} \uparrow \uparrow \vec{\nu} \text{ - забываем энергию.}$$

Конкретизация для моего бегущего вагона

В моем бегущем вагоне знаем:

$$W = W_n + W_k = 2W_k = \rho_0 V^2$$

$$|q| = |G_n \nu_x| = Z_0 V^2$$

$$\frac{W}{|q|} = \frac{\rho_0}{Z_0} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\epsilon}} = \frac{1}{u}$$

$$\{ |q| = wu \}$$

Числовой амплитуды гармонических волн.

Писать для волн без учета среды

$$\xi(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$k = \frac{\omega}{u}$$

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -A_0 \omega \sin(\omega t - kx)$$

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} = +A_0 k \sin(\omega t - kx)$$

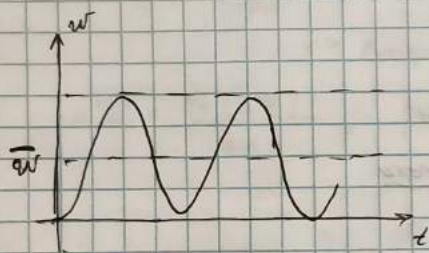
$$\vec{v} = Ee = A_0 k E \sin(\omega t - kx)$$

Везде частота ω !

$$w = \rho v^2 = \rho A_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) = \frac{\rho A_0^2 \omega^2}{2} (1 - \cos(2\omega t - 2kx))$$

~ энергия, как качающаяся величина колеблется на удвоенной частоте! Но средн. и конст. составляющая

$\bar{w}$ - средняя энергия



$$\bar{w} = \frac{\rho A_0^2 \omega^2}{2}$$

$$|q| = \frac{\rho A_0^2 \omega^2}{2} u = \frac{A_0^2 \omega^2}{2} \sqrt{E \rho_0}$$

Вектор Умова как-то как преобразуется эн-я. Модуль $q \sim \omega^2$

Мораль: "отбойный молоток лучше работает гвоздь чем гвоздики"
 "воздействие"

Другие волны в жидкостях и газосредах
 сферах (акустические волны)

$$p(x, t) = p_0 + p_1$$

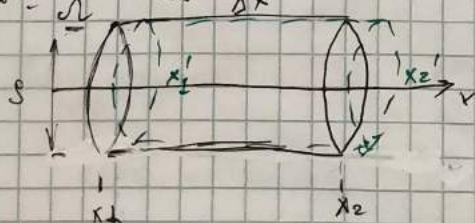
~ давление; p_0 - среднее значение
 p_1 - переменная добавка

$$p = p_0 + p_1$$

- плотность

$$v = v_0 + v_1$$

~ скорость
 ~ движение
 ~ скорость
 ~ движение
 ~ скорость
 ~ движение



Все как и раньше рассуждения справедливы.

$$x_{1,2} = x_{1,2} + \xi_{1,2}$$

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}; \quad a_x = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

(1) $\Delta m = \rho_0 S \Delta x$, пусть $S = \text{const}$, но ρ в газах меняется
 можно, но $m = \text{const}$.
 $\Delta m' = \rho S \Delta x'$ ~ но такое возможно не всегда.
 Считаем, что разрывов не происходит!
 $\Delta m = \Delta m'$ ~ условие непрерывности среды.



$$\Delta m a_x = \sum F_{гнр, x}$$

$$\rho_0 S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F_{гнр}(x+\Delta x) - F_{гнр}(x)$$

$|F_{гнр}| = S |\vec{\pi}_n|$, когда мы говорим о газах вместо $\vec{\pi}$ применяю
 рассматр. для давления!

$$\vec{\pi}_n = -p \quad (.F = Sp - \text{из механики})$$

$$\rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$$

$$F_{гнр}(x+\Delta x) - F_{гнр}(x) = S(p(x) - p(x+\Delta x)) = \{ \text{в раз около } x \} =$$

$$= S(p(x) - p(x) - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \Delta x)$$

Если мы знаем ур-е состояния, то тогда можем пров. дальнейшее.

$$p, T, \rho = \frac{m}{V}$$

Идеальный газ: $pV = \frac{m}{\mu} RT \rightarrow p = \frac{\rho}{\mu} RT$

ур-е состояния: $p = p(\rho)$, при $T = \text{const}$.
 будем считать известными.

Будем считать: $\rho_n \ll \rho_0$

$$p = p(\rho_0 + \rho_n) = \{ \text{окколо } \rho_0 \} = p(\rho_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho_n + \dots$$

$$\stackrel{= p_0}{=} \quad \stackrel{= \text{const}}{=}$$

$$p = p_0 + p_n$$

$$p_n = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho_n$$

$$\rho_0 = \text{const}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial (p_0 + p_n)}{\partial x} = \frac{\partial p_n}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \frac{\partial \rho_n}{\partial x}$$

из ур-я (1) непрерывности: $\Delta m = \Delta m' \rightarrow \rho_0 \Delta x = \rho \Delta x'$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta x' = \Delta x + \Delta \xi = \Delta x \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

$\rightarrow \epsilon$ при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\rightarrow \rho_0 \Delta x = \rho \Delta x' = \rho \Delta x (1 + \epsilon)$$

$$\rho_0 = \rho (1 + \epsilon)$$

$$\rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{1 + \epsilon} \approx \rho_0 (1 - \epsilon)$$

$$\rho_0 + \rho_n = \rho_0 - \rho_0 \epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_n}{\partial x} = - \rho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = - \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Получим окончательное уравнение:

$$\int \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = + \int \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

исходное волновое ур-е, найдем к-то волны

$$u^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_0}$$

возмущения не столь малы

$\Rightarrow$ Все величины будут также уравновешены и если-ся эти ур-я, всё это равные делами, делами, - уравновешено.

Чем $\frac{\partial p}{\partial r} > 0 \rightarrow \alpha > 0$, т.е. более жесткая среда.

Чем более жесткая среда, тем больше к-то.

① Если считать воздух идеальным газом.

$$p = \frac{\rho}{\mu} R T$$

Предположим, что изотерм. процесс $\rightarrow T = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{R T}{\mu}$

$$\text{При } T = 300 \text{ К.} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{R T}{\mu}} \approx 340 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

скорость звука по Ньютону.

② Если $S = \text{const}$ - энтропия. (адиабатический процесс.) - Найдём

$$p V^\gamma = \text{const} ; \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^\gamma = \text{const} ; \left(\frac{p}{p_0} \right)^\gamma = \left(\frac{p_0}{p_0} \right)^\gamma$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_0} = \gamma \frac{p_0}{p_0} = \gamma \frac{R T}{\mu} ; \text{ для воздуха } \gamma \approx 1,4 ; T = 300 \text{ К.}$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}} \approx 331,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$\Rightarrow$ Звук в воздухе - адиабатический процесс.

4.04.22

Акустический шнурок.

$$\xi(x, t) = f(x - ut) = f(\xi) \quad x - ut = \xi$$

$$\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$v_x = -u \xi$$

огн. деформация

$$u = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_0}}$$

линейная часть -
равнения

$$p_x = -p_0 \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_0} \xi$$

Вспомогательная, что аналогична дифференциалу коэф-та сжатия давления.

$$p = -G$$

Что формально можно ввести коэф-т пропорц-и аналогично с жесткостью сжатия:

$$E_{эфф} = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$$

$$\Rightarrow p = + \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \cdot \frac{v_x}{u} = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \cdot v_x$$

волновое сопротивление (акустический импеданс среды)

Оп. $Z_0 = \rho_0 \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}}$ - акустич. импеданс $\Rightarrow Z_0 = \rho \cdot u$

Пример: для воздуха

$$Z_0^{возд} = 43 \text{ см}^2/\text{с}$$

для воды:

$$Z_0^{вод} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{с}$$

$$Z_0^{вод} \gg Z_0^{возд}$$

$$\xi(x,t) \rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t} \end{cases}$$

Прошли всех волн подробно.

З: получить выражение для плотности энергии сжатого вещества, аналогичное с упр. волной.

$$\Pi = \frac{dW}{dt} \text{ - поток энергии}$$

$$q = \frac{\Pi}{S} \text{ - плотность потока}$$

Сразу и ответим:
 $\vec{q} = - \vec{\sigma} \cdot \vec{v}$
 $\vec{q}$ - вектор энергии

Газ

$$q = p \cdot v = Z_0 v^2 = \frac{p^2}{Z_0} \text{ в децибел волны!}$$

Любой измерительный прибор реагирует на среднее значение! ("время реакции"), а не на мгновенное. Поэтому обычно интересуются сред. значением.

$$p = A_p \cos(\omega t - kx) \rightarrow q = \frac{A_p^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - kx)$$

Среднее по периоду:

$$\bar{q} = \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt = \frac{A_p^2}{2 Z_0}$$

Но! Можно же было сформировать билин квадрат... «т.е. можно разложить в ряд Тейлора».

Прямое в акустике называется интенсивностью:

$I = \bar{q}$ - интенсивность (мощность на ед. площади)

$$\Rightarrow A_p = \sqrt{2 I Z_0}$$

Макс. перепады для звука: $I = 200 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ (в сре)

$$A_p \approx 480 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} = 130 \text{ дин/см}^2$$

Средн. атмосфер. давление: $p_0 \approx 10^5 \text{ Па} = 10^6 \text{ дин/см}^2$

$$\Rightarrow (p_r)_{\text{max}} \ll p_0$$

$\Rightarrow$ всё то, что пределили - справедливо

Но на самом деле наше ухо слышит эм. интенсивность (логарифм)

Шкала Децибел.

Порог слышимости: $(p_r)_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$
 (обычно как бы звуковой уровень)

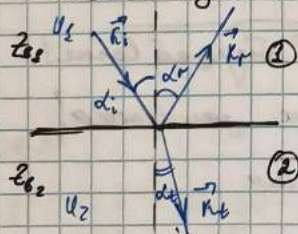
Ухо реагирует на: $\lg\left(\frac{\bar{q}}{\bar{q}_0}\right)$

$$\bar{q}_0 = \frac{(p_r)_0^2}{2 Z_0}$$

По определению: $L_p = 0,1 \lg\left(\frac{\bar{q}}{\bar{q}_0}\right)$ при условии $\bar{q} = 10 \bar{q}_0$

Отражение и преломление
 продольных и поперечных волн на
 границе двух сред.

Важное замечание: граница неподвижна.



Будем считать, что граница неподвижна.

k_r - отраж. волна.

k_i - падающ. волна.

k_t - преломл. волна.

Будем рассматривать случай норм. падения.

Известно $A_i = A_0$

Вопрос: $A_r = ?$ $A_t = ?$

Вдоль оси x - падающая волна:

$$\xi_i(x, t) = A_0 \cos(\omega_i t - k_i x)$$

$$\xi_r(x, t) = A_r \cos(\omega_r t + k_r x)$$

1) Если $\omega_r = \omega_i$

2) Г.у. $\omega_r = \omega_i$

2) рас-

б)

$\Rightarrow$

$A_r =$

$A_t =$

Если

Опр. $R =$

$R =$

$T =$

$$\xi_t(x, t) = A_t \cos(\omega_t t - k_t x)$$

1) Если граница неподвижная - как отражается Демифор $\Rightarrow$ частота
двух волн одинакова: $\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega$

$$k_i = \frac{\omega}{u_1}; \quad k_i = k_r = \frac{\omega}{u_2} = k_1$$

$$k_t = \frac{\omega}{u_2} = k_2$$

2) Г.У.:
1) $\xi_i(x=0, t) + \xi_r(x=0, t) = \xi_t(x=0, t)$ - тем-ся, что, если друг
в друга не проникают.

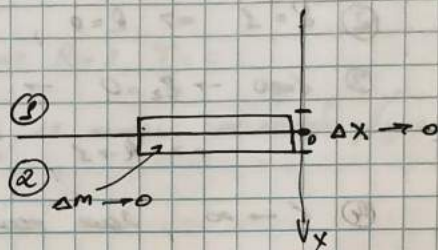
$$A_i \cos(\omega t) + A_r \cos(\omega t) = A_t \cos(\omega t) \rightarrow \text{можно дать любому } \omega \text{ и } t$$

$$A_i + A_r = A_t$$

2) динамическое условие:
рас-н точкой связи у границы

$$\Delta m a_x = \sum_{j=1}^3 F_{jx} \quad \text{Звонит дается}$$

$$\text{но } a_x < \infty, \Delta m \rightarrow 0$$



$$\Rightarrow \xi_i(x=0, t) + \xi_r(x=0, t) = \xi_t(x=0, t)$$

$$\xi = \pm z_0 v_x \quad ("+" \text{ к отраж. волне, } "-" \text{ к падающей})$$

$$\xi = \pm z_0 v_x = \pm z_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$-z_1 A_i + z_1 A_r = -z_2 A_t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_i + A_r = A_t \\ A_i - A_r = \delta A_t \end{cases}, \text{ где } \delta = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow \text{Амплитуды зависят от относительных импедансов.}$$

$$A_r = A_i \frac{1-\delta}{1+\delta}$$

$$A_t = A_i \frac{2}{1+\delta}$$

$\Rightarrow$ Срезове: всегда должно быть $A_t > 0$, но
при $\delta > 0 \rightarrow A_r < 0$?

Нужно отрицательная фаза! (+δ или -δ)
 $A_r > 0$ - мод. к. $\varphi_r = \pi$

Если среда более жесткая

Коэффициенты отражения и
прохождения по мощности.

Опр. $R = \frac{P_r}{P_i}$, R - коэф. отражения

$\Gamma = \frac{P_t}{P_i}$ - коэф. прохождения.

$$\vec{P} = -\vec{v}_n \vec{v}$$

$$U = \pm Z_0 V_x \quad ; \quad -V_x = \frac{\partial \xi}{\partial t} \sim \omega A$$

$$q_r = + Z_0 V_{r,2}^2 = Z_0 A_r^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + kx)$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^2 ;$$

Поэтому: $R = \left(\frac{A_r}{A_0} \right)^2 = \left(\frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^2$

$$\text{т.е. } q_r = -Z_0 V_t^2$$

$$T = \left(\frac{A_t}{A_0} \right)^2 \cdot \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{4\delta}{(1+\delta)^2}$$

- Волны проходят самопроизвольно.

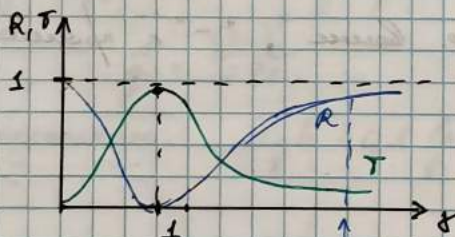
Средства:

① $R+T=1$ (средства ЗСЗ)

② $\delta=1 \Rightarrow R=0, T=1$, как частный случай.

③ $\delta \rightarrow 0 \rightarrow Z_2=0 \rightarrow$ для среды более жесткая, чем для,
 $\Rightarrow R \rightarrow 1, T=0$.

④ $\delta \rightarrow \infty$, для очень мягкой, или для
 $\Rightarrow R=1, T \rightarrow 0$



$$Z_1^{\text{возд}} = 43 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$$

$$Z_2^{\text{вод}} = 1,5 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$$

$$\rightarrow \delta \gg 1$$

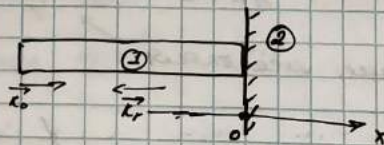
Звук из воздуха в воду не идет!

Улучшение работы в ограниченных системах.

Модель системы:

Случай, когда: $\delta = \frac{Z_2}{Z_1} \gg 1$

$$\Rightarrow R \rightarrow 1 (T \rightarrow 0)$$



Волна падающая и волна отраж. будут с одинак. ампл.
 (стоячая волна).

8.04.22

$$\xi(x, t) = \xi_i(x, t) + \xi_r(x, t)$$

1) Частично жесткое закрепление:

$$0 < Z_1 < \infty ; Z_2 \rightarrow \infty$$

$$\gamma = \frac{z_2}{z_1} \rightarrow \infty \Rightarrow R \rightarrow 1, T \rightarrow 0$$

$$\xi_2(x, t) = \xi_1(x, t) = 0$$

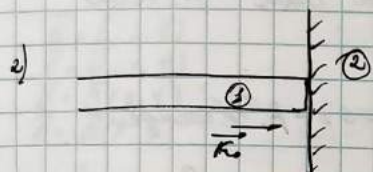
$$\Rightarrow \xi_2(x, t) = \xi_i(x, t) + \xi_r(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_r \cos(\omega t + kx + \varphi_r)$$

$$A_r = A_0, \text{ формально если } t > 1 \text{ здесь должны быть знаки } \pm, \text{ но } A > 0 \rightarrow \text{даём фазу. } (A_r = A_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma})$$

$$\varphi_r = \pm \pi$$

$$\Rightarrow \xi_2(x, t) = A_0 \cdot 2 \cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2}) \cos(kx \pm \frac{\pi}{2}) = 2A_0 \sin \omega t \cdot \sin kx$$

$$A = 2A_0 |\sin kx|$$



$$0 < z_1 < \infty$$

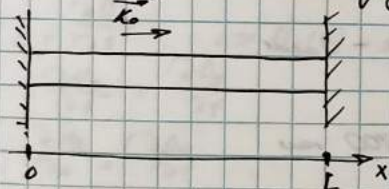
$$z_2 \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow R = 1, T = 0$$

Отражение происходит от того, что мы имеем жесткую связь

$$A_r = A_0, \varphi_r = 0$$

3) Струна, закреплена с двух сторон. с увеличением жесткости закрепления



$$\xi(x=0, t) = 0 \quad \xi(x=L, t) = 0 \quad \text{жёсткое закрепление}$$

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \quad \text{— волна бегущая вправо}$$

$$\xi(x=0, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos \psi = 0 \quad \forall t \Rightarrow \cos \psi = 0 \Rightarrow \psi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\xi(x=L, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL \pm \frac{\pi}{2}) = 0 \quad \forall t, \sin kL = 0$$

$$kL = \pi m, m = 1, 2, \dots$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$m > 0$$

т.е. не все волны подходят, они должны быть кратны этому условию.

$$\Rightarrow \lambda_m = \frac{2L}{m}$$

то волны, которые удовлетворяют этому условию — собственные волны (тогда ~ собственные частоты).

$$m=1$$



$$m=2$$



Электромагнитные волны.

История открытия ЭМВ.

Предложена теория - И. Рерфорд - 1832г.

Создание теории - Максвелл - 60-е годы XIX в.

Экспериментальное подтверждение существования ЭМВ - Г. Герц - 1887г.

Изобретение радио - А. С. Попов
Г. Марconi

1896г. - 1899г. - Передача энергии
с помощью ЭМВ - Н. Тесла

Первая передача звука 1900г.

Двусторонняя трансаоппозитивная р/связь } 1906г. - Р. Резерфорд

Первая трансляция музыки

Название диапазона	Частоты ν , Гц	Длина волны, $\lambda = \frac{c}{\nu}$
СДВ $\equiv$ Очень низкие частоты (ОЧН)	≤ 50 Гц	≥ 6000 км Для связи с подводными лодками
СВЧ диапазон	$3 \text{ Гц} - 100 \text{ ТГц}$	$3 \text{ мм} - 100 \text{ км}$
Терфративное излучение	$100 \text{ ТГц} - 10 \text{ ПГц}$ (10^{-12})	$30 \text{ мкм} - 3 \text{ мм}$
Оптический диапазон = видимый свет	$(4 \cdot 10^{14} - 0,8 \cdot 10^{15}) \text{ Гц}$	$380 - 700 \text{ нм}$
Ультрафиолетовое излучение	$(0,8 \cdot 10^{15} - 3 \cdot 10^{16}) \text{ Гц}$	$100 \text{ Å} - 380 \text{ нм}$ ($\text{Å} = 10^{-10} \text{ м}$)
Рентгеновское излучение	$(3 \cdot 10^{16} - 3 \cdot 10^{20}) \text{ Гц}$	$(0,01 - 100) \text{ Å}$
γ -излучение	$> 3 \cdot 10^{18} \text{ Гц}$	$< 1 \text{ Å}$

Вывод волнового ур-я из уравнений Максвелла.

Плотность движущихся волн

Плотность энергии электромагнитного поля

Плотность энергии электромагнитного поля

В Э: ур-я Максвелла.

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D} = \rho_{\text{своб}} \end{cases}$$

Решение - по-тб свободных зарядов

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Условия: ① Будем рассматривать линейные изотропные среды:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \tilde{\epsilon} \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \tilde{\mu} \vec{H}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

② Рассматриваем частоту волны, которая свободна от источников ($\vec{j}$, и $\rho_{\text{свобод.}}$)
 $\Rightarrow \rho_{\text{свобод}} = 0, \vec{j} = 0$

Пусть волна бежит по оси x :

$$\vec{E} = \vec{E}(x, t)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(x, t)$$

$$\vec{D} = \vec{D}(x, t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(x, t)$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \cdot 0 - \vec{e}_y \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - 0 \right) + \vec{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{e}_x \cdot 0 - \vec{e}_y \frac{\partial H_z}{\partial x} + \vec{e}_z \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

В функции от x : $0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Rightarrow B_x = \text{const}$ (не зависит от t - как не интересуют.)

$y: -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$

$z: \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$

$x: 0 = \frac{\partial D_x}{\partial t} \Rightarrow D_x(t) = \text{const.}$

$y: -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial D_y}{\partial t}$

$z: \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial D_z}{\partial t}$

Перезапишем систему:

1) $\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial D_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \end{cases}$

Изн. через E и D, B и H

1) $\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases}$ Дайт волны $\sim e^{-i\omega t}$

2) $\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \end{cases}$ - y -волна.

