Смирнов Лев Александрович. 08.09.23г.

Введение в теорию нелинейных волн.

Волновое ур-е в линейной среде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega^2 u = 0$$

ω^2 может зависеть от амплитуды физ. величины:

$$\omega^2 = \omega^2(u) \approx \left\{ \begin{matrix} \text{если меняется} \\ \text{не сильно} \to \text{в ряд} \end{matrix} \right\} \approx \omega_L^2 + \omega_{NL}^2 u^2$$

~ обн. малая величина.

Введём параметр малости μ. И введём разбиение по временам:

$$t_0,\ t_1 = \mu t,\ t_2 = \mu^2 t, \dots \qquad \omega_{NL}^2 \sim \mu^2$$

Для пространственных переменных:

$$x_0,\ x_1 = \mu x,\ x_2 = \mu^2 x, \dots$$

Тогда решение можно строить в виде асимптотического ряда:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n u_n (t_0, t_1, t_2, \dots, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

$$u = u_0 + \mu u_1 + \mu^2 u_2 + \dots$$

$$\frac{\partial u(t_0, t_1, \dots)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t_0} + \mu \frac{\partial u}{\partial t_1} + \mu^2 \frac{\partial u}{\partial t_2} + \dots$$

$$\frac{\partial^2 u(t_0, t_1, \dots)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t_0^2} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_0} + 2\mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_0} + \dots + \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + 2\mu^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1}$$

Аналогично:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1} + 2\mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_2} + \dots + \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\mu^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \dots$$

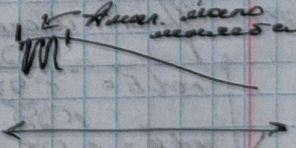
из „0" порядка $\frac{\partial}{\partial t_0} \to -i\omega_0$, $\frac{\partial}{\partial x_0} \to -ik_0$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + \omega_L^2 u_0 = 0$$

$\Rightarrow u_0 \sim e^{-i\omega t_0 + ikx_0}$ ~ плоская волна

$\Rightarrow k^2 = \omega^2 - \omega_L^2$ ~ дисп. соотношение

Метод усл. преоб. по доп. опорам на временном масштабе



Предполагаем: $u_0 = A(t_1, t_2, \dots, x_1, x_2 \dots)$ т.е. меняется на малых величинах (порядках)

Обозначим оператор:

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \omega_L^2$$

$$\hat{L} u_1 = -2\left(-i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial t_1} + ik_0 \frac{\partial A}{\partial x_1}\right) e^{-i\omega_0 t + ikx_0} + \text{к.с.}$$

ур-е первого пор-ка малости.

→ резонансные вторичные производные?

→ может возникнуть резонанс. и мы двигаем. → ∞

$$u_0 = A(t_1, x_1) e^{-i\omega t_0 + ikx_0} + \text{к.с.}$$

Чтобы ур-е разрешалось, слагаемые должны компенсировать друг друга, т.е. должны потребовать:

$$-i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial t_1} + ik_0 \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{k_0}{\omega_0}\frac{\partial A}{\partial x_1} = 0$$ ур-е переноса.

$\Rightarrow A\left(x_1 - \frac{k_0}{\omega_0} t_1\right)$ по размерности не совп. т.к. измен. в.у. писали в безразмерных величинах.

распр. с $v_{гр.} = v_{ф.}$ $\rightarrow$ просто следствие линейности среды.

Вклад во 2й порядок:

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} - \frac{k_0}{\omega_0}\frac{\partial A}{\partial x_1} = 0$$ от производных: $2\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $2\frac{\partial^2 u}{\partial t_0 \partial t_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}$

$$\Rightarrow -\hat{L} u_2 = \left(-2i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial t_2} - 2ik_0\frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + 3\omega_{NL}^2 |A|^2 A\right) e^{-i\omega_0 t_0 + ik_0 x_0}$$

Учитываем, что нелинейный член тоже 2го порядка малости

$$u^3 = \left(A e^{-i\omega_0 t_0 + ik_0 x_0} + A^* e^{+i\omega_0 t_0 - ik_0 x_0}\right)^3 =$$

$$= A^3 e^{-3i\omega_0 t_0 + 3ik_0 x_0} + \underbrace{3|A|^2 A e^{i\omega_0 t_0 + ik_0 x_0}} + \underbrace{3|A|^2 A^* e^{+i\omega_0 t_0 - ik_0 x_0}} +$$

$$+ A^{*3} e^{+3i\omega_0 t_0 - 3ik_0 x_0}$$

резонансные слагаемые

Аналогично:

$$-2i\left(\omega_0 \frac{\partial A}{\partial t_2} + k_0\frac{\partial A}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + 3\omega_{NL}^2 |A|^2 A = 0$$

Вводим переменную:

$$\xi_1 = x_1 - \frac{k_0}{\omega_0} t_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = \left(\left(\frac{k_0}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2}$$

$$\tau_2 = t_2 - \frac{\omega_0}{k_0} x_2$$

$$\left\{ -2i\frac{\partial A}{\partial \tau_2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} + \underbrace{3\omega_{NL}^2 |A|^2 A} = 0 \right\}$$ ~ аналог ур-ия Шредингера (нелинейное)

$\left(\left(\frac{k_0}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)$. $V(\vec{r}, t)$ ~ самоиндуцированный потенциал.

15.09.23г. Ур-ия Максвелла в отсутствии источников:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\vec{D} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \end{cases}$$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$\vec{B} = \mu \vec{H}$, где $\mu = 1$.

Как учесть нелинейность? Заложена в ε.

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\vec{E} = \varepsilon_L \vec{E} + \varepsilon_{NL}(|\vec{E}|)\vec{E}$$ — поляризация может нелинейной.

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon\vec{E})$$

$$\underbrace{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E}}_{\approx 0} - \Delta\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon\vec{E})$$

≈ 0 предполагаем, что много меньше Лапласиана

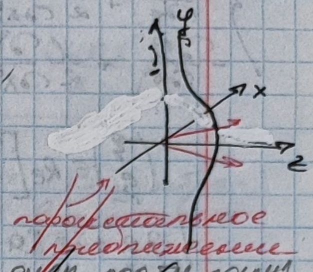
Предположения:

1) Пусть поляризация линейная: $\vec{E} = E(x,y,z,t)\,\vec{x}_0$

2) $E \sim e^{i\omega t - ikz}$ ~ монохроматическое излучение

3) $e^{i\omega t}$ и по z меняется медленно: $E(\vec{r},t) = \psi(x,y,\mu z)\, e^{i\omega t - ikz}$

и $\dfrac{\left|\frac{\partial \psi}{\partial z}\right|}{|\psi|} \ll 1$ ~ медл. меняется по z.



$$\Rightarrow \Delta E = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - k^2\psi - 2ik\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) e^{i\omega t - ikz}$$

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon_L + \varepsilon_{NL}(|\psi|^2)\right)\psi + 2ik\frac{\partial \psi}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}_{\Delta_\perp \psi} + k^2\psi = 0$$

из дин. соотн. гран.

$$2ik\frac{\partial \psi}{\partial z} - \Delta_\perp \psi - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{NL}(|\psi|^2)\psi = 0$$ ~ то же ур-е Шрёдингера.

Будем дальше работать с обезразмеренной формой:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi + \sigma|\psi|^2\psi = 0$$ ~ нелинейное У.Ш.

будем считать, что $\sigma = \pm 1$. → от него зависит фокусир. или дефокус. среда.

Рассм-ем одномерную задачу: 1D

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sigma|\psi|^2\psi = 0$$

нач. фаза

$\psi_0 = A e^{i\theta_0 + i\Omega t - ikx}$ — как одно из решений

$$\Rightarrow -\Omega - \frac{k^2}{2} + \sigma A^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = -\frac{k^2}{2} + \sigma A^2$$ ~ дисп. соотношение.

важна амплитуда.

⇒ нелин. дисперс. соотношение

Как ведёт себя среда по отн. к малому возмущению:

$$\psi = \psi_0 + \tilde{\psi}(t,x), \quad \text{где } |\tilde{\psi}| \ll A$$

$$\psi(x,t) = \left(A + \tilde{\psi}(x,t)\right) e^{i\Omega t - ikx + i\theta_0}$$

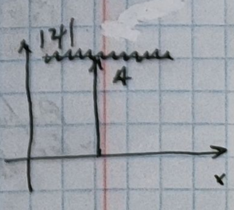
$$|\psi|^2\psi = \psi^*\psi^2 = e^{i\Omega t - ikx + i\theta_0}\left(A + \tilde{\psi}^*\right)\left(A + \tilde{\psi}\right)^2 \approx A^2 + 2A\tilde{\psi} + \cancel{\tilde{\psi}^2}$$

малое

$$\approx \exp(\ldots)\left(|A|^2 A + A^2\tilde{\psi}^* + 2|A|^2\tilde{\psi}\right)$$ → не хватает слагаемого, добавим „0" порядок

$$\Rightarrow i\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + \sigma\left(A^2\tilde{\psi}^* + 2|A|^2\tilde{\psi}\right) = 0$$

То что без возмущения зануляется



$$i\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} - \Omega\tilde{\psi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} - ik\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - \frac{k^2}{2}\tilde{\psi} + 2\sigma|A|^2\tilde{\psi} + \sigma A^2\tilde{\psi}^* = 0$$

$$\sigma A^2(\tilde{\psi} + \tilde{\psi}^*) + \sigma A^2\tilde{\psi}$$

Выделяем реальную и мнимую часть:

$2\xi(x,t)$

$3A^2\sigma\xi(x,t) + iA^2\sigma\zeta(x,t)$

$$\tilde{\psi}(x,t) = \xi(x,t) + i\zeta(x,t)$$

Re: $\begin{cases} -\dfrac{\partial \varrho}{\partial t} - \underbrace{\Omega \xi}_{\sim} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + K\dfrac{\partial \xi}{\partial x} - \underbrace{\dfrac{K^2}{2}\xi}_{\sim} + \underbrace{3A^2\sigma \xi}_{\sim} = 0 \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial t} - \cancel{\Omega \varrho} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} - K\dfrac{\partial \varrho}{\partial x} - \cancel{\dfrac{K^2}{2}\varrho} + \cancel{A^2\sigma \varrho} = 0 \end{cases}$ в силу дисп. соотн.