Работаем с 1-й парой уравнений, продифференцируем по x $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$

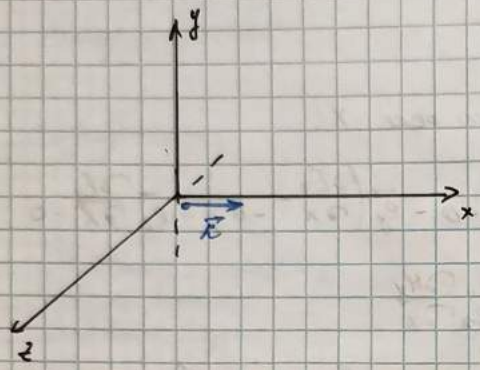
$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right) = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0 \right] \sim \text{волновое уравнение.}$$

$$u^2 = \frac{1}{\epsilon \mu}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sim \text{фазовая ск-сть.}$$

Опр. Показатель преломления $\left[n = \frac{c}{u} \right] = \sqrt{\epsilon \mu}$ универсальное определение



$E_z = E_0 (x - ut)$ ~ плоскостная волна
 $H_y = H_0 (x - ut)$ $\xi = x - ut$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u \frac{\partial E_z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H_y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -u \frac{\partial H_y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\mu u \frac{\partial H_y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} = -\mu u \frac{\partial H_y}{\partial \xi} \Rightarrow E_z = -\mu u H_y$$

$$\frac{E_z}{H_y} = -\mu u = -\frac{\mu}{\sqrt{\epsilon \mu}} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Опр. Волновой импеданс в ДМВ:

$$\left\{ Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right\}$$

Вак. у. м.: $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$ $Z_0 = 120 \pi$ Ом.

15.04.22. $u = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

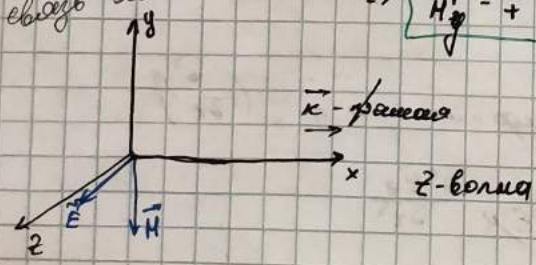
$\{E_z, H_y\}$ - z-волна
 $\{E_x, H_z\}$ - y-волна.

$$\frac{E_z}{H_y} = -Z_0 \quad \text{для плоской волны.}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

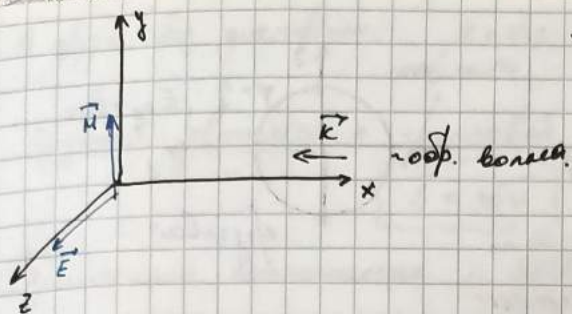
получить такую же связь как по

$$\Rightarrow \left[\frac{E_z}{H_y} = -Z_0 \right]; \left[\frac{E_x}{H_z} = +Z_0 \right]$$



$\{E, H, k\} \sim \text{прав. тройка}$

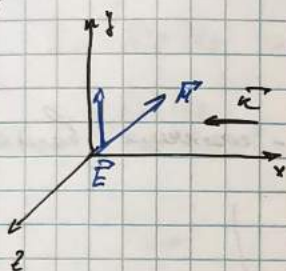
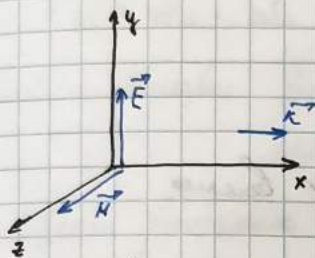
- 1) Если...
- 2) Если...
- 3) Если...
- 4) Если...



Прямое направление $\vec{E}$ сохраняется
 $\{\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}\}$ - правая тройка.

Для y-волны:

$\{\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}\}$ - правая тройка.

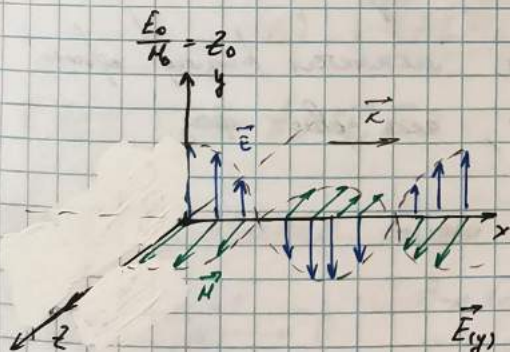


Снова $\{\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}\}$ - правая тройка.

$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - kx)$ - прямая y-волна

$\vec{H} = H_0 \vec{e}_z \cos(\omega t - kx)$

Интерференция всего
 равномерн. распределенного волнового
 по y-z



Опр. Плоскость, в которой лежат вектор $\vec{H}$ и
 $\vec{E}$ назыв. $(\vec{k}, \vec{E})$ - плоскость поляризации.

В общем случае:

$\vec{E} = E_{0y} \vec{e}_y + E_{0z} \vec{e}_z$

$\vec{E}_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \vec{e}_y$, при этом $\varphi_{0y} = \varphi_{0y}(t)$
 может зав-ть от
 времени.

$\vec{E}_z = E_{0z} \vec{e}_z \cos(\omega t - kx + \varphi_{0z})$, $\varphi_{0z} = \varphi_{0z}(t)$

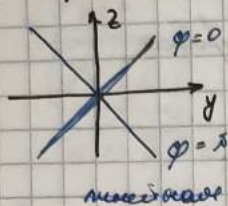
1) Если φ_{0y} и φ_{0z} будут случайными, поляриза-но развивается
 случайной (светосветовой, хаотической) - неполяризованный свет.
 (если $\varphi_{0y} = \varphi_{0y}(t) \neq 0$, $\varphi_{0z} = \varphi_{0z}(t) \neq 0$).

2) Если $\varphi_{0y} = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_{0z} = \frac{\pi}{2}$ → случай линейной поляризации

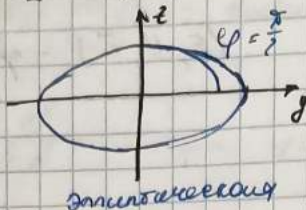
3) Если $\varphi_{0y} = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_{0z} = \frac{\pi}{2}$ и при этом $E_{0y} \neq E_{0z}$ → поляризация
 эллиптическая.

4) Если $\varphi_{0y} = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_{0z} = \frac{\pi}{2}$, при этом $E_{0y} = E_{0z}$ → круговая поляризация.

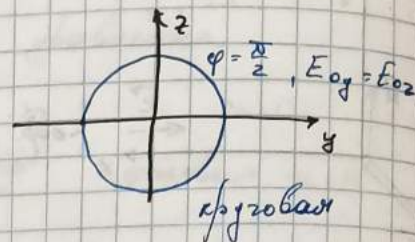
Конфигурация векторов в осциллографе:



линейная



эллиптическая



круговая

Пусть есть сферическая электромагнитная волна.

$$E_{y1} = E_0 \cos(\omega t - kx) \quad \sim \text{прямая волна.}$$

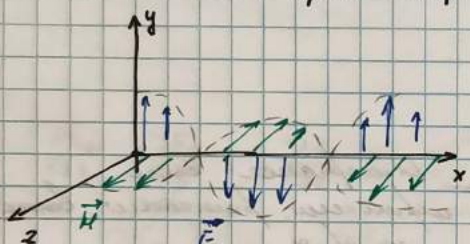
$$E_{y2} = E_0 \cos(\omega t + kx) \quad \sim \text{обратная волна}$$

$$E_x = E_{y1} + E_{y2} = 2E_0 \cos(\omega t) \cos(kx) \quad - \text{стоячая волна}$$

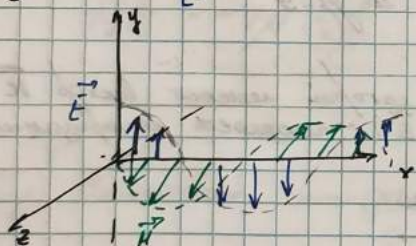
Аналогично: $H_{(x)} = H_0 \cos(\omega t - kx) = 2E_0 \cos(\omega t - kx)$

$$H_{(x)} = -2E_0 \cos(\omega t + kx)$$

$$H_x = H_{y1} + H_{y2} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \quad - \text{стоячая волна.}$$

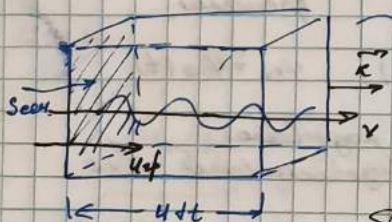


~ стоячая волна.



~ стоячая волна, "меняется размер сферы"
H - сдвигается, ось сдвиг фаз.

Теорема Пойнтинга
Вектор Пойнтинга (Эквивалент
плотности потока энергии)



По определению поток энергии:

$$\Pi = \frac{dW}{dt}$$

Плотность энергии: $w = \frac{W}{\Delta V}$ } $\Pi = w \cdot u \cdot S_{\text{сеч.}}$

$$dV = S_{\text{сеч.}} u dt$$

Удобнее нормировать, разделить на $S_{\text{сеч.}}$, получим:

$$S = \frac{\Pi}{S_{\text{сеч.}}} \quad \sim \text{плотность потока энергии}$$

В сфере без дисперсии: $u = u_{эф}$
 фаз. сл-ть.

Энергия движется с групповой скоростью.

$\vec{S} = \vec{w} \vec{u}$ ~ вектор Пойнтинга (вектор "Гюбба")
 гр. сл-ть

Применим соотношение к СВЧ.

$$w = w_{эл} + w_{м}$$

С фазного сигнала: $w_{эл} = \frac{cE^2}{2}$
 $w_{м} = \frac{\mu H^2}{2}$

Рассмотрим хорошие линейные изотропные среды. $\epsilon_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

Будем работать с Li поляризованный, пусть y -волна

$$E_y = \epsilon_0 H_z \quad \text{— дефазная}$$

$$w_{эл} = \frac{c \epsilon_0^2 H_z^2}{2} = \frac{\mu H_z^2}{2} = w_{м}$$

$$\Rightarrow w = 2w_{эл} = 2w_{м}$$

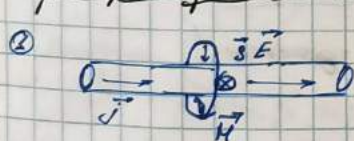
$$|\vec{S}| = w |\vec{u}| = \epsilon E_y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_y^2 = \frac{E_y^2}{\epsilon_0} = E_y \cdot H_z$$

$$\vec{S} \parallel \vec{u}_{эф}, \vec{S} \parallel \vec{u}_{гр} \Rightarrow \vec{S} \parallel \vec{k}$$

(5.1) $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ ~ справедливо всегда!
 Это постулат современной физики!

в CGS: $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$

Примеры проявления вектора Пойнтинга:



3-й пример: $\vec{J} = \vec{J} \vec{E}$

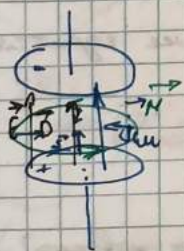
провод

$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ ~ энергия закидывается в провод из пр-ва.

Энергия растекается в пр-во, а потом закидывается.

2) Конденсатор:

на обкладках



процесс зарядки.

$$\vec{J}_{ем} = \vec{J} + \vec{J}_{ем}$$

$$\vec{S} \parallel \vec{E}$$

Опять из внешнего пр-ва закидывается энергия.

Теорема Пойнтинга.

Ур. Максвелла: $\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad | \cdot \vec{H} \quad \text{скалар. произв.} \quad \text{и вычитаем}$
 $| \cdot \vec{E} \quad \text{из 2-3}$

$$\vec{E} \text{ rot } \vec{H} - \vec{H} \text{ rot } \vec{E} = \vec{j} \vec{E} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \text{ rot } \vec{H} - \vec{H} \text{ rot } \vec{E} = -\underbrace{\text{div} [\vec{E}, \vec{H}]}_{\vec{S}} \sim \text{из ВДА.}$$

$$- \text{div } \vec{S}$$

1) $\vec{j} \vec{E} = \sigma \vec{E} \vec{E} = \sigma E^2 \sim \text{поучность джоулевых потерь}$

2) $\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \left\{ \text{Опять рассматриваем однородную среду - диэлектрик} \right\} =$
 $= \vec{E} \frac{\partial (\epsilon \vec{E})}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial (\vec{E} \vec{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\epsilon E^2)}{\partial t} = \frac{\partial w_{\text{эл}}}{\partial t}$

3) $\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left\{ \text{Материал среды} \right\} = \mu \frac{\partial (\vec{H} \vec{H})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mu H^2)}{\partial t} = \frac{\partial w_{\text{маг}}}{\partial t}$

$$\frac{\partial w_{\text{эл}}}{\partial t} + \frac{\partial w_{\text{маг}}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\sigma E^2 - \text{div } \vec{S}}$$

$\sim$ теорема Пойнтинга.

$\swarrow$ σE^2 - излуч. энергии
 $\searrow$ $\text{div } \vec{S}$ - изменение энергии в объеме, вызыв. излуч. энергии
 за счет диссип. потерь всегда убывает.

Излучение ЭМВ элементарными вибраторами. Контрастность

Составление зарядов - волны не дарт. $\rightarrow$ не горит!

Элемент. $\sim \frac{1}{r^2}$

Диполь $\sim$ поле спадает ещё быстрее $\rightarrow$ не горит! $\sim \frac{1}{r^3}$

Движ. заряд: $B \sim \frac{q [\vec{r}, \vec{r}']}{r^3} \sim \frac{1}{r^2} \rightarrow$ не горит!

Условия, чтобы излучение было элв.

1) Векторы $\{\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}\}$ - правая тройка, $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{k}$

2) Импеданс связи $\frac{E_y}{H_z} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \text{const}$ (для у-волн)

3) $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ - энергия будет распр. в напр-ии перпенд. $\vec{E}, \vec{H}$

$\vec{r}$ - пов-сть, окр. источник



$$P = \oint S_n d\Omega$$

поток должен быть $P > 0$

$$S \sim r^2$$

$$S_n \sim \frac{1}{r^2}$$

$$P = \text{const}$$

лучение излучения, исходя от источника.

такое излучение и не затухает и не нарастает.

Оп. Вибратор называется элементарным, если его линейный размер $l \ll \lambda$ длины волны.

Диполь Герца - диполь, у которого $q = q(t)$ или $l = l(t)$ - плечо диполя.
 $\Rightarrow \vec{p} = \vec{p}(t)$ - дипольный момент.



~ ток/аки, запятой. перемещением током

в S :

$$\vec{H} = -\frac{1}{4\pi c r} [\vec{e}_r, \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})]$$

~ переменное магнитное поле.

Пот. коэф. затух. электромагн. волн

и эти $\vec{H}$ и $\vec{E}$ как раз и

создают поле.

В-ва:

$$1) H \sim \frac{1}{r}, E \sim \frac{1}{r} \Rightarrow |\vec{S}| \sim |\vec{E}, \vec{H}| \sim \frac{1}{r^2}$$

$$2) |\vec{e}_r| = |\vec{E}| = 1$$

$$\frac{E}{H} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \left\{ c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right\} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 = \text{const.}$$

$$3) \vec{E} \sim [\vec{e}_r, \vec{H}] \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{H}$$

$$4) \vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] \Rightarrow \vec{S} \perp \vec{E}, \vec{S} \perp \vec{H}, \text{ т.е. тройка } \{\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}\} \sim \text{волна продольная как струна.}$$

$$5) t - \frac{r}{c} \sim \text{запаздывание}$$

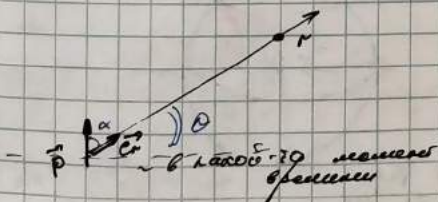
$$6) \ddot{\vec{p}} \Leftrightarrow \ddot{\vec{E}} \text{ поля } \vec{E} \text{ и } \vec{H} \text{ пропорциональны } \ddot{\vec{E}} - \text{ускорению.}$$

Наиболее интересно когда вып. закон косинуса (плоский случай)

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega t \Rightarrow \ddot{\vec{p}} = -\vec{p}_0 \omega^2 \cos \omega t$$

$$E \sim H \sim \omega^2 \Rightarrow S \sim \omega^4$$

а)

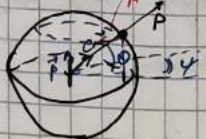


$$H \sim \sin(\vec{e}_r, \ddot{\vec{p}})$$

$$E \sim \sin(\vec{e}_r, \ddot{\vec{p}})$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Сферич. с.к. (в центре помещен диполь Герца)



Вид сверху

$S = S(\theta) \sim$ излучение разное в разных напр-х, есть зависимость от угла, экваториальная линия - 0



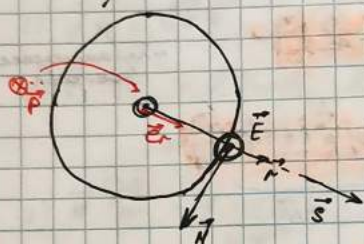
Опр. Дифракция направл. излуч. нормированная функция.

$$D(\theta, \varphi) = \frac{\langle S(\theta, \varphi) \rangle_r}{\langle S(\theta, \varphi) \rangle_r \max}$$

дифр. направл. - имеет смысл только там, где загляны стат. квант. поля, т.е. далеко от излучателя $r \gg r_0$ - дальняя зона.
 $\langle \dots \rangle_r$ - среднее по радиусу.

Дифракция направленного излучения

1. Квадратная плоскость.



$$\vec{E} \perp \vec{p}$$

$$|\vec{H}| = \frac{1}{4\pi c r} p_0 \omega^2 \left| \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \right|$$

$$|\vec{E}| = Z_0 |\vec{H}|$$

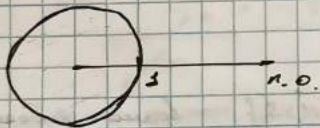
$$S = EH \sim \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right)$$

$$\langle S \rangle_r \sim \frac{1}{2} \Rightarrow \langle S \rangle_r = \langle S \rangle_r \max$$

это логично, ведь всё излучает.

Прямая линия в п.к.

$$\Rightarrow D(\theta, \varphi) = \cos^2 = 1.$$



2. Дифракционная плоскость.

$\vec{E}$ по сд. смещен вверх $\rightarrow$ некачественная поляризация.

$$|\vec{H}| = \frac{1}{4\pi c r} p_0 \omega^2 \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \cos \theta$$

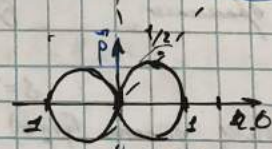
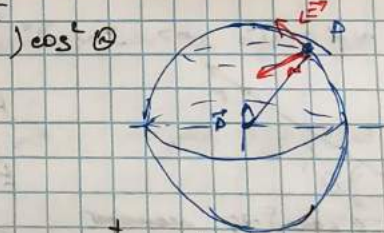
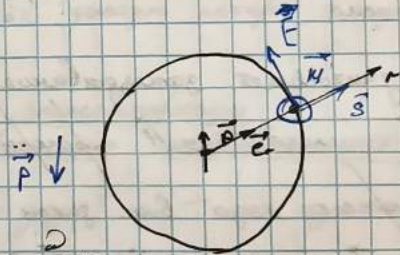
$$E = Z_0 H$$

$$S = EH = Z_0 \left(\frac{1}{4\pi c r} p_0 \omega^2 \right)^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \cos^2 \theta$$

$$\langle S \rangle_r = \frac{1}{2} S(\theta)$$

$$(\langle S \rangle_r)_{\max} = \frac{1}{2} Z_0 \left(\frac{1}{4\pi c r} p_0 \omega^2 \right)^2$$

$$\Rightarrow D(\theta) = \cos^2 \theta$$

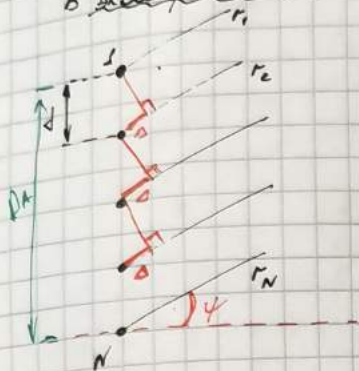


Далее можно все излучать по своей оси.

Решетки из вибраторов.
Условия осевой направленности
излучения. Ширинка главного лобового

Для практических целей лучше использовать ДН. Чтобы решить эту проблему исп. решётки вилфаторов.

В двухканальной мг-тл. - электронная рейска.



Аналог $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_N$

$$A_{0,1} = A_{0,2} = \dots = A_{0,N} = A_0 = p_0$$

$$\varphi_{01} = \varphi_{02} = \dots = \varphi_{0N} = 0$$

$$\Delta(\psi) = ?$$

$$r \gg e, \quad r \gg D_A = \sqrt{(N-1)} \quad (D_A - \text{размер сети})$$

$\Rightarrow$ Все лучи идущие от вер. $\rightarrow$ параллельны.

$$E_z(t, r) = E_0 \cos(\omega t - kr_z)$$

$$E_z(t, r) = E_0 \cos(\omega t - kr_z)$$

$$E_N = E_0 \cos(\omega t - kr_N)$$

$$r_2 - r_1 \equiv \Delta$$

$$\Delta = d \sin \psi$$

Все волны синхронны $\rightarrow$ будут интерф. между собой.
Нужно все сложить.

$$E = E_1 + \dots + E_N$$

উদাহরণ: $E_1 = E_0$

$$\hat{E}_2 = \hat{E}_0 e^{-i k \Delta}$$

$$E_s = E_0 e^{-2i\kappa\Delta}$$

$$\hat{E}_N = E_0 e^{-(N-1)iK\Delta}$$

$$E = \hat{E}_0 \frac{1 - e^{-iK\Delta}}{1 - e^{-iK\Lambda}} = \hat{E}_0 \frac{e^{-i\frac{K\Delta}{2}}}{e^{-i\frac{K\Lambda}{2}}} \cdot \frac{\sin(\frac{K\Delta}{2})}{\sin(\frac{K\Lambda}{2})}$$

$$N = \frac{E}{20}$$

$$D(\psi) = \frac{\sin^2\left(\frac{\kappa \Delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\kappa \Delta}{2}\right)} \cdot \frac{1}{N^2}$$

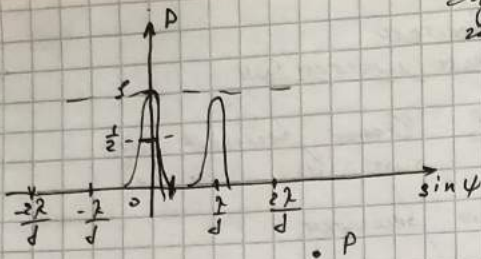
$$\text{max: } \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa \Delta}{a} \right) = 0 \rightarrow \frac{\kappa \Delta}{a} = m \pi \quad (m=0, \pm 1, \dots)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda \cdot 2} \sin \varphi = m\pi \rightarrow \sin \varphi = \frac{m\lambda}{d}$$

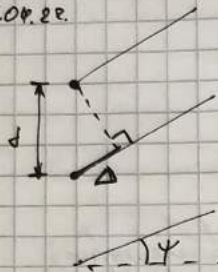
главные материалы

При $m=0$ максимум есть всегда, при $m \neq 0$ - максимум не есть

Для периодической ДН получим дифракционную решетку на уровне 0,5.