Im:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} - K\dfrac{\partial \varrho}{\partial x} = 0 \\ -\dfrac{\partial \varrho}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + K\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + 2A^2\sigma \xi = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} \xi \\ \varrho \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t - i\varkappa x}\right]$ → подставим в систему:

$\begin{cases} \lambda a + i\varkappa K a - \dfrac{\varkappa^2}{2} b = 0 \\ -\lambda b - i\varkappa K b - \dfrac{\varkappa^2}{2} a + 2A^2\sigma a = 0 \end{cases}$ ищем нетрив. решение:

$$\begin{vmatrix} \lambda + i\varkappa K & -\dfrac{\varkappa^2}{2} + 2A^2\sigma \\ -\dfrac{\varkappa^2}{2} & -\lambda - i\varkappa K \end{vmatrix} = 0 = -(\lambda + i\varkappa K)^2 + \frac{\varkappa^2}{2}\left(2\sigma A^2 - \frac{\varkappa^2}{2}\right) = 0$$

$$\lambda = -i\varkappa K \pm \sqrt{\frac{\varkappa^2}{4}(4\sigma A^2 - \varkappa^2)}$$

Если $\sigma = -1 \Rightarrow \sqrt{<0} \Rightarrow \lambda = -i\varkappa K \pm i\sqrt{\frac{\varkappa^2}{4}(4A^2 + \varkappa^2)}$ → всё мнимое

Соотв. дефокусир.-ей ⟵ ⇒ Никаких неустойчивостей не возникает. нелинейности. (нет exp. роста/затухания)

Сложнее, если $\sigma = 1$: $4A^2 - \varkappa^2 > 0 \Rightarrow \underset{\sim}{\varkappa^2 < 4A^2}$ при таком условии будут присутств. неустойчивости.

$\mathrm{Re}\,\lambda = \gamma = \sqrt{\frac{\varkappa^2}{4}(4A^2 - \varkappa^2)}$, если $\varkappa^2 < 4A^2$ $\quad \boxed{\varkappa^2 = 4A^2} \to \varkappa^2 = 2A^2$

$\gamma_{max} = \sqrt{\frac{2A^2}{4} \cdot 2A^2} = A^2 = \sqrt{A^4}$ ⟵ $\varkappa^2 = 2A^2$

⌞ степень неустойчивости опр-ся амплитудой

Если $A \to 0$ → неуст. не будет. ⇒ Фокусирующая нелинейность

29.09.23г. Нелинейное ур-е Шрёдингера: 3D

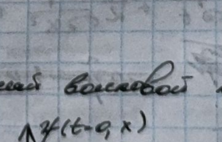
$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi + \sigma|\psi|^2\psi = 0$$

$\sigma = +1$. ~ неуст. плоские волны

$\sigma = -1$ ~ уст. плоские волны

Вариационный метод: рассмотрим локализованный волновой пакет

~ все ур-я - минимизация функционала действия



$$I = \int dt \int dx\, \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \ldots)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right]}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0$$

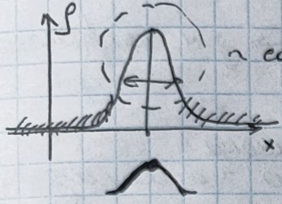
$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*) = \frac{i}{2}\left(\psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4$$ → подставим проверим

$\frac{i}{2}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi + |\psi|^2\psi + \frac{i}{2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$ — получили снова УНШ
$\Rightarrow \mathcal{L}$ вероятно верно

$I = \int dt \int dx\, \mathcal{L}(\psi,\psi^*)$; $\mathcal{L}(\psi,\psi^*) = \frac{i}{2}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4$

Профиль диффузионного уравнения → Гаусс. Возьмём:

$$\psi(t,x) = \underbrace{a(t)\exp\left\{-\frac{x^2}{2b^2(t)}\right\}}_{\rho(x,t)} \exp\underbrace{\left\{i\gamma(t) + i\alpha(t)x + \frac{i\beta(t)x^2}{2}\right\}}_{i\theta(x,t)}$$



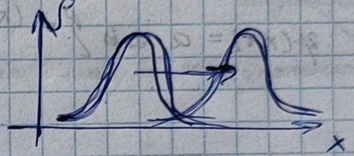
~ самое важное только в этой окрестности. В центре фазу можно аппроксимировать квадратично.

Можем Лагранжиан проинтегр-ть по x ~~x_0~~ слагаемыми: Получим укороченный Лагранжиан.

Вообще не учли, что профиль может смещаться

(3): $-\int\frac{1}{2}|\psi|^4 dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\, a^2\exp\left\{-\frac{2x^2}{b^2}\right\} = \{\text{Пуассон}\} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{a^4 b}{\sqrt{2}}$; $x \to x - x_0(t)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$



(2): $\frac{1}{2}\int|\nabla\psi|^2 d\xi = \frac{1}{2}\int|\nabla\rho|^2 d\xi + \frac{1}{2}\int\rho^2|\nabla\theta|^2 d\xi =$

$I = \frac{1}{2}\int\frac{a^2\xi^2}{b^4}\exp\left\{-\frac{\xi^2}{b^2}\right\}d\xi = \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^4}\int\xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{b^2}}d\xi = \begin{cases} u = \xi \to du = d\xi \\ dv = \xi e^{-\frac{\xi^2}{b^2}} \end{cases}$

$v = \frac{1}{2}\int e^{-\frac{\xi^2}{b^2}}d\xi^2 = -\frac{b^2}{2}e^{-\frac{\xi^2}{b^2}} \Big\} =$

$= \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^4}\left[\underbrace{-\frac{b^2}{2}e^{-\frac{\xi^2}{b^2}}\cdot\xi\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\to 0} + \frac{b^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{b^2}}d\xi\right] = \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^4}\cdot\frac{b^2}{2}\cdot\sqrt{\pi}b =$

$= \frac{a^2}{4b}\sqrt{\pi}$

$\frac{1}{2}\int\underbrace{(\alpha(t)+\beta\xi)^2}_{\alpha^2+2\beta\alpha\xi+\beta^2\xi^2}a^2\exp\left(-\frac{\xi^2}{b^2}\right)d\xi = \frac{\sqrt{\pi}a^2\alpha^2 b}{2} + \frac{\sqrt{\pi}a^2\beta^2 b^3}{4} + 0$

$\Rightarrow (2) = \frac{\sqrt{\pi}a^2}{4b} + \frac{\sqrt{\pi}\alpha^2 a^2 b}{2} + \frac{\sqrt{\pi}a^2\beta^2}{4}b^3$; $\psi = \rho(x,t)e^{i\theta(x,t)}$

(1): $\frac{i}{2}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \frac{i}{2}\left(\rho\cdot\left(\cancel{\frac{\partial\rho}{\partial t}} - i\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}\right) - \cancel{\rho}\left(\cancel{\frac{\partial\rho}{\partial t}} + i\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\right) =$

$= \rho^2\frac{\partial\theta}{\partial t} = a^2\exp\left(-\frac{\xi^2}{b^2}\right)\left(\dot\gamma + \dot\alpha\xi + \frac{\dot\beta\xi^2}{2}\right)$

$\Rightarrow \int d\xi\, a^2\exp\left(-\frac{\xi^2}{b^2}\right)\cdot\left(\dot\gamma + \dot\alpha\xi + \frac{\dot\beta\xi^2}{2}\right) = \sqrt{\pi}a^2 b\cdot\dot\gamma + \frac{a^2\sqrt{\pi}}{4}\dot\beta b^3$

Всё подставляем:

$$I = \int dt\,\sqrt{\pi}a^2\left(b\dot\gamma + \frac{b^3\dot\beta}{4} + \frac{1}{4b} + \frac{\alpha^2 b}{2} + \frac{\beta^2 b^3}{4} - \frac{a^2 b}{2\sqrt{2}}\right)$$

Обобщённые координаты: $(a, b, \gamma, \alpha, \beta)$ — по ним варьируем

Варьируем: $\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot a}\right] - \frac{\partial L}{\partial a} = 0 \ominus$

$$\ominus\ -2a\left(b\dot\gamma + \frac{b^2\dot\beta}{4} + \frac{1}{4b} + \frac{\alpha^2 b}{2} + \frac{\beta^2 b^3}{4} - \frac{a^2 b}{2\sqrt2}\right) - \frac{a^3 b}{\sqrt2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot b}\right) - \frac{\partial L}{\partial b} = \dot\gamma + \frac{3b^2\dot\beta}{4} - \frac{1}{4b^2} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3\beta^2 b^2}{4} - \frac{a^2}{2\sqrt2} = 0$$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\gamma}\right) - \frac{\partial L}{\partial\gamma} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(a^2 b) = 0 \to a^2 b = const \to$ з-н сохранения

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{a^2\alpha b = 0 \to \alpha = 0}$ — ? ошибка

$a\neq0$ ~ амплитуда

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\beta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\beta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{a^2 b^3}{4}\right) - \frac{a^2\beta b^3}{2} = 0$

$$\psi(x,t) = a\exp\left\{-\frac{(x-x_0(t))^2}{2b(t)}\right\}\exp\left\{i\gamma(t) + i\alpha(t)\cdot(x - x_0(t)) - \frac{\beta(t)(x-x_0(t))^2}{2}\right\}$$

не учит. смещение

на самом деле $\xi = \xi(t)$. $\Rightarrow \alpha = 0$

$$\frac{i}{2}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \rho^2\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \rho^2\left(\dot\gamma(t) + \dot\alpha(t)\xi - \alpha\dot x_0 + \frac{\dot\beta(t)}{2}\xi^2 - \beta\xi\dot x_0\right)$$

было бы:

$a^2\alpha b - \dot x_0\cdot\frac{a^2 b}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot x_0 = 2\alpha}$ → фронт будет смещаться

(лин. фазовый фронт заставляет смещаться ψ)

13.10.23. На прошлой лекции:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac12\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + |\psi|^2\psi = 0 \quad \leftarrow \quad S = \int dt\int \mathcal{L}\,dx$$

$$\mathcal L = \frac{i}{2}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac12\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2 - \frac12|\psi|^4$$

Угадывали вид ф-ии:

$$\psi(x,t) = a\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2b^2}\right)\exp\left(i\gamma(t) + i\alpha(x-x_0) + i\beta(x-x_0)^2\right)$$

Получили усреднённый Лагранжиан:

$$S = \int dt\,\bar{\mathcal L}(a,b,\gamma,\alpha,\beta,x_0)$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{\mathcal L}}{\partial\dot\xi}\right) - \frac{\partial\bar{\mathcal L}}{\partial\xi} = 0 \to$ получили

$\frac{d\gamma}{dt} = const \equiv \omega \Rightarrow \gamma = \omega t$ ~ частота

$\frac{d}{dt}(a^2 b) = 0 \Rightarrow a^2 b = const$ — нек-ый з-н сохранения.

$\frac{dx_0}{dt} = 2\alpha$

$\frac{d\alpha}{dt} = 0$

$$\begin{cases}\frac{d\beta}{dt} = \frac{P}{\sqrt{8\pi}a^3} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - 4\beta^2 a^2\right) \\ \frac{da}{dt} = 4\beta a\end{cases}$$

→ нел-ие теорема ГК.

Что такое P?

$$\ominus\begin{cases} i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + |\psi^2|\psi = 0 & |\cdot\psi^* \\ -i\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} + |\psi^2|\psi^* = 0 & |\cdot\psi\end{cases}$$

$$i\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad \int\dots dx$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\int|\psi|^2 dx + \frac{1}{2}\int\underbrace{\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right)}_{\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \cancel{\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right) + \cancel{\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2}} dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)}_{\text{полный диф-л}}dx = 0$$ — на ∞ должна спадать.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2 dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2 dx = P$$ — по сути мощность излучения.

$$a^2\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{b}\right)dx = \sqrt{\pi}a^2 b$$ ← что и получили, что $a^2 b = const$

Исслед. состояния равновесия

$$\begin{cases}\frac{d\beta}{dt} = \frac{P}{\sqrt{8\pi}a^3} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - 4\beta^2 a^2\right) \\ \frac{da}{dt} = 4\beta a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{P}{\sqrt{8\pi}a^3} + \frac{1}{a^4} - 4\beta^2 = 0 \\ 4\beta a = 0 \Rightarrow \beta = 0\end{cases}$$

$$\boxed{a = \frac{\sqrt{8\pi}}{P}} \to P = \frac{\sqrt{8\pi}}{a_0}$$

$$\beta_0 = 0; \quad a_0 = \frac{\sqrt{8\pi}}{P}$$

Линеаризуем $|\tilde\beta| \ll 1$; $|\tilde a| \ll 1$

$\beta = \beta_0 + \tilde\beta(t) = \tilde\beta(t)$

$$\begin{cases}\frac{d\tilde a}{dt} = 4a_0\tilde\beta \\ \frac{d\tilde\beta}{dt} = -\frac{3P}{\sqrt{8\pi}a_0^4}\tilde a - \frac{4}{a_0^5}\tilde a\end{cases}$$

→ подставим a_0

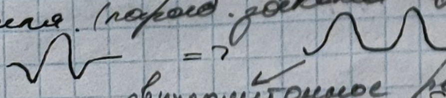
$$\begin{cases}\frac{d\tilde a}{dt} = 4a_0\tilde\beta \\ \frac{d\tilde\beta}{dt} = -\frac{3}{a_0^5}\tilde a - \frac{4}{a_0^5}\tilde a = -\frac{7}{a_0^5}\tilde a\end{cases}$$

Дисперсия была скомпенсирована нелинейными эффектами. Отклоним немного от состояния равновесия => волновой пакет будет менять амплитуду.

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 4a_0 \\ -\frac{7}{a_0^5} & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{28}{a_0^4} \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{28}{a_0^4}$$ → центр

Локализ. уедин. волна с неизмен. параметрами — солитон

При больших a → нарушение гауссова профиля. (парабол. законы в профиле)



=> двухсолитонное решение

Когда вообще такое сообщ. тока?

старт → сузился → снова расширился

Д/З: Попробовать проинтегрировать. Найти Гамильтониан.
Как найти точку невозврата траектории?
* Возьмём очень малые амплитуды => траектория на фаз. плоскости уйдёт на ∞

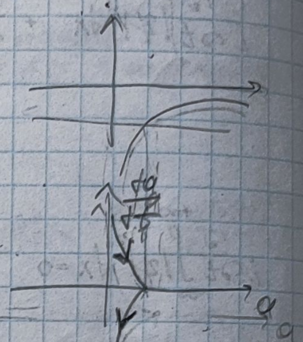
Повышенная степень нелинейности.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + |\psi|^4\psi = 0$$

Аналогично:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2 - \frac{|\psi|^6}{3}$$

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{P}{\sqrt{\pi}a}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + i\beta x^2\right)$$ → пренебр. линейными слагаемыми



Усреднённое решение в итоге получим:

$$\bar{S} = \int dt\left(-\frac{P}{4}\dot{\beta}a^2 - P\frac{(1+a^4\beta^2)}{2a^2} + \frac{P^3}{\sqrt{27}\pi a^2}\right)$$

Если проварьировать:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = 2\beta a & \Rightarrow \beta = \frac{1}{2a}\frac{da}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} + 2\beta^2 = \frac{2}{a^4}\left(1 - \frac{2P^2}{\sqrt{27}\pi}\right) \end{cases}$$

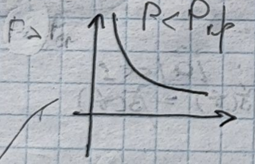
$$\frac{1}{2a}\frac{d^2a}{dt^2} - \cancel{\frac{1}{2a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2} + \cancel{\frac{1}{2a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2} = \frac{2}{a^4}\left(1 - \frac{2P^2}{\sqrt{27}\pi}\right)$$

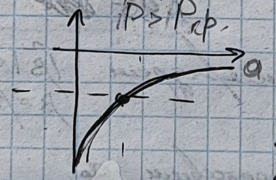
$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{4}{a^3}\left(1 - \frac{P^2}{\sqrt{27}\pi}\right)$$

$$U_1 = \int^a -\frac{4}{a^3}\left(1 - \frac{P^2}{\sqrt{27}\pi}\right)da = \left(1 - \frac{P^2}{\sqrt{27}\pi}\right)\cdot\frac{2}{a^2}$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{4}{a^3}\left(1 - \frac{P^2}{\sqrt{27}\pi}\right) = 0$$ → аналогично модели БК. Наоборот наверное

$$P > P_{кр} = \sqrt{\sqrt{27}\pi}$$





Повышенная степень нелин. может вызвать эффекты в многомерных задачах.

В 1м случае $a \to \infty$, в другом $a \to 0$ → волна коллапсирует.

За счёт нелин. эффектов происходит коллапс в.ф. (бесконечное её сжатие)!

20.10.23.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi + \gamma|\psi|^2\psi = 0, \quad \gamma = \pm 1. \quad /\cdot\psi^* \ominus \text{к.с.}$$

$$\Rightarrow i\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{2}(\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^*)}_{\frac{1}{2}\mathrm{div}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)} + \gamma|\psi|^4 - \gamma|\psi|^4 = 0$$

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\frac{1}{2i}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)\right) = 0$$ → интегр.

и $\int_\infty \mathrm{div} \to 0$

Пок-ль волнового пакета (мощность) сохр.

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi^2|\,d\vec{r} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$$ – Аналогия с ур-ем непрерывности

Хотим посмотреть, что с $\vec{j}$?