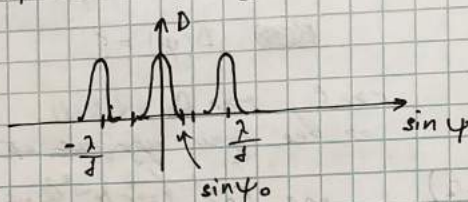


18.04.22.



$$\Delta = d \cdot \sin \psi$$

$$D(\psi) = \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sin \frac{N\kappa\Delta}{2}}{\sin \frac{\kappa\Delta}{2}} \right)^2$$



$$A_0; \varphi_i = 0; \forall i = 1, N$$

$$D_A = d(N-1)$$

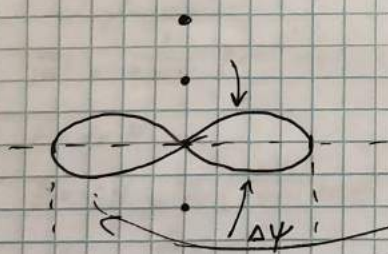
$$D(\psi) = 0 \rightarrow \sin \frac{N\kappa\Delta}{2} = 0 \rightarrow \frac{N2\pi}{2\lambda} d \sin \psi = m'\pi$$

$$m' = 1; 2; \dots \quad m' = 1 \rightarrow \sin \psi_0 = \frac{\lambda}{Nd} \approx \frac{\lambda}{D_A} \ll 1 \quad \text{«условие узкого «решетки»»}$$

$$\Delta \psi \approx \frac{\lambda}{D_A}$$

1. «решетка» ф-ка $D(\psi)$ (главн. макс) ($m'=0$) будет когда $\lambda > d$

$\Rightarrow$ хорошо, когда $\lambda < d$ - один пик
 $\lambda > d$ - узкий



из этого зеркального решетки необход. убрать 0,5.

Как?

Поставить ещё один излучатель:

$$\varphi_{(1)} = \omega t - \kappa x_p + \varphi_{01}$$

$$\varphi_{01} = 0$$

$$\varphi_{(2)} = \omega t - \kappa(x_p + h) + \varphi_{02}$$

$$\varphi_{02} = \kappa h = \frac{\pi}{2}, \quad h = \frac{\lambda}{4}$$

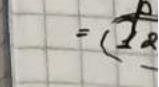
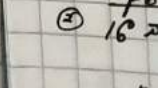
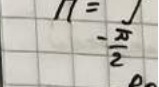
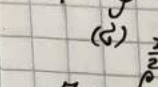
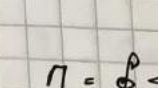
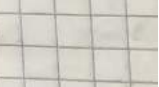
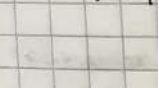
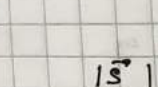
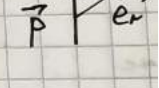
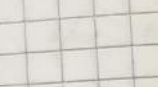
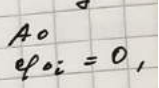
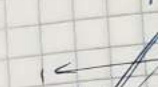
$$\rightarrow \varphi_{(1)} = \omega t - \kappa x_p - \frac{\pi}{2} + \varphi_{02}$$

$$\varphi_{02} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_{(1)} = \varphi_{(2)}$$

точка P':

$$\varphi_{(1)} = \omega t$$

$$\varphi_{(2)} = \omega t$$

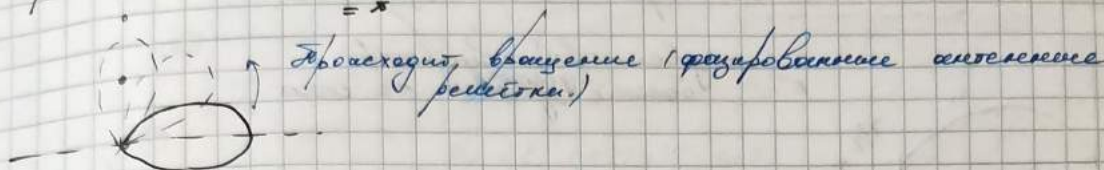


$\hookrightarrow \max. \text{ в } z.P$

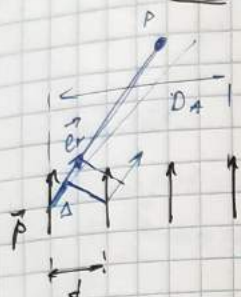
точка P' :

$$\varphi_{P'} = \omega t + k|x_{P'}|$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{P'} &= \omega t + k|x_P| + \underbrace{\frac{\pi}{2} + \varphi_{02}}_{=\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \text{ макс в } \perp \text{ плоскости} \Rightarrow \min \text{ в } z.P'$$



$$\begin{aligned} E_1 &\sim \cos \psi \\ E_2 &\sim \dots \\ E_3 &\sim \dots \end{aligned}$$

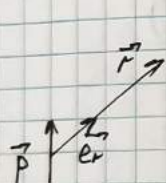


$$D(\psi) = \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sin \frac{NR}{2}}{\sin \frac{R}{2}} \right)^2 \cos^2 \psi$$

$$A_0 = 0, \forall i \in \mathbb{Z}, N$$



Сопровождающее излучение



$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos \omega t$$

$$|\vec{H}| = \frac{1}{4\pi c r} \rho_0 \omega^2 |\cos(\omega t - kr)| \cdot \cos \theta$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\rho_0 \omega^2 \cos \omega t$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \rho_0 \omega^2 |\cos(\omega t - kr)| \cos \theta$$

$$|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \rho_0^2 \omega^4 \cos^2(\omega t - kr) \cdot \cos^2 \theta$$

$$\langle \vec{S} \rangle_T = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \rho_0^2 \omega^4 \cos^2 \theta$$

Мощность излучения

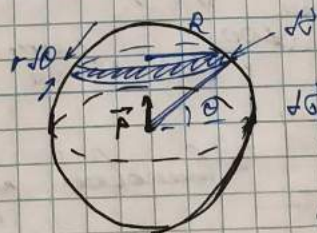
$$P = \oint \langle \vec{S} \rangle d\Omega$$

$$P = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho_0^2 \omega^4 2\pi r^2 \cos^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} d\Omega \quad (1)$$

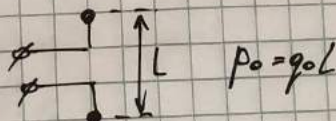
$$\frac{\rho_0^2 \omega^4}{16\pi \epsilon_0 c^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) d(\sin \theta) =$$

$$= \frac{\rho_0^2 \omega^4}{(22\pi \epsilon_0 c^3)} = \alpha \rho_0^2 \omega^4;$$

$$j = \frac{dq}{dt} = q_0 \cdot \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = -\frac{q_0 \omega \sin \omega t}{T_0}$$



$$\begin{aligned} R &= r \cos \theta \\ d\Omega &= 2\pi R r d\theta = \\ &= 2\pi r^2 \cos \theta d\theta \\ \theta &\in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$



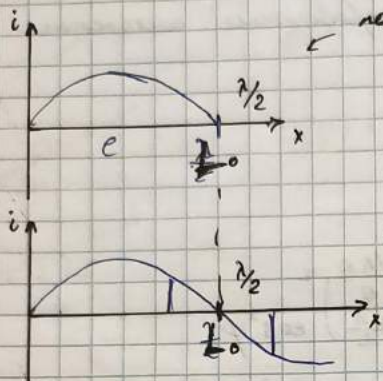
$$\Rightarrow \Pi = \alpha R_0^2 \omega^4 = \alpha L^2 I_0^2 \omega^2 = \alpha I_0^2 \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} L^2 \hat{=} \alpha I_0^2 4\pi^2 c^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

По закону Рэлея-Дендринга: $R = \frac{1}{\lambda} I_0^2 R$

Опр. Пусть $R = \alpha \cdot 8\pi^2 c^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$ - коэффициент излучения.

лучевым коэффициентом больше единицы не может



~ повышенная R-на получения

Условие параллельности лучей.
Волновой параметр.

$$D_A \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right] = \left(D_A \cdot \frac{1}{2} \right)^2$$

$$D_A \ll 8r, r_0$$

$$r = r_0 \sqrt{1 + \left(\frac{D_A}{2r_0} \right)^2} \approx r_0 \left(1 + \frac{D_A^2}{8r_0^2} \right)$$

ряд Тейлора

$$\Delta r = r - r_0 = \frac{D_A^2}{8r_0}$$

$$\Delta \varphi = \kappa \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{D_A^2}{8r_0} = \frac{D_A^2 \pi}{4r_0 \lambda} \ll \pi$$

(т.к. картинка наклеев. не наклоняется:

Если бы $\Delta \varphi = \pi$, то лучи из разных зондов гасили).

$$\Rightarrow r_0 \gg \frac{D_A^2}{4\lambda} \rightarrow r_0 \gg \frac{D_A^2}{2}$$

условие параллельности лучей // условие зонной зоны (волновой) или зоны Фраунгофера

$\Delta \varphi \ll \pi$ (чтобы не было затенения в точке P.)

Пример: $\lambda = 3 \text{ см}$ - радиочастота антенны.

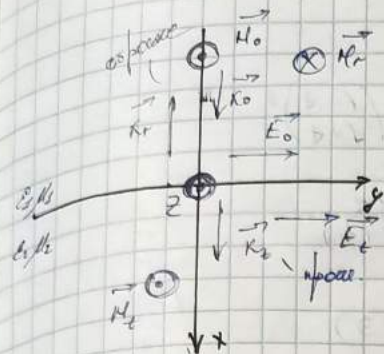
$$D_A = 10 \text{ см}$$

$$r_0 \gg \frac{100}{3} \approx 30 \text{ см.}$$

Опр. $R = \frac{\sqrt{2} r_0}{D_A}$

~ волновой параметр; $r \gg 1$ условие зонной зоны.

Нормальное падение ЭМВ на
границу раздела двух диэлектрич. сред.
Согласование сред. Рядовое соответствие.



$$\vec{E}_0 = \vec{E}_i = E_0 \vec{e}_y; \quad \vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_z$$

Плоская и неподвижная граница раздела

$$\vec{E}_t = E_0 \cos(\omega t - k_1 x) + E_r \cos(\omega t + k_1 x)$$

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega}{c} n_1 \quad (n = \frac{c}{v})$$

$$\vec{E}_2 = E_t \cos(\omega t - k_2 x)$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c} n_2; \quad v = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

$$H_z = \pm Z_0 \frac{E_x}{c}$$

$$\vec{H}_1 = H_0 \cos(\omega t - k_1 x) + H_r \cos(\omega t + k_1 x) = \frac{E_0 \vec{e}_z}{Z_1} \cos(\omega t - k_1 x) - \frac{E_r \vec{e}_z}{Z_1} \cos(\omega t + k_1 x)$$

$$\vec{H}_2 = \frac{E_t \vec{e}_z}{Z_2} \cos(\omega t - k_2 x)$$

Граничные условия: $E_{1x} = E_{2x}$
 $H_{1z} = H_{2z}$

при $x=0$

$$E_0 \cos(\omega t) + E_r \cos(\omega t) = E_t \cos(\omega t)$$

$$(E_0 = E_r)$$

$$\begin{cases} E_0 + E_r = E_t \\ \frac{E_0}{Z_1} - \frac{E_r}{Z_1} = \frac{E_t}{Z_2} \end{cases}$$

$$(n_1 = n_2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_0 + E_r = E_t \\ E_0 - E_r = E_t \end{cases}$$

$$2E_0 = E_t (1+1)$$

$$E_t = \frac{2E_0}{1+1}$$

$$E_r = \frac{1-1}{1+1} E_0$$

1) $1=1 \Rightarrow E_r=0$

условие согласованности
сред



Согласует, если $\frac{Z_1}{Z_2} = 1$

важна полярность.

2) Отношение сопротивлений $\gamma \sim 10^{15} \sqrt{\mu}$ (Ом) $\rightarrow \mu=1$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\epsilon}} = \frac{Z_{\text{вак}}}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{Z_{\text{вак}}}{\epsilon} = Z_{\text{вак}} \cdot \frac{1}{\epsilon}$$

$$\gamma = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_{\text{вак}} \cdot \frac{1}{\epsilon_1}}{Z_{\text{вак}} \cdot \frac{1}{\epsilon_2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

$$E_r = \frac{1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} E_0 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0$$

Пусть $\epsilon_2 > \epsilon_1$ (отражение от оптически более плотной среды)

$$E_r > 0, \text{ но } \Delta \varphi_{\text{фаз}} = \pm \pi \text{ (или } \Delta \varphi_{\text{фаз}} = \pm \frac{\pi}{2})$$

⑤ Оп. $R = \frac{S_r}{S_0}$ - коэфф-т отражения
 $T = \frac{S_t}{S_0}$ - коэфф-т прохождения

$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$

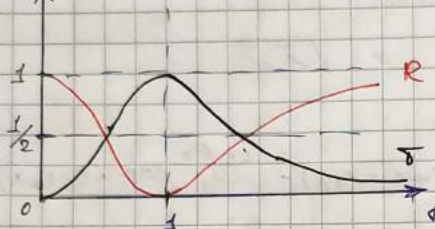
$S_0 = E_0 H_0 = \frac{E_0^2}{Z_1}$

$S_r = \frac{E_r^2}{Z_1}$; $S_t = \frac{E_t^2}{Z_2}$

$R = \frac{S_r}{S_0} = \left(\frac{E_r}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{1-f}{1+f}\right)^2$

$T = \left(\frac{E_t}{E_0}\right)^2 \cdot f = \frac{4f}{(1+f)^2}$

R, T



$R + T = 1$ (БЭЭ)

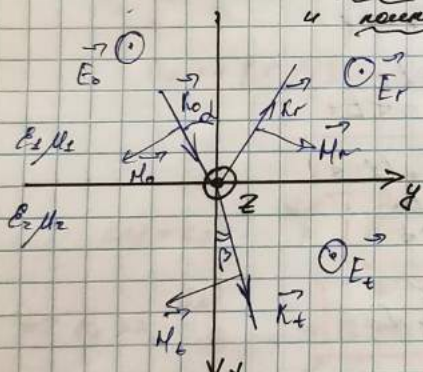
$f = 0 \rightarrow R = 1; T = 0$

$f = 1 \rightarrow R = 0; T = 1$

$f \rightarrow \infty \rightarrow R \rightarrow 1, T \rightarrow 0$

R, T не изменяются при $f \rightarrow \frac{1}{f}$

Напишем условие ДЛВ на
 границе раздела двух диэлектр. сред.
 Закон Снелля. Формулы Брюстера
 и полного внутреннего отражения.



Опр. Плоскость, в которой лежит нормаль
 границе сред и волновой вектор
 падающей волны назыв. плоскостью
 падения.

$\vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) + E_r \vec{e}_z \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})$

$\vec{E}_2 = E_t \vec{e}_z \cos(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})$

$\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = k_{1x} x + k_{1y} y$

$\vec{k}_r \cdot \vec{r} = -k_{1x} x + k_{1y} y$

$\vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_{2x} x + k_{2y} y$

$\vec{E}_0 \parallel \vec{E}_r \parallel \vec{E}_t \parallel \vec{e}_z$

$k_0 = k_1 = \frac{\omega}{v_1}$

Общаясь на волнов. граничные условия:

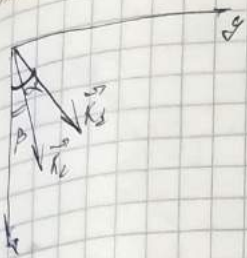
ГД: $E_{1x} = E_{2x}$
 $E_t = E_2$

$E_0 \cos(\omega t - k_{1y} y) + E_r \cos(\omega t - k_{1y} y) = E_t \cos(\omega t - k_{2y} y)$

(в каждой точке y выполн.) $\rightarrow$ аргументы =

$\forall t, \forall y$

$k_{1y} = k_{2y} \rightarrow k_t = k_2 = \frac{\omega}{v_2}$



$$k_1 \sin \alpha = k_2 \sin \beta$$

$$\frac{\omega}{v_1} \sin \alpha = \frac{\omega}{v_2} \sin \beta \quad (\alpha = \frac{c}{v_1})$$

$\Rightarrow$

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \sim \text{закон Снелля}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

при условии: $n_2 < n_1 \rightarrow \sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha$



$\forall \alpha: \sin \beta > 1 \Rightarrow$ нет волн в среде $E_2 = 0$

Но $E_x = E_{0x}$!

В 2-е среде поле, но в 2-е среде не образуется волна, а электромагнитное поле.

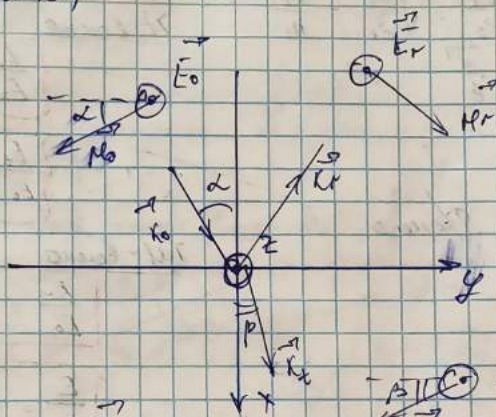
$$E = E_0 \cos(\omega t - kx) \rightarrow \hat{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$k = k_{re} + i k_{im}$$

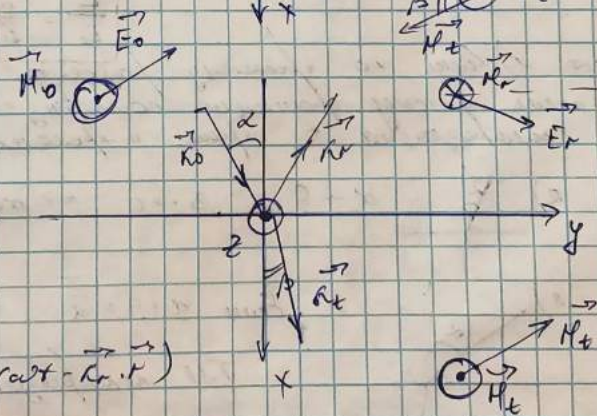
① ТЕ - волна

transverse

перпендикуляр к направлению распространения.



② ТМ - волна



① ТЕ - волна

$$\vec{E}_0 \parallel \vec{E}_r \parallel \vec{E}_t \parallel \vec{E}_z$$

$$E_t = E_0 \cos(\omega t - k_0 r) + E_r \cos(\omega t - k_r r)$$

$$E_z = E_t \cos(\omega t - k_t r)$$

$$E_{tz} = E_{tz}$$

$$(E_z = E_z) \text{ на } x, y$$

$$E_0 + E_r = E_t$$

$$H_{tz} = H_{tz}$$

$$-H_0 \cos \alpha + H_r \cos \alpha = -H_t \cos \alpha$$

как в волне: $H_y = \frac{E_z}{Z_0}$

$$\Rightarrow + \frac{E_0}{Z_0} \cos \alpha - \frac{E_r}{Z_0} \cos \alpha = + \frac{E_t}{Z_0} \cos \alpha$$

② Д.В. - волны

$$\vec{H}_0 \parallel \vec{H}_r \parallel \vec{H}_t \parallel \vec{E}_0$$

$$H_{0x} = H_{rx} \quad (H_{0z} = H_{tz})$$

$$H_0 - H_r = H_t$$

$$E_{0z} = E_{tz}$$

$$\rightarrow E_0 \cos \alpha + E_r \cos \alpha = E_t \cos \beta$$

$$E_0 = H_0 Z_1$$

$$E_r = -H_r Z_1$$

$$E_t = +H_t Z_2$$

26.09.22. Волны не имеют фазового. Лично рассуждаю в хар-ном. Связь готовое решение:

$$\tilde{n} = 1 \quad (\sim 10^{15} \text{ Т.А.})$$

$$\tilde{n} = \frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Д.В. волны:

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{-\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{E_t}{E_0} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

~ Исходя из эфф. коэф

Ф. волн

Т.В. волны:

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}$$

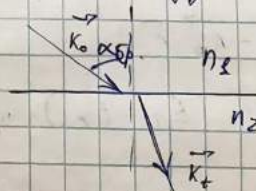
$$\frac{E_t}{E_0} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$$

Средства: 1) Если на границу раздела падает неполяризованный свет (состоит из смеси Т.В. волн), то после прохождения границы поляризация не меняется. (поляризация в отраж. и преломл. волнах.)

2) $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow 0 \Rightarrow$ формулы для нормального падения.

3) Если $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) \rightarrow \infty \Rightarrow E_r \rightarrow 0$

Т.В. поляризации не будет в отраж. волне.



$E_r \rightarrow 0$ ~ отсутствие отражения

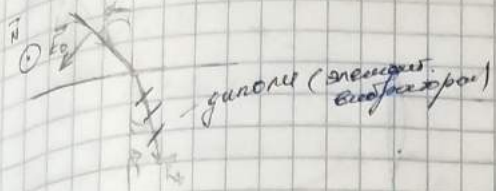
Угол Брюстера: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_{бр} \rightarrow \sin \beta = \cos \alpha_{бр}$$

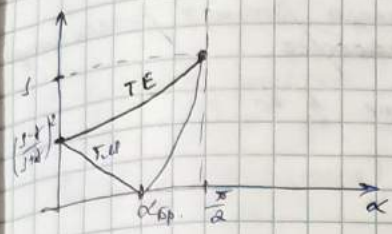
$$\tan \alpha_{бр} = \frac{n_2}{n_1}$$

~ угол Брюстера.

Волна падает ~ линейн. свет на границе ~ возникает диполь. ~ диполь не излучает по своей оси (вектр. по E_0)



$$R = \left(\frac{E}{E_0} \right)^2$$



Метаматериалы

и возникает с $\epsilon < 0$ и $\mu < 0$ (создание неустойчивого). $\rightarrow$ знак в ф-тах не меняется, т.е. волна пробегает.

Но меняется в уравнениях Максвелла: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
 $\vec{B} = \mu \vec{H}$

Для y волны:

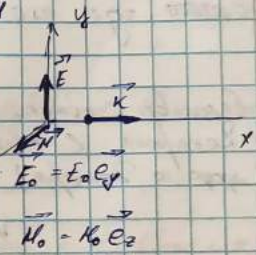
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Пусть сделаем выбор x:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\vec{H} = H_0 e^{i(\omega t - kx)}$$



$$-ik E_y = -\mu(i\omega) H_z$$

$$k E_y = \mu \omega H_z \Rightarrow \underline{[k, E] = \mu \omega H}$$

$$-ik H_z = -\epsilon(i\omega) E_y \Rightarrow [k, H] = -\epsilon \omega E$$

Если сравним с общими волновыми, у которых:

$\epsilon > 0, \mu > 0 \Rightarrow \{E, H, k\}$ - правая тройка.
 $\epsilon < 0, \mu < 0 \Rightarrow \{E, H, k\}$ - левая тройка.

$\vec{S} = [E, H] \sim$ по правилу ПА $\Rightarrow \{E, H, \vec{S}\}$ - правая тройка.

$\Rightarrow$ Скорость: $\vec{k} \parallel \vec{S}$ (выбор $\vec{k}$ антипараллелен $\vec{S}$, исходя из метаматериала, а $\vec{k}$ к источнику)

① т.к. $\vec{u} \parallel \vec{k} \Rightarrow$ отрицательный эффект Доплера (всё наоборот.)

②

$$\epsilon_1, \mu_1$$

$$\epsilon_2, \mu_2$$

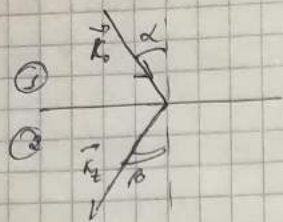
на границе раздела: $\Gamma \ni \begin{cases} E_{1x} = E_{2x}; & D_{1n} = D_{2n} \\ H_{1z} = H_{2z}; & B_{1n} = B_{2n} \end{cases}$

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

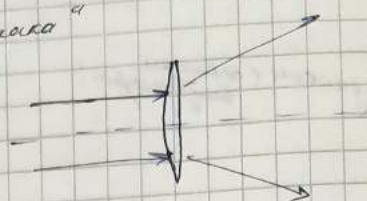
$$\mu_1 H_{1x} = \mu_2 H_{2x}$$

Если обе среды из метаматериалов $\rightarrow$ левая тройка.

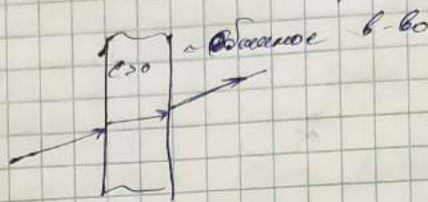
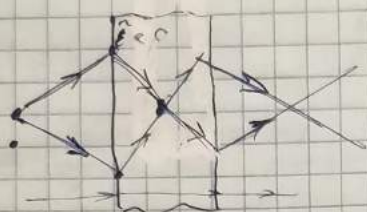
Пусть $\tilde{\epsilon} = \epsilon, \tilde{\mu} = \mu$ ~ вакуум
 $\tilde{\epsilon} < 0, \tilde{\mu} < 0$ ~ метамат.



Сформирует луч по излучен., а приемник, освещенный
 $\Rightarrow$ "Этапу инверсии"

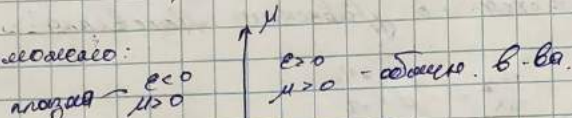


Собир. линза рассеивает рассеивает
 и наоборот.



③ $\epsilon_z = -\epsilon_z \Rightarrow$ Пропускается только один луч, а отраженный не будет.
 $\mu_z = -\mu_z \Rightarrow \epsilon_x = 0, \epsilon_y \neq 0$

Обычно, где что-то возможно:



Справедливо только для тех
 в-в, в которых $\epsilon = \epsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$
 (без учета дисперсии!)
дисперсия!

Преобразование диэлектрических сред в анизотропных средах. (Введение в кристаллооптику)

Опр. Анизотропия - зависимость какого-либо параметра среды от направления.

Сформированные среды: $\hat{\mu} = 1$
 $\hat{\epsilon} = 0$ (непроводящая среда)
 $\hat{\epsilon}$ - тензор

Изотропная среда: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

теперь для связи будет тензор ϵ_{ij}

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j \quad (D_x = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z)$$

т.е. $\hat{\epsilon} = 0 \rightarrow$ среда не проводящая $\rightarrow$ тензор симметричный - приводится
 к диагональному виду:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \text{ - симметрично.}$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

вероятно

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_{xx} \\ \epsilon_y &= \epsilon_{yy} \\ \epsilon_z &= \epsilon_{zz} \end{aligned} \right\} \text{главные значения.}$$

Если $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \text{const}$ в.66 используется - дуальный принцип.

Пример: радиальная сфера: $\left. \begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\epsilon_x} = 1,95 \\ n_2 &= 2,04 \\ n_3 &= 2,24 \end{aligned} \right\} \text{радиальная сфера}$

$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_0$ (поперечная к вертикальной оси)

"0" не имеет!

$\epsilon_z = \epsilon_{||} = \epsilon_0$ (вертикальная) ($\epsilon_z \neq \epsilon_x$)

и такие привели к относительной (в данном случае) оси z)

ординату ("обыкновенная")
экстраординату ("необыкновенная")

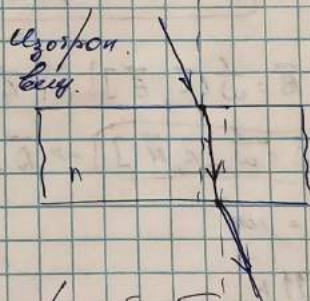
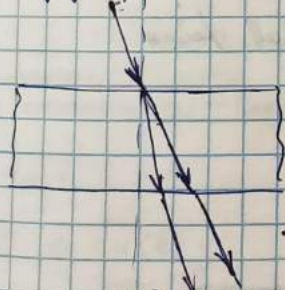
Пример: "излучающий излучатель" $\rightarrow n_{||} = n_{\perp} = 1,658$
 $n_{||} = n_{\perp} = 1,486$

эллипсоид Коши (эллипсоид волновых нормалей, огибающая индикатриссы)

$$\frac{x^2}{\epsilon_x^2} + \frac{y^2}{\epsilon_y^2} + \frac{z^2}{\epsilon_z^2} = 1 \quad \text{или} \quad \epsilon_x^2 x^2 + \epsilon_y^2 y^2 + \epsilon_z^2 z^2 = 1$$

В одноосных кристаллах 2 показателя преломления (исл. 3-й Снегид.)
 $\Rightarrow$ возможно двулучепреломление.

двулучепреломление



- один луч обыкновенный, другой необыкновенный

но не все



бессега вращ?

1) e - "бессега" вокруг o

2) $\vec{E}_o \perp \vec{E}_e$

актинизм

Как устроена поляризация? Сферическая волна?

Распространение плоских гармонических волн в анизотропных средах.

$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

эллипсоид Коши (метод не подходит с "0" и "инfinity")

$\vec{D} = \vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

$$\vec{B} = B_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{H} = H_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Зр-я Максвелла (в ЭИ):

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow -ik_x \\ \frac{\partial}{\partial y} &\rightarrow -ik_y \\ \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow -ik_z \end{aligned} \right\}$$

$$\text{div } \vec{D} = -i(k_x D_x + k_y D_y + k_z D_z) = -i \vec{k} \cdot \vec{D} = 0$$

Аналогично:

$$\text{div } \vec{B} = -i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{k} \perp \vec{D}; \vec{B} \perp \vec{k}; \vec{D} = \frac{1}{\omega} [\vec{k}, \vec{H}]$$

$$\text{rot}(\vec{f} \vec{A}) = \vec{f} \text{rot } \vec{A} + [\nabla f, \vec{A}] \sim \text{формула}$$

$$\vec{A} = \vec{E}_0 = \text{const}$$

$$f = e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \Rightarrow \text{rot } \vec{E}_0 = 0$$

$$\nabla f = -ik_x \vec{e}_x f - ik_y \vec{e}_y f - ik_z \vec{e}_z f = -i \vec{k} f$$

$$\Rightarrow [-i \vec{k}, \vec{E}] = -i \omega \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} [\vec{k}, \vec{E}]$$

29.04.22.

$$|\vec{B} = \frac{1}{\omega} [\vec{k}, \vec{E}]| \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{H} \perp \vec{k} \quad \{\vec{D}, \vec{B}, \vec{k}\}$$

$$|\vec{D} = \frac{1}{\omega} [\vec{k}, \vec{H}]| \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{k}$$

напр. поля

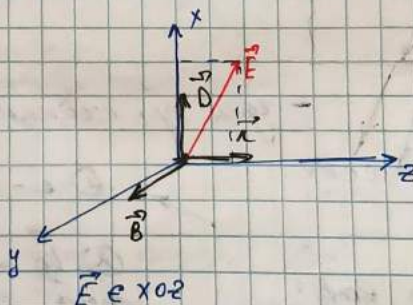
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} \parallel \vec{H}$$

В общем случае:

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j \quad (i, j = x, y, z)$$

$$\vec{D} \parallel \vec{E} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$$



Качественное рассмотрение частотных случаев для ортотропного кристалла.

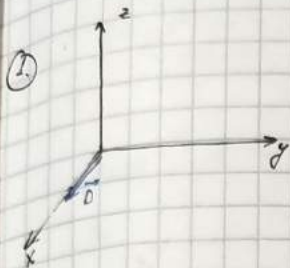
Объемная и поверхностная волны.

Опр. Любая пл-ть, содержащая ось z назыв. изотроп. средами

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$$

$E_z = E_{||}$ ~ функция только от z .

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{pmatrix}$$



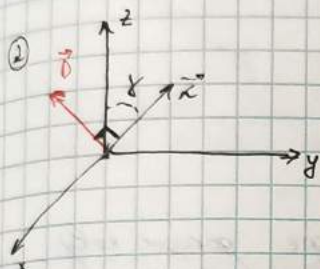
Пусть $\vec{D} \parallel \vec{Ox}$; $\Rightarrow \vec{k} \in (yz)$

$$D_x = \epsilon_k E_x \Rightarrow \vec{D} \parallel \vec{E}, \quad \epsilon_k = \epsilon_{||}$$

$\Rightarrow$ фазовая скорость в направлении $\vec{k}$ не зависит.

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon_{||}}} = u_0 \sim \text{скорость распространения волн}$$

Свойств: $\vec{D} \parallel \vec{E}$ и скорость не зависит от $\vec{k}$.



$\vec{D} \in (yz)$

а) пусть $x=0 \Rightarrow \vec{k} \parallel \vec{Oz}$

$$\vec{D} = -D_y \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \text{будет равняться } D_y = \epsilon_k E_y = \epsilon_{\perp} E_y$$

$$\Rightarrow \vec{D} \parallel \vec{E}$$

$$u_e = u = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon_{\perp}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon_{||}}} = u_0 \sim \text{но волна небыстроходная, зависит от } \gamma.$$

$$\text{б) } k = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{k} = k \vec{e}_y$$

$$\vec{D} = D_z \vec{e}_z \rightarrow D_z = \epsilon_k E_z = \epsilon_{||} E_z$$

$$\Rightarrow u_e = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon_{||}}} \neq u_0$$

Свойства:

е (электроиндукция) - волна

$$1) \vec{E} \perp \vec{D}$$

$$2) u_e = u(x)$$

3) Отлич. поляризации в оптич. и неоптич. волне. (прохож. напр. $\vec{E}$)

$$4) \text{ в о-волне } \vec{E} \perp (\vec{k}, \vec{e}_z) \Rightarrow \vec{E}_o + \vec{E}_e$$

$$\text{в е-волне } \vec{E} \in (\vec{k}, \vec{e}_z)$$

Уменьшение поляризации и растр. в волн. в средах с нелинейными свойствами. Гибридные волноводы и плазменные волноводы.

Разбегает так, что...

лучи $\vec{k}$ перп. собою $\perp$ по y

$\vec{D} \perp \vec{k}$, т.е. $\vec{D}$ возмущено
любое напр. в (x, z)

$$D_{\perp} \rightarrow E_{\perp} \Rightarrow o\text{-волна}$$

$$D_{\parallel} \rightarrow E_{\parallel} \Rightarrow e\text{-волна}$$

Что будет с фазой?

$$y=0: \varphi_o = \varphi_e = 0$$

$$n = \frac{c}{u} \Rightarrow n_o = \frac{c}{u_o}$$

$$n_e = \frac{c}{u_e}$$

Какой эффект будет при прохождении фазы φ ?

$$\Delta \varphi_o(d) = \varphi_o(d) - \varphi_o(0) = k_o d = \frac{\omega}{c} n_o d = \frac{2\pi}{\lambda} n_o d$$

$$k = \frac{\omega}{u} = \frac{\omega}{c} n, \quad \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Delta \varphi_e(d) = \varphi_e(d) - \varphi_e(0) = \frac{2\pi}{\lambda} n_e d$$

$$\Delta \varphi_{o,e} = \frac{2\pi}{\lambda} d (n_o - n_e)$$

Опр. Пластина назыв. четверть волновой, если она вносит разность фаз $\Delta \varphi_{o,e} = \frac{\pi}{2}$ — "1/4" разность хода

$d_{\min} = ?$ (минимальная толщина пластины)

$$\frac{2\pi}{\lambda} d_{\min} |n_o - n_e| = \frac{\pi}{2} \rightarrow d_{\min} = \frac{\lambda}{4 |n_o - n_e|}$$

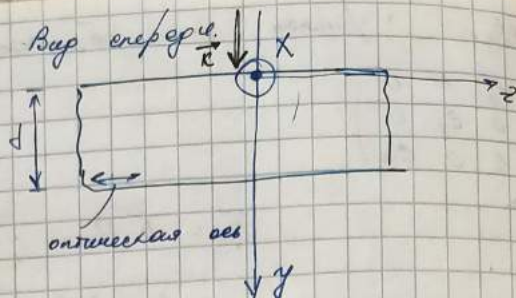
Опр. Пластина назыв. полуволновой, если она вносит разность фаз $\Delta \varphi_{o,e} = \pi$ — "1/2"

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2 |n_o - n_e|}$$

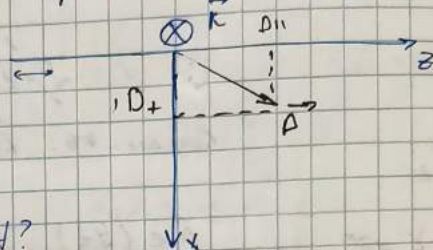
Нужно, чтобы определить поляризацию.

$$\vec{E} = E_{\perp} \vec{e}_x + E_{\parallel} \vec{e}_z$$

$$y=0: \Delta \varphi_o = \Delta \varphi_e = 0$$



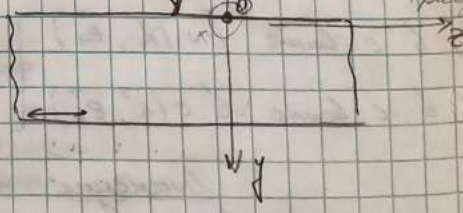
Вид сверху:



На входе фазы сову., а в итоге получили с разностью фаз в эту сумму



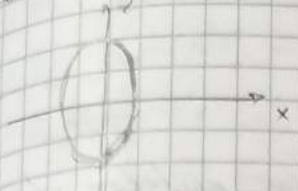
Среднее значение скорости



Ем. волна "1/4" плоско

$$\Delta\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

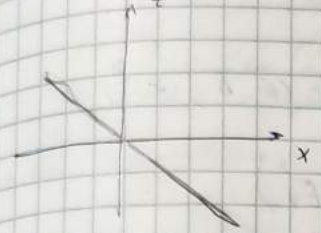
$$\Delta\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$



→ плоская упругая линейно-поляр. волна
эллиптически искр.

(при $E_{\perp} = E_{\parallel}$ - круговая поляризация)

Ем. волна "1/2" плоско

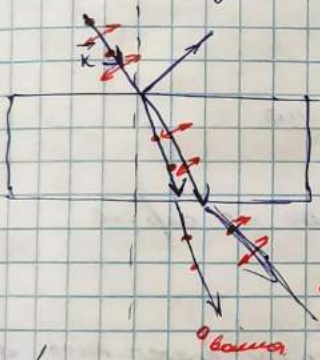


⇒ лин. поляризация, или поворачивая

Представим себе фазовый цилиндр света, когда вырезаем
паралл. оптической осей!

Поляризационные устройства

~ позволяют выделить лучи с опред. направл. $\vec{E}$

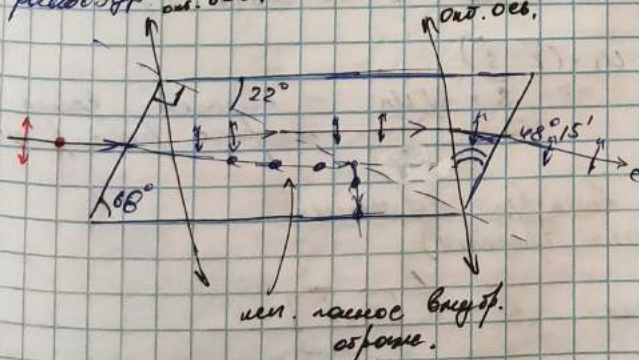


⇒ можно создать устр-во, которое из
неполяризованного света будет давать
поляризов.!

1) Призма Николь (николь) - Зильян Николь, 1828г.

Исходный материал → $n_o = 1,558$
 $n_e = 1,486$

расщепл. о.с.в.



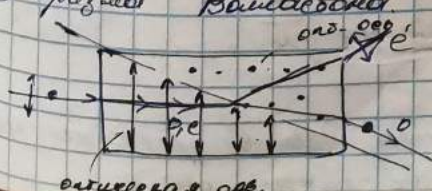
складываю всё!

$n_k = 1,55$ - показатель Брюстера

$n_e < n_k < n_o$ - на этом вся игра

~ расщепл. как двупучковый
поляризатор

2) Призма Вомассона (из кальцевого шпата)



оптическая ось

Энергетические соотношения для
анизотропных сред. Лучевой вектор
и к-ты.

Теорема Пойнтинга:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{S} - \frac{\partial E^2}{\partial t}, \text{ расст. излучения } \vec{S}$$

① $w = w_{\text{эл}} + w_{\text{маг}}$

$$w_{\text{эл}} = \frac{\mu N^2}{2}$$

$$w_{\text{эл}} = \frac{1}{2} (\vec{E}, \vec{D}) \sim w_{\text{эл}} \neq 0, \text{ т.е. } w_{\text{эл}} > 0 \Rightarrow (\vec{E}, \vec{D}) < \frac{\pi}{2}$$

$$w_{\text{эл}} = \frac{1}{2} (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z) = \frac{1}{2} (E_x \epsilon_x^2 + E_y \epsilon_y^2 + E_z \epsilon_z^2)$$

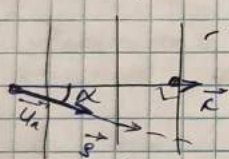
$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j, \text{ если } \epsilon \sim \text{имеет диагональный вид}$$

② Поебунд: $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] \rightarrow \vec{S} \perp \vec{E}$

Но! $\vec{E} \nparallel \vec{k}$ (в анизотропных средах)

$$\Rightarrow \vec{S} \nparallel \vec{k}!$$

$\vec{S}$ - лучевой вектор, но $\vec{S}$ несет энергию



волн. фронты

$\vec{k} \perp$ волн. фронты по опр-но.

$\vec{u}_1$ - лучевая к-та

Пусть прошло время Δt : волновые фронты сместились на $u_1 \Delta t$ по направлению $\vec{S}$

Энергия: $u_1 \Delta t$

$$\Rightarrow \text{из рисунка } u_1 = \frac{u}{\cos \alpha} \text{ или } u = u_1 \cos(\vec{k}, \vec{S})$$

$$\Rightarrow \vec{S} = u \vec{u}_1 \text{ - скорость, вдоль которой распространяется волна}$$

С.О.Б.22.

Уравнения векторных нормалей.
(уравнения Френеля).