$\vec{j} = \frac{1}{2i}(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$

Из исходного ур-я выражаем $\frac{\partial\psi}{\partial t}$

$$\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\nabla\psi + \psi^*\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\psi^* - \psi\nabla\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) = (*)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\Delta\psi^* + \tilde{\nu}|\psi|^2\psi^*\right)\nabla\psi - \frac{1}{i}\nabla\left(\frac{1}{2}\Delta\psi + \tilde{\nu}|\psi|^2\psi\right)\psi^* + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\Delta\psi + \tilde{\nu}|\psi|^2\psi\right)\nabla\psi^* - \frac{1}{i}\psi\,\nabla\left(\frac{1}{2}\Delta\psi + \tilde{\nu}|\psi|^2\psi\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\Delta\psi^*\nabla\psi - \nabla(\Delta\psi)\psi^* + \Delta\psi\nabla\psi^* - \psi\nabla(\Delta\psi^*)\right) + \tilde{\nu}\left(|\psi|^2\psi^*\nabla\psi - \nabla(|\psi|^2\psi)\psi^* + \right.\right.$$

$$\left.\left. + |\psi|^2\psi\nabla\psi^* - \psi\nabla(|\psi|^2\psi^*)\right)\right) = (*)$$

$$= -\frac{i}{2}\Big(\underbrace{\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\nabla\psi + \psi^*\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}}_{\nabla\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\psi^*} - \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\psi^* - \psi\nabla\frac{\partial\psi^*}{\partial t}}_{-\nabla\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) + \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\nabla\psi}\Big) =$$

Преобразуем

$$= \underbrace{\nabla\left(\frac{i}{2}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right)}_{\text{не вклад.}\ \int_V = 0} + \underbrace{\left(-i\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\nabla\psi + i\frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\psi^*\right)}_{-\left(\frac{1}{2}\Delta\psi^* + \tilde{\nu}|\psi|^2\psi^*\right)\nabla\psi - \left(\frac{1}{2}\Delta\psi + \tilde{\nu}|\psi|^2\psi\right)\nabla\psi^*}$$

$$|\psi|^2\psi^*\nabla\psi + |\psi|^2\psi\nabla\psi^* = |\psi|^2(\psi^*\nabla\psi + \psi\nabla\psi^*) = |\psi|^2\nabla|\psi|^2 = \frac{1}{2}\left(\nabla|\psi|^4\right)$$

$$\frac{1}{2}(\Delta\psi^*\nabla\psi + \Delta\psi\nabla\psi^*) = \frac{1}{2}\nabla\left(|\nabla\psi|^2\right)$$

$$\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \nabla\left(\frac{i}{2}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right) - \nabla\underbrace{\left(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{\tilde{\nu}}{2}|\psi|^4\right)}_{\to 0}$$

→ градиент об. слагаемого

всё уходит

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_V \vec{j}\, d^3\vec{r} = 0$$

Хотели получить (доказать) $\frac{d}{dt}\int d^3\vec{r}\,\mathcal{H} = 0$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\nabla|\psi|^2 - \frac{\tilde{\nu}}{2}|\psi|^4$$

Пр. наим. действия через гамильтониан:

$$S = \int\left(\sum p_i\dot{q}_i - \mathcal{H}(q, p, t)\right)dt$$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi + \tilde{\nu}|\psi|^2\psi = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{\partial\psi^*}{\partial t}$$

⊕ к.с.

$$\cancel{i\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2} - \cancel{i\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2} + \frac{1}{2}\Delta\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \tilde{\nu}|\psi|^2\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \tilde{\nu}|\psi|^2\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tilde{\nu}}{2}|\psi|^4\right) + \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\nabla\psi + \frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\psi^*\right) - \frac{1}{2}\nabla\psi\frac{\partial\nabla\psi^*}{\partial t} - \frac{1}{2}\nabla\psi^*\frac{\partial\nabla\psi}{\partial t}$$

$\int \ldots d^3\vec{r}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{H}) - \operatorname{div}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\nabla\psi + \frac{\partial\psi}{\partial t}\nabla\psi^*\right) = 0$$

?

$$\frac{d}{dt}\left(\int d^3\vec{r}\,\mathcal{H}\right) = 0$$

→ получили.

Центр масс: $\frac{1}{P}\int d^n\vec{r}\,\vec{r}\,|\psi|^2$

$\frac{1}{P}\int d^n\vec{r}\,\underline{\underline{\vec{r}^2}}\,|\psi|^2$ $P =$

27.10.23г. $i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0$ выясним какие интегралы сохраняются

$P = \int d^n\vec{r}\,|\psi|^2$ ~ мощность

$\vec{J} = \frac{i}{2}\int d^n\vec{r}\,(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$ ~ поток.

$H = \int d^n\vec{r}\left(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4\right)$ ~ Гамильтониан

Локализованное поле можно охарактеризовать центром масс.

$\vec{r}_c = \frac{1}{P}\int d^n\vec{r}\cdot\vec{r}\,|\psi|^2$ ~ центр масс

$\vec{\sigma}^2 = \langle\vec{r}^2\rangle = \frac{1}{P}\int d^n\vec{r}\,\vec{r}^2\,|\psi|^2$ ~ ширина локал. поля.

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{P}\int d^n\vec{r}\cdot\vec{r}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \frac{1}{P}\int d^n\vec{r}\cdot\frac{i}{2}\underbrace{(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\vec{J}}{P}$$

Важно знать, где в основном локализовано поле:

$$\frac{d\vec{\sigma}^2}{dt} = \frac{1}{P}\int d^n\vec{r}\,\vec{r}^2\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \circeq$$

Предположим, что пучок имеет цилиндр. симметрию: $n = 2$.

$$\circeq \frac{2\pi}{P}\int dr\cdot r^3\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \circeq$$

ещё r из якобиана

$$\Delta_{2\perp}\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}}$$ → предпол. что симметр. отн. поворота φ.

$$\circeq \frac{\pi i}{P}\int dr\cdot r^2\left(\psi\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\right) - \psi^*\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right) = \{\text{по частям}\} =$$

$$\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial r} + r\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|^2 + r\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial r^2} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial r} - r\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|^2 - r\psi^*\frac{\partial^2\psi^*}{\partial r^2}$$

$$= \frac{\pi i}{P}\int dr\cdot r^2\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial r} - r\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\underbrace{- r\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|^2 + r\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|^2}_{\text{взаим. сократятся} = 0}\right) =$$

$$= \frac{2\pi i}{P}\int_0^{+\infty} dr\left(r^2\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial r} - r^2\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\right)$$

м.б. по частям

$$\frac{d^2\sigma^2}{dt^2} = \frac{2\pi}{P}\int_0^{+\infty} dr\left(r^2 i\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial r} + r^2 i\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} + \text{к.с.}\right) \circeq$$

$$ir^2\psi^*\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\psi^* i\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - r^2 i\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi^*}{\partial r} - 2r\psi^* i\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$= \frac{4\pi}{P}\int_0^{+\infty} dr\left(\left(r^2\frac{\partial\psi^*}{\partial r} - 2r\psi^*\right)\underbrace{\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-|\psi|^2\psi} + c.c.\right) = \frac{8\pi H}{P} = const$$

$$\frac{d^2\overline{r^2}}{dt^2} = \frac{8\pi H}{P} \Rightarrow \frac{d\overline{r^2}}{dt} = \frac{8\pi H}{P}t + C$$

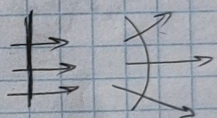
$$\overline{r^2} = \frac{4\pi H}{P}t^2 + \left(\frac{d\overline{r^2}}{dt}\right)\Big|_{t=0}\cdot t + \overline{r_0^2}$$

Пусть $\left(\frac{d\overline{r^2}}{dt}\right)\Big|_{t=0}=0$ → плоский волн. фронт. $H = \int d^n r\left(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{\alpha}{2}|\psi|^4\right)$

$\overline{r^2} = \frac{4\pi H}{P}t^2 + \overline{r_0^2}$ $H>0$ в лин. случае. от $\alpha = \pm 1 \Rightarrow H \gtrless 0$?

знак H зависит от нелинейности

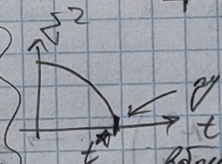
Волн. пакет может схлопнуться. → и можем найти время схлопывания.
Сильные пучки могут схлопнуться.
1) $H>0$, $t\uparrow$ $\overline{r^2}\uparrow$ → пучок расплывается
2) $H<0$ $t\uparrow$ $\overline{r^2}\downarrow$ → фокусировка



$\overline{r^2}$ – ширина локализующего пучка

3.11.23 г.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi + \sigma|\psi|^2\psi = 0 \quad ; \quad \sigma = \pm 1$$



пучок схлопнулся (коллапс пучка)

вблизи t^*: $P = \int d^n r|\psi|^2 \sim \overline{r^2}\,\overline{I}_{\to\infty}$

ψ – комплексная в.ф.

Ампл.-фазовое представление.

$$\psi = \Phi(\vec r, t)e^{i\Theta(\vec r,t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + i\frac{\partial\Theta}{\partial t}\Phi\right)e^{i\Theta}$$

$$\nabla\psi = (\nabla\Phi + i\Phi\nabla\Theta)e^{i\Theta}$$

$$\Delta\psi = \left(\Delta\Phi + 2i\nabla\Phi\nabla\Theta + i\Phi\Delta\Theta - \Phi(\nabla\Theta)^2\right)e^{i\Theta}$$

Подставим и приравняем Re и Im части.