Исходя из ур-ий Максвелла:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} [\vec{k}, \vec{E}]$$

$$\vec{D} = -\frac{1}{\omega} [\vec{k}, \vec{H}]$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\vec{D} = -\frac{1}{\omega^2 \mu} [\vec{k}, [\vec{k}, \vec{E}]] = -\frac{1}{\mu \omega^2} (\vec{k}(\vec{k}, \vec{E}) - \vec{E} k^2)$$

$\rightarrow$ заменим это в проекции на ось. (z-опт. ось.)

$$\begin{aligned} \epsilon_x E_x &= D_x = \frac{1}{\mu\omega^2} (\kappa^2 E_x - \kappa_x (\vec{\kappa}, \vec{E})) \\ \epsilon_y E_y &= D_y = \frac{1}{\mu\omega^2} (\kappa^2 E_y - \kappa_y (\vec{\kappa}, \vec{E})) \\ \epsilon_z E_z &= D_z = \frac{1}{\mu\omega^2} (\kappa^2 E_z - \kappa_z (\vec{\kappa}, \vec{E})) \end{aligned} \quad \leftarrow \text{или рассм-ли симметричный тензор } \epsilon$$

→ можно выразить E_x, E_y и E_z

$$\begin{aligned} \epsilon_x E_x &= \frac{\kappa_x (\vec{\kappa}, \vec{E})}{\kappa^2 - \mu\omega^2 \epsilon_x} \\ \epsilon_y E_y &= \frac{\kappa_y (\vec{\kappa}, \vec{E})}{\kappa^2 - \mu\omega^2 \epsilon_y} \\ \epsilon_z E_z &= \frac{\kappa_z (\vec{\kappa}, \vec{E})}{\kappa^2 - \mu\omega^2 \epsilon_z} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z \\ \text{имеют смысл, когда } \kappa^2 \neq \mu\omega^2 \epsilon_i \end{array} \right\}$$

$u = \frac{\omega}{\kappa}$ - фаз. сл-ть

$$\Rightarrow u^2 \neq \frac{1}{\mu\epsilon_i}$$

справедливо только для e-волн
А в обыкновенной волне в зк-те
поле. Но!
в o-волне $\vec{E} \perp \vec{\kappa} \Rightarrow (\vec{\kappa}, \vec{E}) = 0$

$$\kappa_x E_x + \kappa_y E_y + \kappa_z E_z = \frac{\kappa_x (\vec{\kappa}, \vec{E})}{\kappa^2 - \mu\omega^2 \epsilon_x} + \frac{\kappa_y (\vec{\kappa}, \vec{E})}{\kappa^2 - \mu\omega^2 \epsilon_y} + \frac{\kappa_z (\vec{\kappa}, \vec{E})}{\kappa^2 - \mu\omega^2 \epsilon_z}$$

$(\vec{\kappa}, \vec{E}) \sim$ для рассм-ли e-волны $(\vec{\kappa}, \vec{E}) \neq 0 \rightarrow$ сократим

$$\frac{\kappa_x^2/\kappa^2}{1 - \frac{\mu\omega^2 \epsilon_x}{\kappa^2}} + \frac{\kappa_y^2/\kappa^2}{1 - \frac{\mu\omega^2 \epsilon_y}{\kappa^2}} + \frac{\kappa_z^2/\kappa^2}{1 - \frac{\mu\omega^2 \epsilon_z}{\kappa^2}} = 1 \quad \text{1) Введем единичный вектор нормали}$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} \quad \vec{N} \parallel \vec{\kappa}$$

$$|\vec{N}| = 1 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2$$

проекции нормали (N_x^2)

$$\frac{\kappa_x^2/\kappa^2}{1 - \frac{\mu\omega^2 \epsilon_x}{\kappa^2}} + \frac{\kappa_y^2/\kappa^2}{1 - \frac{\mu\omega^2 \epsilon_y}{\kappa^2}} + \frac{\kappa_z^2/\kappa^2}{1 - \frac{\mu\omega^2 \epsilon_z}{\kappa^2}} = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2$$

$$2) \left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2 = u^2$$

3) Введем величины размерности скорости $v_i^2 = \frac{1}{\mu\epsilon_i} \quad (i=x, y, z)$

$$N_x^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{u^2}{v_x^2}} - 1 \right) + N_y^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{u^2}{v_y^2}} - 1 \right) + N_z^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{u^2}{v_z^2}} - 1 \right) = 0$$

приводим к общему знаменателю

$$\frac{N_x^2}{u^2 - v_x^2} + \frac{N_y^2}{u^2 - v_y^2} + \frac{N_z^2}{u^2 - v_z^2} = 0$$

~ ур-е волновых нормалей
(дифференциальное ур-е,
ур-е Френеля)

Если мы знаем св-ва кристалла → можем найти скорости волны в любом направлении.

Пример: в одноосном кристалле $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{\perp} \Rightarrow v_x = v_y = v_{\perp} \equiv v_o$
 $\epsilon_z = \epsilon_{\parallel} \Rightarrow v_z \equiv v_{\parallel} \equiv v_e$

$$\Rightarrow \frac{N_x^2 + N_y^2}{u^2 - v_o^2} + \frac{N_z^2}{u^2 - v_e^2} = 0 \quad \rightarrow \quad N_x^2 + N_y^2 = N_z^2 \quad \text{— поперечно к оси } z$$

$$N_z^2 = N_{\parallel}^2$$

$$(u^2 - v_2^2) N_{\perp}^2 + (u^2 - v_2^2) N_{\parallel}^2 = 0 \rightarrow \text{выражается скорость.}$$

Плоскость главного сечения - любое сечение, содержащее оптическую ось.

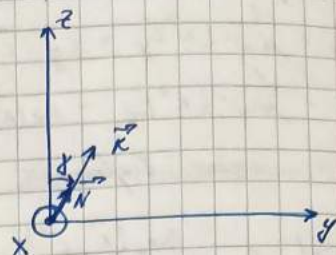
$$N_{\parallel} = \cos \delta'; \quad N_{\perp} = \sin \delta'$$

$$u^2 = v_0^2 \sin^2 \delta' + v_0^2 \cos^2 \delta'$$

а) $\delta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = v_0$

б) $\delta' = 0 \Rightarrow u = v_0$

Оптическая ось - это единичный вектор, где 0 и с-волны бежит с одной скоростью.



Уравнение лучевой поверхности

Энергия зависит не по вектору $\vec{S}$, а не по $\vec{k}$, поэтому глаз всегда падает не по дисперсионному ур-ю! По лучевому (лучевая пов.-сть).

Ур-е лучевой поверхности:

$$\vec{D} = -\frac{1}{\omega} [\vec{k}, \vec{H}] = -\frac{1}{\omega} [\vec{N}, \vec{H}] = -\frac{1}{u} [\vec{N}, \vec{H}]$$

Введём ещё один единичный вектор вдоль $\vec{S} \rightarrow \vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}$$



$$[\vec{E}, \vec{D}] = -\frac{1}{u} [\vec{E}, [\vec{N}, \vec{H}]] = -\frac{1}{u} (\vec{N}(\vec{E}, \vec{H}) - \vec{H}(\vec{E}, \vec{N})) \equiv$$

по акр-ию: $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] \Rightarrow \vec{S} \perp \vec{H}$

$$\Rightarrow \frac{\cos \alpha}{u} \vec{H} = \text{введём лучевую ск-сть } u_n = \cos \alpha \Rightarrow \frac{1}{u_n} \vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = u_n [\vec{E}, \vec{D}] \sim \text{т-представление}$$

исп. $\vec{B} = \frac{1}{\omega} [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{1}{\omega} [\vec{N}, \vec{E}] = \frac{1}{u} [\vec{N}, \vec{E}]$

N-представление	т-представление
$\vec{N}$	$\vec{E}$
$\frac{1}{u}$	u_n
$\vec{E} \quad (E_i = \frac{D_i}{\epsilon_i})$	$\vec{D} \quad (D_i = \epsilon_i E_i)$

Связь представления ур-е волновой нормали в т-представлении

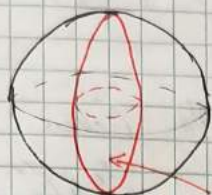
$$\frac{t_n^2}{u_n^2} + \frac{t_g^2}{u_n^2} + \frac{t_e^2}{v_n^2} = 0 \sim \text{ур-е лучевой поверхности}$$

в случае эллипсоидного кристалла это ур-е эллипсоида.

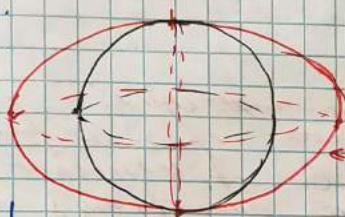
ϵ - волна - эллипсоид
 o - волна - сфера

Показатели преломления

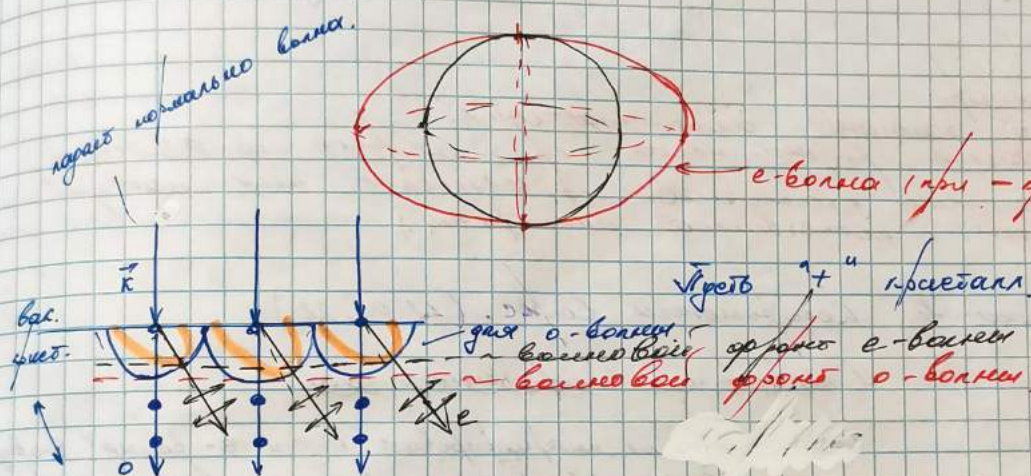
Если волна падает под углом θ на границу раздела, то она становится o -волной.



e -волна (при $\theta = 0$)
 $n_e > n_o$



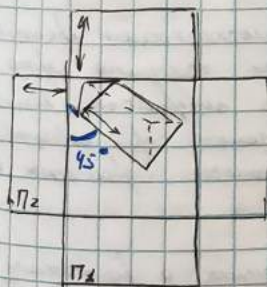
e -волна (при $\theta = 0$)
 $n_e < n_o$



Интерференция поляризованного света

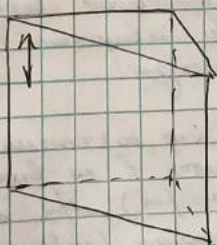
$\vec{E}_o \perp \vec{E}_e \Rightarrow$ нет интерференции.

Возникнет 2 показателя в срезах под углом 45° .



Если между P_1 и P_2 положить двойник, то на выходе получим не 0.

кварц

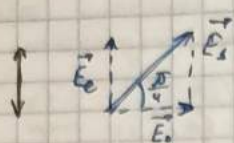


кварцевый плен

1) E_1 - после P_1

Повернуть ленту для удобства.

2)



~ в шине. (+ даёт набег фазы)

$$\Delta\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 h$$

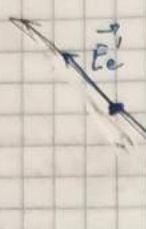
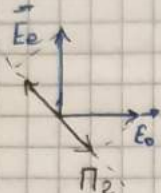
$$\Rightarrow \Delta\phi_{ge} = \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 - n_e) h$$

$$\Delta\phi_e = \frac{2\pi}{\lambda} n_e h$$



фазе того, оном свет

3)



~ после Π_2 (свет в параллельное положение)

$\vec{E}_0' \parallel \vec{E}_0'' \rightarrow$ всё зависит от h , то будет интерф. максимум и минимум.

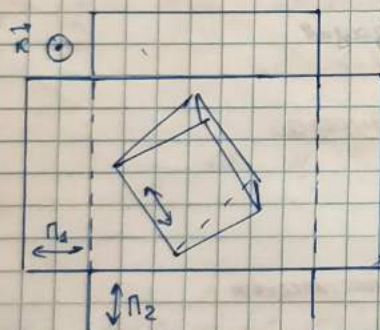
* лекция 10.05.22

Какой толщины были пластинки? И что такое разность фаз, при повороте пластинки? Внутреннее становится прозрачным или наоборот (это отн. к соответствующим амплитудам).

Восстановить в Космическом вопросе. (14.05.22.)

14.05.22

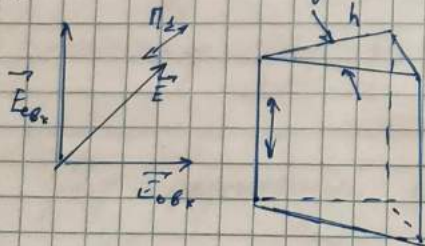
1. Интерференция поляризованного света



Можно ли интерферировать о- и е- волны? Очевидно что нет, т.к. $\vec{E}_o \perp \vec{E}_e$. Как заставить их интерферировать?

Представим себе 2 скрещенных поглотителя Π_1 и Π_2 (их плоскости пропускают перпендикулярно, и излучающего тела, свет через такую систему не проходит) между поляризаторами поставим кварцевый клин (кварц - оптически анизотропное вещество), вырезанный так, что его оптическая ось параллельна ребру.

Если оптически ось клина составляет угол 45° с плоскостью пропускания поляризаторов (см. рис.), то ребро клина темнее, т.к. $\Pi_1 \perp \Pi_2$ (у ребра толщина клина настолько мала, что не влияет на прохождение света), а дальше вдоль поверхности клина будет наблюдаться система интерференционных светлых и тёмных полос при освещении монохроматическим светом, и при освещении белым светом появится окраска в разные цвета. Почему это происходит?



Для объяснения разберём рисунок и разложим вектор $\vec{E}$ на входе в клин на компоненты $\vec{E}_{o1}$, $\vec{E}_{e1}$ (см. рис.). При этом $\vec{E}_{o1}$ лежит в плоскости входной волны (параллельно оптической оси клина), а $\vec{E}_{e1}$ перпендикулярно этой плоскости.

Поскольку Π_1 составляет 45° с осью клина, а $\vec{E}$ сонаправлено с Π_1 , то амплитуды компонент $\vec{E}_{o1}$, $\vec{E}_{e1}$ одинаковы, их разность фаз у ребра клина равна нулю. Там, где $h \neq 0$, появляется разность фаз о- и е- волн.

2) Влияние волны, при толщине

При проходе

3) Влияние только на их амплитуды

Итак, на

$\vec{E}_{o1}$

(здесь во-первых)

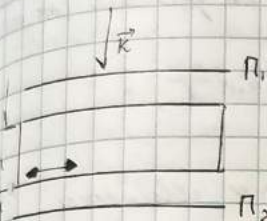
Наблюдается квадратура



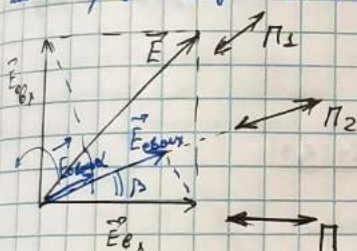
$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_o - \Delta\varphi_e = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)h$$

На выходе из светового пучка векторы E_o и E_e проецируются на плоскость P_2 (см. рис.). Теперь $E_{o\text{вых}}$ и $E_{e\text{вых}}$, а разность фаз волн не зависит от времени, значит будет интерференция. Поскольку разность фаз зависит от h , получаются интерференционные полосы (полосы равной интенсивности). Кроме того, разность фаз зависит от длины волны, поэтому в спектре света максимумы окрашены.

2. Расчет интенсивности при прохождении через пластинку P_1 и P_2 (закон Малюса, БИО.).
Характеристики пластинки:



Рассмотрим прохождение неполяризованной волны (длина волны λ) через пластинку, сдвигу 2π по фазе и кристаллической структуре, перпендикулярной оси оптического вращения, вектор k перпендикулярен оси (см. рис.). Пусть n_o — показатель преломления параллельно оси, n_e — перпендикулярно оси. Пусть I_o — интенсивность света, падающего на пластинку.



Рассмотрим поочередно влияние каждого из этих элементов.

1) Влияние P_1 : поляризатор "сдвигает" polarization intensity, т.е. на выходе из него амплитуда волны $E = \sqrt{I_o/2}$, и проецирует вектор E только на параллельную ось P_1 (см. рис.).

2) Влияние пластинки: на входе в пластинку волна разлагается на o - и e -волны, при этом вектор $E_{o\text{вх}}$ направлен перпендикулярно оптической оси, а $E_{e\text{вх}}$ параллельно оси. Амплитуда этих волн:

$$E_{o\text{вх}} = E \sin \alpha, \quad E_{e\text{вх}} = E \cos \alpha$$

При прохождении через пластинку в каждой волне появляется разность фаз:

$$\Delta\varphi_o = k_o h = \frac{2\pi}{\lambda} n_o h, \quad \Delta\varphi_e = k_e h = \frac{2\pi}{\lambda} n_e h$$

3) Влияние P_2 : P_2 анализатор, он пропускает вектор направления поля только параллельно оси P_2 , поэтому направления векторов $E_{o\text{вых}}$ и $E_{e\text{вых}}$, а амплитуды на выходе из P_2

$$E_{o\text{вых}} = E_{o\text{вх}} \sin \beta = E \sin \alpha \sin \beta, \quad E_{e\text{вых}} = E_{e\text{вх}} \cos \beta = E \cos \alpha \cos \beta$$

Итак, на выходе из светового пучка 2 волны.

$$E_{o\text{вых}} = E \sin \alpha \sin \beta \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_o h), \quad E_{e\text{вых}} = E \cos \alpha \cos \beta \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_e h)$$

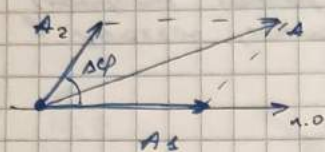
(здесь волновые векторы, как 1 и 2, т.е. после выхода из пластинки по фазе "обычные" и "необычные" лучи).

Наблюдаемая средняя интенсивность равна среднему по времени от квадрата суммы волновых полей:

$$I = \langle (E_{1\text{век}} + E_{2\text{век}})^2 \rangle = E^2 \langle (\sin\alpha \sin\beta \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_0 h) + \cos\alpha \cos\beta \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_0 h))^2 \rangle$$

Стандартное удобное название векторных диаграмм. Для этого времени обозначим:

$$A_1 = E \sin\alpha \cdot \sin\beta, \quad A_2 = E \cos\alpha \cos\beta, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 - n_0) h$$



ИВА!

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(1 - 2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}) = (A_1 + A_2)^2 - 4A_1A_2 \sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}$$

Возвращаемся к прежнему преобразованию и упрощаем по времени (это дает 1/2 в амплитуде):

$$(1) \quad \underline{I} = \frac{E^2}{2} (\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta)^2 - 4 \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta \sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{I_0}{4} (\cos^2(\alpha - \beta) - \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}) \sim \text{д-н Малюкова}$$

Обсуждение: • первое слагаемое в скобках в (1) соотв. тому, каковы были бы интенсивность, если бы между поляризациями не было различия. Второе слагаемое учит. во 2-м слагаемом, т.к. в него входит разность фаз 0-ч е-волны в материале.

• Частные случаи:

$$1) \Pi_1 \perp \Pi_2 \Rightarrow \alpha - \beta = \pi/2 \Rightarrow \cos^2(\alpha - \beta) = 0, \quad \sin(2\alpha) = -\sin(2\beta)$$

$$\underline{I} = \frac{I_0}{4} \sin^2(2\alpha) \sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$2) \Pi_1 \parallel \Pi_2 \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \underline{I} = \frac{I_0}{4} (1 - \sin^2(2\alpha) \sin^2\frac{\Delta\varphi}{2})$$

Это означает, что поворот анализатора Π_2 на угол $\pi/2$ меняет картину на противоположную: там, где были макс, будут мин, и наоборот.

При освещении белым светом можно наблюдать хроматическую поляризацию. Поскольку разные длины волн не интерферируют, интенсивности складываются, и из (1) получим:

$$\underline{I} = \frac{I_0}{4} \cos^2(\alpha - \beta) - \sum_{(\lambda)} \frac{I_{0\lambda}}{4} \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \sin^2\frac{\Delta\varphi(\lambda)}{2} \quad (2)$$

где $I_{0\lambda}$ - интенсивность спектральной компоненты с длиной волны λ . Видно, что в (2) разность фаз волн зависит от λ . Это значит, что при определенной температуре материала для каждой-то длины волны возможен макс, а для другой мин. Тогда материал окрашивается в цвет, соотв. максимуму от явления хроматической поляризации.

• Частные случаи:

$$1) \Pi_1 \perp \Pi_2 \Rightarrow \underline{I} = \sin^2 2\alpha \sum_{(\lambda)} \frac{I_{0\lambda}}{4} \sin^2\frac{\Delta\varphi(\lambda)}{2}$$

В этом случае наблюдаются чередующиеся полосы (поляризации срезуем!) опрашиваемую в разном цвете пластинку. При вращении пластинки изменяется угол α , значит, изменяется интенсивность, а цвета сохраняются.

$$2) \Pi_1 \parallel \Pi_2 \Rightarrow \underline{I} = \frac{I_0}{4} - \sum_{(\lambda)} \frac{I_{0\lambda}}{4} \sin^2 2\alpha \sin^2\frac{\Delta\varphi(\lambda)}{2}$$

Теперь в гол. цвета.

Некоторые расхождения при этом

Это - угловой рассеяния.

Возможности формирования на границах раздела излучения

Появление эффекта

На рис. конденсат возникает

где B - существующий эффект разности знаков, пути в

Схема записи оптических микроволн и красной

Объяснение появления эффекта

Теперь машина будет на белом фоне, и она будет окрашена в гол. цвета.

3. Искусственная анизотропия.

3.1. Оптическая анизотропия при мех. деформации

Некоторые оптически изотропные материалы могут стать анизотропными при растяжении/сжатии, полировке, прессовании и т.д. Оказывается, что при этом

$$|n_o - n_e| = K \epsilon_{\text{упр}}$$

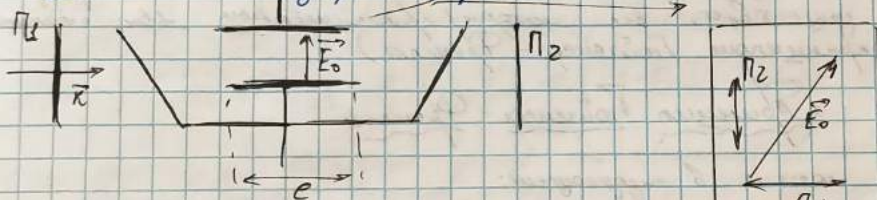
$\epsilon_{\text{упр}}$ - упругое напряжение, а коэффициент пропорциональности K зависит от св-в вещества.

Возникновение оптической анизотропии при мех-их деформациях имеет факт. объяснение: если требуется изогнуть световую волну, которая должна пройти большее расстояние (физич. - масса, самообт.), то она будет изогнута сильнее, чем световая волна из прозрачного материала и возникнет разность фазовых напряжений.

3.2. Анизотропия в электромагнитном поле

Появление оптической анизотропии в жидкостях и аморфных в-вах назыв. эффектом Керра.