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \Phi\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\Phi + i\nabla\Phi\nabla\Theta + \frac{i}{2}\Phi\Delta\Theta - \frac{\Phi(\nabla\Theta)^2}{2} + \sigma\Phi^3 = 0$$

$\vec v = \nabla\Theta$ – фазовая ск-ть

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\Phi\nabla\Theta + \frac{\Phi}{2}\Delta\Theta = 0 \quad \Big/ \cdot 2\Phi \\ \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Theta)^2 = \sigma\Phi^2 + \frac{\Delta\Phi}{2\Phi} \end{cases}$$

$\rho = \Phi^2$ $\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec v) = 0$ ~ ур-е непрерывности

~ аналог из гидродинамики - ур-е Эйлера

Аналогия с гидродинамикой

$$\Downarrow \quad \frac{\partial\vec v}{\partial t} + (\vec v, \nabla)\vec v = \nabla\left(\sigma\Phi^2 + \frac{\Delta\Phi}{2\Phi}\right)$$

↳ как давление.

$$\frac{\partial\vec v}{\partial t} + (\vec v, \nabla)\vec v = \nabla\left(\sigma\rho + \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}}\right)$$

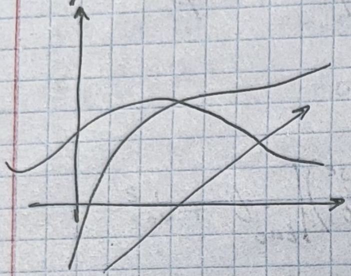
квантово-механическое давление

Имеет смысл работать с аналогом ур-я Шредингера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} = \nabla\left(\xi\rho + \dfrac{\Delta\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}}\right) \end{cases}$$

Приближённо рассм-м распределение: если оно широкое

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}}\right| \ll 1 \rightarrow \text{пренебрегаем.}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} = \xi\nabla\rho \end{cases}$$

Рассм-м автомодельное решение - вид которого сохраняется неизменным.

$\vec{v} = v(r,t)\cdot\vec{r_0}$

$\rho = \rho(r,t)$

В сферич. с.к.:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\rho v) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial r} = \xi\dfrac{\partial \rho}{\partial r} \end{cases}$$

Предположение:

$v = \Phi(t)\cdot r$

$\rho = a(t)\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2(t)}\right) \rightarrow$ подставим:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2(t)}\right) + 2a\dfrac{r^2}{R^3(t)}\dfrac{dR}{dt} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\Phi(t)\cdot a(t)\, r^2 - r^4\dfrac{a(t)\Phi(t)}{R^2(t)}\right) = 0 \\ r\dfrac{d\Phi}{dt} + \Phi^2 r = -\xi\dfrac{2a(t)\, r}{R^2(t)} \end{cases}$$

приравн. при одинаковых степенях r

$(*)$ $\dfrac{d\Phi}{dt} + \Phi^2 = -\xi\dfrac{2a(t)}{R^2(t)}$ ~ ур-е Риккати.

(r^0): $\dfrac{da}{dt} + 2a\Phi = 0$ (1) $\Rightarrow 2a\Phi = -\dfrac{da}{dt}$

(r^2): $-\dfrac{da}{dt}\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{2a}{R^3}\dfrac{dR}{dt} - \dfrac{4a\Phi}{R^2} = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(a(t)\Phi(t)\, r^2 - \frac{a(t)\Phi(t)\, r^4}{R^2(t)}\right) = 2a\Phi - \frac{4a\Phi r^2}{R^2}$$

$$-\frac{da}{dt} - 4a\Phi + \frac{2a}{R}\frac{dR}{dt} = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{da}{dt} = -\frac{2a\,dR}{R\,dt} \qquad \frac{da}{2a} = -\frac{dR}{R} \qquad \Rightarrow a(t) = \frac{R_0^2 a_0}{R^2(t)}$$

Нач. усл.:

$$\begin{cases} a(t=0)=a_0 \\ \varphi(t=0)=0 \\ R(t=0)=R_0 \end{cases}$$

$$2a\varphi = \frac{2a}{R}\frac{dR}{dt} \Rightarrow \varphi(t)=\frac{1}{R}\frac{dR(t)}{dt}$$

из (*)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)+\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\frac{2\gamma a_0 R_0^2}{R^4}$$

Сведём ур-е Риккати к линейному!

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{d^2R}{dt^2} - \cancel{\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2} + \cancel{\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2} = -\frac{2\gamma a_0 R_0^2}{R^4}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{2\gamma a_0 R_0^2}{R^3} = 0$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{2\gamma a_0 R_0^2}{R^3} \qquad \cancel{\frac{dR}{dt} = y \rightarrow R = yt}$$

$$\cancel{R = R_0 + yt}$$

$$\cancel{\frac{dy}{dt} = -\frac{2\gamma a_0 R_0^2}{y^3 t^3}} \qquad \cancel{\frac{dy}{dt} = -\frac{2\gamma a_0 R_0^2}{(R_0+yt)^3}}$$

Решение;

$$\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{2\gamma a_0 R_0^2}{R^3} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{dR}{dt}$$ и интегрируем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{\gamma a_0 R_0^2}{R^2} = const \quad \rightarrow \text{из н.у.: } const = -\gamma a_0 \qquad \frac{dR}{dt}=0,\ R \equiv R_0$$

$$\frac{dR}{dt} = \pm\sqrt{\gamma a_0 2\left(\frac{R_0^2}{R^2}-1\right)} \Rightarrow \frac{dR^2}{dt} = 2\sqrt{2\gamma a_0 (R_0^2 - R^2)}$$

$$\int \frac{dR^2}{\sqrt{R_0^2-R^2}} = \int 2\sqrt{2\gamma a_0}\, dt$$

$$-2\sqrt{R_0^2-R^2} = 2\sqrt{2\gamma a_0}\, t$$

$\Rightarrow R_0^2 - R^2 = 2\tilde{\nu} a_0 t^2 \Rightarrow R = \sqrt{R_0^2 - 2\tilde{\nu} a_0 t^2} \Rightarrow a(t)$ и $\Phi(t)$

более точное описание, но при малых предположениях.

Дефокусирующая нелинейность. $\rightarrow \tilde{\nu} = -1$

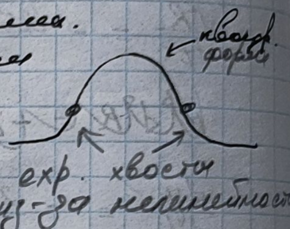
$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi - |\psi|^2\psi = 0$$

переходит в ур-я вида:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{v} = \nabla\left(-\rho + \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}}\right)$$

Широкие пучки со спадающими хвостами. для дефок. аналогично пренебр. второй нелинейностью:



$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{v} = \nabla(-\rho) \end{cases}$$

Модельная задача – имеем только 1ну координату

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial\rho}{\partial x} \end{cases}$$

Предположим, что

$$v = v(\rho, t)$$

$$v(x,t) = v(\rho(x,t))$$

где-то ли такие решения? проверить совместность. (по сути просто предположим)

Возьмём производную.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{d\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{d\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{dv}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{dv}{d\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{dv}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dv}{d\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dv}{d\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)^2\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$$

будет равенство, когда $\rho\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)^2 = 1.$

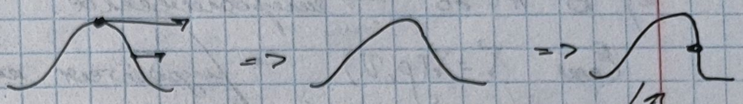
$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial\rho} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

$$\Rightarrow v = 2\sqrt{\rho} \rightarrow \text{подставляем}$$

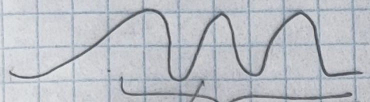
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 2\sqrt{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \sqrt{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\sqrt{\rho}}_{\text{скорость зависит от } \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$ ~ ур-е Хопфа.

т.е. в.ф. расшир. там, где ρ больше.



опрокидывание



изрезанность

Потом нужно решение регуляризовать.

17.11.23г.

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \nu|\psi|^2\psi = 0$$

Ампл.-фазовое представление:

$$\psi = \Phi(x,t)e^{i\Theta(x,t)}$$ было, разделяя Re и Im части

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla\Phi\nabla\Theta + \frac{\beta}{2}\Phi\Delta\Theta = 0 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Theta)^2 - \nu\Phi^2 = \cancel{\frac{\Delta\Phi}{2\Phi}} \end{cases}$$ → пренебрегли дисперсионным членом.

$\Phi^2 = \rho(x,t)$; $\nabla\Theta = v(x,t)$ ~ получили аналог гидродинам. ур-ий.

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} - \nu\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$\left|\frac{\Delta\Phi}{2\Phi}\right| \ll 1$ ~ широкое распределение (меняется слабо)

~ аналог ур-я Эйлера.

Приведём к каноническому виду: $\chi(x,t)$ ~ введём вспом. ф-ю.

$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \rho v$; $\frac{\partial \chi}{\partial x} = -\rho$ → в $(*)$

$$-\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} = 0$$ ~ 1е ур-е в тождество

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\partial \rho}{\partial t}v + \rho\frac{\partial v}{\partial t} = -v\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} - \rho v\frac{\partial v}{\partial x} + \nu\rho\frac{\partial \rho}{\partial x} =$$

$$= -v\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} - v\frac{\partial \rho v}{\partial x} + v^2\frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu\rho\frac{\partial \rho}{\partial x} =$$

$$= -2v\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} - (v^2 + \nu\rho)\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

Имеем следующее выражение:

$$A\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = 0$$ ~ канонич. вид

$A = 1$; $B = v$; $C = v^2 + \nu\rho$

$$B^2 - AC = v^2 - v^2 - \tilde{\nabla}\rho = -\tilde{\nabla}\rho.$$

Два случая:

1) $B^2 - AC < 0$ → эллиптич. → $\tilde{\nabla} > 0$

2) $B^2 - AC > 0$ → гиперболическое. → $\tilde{\nabla} < 0$

Если $\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}(\rho, v)$ → разобьется на области.

более хитрая нелинейность

$$A \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = 0$$

Пусть знаем какое-то базовое решение: $\bar{\rho}(x,t)$; $\bar{v}(x,t)$ и линеаризуем вблизи этого решения.

$$\rho(x,t) = \bar{\rho}(x,t) + \tilde{\rho}(x,t)$$
$$v(x,t) = \bar{v}(x,t) + \tilde{v}(x,t)$$

как малые отклонения

$$|\tilde{v}(x,t)| \ll |\bar{v}(x,t)| \quad ; \quad |\tilde{\rho}(x,t)| \ll |\bar{\rho}(x,t)|$$

$$A = A(\rho, v) \; ; \; B = B(\rho, v) \; ; \; C = C(\rho, v)$$

$$\Rightarrow \chi(x,t) = \bar{\chi}(x,t) + \tilde{\chi}(x,t)$$ аналогично линеаризуем

$\Rightarrow A(\bar{\rho}, \bar{v}),\ B(\bar{\rho}, \bar{v})$ и $C(\bar{\rho}, \bar{v})$ → остальное дают 2й порядок малости

$$A(\bar{\rho}, \bar{v}) \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial t^2} + 2B(\bar{\rho}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial t \partial x} + C(\bar{\rho}, \bar{v}) \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial x^2} = 0$$

$$\tilde{\chi} = \mathrm{Re}\left(\alpha(x,t)\, e^{i\beta(x,t)}\right)$$

$\bar{\rho}, \bar{v}$ — плавные, медлен. ф-ии x и t

→ для β получим ур-е эйконала.

$$B^2(\bar{\rho}, \bar{v}) - A(\bar{\rho}, \bar{v})\, C(\bar{\rho}, \bar{v})$$

Если $(\nabla\beta)^2 < 0$ ⟹ могут быть схлопывания эл. типа (коллапс)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Предположим:
$$v(x,t) = v(\rho(x,t))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{dv}{d\rho} \cdot \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{dv}{d\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v\dfrac{dv}{d\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Чтобы система была совместна.

$$\rho\left(\frac{dv}{d\rho}\right)^2 = 1.$$

$$\Rightarrow v = 2\sqrt{\rho}$$

где $\rho = \Phi^2$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 2\sqrt{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \sqrt{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\sqrt{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \Phi^2}{\partial t} + 3\Phi\frac{\partial \Phi^2}{\partial x} = 0$$

$$2\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2\cdot 3\Phi^2\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \Big/ : 2\Phi \neq 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 3\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d\Phi(\xi)}{dt} = 0 \quad \text{где} \quad \xi = x - 3\Phi t \quad (**)$$

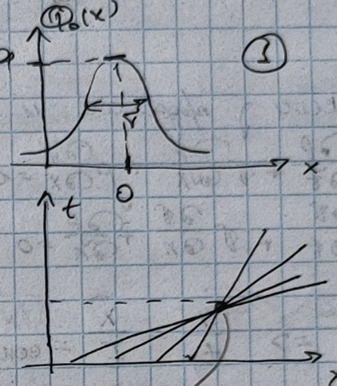
$$\frac{dx}{dt} = 3\Phi$$

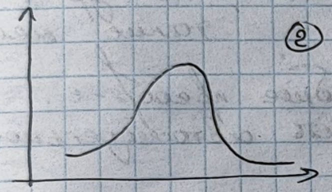
$$\Phi(\xi) = \mathrm{const}$$

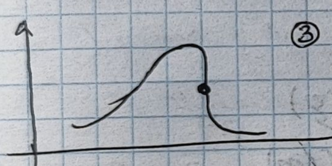
Зададимся распределением вида:

$$\Phi_0(x) = a\exp\left(-\frac{x^2}{2\tau^2}\right)$$

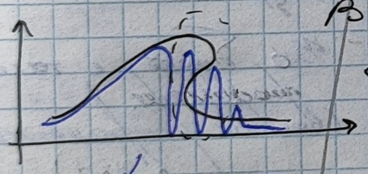
со временем







∞ произв $\Rightarrow$ 2го порядка произв. есть $\Rightarrow$ нельзя обходить, они регуляризуют неоднозначность.



В момент опрокидывания включаются другие эффекты. $\to$ регуляр. решение даст изрезанность в.ф.

Появится область с изрезанностью.

Время опрокидывания, как найти?

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d\xi}\left(1 - 3\frac{\partial \Phi}{\partial x}t\right) \quad \leftarrow \text{из } (**) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - 3\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{d\Phi}{d\xi}t$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\left(3\frac{d\Phi_0}{d\xi}t + 1\right) = \frac{d\Phi_0}{d\xi}$$

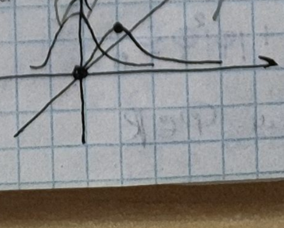
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{d\Phi_0/d\xi}{1 + 3\frac{d\Phi_0}{d\xi}\cdot t} \to \infty \quad \text{если} \quad 1 + 3\frac{d\Phi_0}{d\xi}t^* = 0$$

$$t^* = -\frac{1}{3}\left(\frac{d\Phi_0}{d\xi}\right)^{-1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{d\Phi_0}{dx}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = a\exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2}\right\}\cdot\left(-\frac{2x}{2\tau^2}\right) = -\frac{ax}{\tau^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2}\right\}$$

$$t^* > 0 \Rightarrow \left(\frac{d\Phi_0}{dx}\right)^{-1} < 0$$

и будет время опрокидывания



$$t^* = \frac{\tau^2}{3ax\exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2}\right\}} \to \max$$

$$t^{*\prime} = \frac{\gamma^2}{3a}\,\frac{\cdot}{x^2\exp\{-\dots\}}\left(-\exp\left\{-\frac{x^2}{2\gamma^2}\right\} - x\cdot\left\{-\frac{x}{\gamma^2}\right\}\exp\{-\dots\}\right)$$

$$= 0 \qquad \left(-1+\frac{x^2}{\gamma^2}\right) = 0 \qquad x_*^2 = \gamma^2$$

$$x_* = \gamma$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_0}{dx} = -\frac{a\gamma}{\gamma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} = -\frac{a}{\gamma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$t^* = \frac{\gamma\sqrt{e}}{3a}$$

Для зачёта проделать и посмотреть что будет когда задан профиль

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Если отмасштабировать и t и x: $\bar{t} = c\cdot t$; $\bar{x} = cx$, то ур-я будут такие же

$$\Rightarrow \frac{x}{t} = \frac{\bar{x}}{\bar{t}} = \text{const}$$

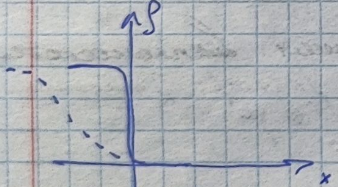
← есть масштабное преобр-е.

⇒ можем строить автомодельное решение

$$\xi = \frac{x}{t}$$

Можно попытаться искать: $\rho(x,t) = \rho(\xi)$

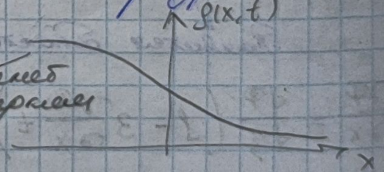
$v(x,t) = v(\xi)$



$$\rho(x,t_0) = \begin{cases} \rho_0, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

Что будет с таким профилем (волна разрежения)

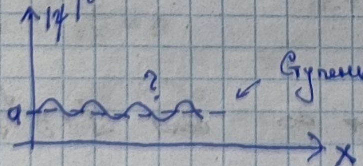
профиль станет более пологим



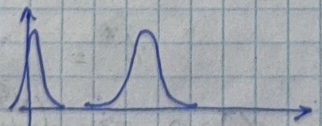
24.11.23.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \gamma|\psi|^2\psi = 0 \quad \text{где } \gamma = \pm 1.$$

$\gamma = +1.$



Ступенька будет дробиться



$$\psi = \varphi\cdot e^{i\omega t}$$

$$-\omega\varphi + \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + |\varphi|^2\varphi = 0$$

Предположим $\Phi \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi}{dx^2} + (\Phi^2-\omega)\Phi = 0 \quad \Big| \otimes \frac{d\Phi}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\Phi^4}{4} - \frac{\omega\Phi^2}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \Phi^4 - 2\Phi^2 = C$$ при $x \to \pm\infty$ $\left|\frac{d\Phi}{dx}\right|, \Phi \to 0$

$\Rightarrow C = 0$

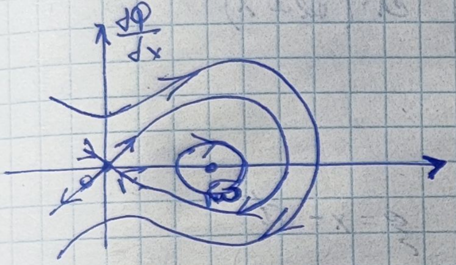
$$\frac{d\Phi}{dx} = \pm\sqrt{(\Phi^2-2\omega)\Phi^2}$$

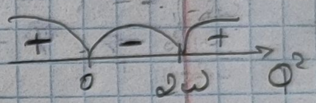
$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dx} = y \\ \frac{dy}{dx} = -2(\Phi^2-\omega)\Phi \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6\Phi^2+2\omega & 0 \end{vmatrix}$$ Методом ГК.