На рис. показана ячейка Керра - кубика с жидкостью, в которую накладывается конденсатор, в котором создано постоянное электрическое поле E_0 . При этом возникает оптическая анизотропия, т.е.



$$n_e - n_o = B \lambda E_0^2$$

где B - постоянная Керра. Для большинства в-в $B > 0$, т.е. $n_e > n_o$, но существуют в-ва с $B < 0$ (атомный спирт, этиловый эфир). Самое большое значение B у нитробензола ($B = 2 \cdot 10^{-10}$ см/В²). Важно, что разность показателей преломления пропорциональна квадрату поля - это значит, что эффект не зависит от напр-я поля в конденсаторе. На пути с в конденсаторе у вас появится разность фаз.

$$\Delta \varphi_e - \Delta \varphi_o = K(n_e - n_o)e = \frac{2\pi}{\lambda} B \lambda E_0^2 e = 2\pi B E_0^2 e$$

Если эксперимент показан на рис. Свет проходит через конденсатор Π_1 , затем через кубик с жидкостью и через анализатор Π_2 . Какпомогаете оптически осей Π_1 и Π_2 показано на рисунке, вектор E_0 составляет угол 45° . Если иметь напр-е поля E_0 , то можно наблюдать разность фаз и преобразование поля времени.

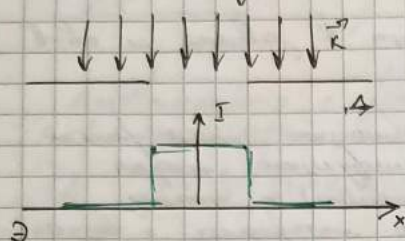
Объяснение этого эффекта состоит в том, что молекулы поляризуются и возникающая при этом дипольная поляризация взаимодействует с полем E_0 , что и дает анизотропию. Механизм поляризации безмеруонный, поэтому эффект не так велик, как эффект регистрации дифракционных процессов или генерация сверхкоротких лазерных импульсов.

Дифракция

Ср. дифракцией называется совокупность явлений, происходящих при распространении волн в среде с неоднородностями.

Замечания:

• Дифрагируют волны любой природы, но наиболее заметно явления отличия волн (от луча). В случае световых волн при дифракции наблюдается отклонение от закона геометрической оптики. А с дифракцией акустических волн мы сталкиваемся постоянно - звук слышим и в области геометрической тени.

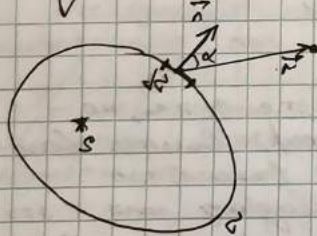


Но рис. показана ситуация, когда плоская волна падает на непрозрачную дифракционную решетку A с отверстиями. Напротив дифракционной решетки расположен экран E . Если бы свет распространялся по законам геометрической оптики, то интенсивность света на экране $I(x)$ была бы постоянной наравне с освещенностью и равна нулю наравне с непрозрачной частью. Но на самом деле это не так!

- Дифракция - сугубо волновое явление. Если длина волны $\lambda \rightarrow 0$, то дифракция пропадает.
- При дифракции изменяется структура волнового поля во всем $\mathbb{R}^3$.
- Точно решить задачу дифракции (найти волновое поле в любой точке $\mathbb{R}^3$ при произвольных неоднородностях среды) в общем случае невозможно. Точное решение известно в немногих частных случаях. Регулярных методов решения не существует, все методы приближенные. Или ограничиваются в некотором (принцип Гюйгенса - Френеля).

Принцип Гюйгенса - Френеля

Идея метода состоит в следующем:



Пусть есть первичный (реальный) источник S . Требуется найти волновое поле в точке наблюдения P . Определим P по-новому P' , до которой уже дошел волновой фронт. Согласно принципу Гюйгенса каждая точка этого фронта становится источником вторичных волн, которые приходят в точку P .

Идея Гюйгенса не совсем корректная. Макс. формулировку дал Френель, дополнив на по-новому P' всех точек участка Σ . Волна, дошедшая до Σ , имеет амплитуду A_0 , фазу φ_0 . По принципу Гюйгенса - Френеля вторичный источник возж. в точке P суммируется волна (обозначим ее ΔF) амплитудой

- прямо по амплитуде A_0 ;
- прямо по радиусу вторичного источника ΔF ;
- при $\propto$ ф-ии $K(\alpha)$, учт. св-ва направленности вторичного источника, где α - угол между $\vec{n}$ к ΔF и $\vec{r}$ к точке P (см. рис.);
- обратно пропорциональной расей по r от ΔF до точки P , в результате.

$$\Delta F = \frac{A_0}{r} K(\alpha) \cos(\omega t - \kappa r + \varphi_0) \kappa$$

Пирогов уточняет вид ф-ии направленности $K(\alpha)$: в кач.

промеж. оно записывается в виде

$$\hat{\kappa}(\alpha) = \frac{i}{2\lambda} (1 + \cos \alpha)$$

в малом угле $\alpha \rightarrow 0$:

$$\hat{\kappa}(\alpha) = \frac{i}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \exp(i\frac{\pi}{2})$$

Конечное:

$$dF = \frac{A_0}{\lambda r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) dV$$

С помощью (3) можно записать результирующее поле. Очевидно, что результирующее поле постоянна во времени, т.е. оно стационарно. Поэтому результирующее поле в точке P можно сложением полей от всех вторичных источников

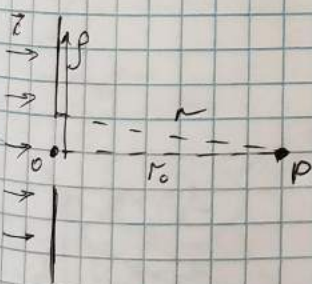
$$F_P = \int dF = \int \frac{A_0}{\lambda r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) dV \quad (2)$$

Смысл выражения (2): суммирование вторичных волн означает, что дифф. задана суммой F интерференция (т.е. поле F_P в точке P - это результат интерференции вторичных волн).

1. Как выглядит пов-ть? Поверх-ть задана условием, что поле задано, и в простых ситуациях её можно вычислить из сфер. волны распада
2. Как задать на пов-ти амплитуду A_0 и фазу φ_0 ? Ведь при дифракции имеется поле во всей пр-ва, а значит, и в области источника S . Но здесь это невозможно, поэтому обычно просто считают, что если экран непрозрачный, то на нём $A_0(r) = 0$, а в отверстии $A_0(r)$, $\varphi_0(r)$ имеют те же значения, что были в отсутствие дифракции

Дифракция на круглом отверстии в тонком непрозрачном экране.

Пусть на непрозрачный экран с круглым отверстием нормально падает плоская монохроматическая волна (это идеализация плоской волны) с волновым вектором $\vec{k}$ и амплитудой A_0 . Тогда амплитуды A и фаза φ в отверстии на оси определяются на расстоянии r_0 от центра O (см. рис.).



Волны падают поле в точке P используется выражением (2). Для этого надо:

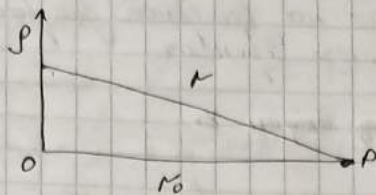
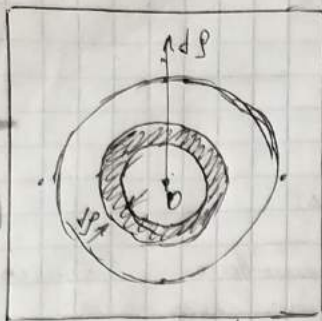
- величину в пределах отверстия аппроксимировать $A_0 = \text{const}$, на непрозрачной части экрана $A_0 = 0$;
- начальную фазу $\varphi_0 = 0$ (лучи нормальны!)

Кроме того считаем, что диаметр отверстия мал, что сфер-во поле можно приближенно

Из (2):

$$F_P = \int \frac{A_0}{\lambda r} \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}) dV$$

и записывается в виде



используя формулы показываем, что дифференциал площади по площади радиуса ρ и радиуса R_0 , тогда

$$dV = 2\pi \rho d\rho$$

Связем переменные ρ и r

$$\rho^2 = r^2 - R_0^2 \Rightarrow \rho d\rho = r dr$$

В укладом $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$f_P = \int_{R_0}^{r_{\max}} \frac{A_0}{2r} \cos(\omega t - \kappa r + \frac{\pi}{2}) 2\pi r dr = \int_{R_0}^{r_{\max}} \kappa A_0 \cos(\omega t - \kappa r + \frac{\pi}{2}) dr \quad (3)$$

где $r_{\max}$ соотв. радиусу, соответствующему в P краю отверстия. Для удобства записи введем новую переменную

$$\xi = \kappa r - \kappa R_0 \quad (\Rightarrow \kappa dr = d\xi)$$

и запишем аргумент косинуса:

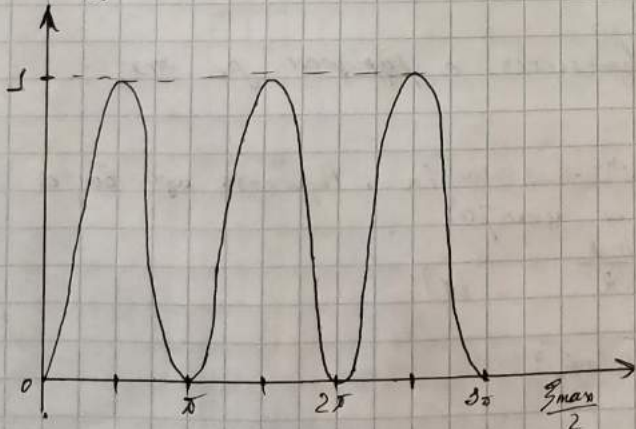
$$\omega t - \kappa r + \frac{\pi}{2} = \omega t - \kappa R_0 + \frac{\pi}{2} - \xi = \varphi_0 - \xi$$

где $\varphi_0 = \omega t - \kappa R_0 + \frac{\pi}{2} = \text{const}$ в фиксированный момент времени. Тогда

$$f_P = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} A_0 \cos(\varphi_0 - \xi) d\xi = A_0 [\sin(\xi_{\max} - \varphi_0) + \sin \varphi_0] = 2A_0 \sin \frac{\xi_{\max}}{2} \cos(\varphi_0 - \frac{\xi_{\max}}{2}) \quad (4)$$

Важное замечание: это родной пример такого решения, да ещё и в элементарных функциях! Точное решение удалось получить, потому что мы исп. маломасштабное приближение ($\lambda \gg 0$). Очевидно, это справедливо, пока размер отверстия не становится велик (т.е. $R_0 \approx r$). Тогда наблюдателям кажется, что световое поле неоднородно, потому что в (4) можно подставить φ_0 , возведя всё в квадрат и дифференцируя по времени, окончательно получим:

$$\bar{I} = \langle f_P^2 \rangle = I_0 \sin^2 \frac{\xi_{\max}}{2} \quad (5)$$



Если увелич. диаметр отверстия, то увелич. $\xi_{\max}$, а амплитуда при это сохраняется. Это чистое волновое явление: отверстие увелич. $\rightarrow$ амплитуда колебаний света увеличивается

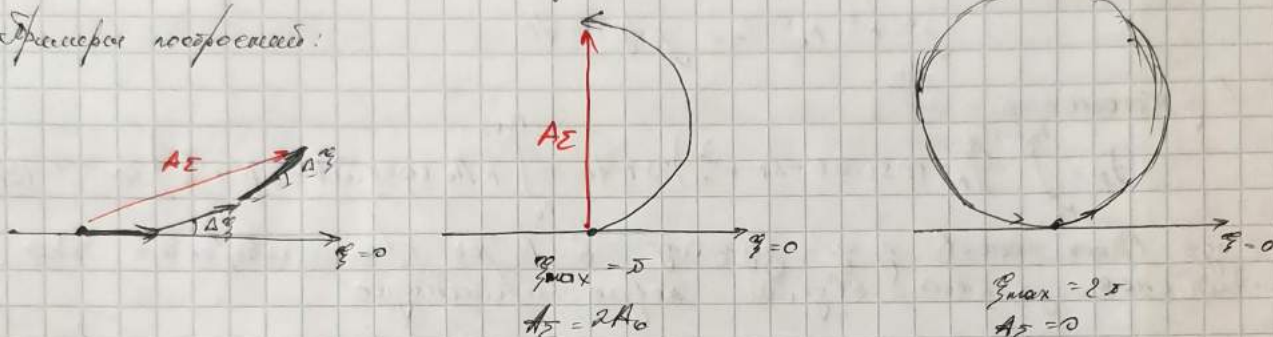
Интерференция на второй диаграмме. Зона Френеля.

Вернёмся к интерференции (4)

$$r_p = \int_0^{\xi_{\max}} A_0 \cos(\theta_0 - \xi) d\xi = \sum_{m=0}^N A_0 \cos(\theta_0 - m \cdot \Delta\xi) \Delta\xi$$

- это сумма $N (N \rightarrow \infty)$ колебаний с равными (если не учитывать зависимость от угла α !) амплитудами $A_0 \Delta\xi$ и сдвигами по фазе. Удобно считать такие колебания с пачками векторов. При этом учтём, что в начале фронта, несмотря на знак "-", в фазе, складывать векторы вверх.

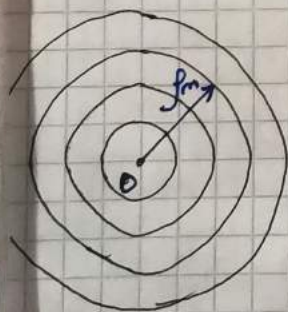
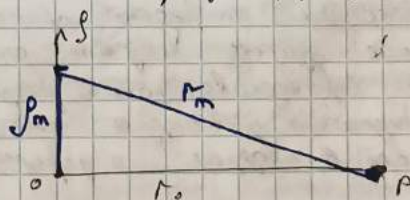
Френель построил:



Из построения видно, что когда $\pi < \xi_{\max} < 2\pi$, результирующий вектор окажется меньше, чем сумма амплитуд, т.е. "превышение" и результирующий вектор становится меньше.

Это эффект наличия интерференционного минимума.

Френель (1798-1829) предложил способ разбивки апертуры отверстия на зоны. Отсчёт идёт от фронта отверстия (т.о.), этому способ - π -ый вектор на диаграмме. В пределах первой зоны колебания со центра и со края приходят с разностью фаз π (т.е. с $r_2 - r_0 = \lambda/2$), при этом результирующий вектор имеет макс. длину $2A_0$. В пределах второй результирующей зоны при движении от центра к краю фазы сдвигаются на π , в результате на фронте величина в пределах отверстия переключается колебаниями (зона Френеля) радиусами $r_1, r_2, r_3, \dots$ (и так можно из принципа разбивки, фазы величин на окружности с радиусом $r_1 \rightarrow \pi$, $r_2 \rightarrow 2\pi$, $r_3 \rightarrow 3\pi$).



Найдём радиус m -й зоны r_m . Радиус от края m -й зоны и от центра.

$$r_m - r_0 = \frac{m\lambda}{2} \quad (1)$$

из геометрии:

$$r_m = \sqrt{r_0^2 + r_m^2}$$

Убедим, что эти требования выполняются маломомента приближе.

$$f_m \ll r_0$$

$$\rightarrow r_m = \sqrt{r_0^2 + f_m^2} \approx r_0 \left(1 + \frac{f_m^2}{2r_0^2}\right)$$

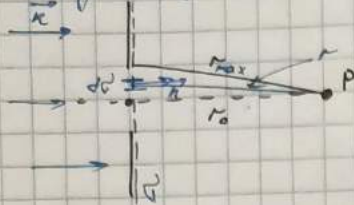
Из (4) получим: $\frac{f_m^2}{2r_0^2} = \frac{m\lambda}{a} \Rightarrow \boxed{f_m = \sqrt{m\lambda r_0}}$

Важное замечание: радиус зоны зависит от r_0 , это значит, что по мере наблюдения будут видеть разную интенсивность.

Например: если для r_1 оказалось, что радиус отверстия $R=r_1$ (в отверстии укладывается ровно одна зона), то интенсивность в этой точке максимальна. Если для точки r_2 радиус отверстия $R=r_2$ (в отверстии укладывается 2 зоны), то интенсивность в этой точке $\rightarrow 0$.

18.06.22

Вид сбоку:



ρ - точка наблюдения

$$\Delta F_P = A_0 \sqrt{r} \cdot K(\alpha) \cos(\omega t - kr) \quad \varphi_0 = 0$$

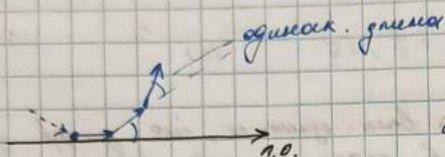
φ_0 - направление

Удобно представлять в виде: $K(\alpha) = \frac{i}{2\lambda} (1 + \cos \alpha)$

$$\alpha \ll 1 \Rightarrow K \approx \frac{i}{\lambda}$$

Если в приобл. малых углов: $\Delta F = \cos \alpha b$.

Но если $\alpha \uparrow \rightarrow \cos \alpha \downarrow \Rightarrow \Delta F \downarrow$ ~ ампл. вторичных волн будет уменьшаться.



одинак. длина ~ в прошлом случае, т.е. дальнее от центра - тем больше фазы в итоге придёт в начало

Когда пройдём по фазе $\rightarrow$ её придёт не в начало, а чуть выше начальной точки (дуга скручивается)



Если раздвинуть чуть дальше $\rightarrow$ получили открытое волновое фронт (скручивание дуг. меркнет)



~ спираль Френеля

т.е. поле попадает в т.о

$\rightarrow$ Результирующий вектор открытого волнового фронта как раз совб. $A_0 \Rightarrow$ если отверст. фронт. 1 зона Френеля мы получили

Если дальше $\rightarrow$ в минимумах макс. затенения

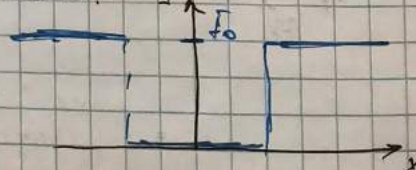
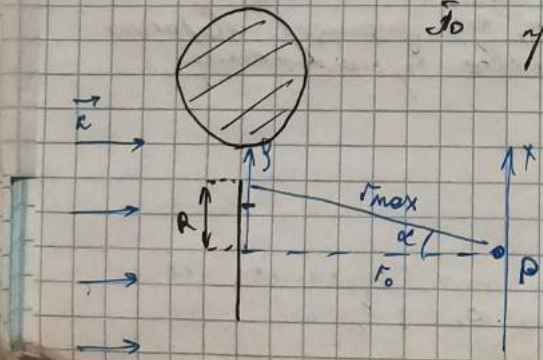
$$A_{\pi} = 2A_0$$

$$A_0 = 0$$

Примеры применения спирали Френеля: дифракция на непрозрачной круглой экране

то режиму точка пред. на ос. Работаем в приближении малых углов.

По закону геом. оптики было бы



Пусть радиус этого диска соответствует двум зонам Френеля

$$r_m = \sqrt{m \lambda r_0}, \text{ где } m - \text{зона.}$$

на спирали Френеля от $r=0$ до $r=1$ и от $r=1$ до $r=2$
(периферия $\rightarrow$ не работает)

$\Rightarrow$ Если диск закрывает 2 зоны, то мы получаем $\Delta z = \lambda/4$ (в центре)

$\Rightarrow$ в центре диска максимум (назов. пятном Пуассона - Араго)



Мног. дифракция $\rightarrow$ на стекле капля гудрона дифракцию от окна не видим $\rightarrow$ оно слишком большое.

- + с элв. $\rightarrow$ 1 зона $\rightarrow$ ампл. увелич.
- 2 зона $\rightarrow$ ампл. уменьшилась (не до 0)
- 3 зона $\rightarrow$ увелич.
- 4 зона $\rightarrow$ уменьш.

закрывает 1 и 3 зоны $\rightarrow$ элв. 2 и 4 $\rightarrow$ две синусоиды как будто раздвинуты $\rightarrow$ ампл. увелич.)

Можно увелич. ампл. и дальше $\rightarrow$ заставить работать другие зоны (сдвинуть фазы $\rightarrow$ напр. дифракцион. м.)

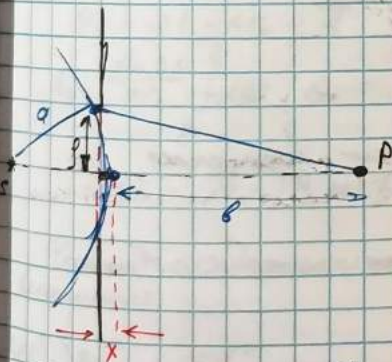
Зонная пластинка

Пусть есть отверстие в экране. Если точка наблюд. на оси (т.Р) и тогда свет точечного источника будет сферическая волна.

a - радиус волнового фронта

Пусть в отверстии упирается m зон Френеля. Хотим найти их радиусы.

На каждой зоне фазы π различается на $\pi \rightarrow$ разность хода $\frac{\lambda}{2}$



будем называть r

r - радиус m -ой зоны

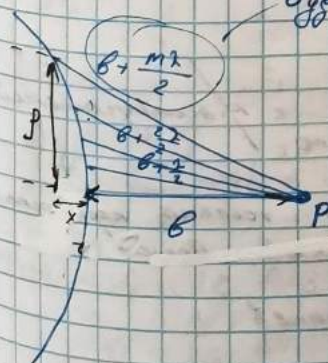
$$r^2 = a^2 - (a-x)^2 = 2ax - x^2$$

$$r^2 = r^2 - (b+x)^2 = r^2 - b^2 - 2bx - x^2$$

$$0 = 2(a+b)x - r^2 + b^2$$

$$x = \frac{r^2 - b^2}{2(a+b)}$$

$$r^2 = 2 \frac{a(r^2 - b^2)}{2(a+b)} - x^2 \leftarrow \begin{matrix} x \ll b \\ x \ll a, \text{ пренебрежем} \\ (\text{в знаменателе}) \end{matrix}$$



$$r^2 = \frac{a(r^2 - b^2)}{(a+b)} \quad \text{проверка}$$

$$r_m^2 = \frac{a \left(b + \frac{m\lambda}{2} \right)^2 - b^2}{a+b} = \frac{a(m\lambda b + \left(\frac{m\lambda}{2} \right)^2)}{(a+b)} = \left\{ \lambda \text{ мал, масса } b \gg \lambda \right\}$$

$$= \frac{m\lambda ab}{a+b}$$

$$\Rightarrow r_m = \sqrt{\frac{m\lambda ab}{a+b}}$$

Проверка: плоская волна, $(a \rightarrow \infty)$

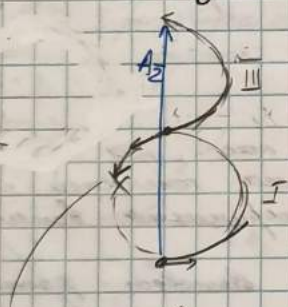
$$r_m = \sqrt{m\lambda b} \quad \text{известное выражение}$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{m\lambda}{r_m^2}$$

$$\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_m} \right], \text{ где } F_m = \frac{r_m^2}{m\lambda}$$

у-е линзы. (у линзы фокус $-f$, у зонной массы или их несколько)
 $\Rightarrow$ будет давать максимум на фокус F_m .