Состояния равновесия:

$\frac{d\Phi}{dx} = 0$, $\Phi = 0$ или $\Phi = \pm\sqrt{\omega}$, $\omega > 0$





Линеаризуем:

$$\Phi(x) = \Phi_0 + \tilde\Phi(x)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\tilde\Phi}{dx^2} + (\Phi_0^2-\omega)\tilde\Phi + 2\Phi_0^2\tilde\Phi = 0$$

Если $\Phi_0 = 0$:

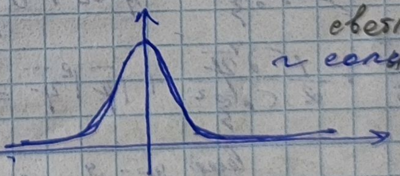
$$\frac{1}{2}\frac{d^2\tilde\Phi}{dx^2} - \omega\tilde\Phi = 0$$ $\lambda^2 = 2\omega$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2\omega}$ - седло

$\Phi_0 = \pm\sqrt{\omega}$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\tilde\Phi}{dx^2} + 2\omega\tilde\Phi = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{2\omega}$$ - центр.

Смотрим гомоклинику:



светлый солитон.

$\Phi^2 < 2\omega$

т.е. не меняет знак!

$$\int\frac{d\Phi}{\Phi\sqrt{\Phi^2-2\omega}} = \pm\int dx$$

$$\xi = \frac{\Phi}{\sqrt{2\omega}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int\frac{d\xi}{\xi\sqrt{\xi^2-1}} = \left\{\begin{aligned} &\xi = \sqrt{1+u} \\ &\xi^2-1 = u \\ &2\xi d\xi = du \\ &d\xi = \frac{du}{2\xi} = \frac{du}{2\sqrt{1+u}} \end{aligned}\right\} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int\frac{du}{\sqrt{1+u}\cdot\sqrt{u}\cdot 2\sqrt{1+u}}}$$

$$\frac{2\xi d\xi}{2\underbrace{\sqrt{\xi^2-1}}_{u}} = du$$

$\sqrt{\xi^2-1} = u$

$\xi^2 - 1 = u^2$ $\quad \xi^2 = 1+u^2$

$\xi = \sqrt{1+u^2}$

$2\xi d\xi = 2u\,du$

$d\xi = \frac{u}{\xi}du = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}du$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int\frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+u^2}\cdot u} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\operatorname{arctg} u =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\operatorname{arctg}\sqrt{\xi^2-1} + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \operatorname{arctg}\sqrt{\xi^2-1} = \pm x \qquad \xi = \frac{\Phi}{\sqrt{2\omega}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\Phi^2}{2\omega}-1} = \pm x$$ ← не учли знак, $\Phi^2 < 2\omega$ => под корнем $\sqrt{2\omega-\Phi^2}$

$$\int \frac{d\Phi}{\Phi\sqrt{2\omega-\Phi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int \frac{d\xi}{\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\Phi^2}{2\omega}-1} = i\sqrt{2\omega}\,x$$

$$\sqrt{\frac{\Phi^2}{2\omega}-1} = \operatorname{tg}(i\sqrt{2\omega}\,x)$$

$$\frac{\Phi^2}{2\omega} = 1+\operatorname{tg}^2(i\sqrt{2\omega}\,x)$$

$$\frac{\Phi^2}{2\omega} = \frac{1}{\cos^2(i\sqrt{2\omega}\,x)} \Rightarrow \Phi^2 = \frac{2\omega}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{2\omega}\,x)}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{\sqrt{2\omega}}{\operatorname{ch}(\sqrt{2\omega}\,x)}$$ → солитон.

Если бы ввели бегущую координату: $\xi = x - vt$

$$-iv\frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{1}{2}\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + |\Phi|^2\Phi - \omega\Phi = 0$$ ← $\Phi(\xi = x - vt)\, e^{i\omega t}$ в нач. ур-е.

Инвариантное преобразование:

$$\psi(x,t) = \bar\psi(\xi,t)\, e^{+iv\xi + i\Omega t}$$ → в исходное ур-е

$$i\frac{\partial\bar\psi}{\partial t} \cancel{- iv\frac{\partial\bar\psi}{\partial\xi}} - \bar\psi\Omega + v^2\bar\psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar\psi}{\partial\xi^2} \cancel{+ \frac{\partial\bar\psi}{\partial\xi}iv} - \frac{v^2}{2}\bar\psi + |\bar\psi|^2\bar\psi = 0$$

$$i\frac{\partial\bar\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar\psi}{\partial\xi^2} + |\bar\psi|^2\bar\psi = 0$$ ← при условии замены вид ур-я не поменялся => можно решать было как раньше, не вводя ех-ти волны.

Если правильно подберём Ω

$$\left\{\Omega = +\frac{v^2}{2}\right\} \leftarrow -\Omega\bar\psi + v^2\bar\psi - \frac{v^2}{2}\bar\psi = 0$$

$$\Rightarrow \bar\psi(\xi,t) = \psi(x,t)\cdot e^{-iv\xi - i\frac{v^2}{2}t} = \{\xi = x - vt\} =$$

$$= \psi(x,t)\cdot e^{-ivx + i\frac{v^2}{2}t}$$ ~ г.у. не меняем, т.к. $\psi(x,t) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

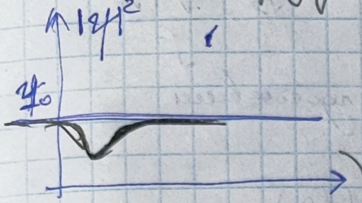
$$\psi(x,t) = \frac{\sqrt{2\omega}\; e^{iv\xi + i(\omega + \frac{v^2}{2})t}}{\operatorname{ch}(\sqrt{2\omega}\,\xi)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\omega}}{\operatorname{ch}(\sqrt{2\omega}(x - vt))}\cdot e^{-ivx + i(\omega - \frac{v^2}{2})t}$$

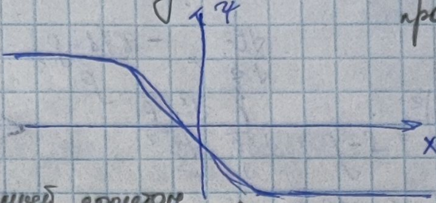
$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \tilde{\nu}|\psi|^2\psi = 0$$

Есть набег фазы → приводит к доп. множ. решения

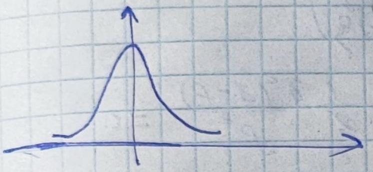
$\tilde{\nu} = -1$. – бэкграунд становится устойчивым. Можно наблюдать его провалы.



тёмный солитон (нормаль – провал до 0)



x → по виду „th"



$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_0}$$

$$\bar{t} = \psi_0^2 t$$

$$\bar{x} = \psi_0 x$$

полное/ инвариантное преобраз-е.

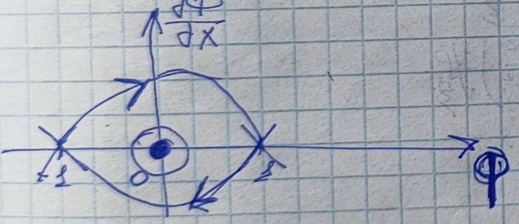
Поэтому без огр-я общности $\psi_0 = 1$.

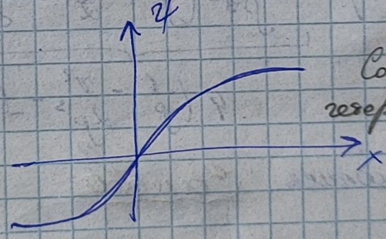
$$\bar{\bar{\psi}} = \bar{\psi} e^{-it}$$

$$i\frac{\partial\bar{\bar{\psi}}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{\bar{\psi}}}{\partial x^2} + \left(1-|\bar{\bar{\psi}}|^2\right)\bar{\bar{\psi}} = 0$$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(1-|\psi|^2\right)\psi = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \left(1-\Phi^2\right)\Phi = 0$$





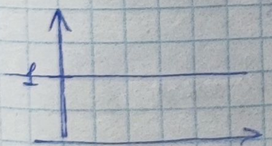
Солитону соотв. гетероклиническая траектория.

Тёмный солитон

8.12.23г.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(1-|\psi|^2\right)\psi = 0$$

ур-е с фокусирующей нелинейностью.



$|\psi|^2 \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$ – г.у.