Пусть эти зоны закрыты: (у нас в запасе экран Френеля)



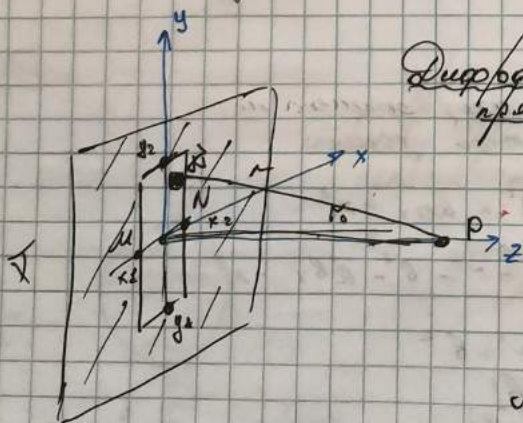
$$A_z = m \cdot 2A_0, \quad m - \text{число открытых зон.}$$

Так можно получить усиление

Если повернуть и эту ветровку $\rightarrow$ получим усиление

* 1.6.

К.В.: какой должна быть толщина диэлектрика, чтобы A_{max} 1-го макс $n=?$ для A_{max}



Дифракция Френеля на прямой щели.

Экран с прямоугольной щелью.

Рассеиваем только нормальное падение плоской волны.

Пусть знаем $\lambda_0 = \text{const}$
 $\varphi_0 = 0$

$$F_p = ?$$

вектор $\vec{r}$ (от центра)

$x_p = y_p = 0$ (всегда, если координаты совпадают)

$$z_p = r_0$$

маленькое приближение. Справедливо, если $r_0 \gg x, y$

$$f_p = \iint_{(V)} \frac{A_0}{\lambda r} \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}) dV$$

Разбиваем на элементарные

$$dV = dx dy$$

$$r^2 = r_0^2 + x^2 + y^2$$

$$f_p = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{A_0}{\lambda r} \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}) dx dy$$

$r_0 \gg x, r_0 \gg y$ (маленькое приближение) в знаменателе $r \approx r_0$ но в фазе kr нельзя. очень критично, раскладываем в ряд

$$r = \sqrt{r_0^2 + x^2 + y^2} = r_0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{r_0^2}} \approx r_0 (1 + \frac{x^2}{2r_0^2} + \frac{y^2}{2r_0^2})$$

- приближение Френеля

$$f_p = \frac{A_0}{\lambda r_0} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \cos(\omega t - kr_0 - \frac{kx^2}{2r_0} - \frac{ky^2}{2r_0} + \frac{\pi}{2}) dx dy$$

Здесь есть очень узкая

$$f_p = \frac{A_0}{\lambda r_0} \Delta x \int_{y_1}^{y_2} \cos(\omega t - kr_0 + \frac{\pi}{2} - \frac{ky^2}{2r_0}) dy$$

$$\leftarrow \begin{matrix} \varphi_1 - \varphi_2 = 0 \\ x_2 - x_1 = \Delta x \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ \int dx = \Delta x \end{matrix}$$

$\theta_0 = \omega t - kr_0 + \frac{\pi}{2}$ (нас интересует что-то в конст. малой величины)

$$f_p = \frac{A_0 \Delta x}{\lambda r_0} \int_{y_1}^{y_2} \cos(\theta_0 - \frac{ky^2}{2r_0}) dy$$

~ не берущийся интеграл

$$\cos(\theta_0 - \frac{ky^2}{2r_0}) = \cos \theta_0 \cos \frac{ky^2}{2r_0} + \sin \theta_0 \sin \frac{ky^2}{2r_0}$$

Чтобы исп. маленькое приближение нужно перейти к безразмерным величинам.

$$\frac{k y^2}{\lambda r_0} = \frac{k y^2}{2 r_0} = \frac{\pi v^2}{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{2 \lambda r_0}{\pi}}$$

вот представим

$$dy = \sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}} dV$$

$$f_p = A_1 \int_{V_1}^{V_2} \cos(\frac{\pi V^2}{2}) dV + A_2 \int_{V_1}^{V_2} \sin(\frac{\pi V^2}{2}) dV$$

$$A_1 = \frac{A_0}{\lambda r_0} \Delta x \sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}} \cos \theta_0$$

$$A_2 = \frac{A_0}{\lambda r_0} \Delta x \sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}} \sin \theta_0$$

сейчас не важно и можно считать

Но интегралы - берем через интеграл Френеля:

$$C(V) = \int_0^V \cos \frac{\pi V'^2}{2} dV'$$

2a:

$$S(v) = \int_0^v \sin \frac{\pi v'^2}{2} dv'$$

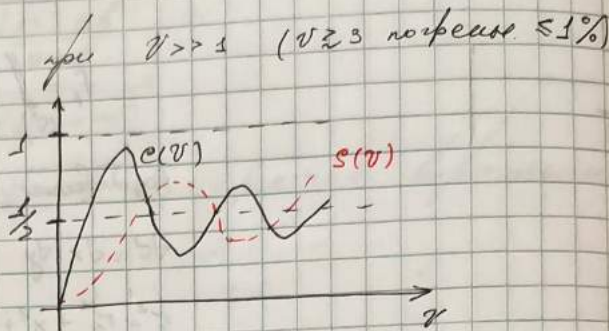
$$\Rightarrow F_2 = C(v_2) - C(v_1)$$

$$F_2 = S(v_2) - S(v_1)$$

Для них известны асимптотика:

$$C(v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi v} \sin \frac{\pi v^2}{2}$$

$$S(v) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi v} \cos \frac{\pi v^2}{2}$$



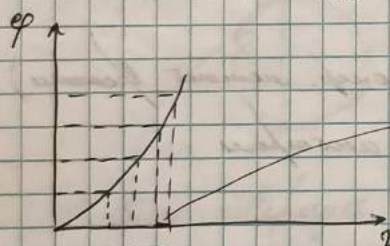
Упрощения на входе
дифракции. Сфера Кори. Полосы
Шюстера.

Обозначим $B = \frac{A_0}{\lambda r_0} \Delta x \sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}}$

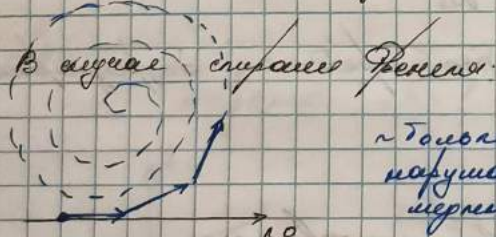
$$f_p = B \int_{v_1}^{v_2} \cos \left(\theta_0 - \frac{\pi v^2}{2} \right) dv$$

Переходим к интегр. сумме:

$$f_p = B \sum_{m=0}^{N \rightarrow \infty} \cos \left(\theta_0 - \frac{\pi (v_1 + m \Delta v)^2}{2} \right) \Delta v_m \sim \text{теперь фазы не зависят}$$



Будем рассматривать равные промежутки между φ (как φ было экстрем), но на v → увеличиваем,

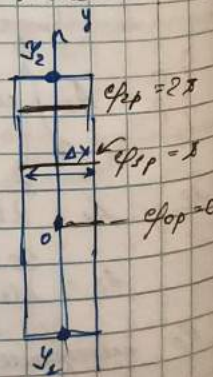
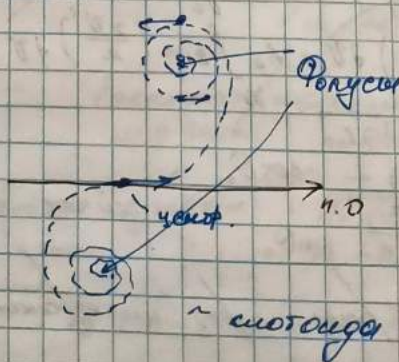


~ только когда малыми. приближ. можно нарушаться, если будет увеличив. (с фазой)

Теперь сравниваем малые промежутки с самым малым

Сфера Кори:

т.к. сфера Френеля не может быть построена с помощью сферы



② $y_1 \rightarrow -$
 $y_2 \rightarrow +$
 $f_p =$
 $f_p = \frac{A}{\lambda}$
 $\Rightarrow$ Беск. с истощением

$$F_p = A_1 \int_{\gamma_1} \cos \frac{\gamma_2}{2} dV + A_2 \int_{\gamma_2} \sin \frac{\gamma_2}{2} dV$$

$F_1 \qquad F_2$

$$F_p = B (F_1 \cos \theta_0 + F_2 \sin \theta_0) = B F_p \cos (\theta_0 + \varphi_p) \quad \sim \text{как в векторной диаграмме}$$

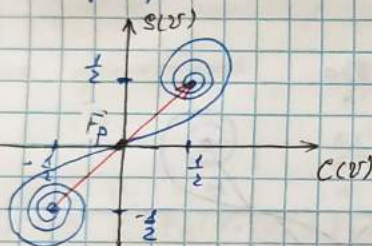
$$\left\{ \begin{aligned} F_p &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \\ \tan \varphi_p &= -\frac{F_2}{F_1} \end{aligned} \right.$$

Полосы Алуэтера - аналогия зон Френеля (на каждой полосе разор. происходит макс. δ).

Если мы знаем y_1 и y_2 , то можем по спирали соот. эти две точки (γ_1 и γ_2) $\rightarrow$ ампл. и фазу по календарю.

Если $y_2 \rightarrow \infty$ - на спирали формируе

Прямая обрисовывается $\nearrow$ - как это вектор.



$$F_p = \sqrt{2}; \quad \varphi_p = -\frac{\pi}{4}$$

Соседние полосы Алуэтера не могут полностью погасить друг друга. Но есть такие полосы, когда есть максимумы.



$$\begin{aligned} \varphi_p &= 2\pi \\ \varphi_p &= \pi \\ \varphi_p &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta \varphi_p = \frac{\pi V^2}{2} \quad \text{какая лирическая полоса?}$$

$$\Delta \varphi_m = \frac{\pi V_m^2}{2} = \pi m$$

$$V_m = \sqrt{2m}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_m &= V_{m+1} - V_m = \sqrt{2(m+1)} - \sqrt{2m} = \sqrt{2m} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2m}} - 1 \right) \approx \\ &\approx \sqrt{2m} \left(1 + \frac{1}{4m} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{aligned}$$

Частное значение дисперсии на графике.

$$\begin{aligned} y_1 &\rightarrow -\infty \\ y_2 &\rightarrow +\infty \end{aligned} \Rightarrow \gamma_{1,2} = \mp \infty$$

$$F_p = \sqrt{2}, \quad \varphi_p = -\frac{\pi}{4}$$

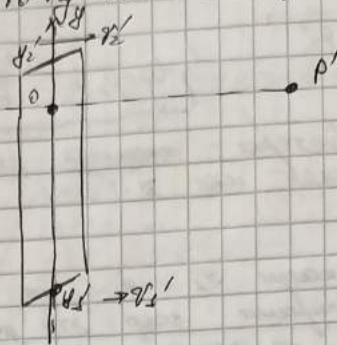
$$F_p = \frac{A_0}{\lambda \Gamma_0} \Delta x \sqrt{\frac{\lambda \Gamma_0}{2}} \cdot \sqrt{2} \cos \left(\omega t - \kappa \Gamma_0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{A_0}{\sqrt{\lambda \Gamma_0}} \Delta x \cdot \cos \left(\omega t - \kappa \Gamma_0 + \frac{\pi}{4} \right)$$

$\Rightarrow$ Беск. длинная зона сдвиги вол. цилиндрической волны!

2) Шель контактной системы: $y_1 = \text{контакт}$, $y_2 = \text{контакт}$.



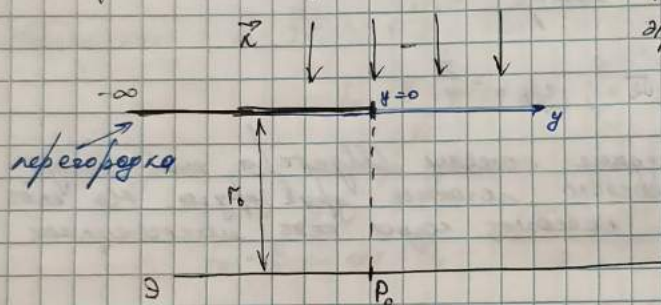
P') превращается точку каб. $\rightarrow$ нулем пересечения.



С увеличением координаты y будет каб. другое волновое поле.

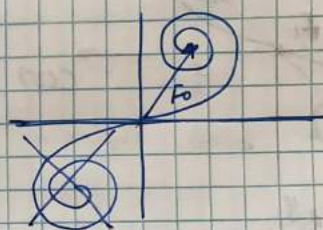
Дифракция на крае полулун. ш.

Зависит картанку:



Как меняется интенсивность на эфране?

$$y=0 \Rightarrow V=0$$

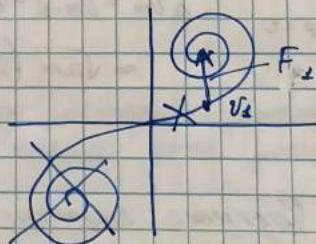
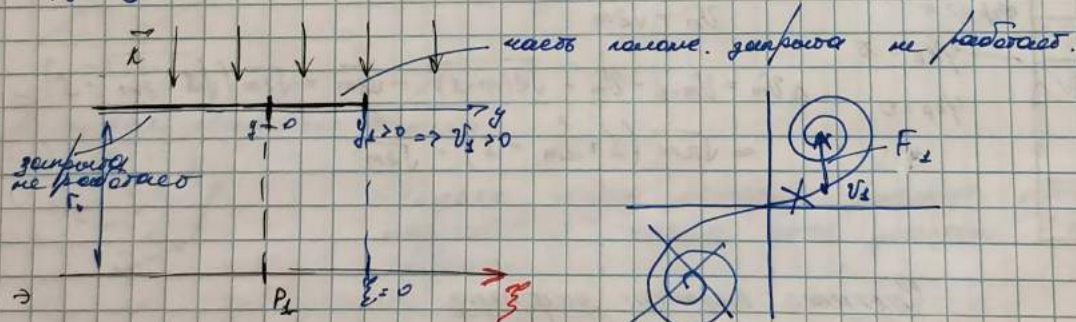


$$\Rightarrow F_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

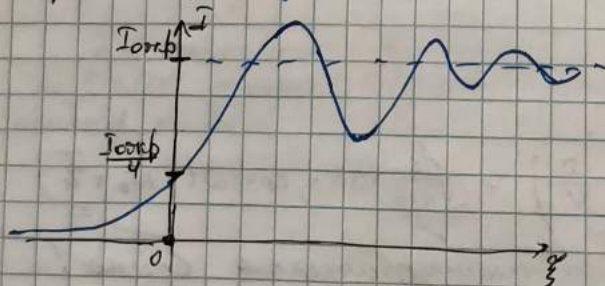
для открытого волн. фронта

т.к. у нас только половина.

$$F_0^2 = I = \frac{I_{\text{откр}}}{4}$$

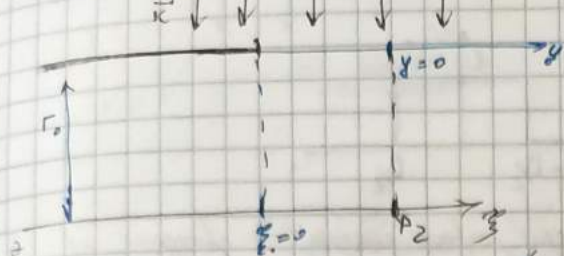


Сформируем картину распр-я интенсивности.

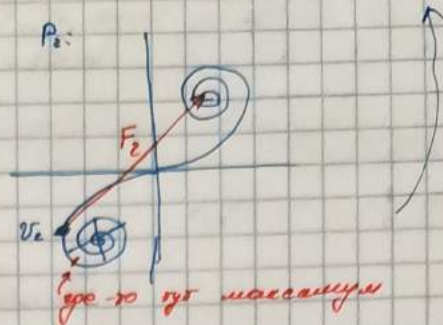


20.05.22

Теперь по числу карт. переводим в фазы:



P_2 :



Наблюдатель увидит дифракц. картин, $\rightarrow$ и ширина пиков будет всё меньше

Дифракция на прямоугольном объекте конечной ширины

$$f_p = \frac{A_0}{\lambda r_0} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \cos(\omega t - \kappa r_0 + \frac{\kappa x^2}{2r_0} + \frac{\kappa y^2}{2r_0} + \frac{\pi}{2}) dx dy$$

Продвиж в МКД: $\hat{B} = \frac{A_0}{\lambda r_0} e^{i\omega t - (\kappa r_0 + \frac{\pi}{2})}$

$$\hat{f}_p = \hat{B} \int_{x_1}^{x_2} dx e^{i \frac{\kappa x^2}{2r_0}} \int_{y_1}^{y_2} dy e^{i \frac{\kappa y^2}{2r_0}}$$

Значит симметричная зона $\rightarrow$ равномерная фазе (раздуривание)

Значит преобразование:

$$\frac{\kappa y^2}{2r_0} = \frac{\pi u^2}{2} \quad \frac{\kappa x^2}{2r_0} = \frac{\pi v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad dx dy = \frac{\lambda r_0}{2} du dv$$

$$\Rightarrow \hat{f}_p = \hat{B} \frac{\lambda r_0}{2} \hat{F}_p(u_1, u_2) \hat{F}_p(v_1, v_2)$$

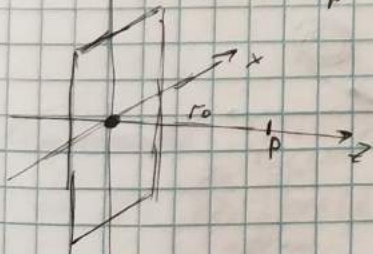
по свойствам Корню.

$$f_p = \frac{A_0}{\lambda r_0} \cdot \frac{\lambda r_0}{2} \cdot \hat{F}_p(u_1, u_2) \hat{F}_p(v_1, v_2) \cos(\omega t - \kappa r_0 + \frac{\pi}{2} + \varphi_x + \varphi_y)$$

Что будет для полного открытого волнового фронта?

$$\begin{matrix} x_{1,2} \rightarrow \pm \infty \\ y_{1,2} \rightarrow \pm \infty \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_{1,2} \rightarrow \pm \infty \\ v_{1,2} \rightarrow \pm \infty \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} F_p(u_1, u_2) = F_p(v_1, v_2) = \sqrt{2} \\ \varphi_x = \varphi_y = -\frac{\pi}{4} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f_p = \frac{A_0}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos(\omega t - \kappa r_0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = A_0 \cos(\omega t - \kappa r_0)$$

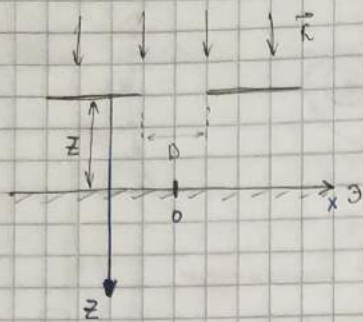


$$r_0 \equiv z_p$$

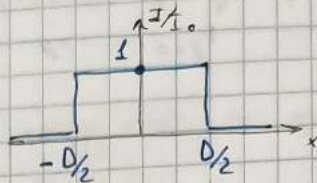
$\Rightarrow$ получили плоскую волну, движущую по z

20.05.22

Представьте картин дифракции. Проиллюстрируйте дифракцию на щели конечной ширины.



1) Если экран близко $\rightarrow$ падает зонами Хевисайда.



Фактически, если экран близко $\rightarrow$ приходится сдвигать волнового фронта

$\Rightarrow$ Гигириновского вез зона Френеля (или полосы Пуассона)

$\sqrt{\lambda z_p}$ - ширина дифракционной зоны

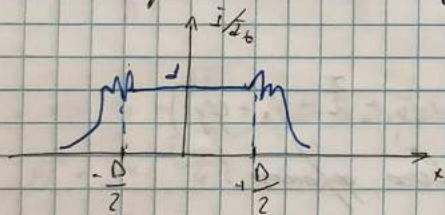
Если $\Rightarrow \sqrt{\lambda z_p} \ll D$ - тогда будет работать вез зона Френеля.

$$\frac{\sqrt{\lambda z_p}}{D} \ll 1$$

Из прошлого $r = \frac{\sqrt{\lambda z}}{D}$ - волновой параметр

$\Rightarrow$ Зоны Хевисайда находятся там, где $r \ll 1$.

2) Увеличиваем z , и когда $r \sim 1 \Rightarrow$ будет работать не вся спираль $\Rightarrow$ дифракция, картинка как-то изменится.



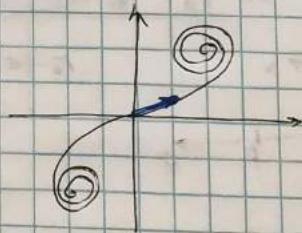
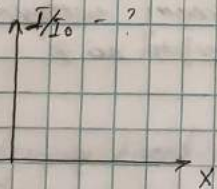
Дифракция Френеля - $r \sim 1$.

На спираль работает только зона

3) Увеличиваем экран дальше $\Rightarrow r \gg 1$

$\sqrt{\lambda z_p} \gg D \Rightarrow$ работает только средняя часть спирали. (1/2 зона)

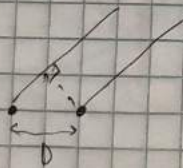
Теперь спираль как не помогает!



Вспомогательная дифракционная направленность (или скелетная и х для $r \gg 1$)

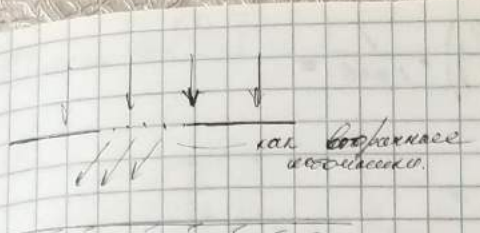
ДН в волновой зоне ($r \gg 1$) $\Rightarrow$ лучи направлены

$\Rightarrow$ Каким образом плоскость соотносится с фронтальной



$$\frac{A_0}{\lambda z_p}$$

$$\frac{A_0}{\sqrt{\lambda z_p}}$$

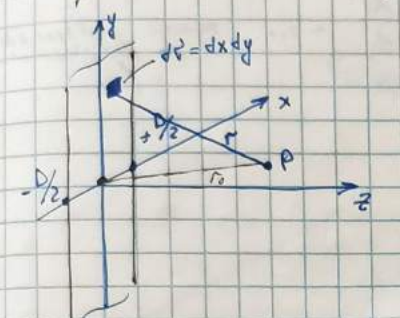


$\rho \gg 1$ - соотв. условию параллельных лучей

$\Rightarrow$ Дифракция в параллельных лучах = Дифракция Фраунгофера

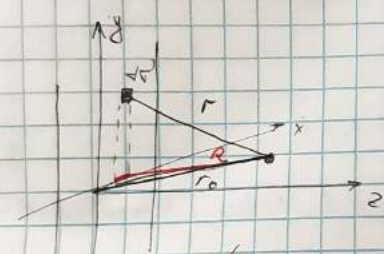
Дифракция Фраунгофера

Дифракция на беск. длинной узкой щели



$$f_p = \frac{A_0}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}) dS$$

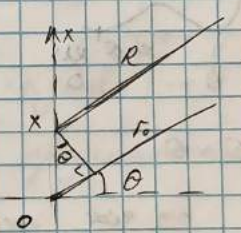
P - лежит в м-те xOz (то есть от н.к. до P в м-те xOz)



R - от проекции до $r.P$

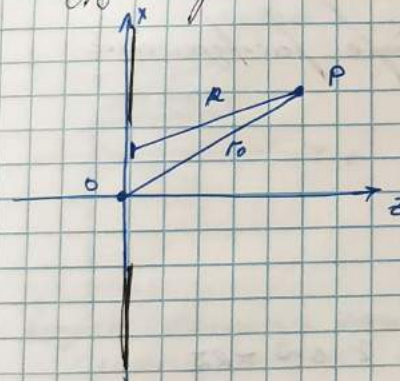
Рассмотрим в сеч. паралл. лучей $\rightarrow R \parallel r_0$

$$r^2 = y^2 + R^2$$



$$\Rightarrow r_0 = R + x \sin \theta$$

В срезе проекции:



Приближение: в знаменателе $r \approx r_0 \approx z_p$

$$r = \sqrt{y^2 + R^2} \approx R \left(1 + \frac{y^2}{2R^2} \right)$$

$$f_p = \frac{A_0}{\lambda z_p} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t - \underbrace{KR}_{\approx KR_0 - Kx \sin \theta} - \frac{ky^2}{2R} + \frac{\pi}{2}) dy$$

$$KR \approx KR_0 - Kx \sin \theta$$

Возмем интеграл по y : $(\omega t - KR_0 + Kx \sin \theta + \frac{\pi}{2}) \equiv \alpha$

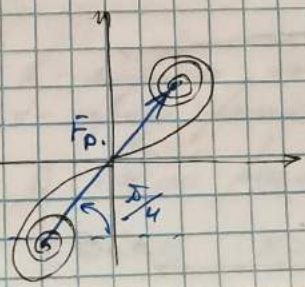
$$\Rightarrow f_p = \frac{A_0}{\lambda z_p} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \cos(\alpha - \frac{ky^2}{2R}) dy \approx \frac{A_0}{\lambda z_p} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \cos(\alpha - \frac{ky^2}{2R}) dy$$

как в интеграле по y $y = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}} \cdot \xi \Rightarrow dy = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}} d\xi \approx \sqrt{\frac{\lambda R_0}{2}}$

$$F_p = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A_0}{\lambda z_p} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \sqrt{\frac{\lambda R_0}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t - KR_0 + \frac{\pi}{2} + Kx \sin \theta) dx =$$

$$= \frac{A_0}{\sqrt{\lambda z_p}} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \cos(\theta_0 + Kx \sin \theta) dx$$



$$I_p = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\sin(\theta_0 + \frac{\kappa D \sin \theta}{2}) - \sin(\theta_0 - \frac{\kappa D \sin \theta}{2}) \right) \cdot \frac{1}{\kappa \sin \theta} =$$

$$= \frac{2A_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\kappa \sin \theta} \cdot \sin\left(\frac{\kappa D \sin \theta}{2}\right) \cos \theta_0 \quad \ominus$$

$$\frac{2D}{\kappa \sin \theta} \sin\left(\frac{\kappa D \sin \theta}{2}\right) = D \operatorname{sinc}\left(\frac{\kappa D \sin \theta}{2}\right)$$

$$\ominus \frac{A_0 D}{\sqrt{2\pi}} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\kappa D \sin \theta}{2}\right) \cos \theta_0$$

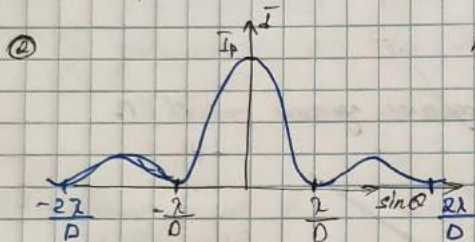
$$\bar{I} = \langle I_p \rangle = \frac{A_0^2 D^2}{2\lambda^2 p} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\kappa D \sin \theta}{2}\right)$$

$$; I_0 = \frac{A_0^2}{2} \sim \text{т.к. } \text{тогда перевернется по времени}$$

$$\Rightarrow \left\{ \bar{I} = \frac{I_0 D^2}{\lambda^2 p} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\kappa D \sin \theta}{2}\right) \right\}$$

$$\max: \Rightarrow I_p = \frac{I_0 D^2}{\lambda^2 p} = \frac{I_0}{p^2}$$

$$\textcircled{2} I_p = \frac{I_0}{p^2} < I_0 \quad (\text{обычно с тем, что } p \gg 1)$$



$$\text{Край: } \operatorname{sinc}\left(\frac{\kappa D \sin \theta}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\kappa D \sin \theta}{2} = \pm m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

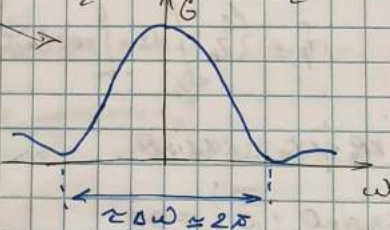
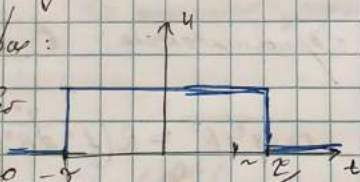
$$\sin \theta = \frac{\pm m \lambda}{D}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{но } \sin \theta < 1$$

$$\textcircled{3} \lambda \ll D \Rightarrow \sin \theta \approx 0$$

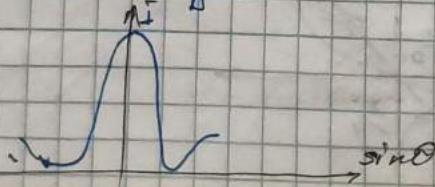
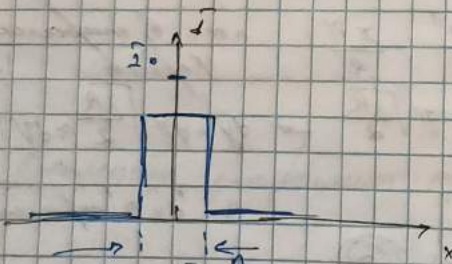
$$\Delta \theta = \frac{2\lambda}{D} \Rightarrow \text{чем } \Delta \theta \text{ тем } \Delta \theta \rightarrow \text{тем шире распределение}$$

можно увеличить спектр:

Если по узлу падает свет с нек-м интервалом λ распределение будет узким - $\lambda/2$ будет пол шир



$$\lambda \cdot \Delta \omega \approx 2\pi$$

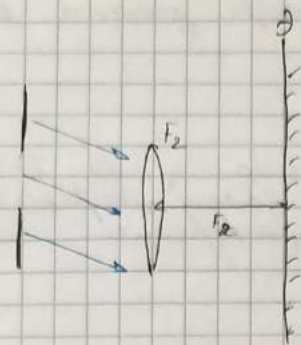


~ с дифракц. Фраунгофера - > фактически Фурье преобразование

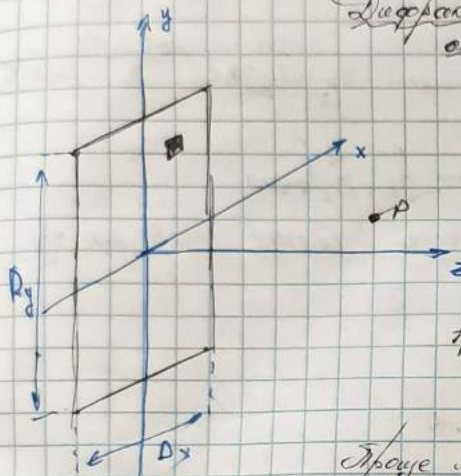
1) $m_{max} \leq \left[\frac{D}{\lambda} \right]$

5)

используют в фокусе, чтобы сфокусировать лучи.



Дифракция на прямоугольном отверстии



$\frac{\sqrt{\lambda z_p}}{D_x} \gg 1$; $\frac{\sqrt{\lambda z_p}}{D_y} \gg 1$ находится в зоне Фраунгофера.

Решение те же самые функции.

$$E_p = \frac{A_0}{\lambda z_p} \int_{-\frac{D_x}{2}}^{+\frac{D_x}{2}} dx \int_{-\frac{D_y}{2}}^{+\frac{D_y}{2}} dy \cdot \cos(\omega t - k r_0 + \frac{\pi}{2} + k x \sin \theta_x + k y \sin \theta_y) \approx$$

Прове МКВ: $\cos(\theta_0 + k x \sin \theta_x + k y \sin \theta_y) \rightarrow e^{i\theta_0} e^{i k x \sin \theta_x} e^{i k y \sin \theta_y}$

Ищем по-прежнему предельно сложное.

Используем следы:

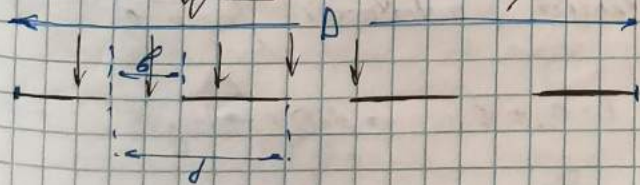
$$I = I_p \text{sinc}^2\left(\frac{k D_x \sin \theta_x}{2}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k D_y \sin \theta_y}{2}\right), \text{ где}$$

$$I_p = I_0 \left(\frac{D_x D_y}{\lambda z_p} \right)^2$$

Доп. вопрос: измерить размер окна → где находится зона Фраунгофера (зарядка на краю микроволновой печи).
3) МКВ → показать формирование максимумов.

Дифракционная решетка
→ периодическая структура, из-за которой происходит дифракция.

Амплитудная щелевая решетка.



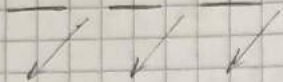
b - ширина щели
d - период решетки

D - общий размер.

$$D = d \cdot N \quad (N \gg 1)$$

Теперь условие дифф Фраунгофера должно выполн. для всех источников:

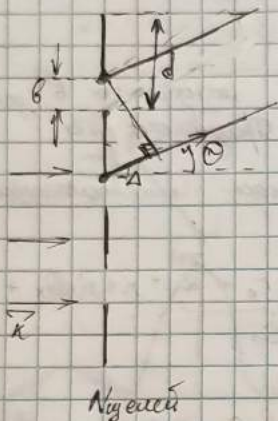
$$\frac{\sqrt{\lambda z}}{D} \gg 1$$



~ система из N выделенных излучателей.
~ все волны когерентные ~ могут интерферировать

$$f_p = \sum_{n=1}^N f_{p, \text{шляп.}}$$

23.05.22



В одной точке все волны: $f_p = \sqrt{I_p} \text{sinc}\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right) \cos(\dots)$

$$f_p = \sum_{n=1}^N f_{p, \text{шляп.}} \rightarrow \hat{f}_p = \sum_{n=1}^N \hat{f}_{p, \text{шляп.}}$$

$\Delta = d \sin \theta$ ~ расстояние между волнами в той же точке

$$\varphi_0 = \omega t - \kappa r_0 + \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_{0n} = \omega t - \kappa r_0 + \varphi_n$$

$$n=1 \rightarrow \varphi_1 = 0$$

$$n=2 \rightarrow \varphi_2 = \Delta \cdot \kappa = \kappa d \sin \theta$$

$$n=3 \rightarrow \varphi_3 = 2 \kappa d \sin \theta$$

$$n=N \rightarrow \varphi_N = (N-1) \kappa d \sin \theta$$

Удобнее в алгеб:

$$\hat{f}_p = \sum_{n=1}^N \hat{f}_{p, \text{шляп.}} = \sqrt{I_p} \text{sinc}\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right) \left(e^{i \kappa d \sin \theta} + \dots + e^{i \kappa d (N-1) \sin \theta} \right)$$

$$f_p = \sqrt{I_p} \text{sinc}\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi N \sin \theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right)}$$

$$I_p = f_p^2 = \left(\frac{A_0 b}{\lambda z} \right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{\pi N \sin \theta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right)}$$

~ основное дифракционное

Вспомогательное излучение:

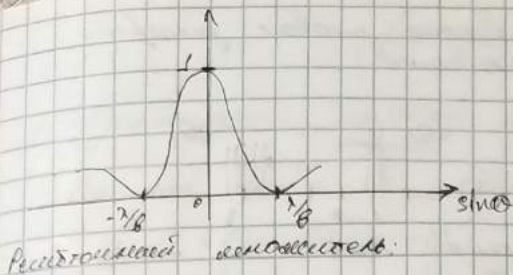
① $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right)$ - главный множитель определяет основное излучение. Получается при рассмотрении 1-й щели.

Главное min: $\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} = m\pi, m = \pm 1, \dots \rightarrow \sin \theta = \frac{m\lambda}{b}$

② $\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi N d \sin \theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right)} \right)^2$ ~ решеточный множитель - определяет основное излучение. (когда знаменатель равен 0)

Главные max: $\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = l\pi, l = 0, \pm 1, \dots \rightarrow \sin \theta = \frac{l\lambda}{d}$

Углы главных максимумов:



Раз сего максимумов $\rightarrow$ сего " побочных

Побочные максимумы: рассмотрим интервалы между главными макс. глав. сдв. в 0 только на концах.

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi N \sin \theta}{\lambda}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{N \sin \theta}{\lambda} = l' \rightarrow \sin \theta = \frac{l' \lambda}{N \lambda} \quad l' = 1, \dots, N-1$$

Края спектра, где 0 и θ умножаются

Построим $N-1$ побочных $\leftarrow$ максимумов

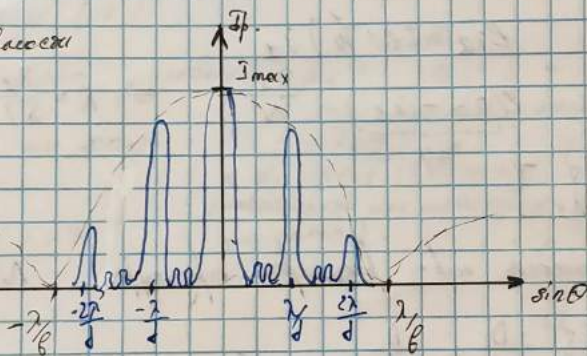
Побочные максимумы: (их $N-2$)

$$\text{т.к. } \sin \theta \approx \theta$$

③ Проведем вводные ширину главного макс. $\Delta \theta \approx \frac{\lambda}{N \lambda} = \frac{\lambda}{D}$

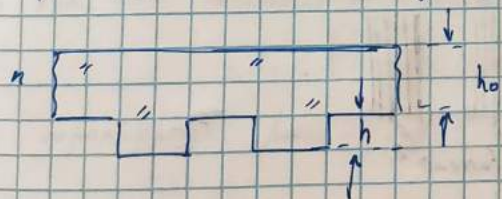
разн. всей дифракц. решётки

Формулы интенсивности



$$I_{\max} = \frac{A_0^2 b^2}{\lambda^2} N^2$$

к примеру $\rightarrow$ фазовая дифракционная решётка работает по формуле



$\rightarrow$ можно считать максимумы

Дифракционная решётка как спектральный прибор

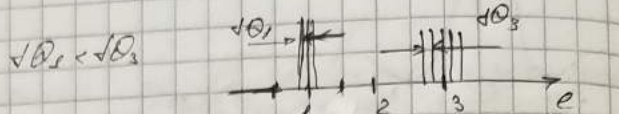
Характеристики прибора:

① Угловая дисперсия, по определению $\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\theta}$

$$\frac{d \sin \theta}{\lambda} = l$$

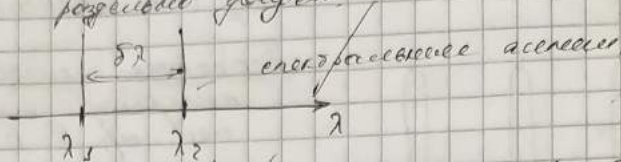
$$d \cos \theta d\theta = l d\lambda \rightarrow \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{l}{\cos \theta} \approx \frac{l}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$$

Чем больше дифракц. порядок, тем больше угловая дисперсия
 $\Rightarrow$ тем больше разброс по углу (ширине мина)

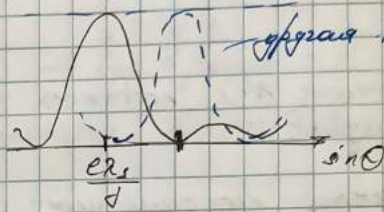
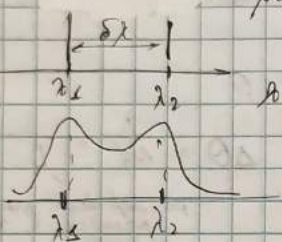


Решетчатая способность. Чем больше длина волн или меньше расстояние между штрихами, тем больше дисперсия.

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$



Чтобы увидеть R требуется критерий Рэлея: главный максимум одного λ совпадает с первым минимумом другого λ .
 Это предел разрешенности



$$d \sin \theta = l \lambda_2 \quad - \text{осн. макс.}$$

$$d \sin \theta = (l + \frac{1}{N}) \lambda_1 \quad - \text{1-й побочный мин.}$$

$$l \lambda_2 = (l + \frac{1}{N}) \lambda_1$$

$$l(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda_1}{N} \Rightarrow R = \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = lN$$

$$R_{\max} \text{ при } l_{\max} = \left[\frac{d}{\lambda_1} \right]$$

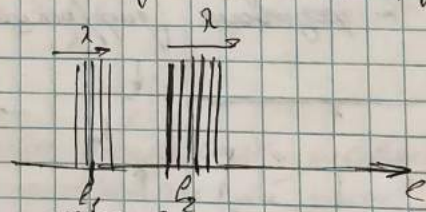
Эффект N вообразить через размер структуры: $N = \frac{D}{d}$

$$\Rightarrow R_{\max} \approx \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{D}{d} = \frac{D}{\lambda} \quad (\lambda = \lambda_1 \text{ или } \lambda_2)$$

то есть это геометрический предел.

Дисперсионная способность. $\Delta\lambda$

Возможно преобразовать в разном проф. λ в один разброс, если они не совпадают по своему угловому положению.



$$d \sin \theta = l \lambda_{\max}$$

$$d \sin \theta = (l+1) \lambda_{\min}$$

$$l \lambda_{\max} = (l+1) \lambda_{\min}$$

$$l \Delta\lambda = \lambda_{\min}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_{\min}}{l}$$

не сможешь однозначно видеть отдельно, обобщено в не обобщено 3.

Статистические (когерентные) свойства волновых пакетов

1. Идеализация плоской гармонической волны.

Реальная волна не является строго гармонической.

$$f(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \sim \text{это идеализация}$$

$A(t)$ $\varphi(t)$ — это случайные функции!
 $A(x)$ $\varphi(x)$

численно говоря также стхастическими

Введём $\Delta A_t = \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right| \cdot \delta$ — шаг амплитуды за период

$\Delta \varphi_t = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \cdot \delta$ — шаг фазы за период

Ср. волна назыв. квазигармонической, если $\Delta A_t \ll A$ и $\Delta \varphi_t \ll 2\pi$

$$\Delta A_x = \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| \cdot \lambda$$

$$\Delta \varphi_x = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \cdot \lambda$$

Ср. волна назыв. квазиплоской, если $\Delta A_x \ll A$ и $\Delta \varphi_x \ll 2\pi$.

Время когерентности (τ)

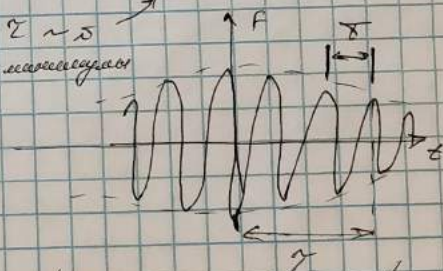
Если выполнено условие $\Delta A_t = \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right| \cdot \tau \sim A$ то это назыв. вр. когерентности.

+ условие на фазу

$$\Delta \varphi_t = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \cdot \tau \sim 2\pi$$

(максимум или максимум уменьшения)

всегда $\tau \gg \delta$



2. Продольный пространственный масштаб когерентности. Введём расстояние $l_{||}$ так, что выполнено соотношение.

$$\Delta A_x = \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| \cdot l_{||} \sim A, \quad \Delta \varphi_x = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \cdot l_{||} \sim 2\pi \quad (5)$$

Ср. характерное расст. - $l_{||}$, при котором выполняется соотношение (5) назыв.

лучше пометать
у Цродова или
Сивухина