Смотрим бегущее решение $\psi(x,t) = \psi(\xi)$, где $\xi = x - Vt$

Получим ур-е в обыкновенных производных:

$$-iV\frac{d\psi}{d\xi} + \frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(1-|\psi|^2\right)\psi = 0$$

Ур-е непрерывности: Если $\psi = \Phi(\vec{r},t)e^{i\Theta(\vec{r},t)}$ где $\rho = \Phi^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\nabla\Theta) = 0 \\ \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{(\nabla\Theta)^2}{2} = 1 - \rho + \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}} \end{cases}$$

→ Аналогично по бегущей координате.

$$-v\frac{d\rho}{d\xi}+\frac{d}{d\xi}\left(\rho\frac{d\theta}{d\xi}\right)=0 \quad\Rightarrow -v\rho+\rho\frac{d\theta}{d\xi}=\text{const}=-v$$

На бесконечности утечек const:

$\xi\to\infty \;\to \rho\to 1$

$\frac{d\theta}{d\xi}\to 0 \quad -v=\text{const}$

$$\frac{d\theta}{d\xi}=\frac{-v+v\rho}{\rho}$$

$$\frac{d\theta}{d\xi}=\frac{-v(1-\rho)}{\rho}$$

подставим

2е ур-е системы:

$$-v\frac{d\theta}{d\xi}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2=1-\rho+\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{d^2\sqrt{\rho}}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^2\sqrt{\rho}}{d\xi^2}=\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{d\rho}{d\xi}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{d^2\rho}{d\xi^2}-\frac{1}{4\rho\sqrt{\rho}}\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2$$

$$\frac{1}{4\rho}\frac{d^2\rho}{d\xi^2}-\frac{1}{8\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2+(1-\rho)-\frac{v^2(1-\rho)}{\rho}-\frac{1}{2}\frac{v^2(1-\rho)^2}{\rho^2}=0$$

$$\frac{d^2\rho}{d\xi^2}-\frac{1}{2\rho}\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2+4(1-\rho)\left(\rho-v^2-\frac{1}{2}\frac{v^2}{\rho}+\frac{1}{2}v^2\right)=0$$

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{d\xi^2}-\frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2}_{\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\xi}\right)}+\frac{4(1-\rho)}{\rho}\left(\rho-\frac{v^2}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)\right)=0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\xi}\right)+\frac{4(1-\rho)}{\rho^2}\left(\rho^2-\frac{v^2}{2}\rho-\frac{v^2}{2}\right)=0 \quad \Big/\cdot\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\xi}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2\right)+\underbrace{\frac{4(1-\rho)}{\rho^3}\left(\rho^2-\frac{v^2\rho}{2}-\frac{v^2}{2}\right)\frac{d\rho}{d\xi}}_{4\left(\frac{1}{\rho}-\frac{v^2}{2\rho^3}-1+\frac{v^2}{2\rho^2}\right)\frac{d\rho}{d\xi}}=0$$

Ошибка

Где-то ошиблись. **Заново**:

$$-v\frac{d\theta}{d\xi}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2=(1-\rho)+\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{d^2\sqrt{\rho}}{d\xi^2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{d^2\sqrt{\rho}}{d\xi^2}=\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{d\rho}{d\xi}\right)=\frac{1}{4\rho}\frac{d^2\rho}{d\xi^2}-\frac{1}{8\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2$$

Отсюда ✳

$$\frac{d\theta}{d\xi}=\frac{-v(1-\rho)}{\rho}$$

пусть $\rho=\Phi^2$ — чтобы не возиться с $\sqrt{\ }$.

$$\frac{d\theta}{d\xi}=\frac{-v(1-\Phi^2)}{\Phi^2}$$

$$+\frac{v^2(1-\Phi^2)}{\Phi^2}+\frac{1}{2}\frac{v^2(1-\Phi^2)^2}{\Phi^4}=(1-\Phi^2)+\frac{1}{2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2}+2\Phi(1-\Phi^2)-2v^2\frac{(1-\Phi^2)}{\Phi}-\frac{v^2(1-\Phi^2)^2}{\Phi^3}=0 \quad \Big/\cdot\frac{d\Phi}{d\xi}$$

$$\frac{1}{2}\left(\Phi\frac{d\Phi}{d\xi}\right)^2 + v^2\Phi + \frac{v^2\Phi^5}{3} + \Phi^4 - \frac{\Phi^6}{2} - \frac{4v^2\Phi^2}{3} - \frac{1}{2}\Phi^2 = 0$$

$$\to \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{d\xi}\right)^2\right) + \frac{d}{d\xi}\left(\Phi^2 - \frac{\Phi^4}{2} + v^2\Phi^2 + \frac{v^2}{2\Phi^2} - \frac{v^2}{2}\Phi^2\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{d\xi}\right)^2 + \Phi^2 - \frac{\Phi^4}{2} + v^2\Phi^2 + \frac{v^2}{2\Phi^2} - \frac{v^2}{2}\Phi^2 = const = \frac{1}{2} + v^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\Phi\frac{d\Phi}{d\xi}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\Phi^2 + v^2\Phi^2 - \Phi^4 + \frac{\Phi^6}{2} - \frac{v^2\Phi^4}{2} - \frac{v^2}{2}} =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d\Phi^2}{d\xi}\right)^2 = (\Phi^2 - v^2)(1-\Phi^2)^2 \qquad \frac{1}{4}\left(\frac{d\Phi^2}{d\xi}\right)^2 = -(v^2-\Phi^2)(1-\Phi^2)^2$$

$$\Phi^2 \equiv \rho \Rightarrow \cancel{\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2 = 4(v^2-\rho)(1-\rho)^2}$$

$$\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2 = 4(\rho - v^2)(1-\rho)^2$$

Решение можно угадать $\sim \frac{a}{ch^2(b\xi)} = 1-\rho$

$\rho \to 0$, при $x \to \pm\infty$

$$\rho = 1 - \frac{a}{ch^2(b\xi)}$$

~~Пусть $a = 1 - v^2$ (сохранение удовлетворить функциональному соотношению)~~

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{2a}{ch^3(b\xi)}\, sh(b\xi)\cdot b = \frac{2ab}{ch^2(b\xi)}\, th(b\xi)$$

$$\rho - v^2 = (1-v^2) - \frac{\overset{1-v^2}{a}}{ch^2(b\xi)} = (1-v^2)\left(1 - \frac{1}{ch^2(b\xi)}\right)$$

$$\frac{4(1-v^2)b^2}{ch^4(b\xi)}\, th^2(b\xi) = 4(1-v^2)\, th^2(b\xi)\, \frac{(1-v^2)^2}{ch^4(b\xi)}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{1-v^2}$$

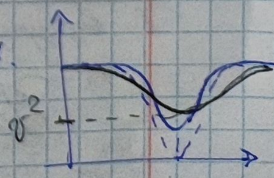
$$a = 1 - v^2$$

Чтобы равенство выполнялось

$$\Rightarrow \rho = 1 - \frac{(1-v^2)}{ch^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)}$$ → видно, что $|v| \le 1$.

ρ — плотность.

тёмный солитон



Смотрим фазу:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{-v(1-\rho)}{\rho} = -\frac{v(1-v^2)}{ch^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)\cdot\left(1-\frac{1-v^2}{ch^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)}\right)} =$$

$$= \frac{-v(1-v^2)}{ch^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)-1+v^2} = \frac{-v(1-v^2)}{-sh^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)+v^2}$$

$\rho = |\psi|^2$; $\rho = 1 - \frac{1-v^2}{ch^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)}$ } Возьмём $\psi = \sqrt{1-v^2}\, th(\sqrt{1-v^2}\,\xi)$ и добавим iv

$$\psi = \sqrt{1-v^2}\, th(\sqrt{1-v^2}\,\xi) + iv$$

$$|\psi|^2 = (1-v^2)\, th^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi) + v^2 - 1 + 1 = 1 + (1-v^2)\left(th^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi) - 1\right)$$

Тогда фаза:

$$\psi = \Phi e^{i\theta}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}\, th(\sqrt{1-v^2}\,\xi)}$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{1+\frac{v^2}{(1-v^2)\, th^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)}} \cdot \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{(1-v^2)}{th^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)} \cdot \frac{1}{ch^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)}$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{(-v)(1-v^2)}{(1-v^2)\, th^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)+v^2} \cdot \frac{1}{ch^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)} =$$

знам. $= sh^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi) - v^2 sh^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi) + v^2 ch^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi) =$

$= sh^2(\sqrt{1-v^2}) + v^2$ сравнивая с тем, что было

$ch^2 x - sh^2 x = 1$

Окончательно:

$$\left\{\psi(\xi) = \sqrt{1-v^2}\, th(\sqrt{1-v^2}\,\xi) - iv\right\}$$

22.12.23

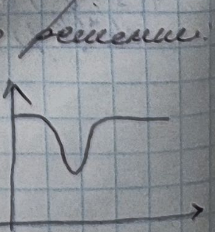
$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (1-|\psi|^2)\psi = \varepsilon R(\psi,\psi^*)$$

возьмём дефокусирующую нелинейность с возмущением.

Если возмущение мало, можно исп-ть теорию возмущений (последоват. приближений.)

Без возмущения получаем специфическое решение.

$$\psi_s(x-vt) = \sqrt{1-v^2}\cdot th\left(\sqrt{1-v^2}\,(x-vt)\right) - iv$$



Рассм-ся ~~[illegible]~~ частн. случай, есть ещё потенциал в возмущ.:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (1-|\psi|^2)\psi - \underbrace{U(x)}_{\text{стационарный потенциал}}\psi = 0$$

Стационарное решение (после переходного процесса):

$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi_{st}}{\partial x^2} + (1-|\psi_{st}|^2)\psi_{st} - U(x)\psi_{st}(x) = 0$$

Есть случай, когда $U(x)$ измен. медленно → тогда ψ ~ медл. ф-я.

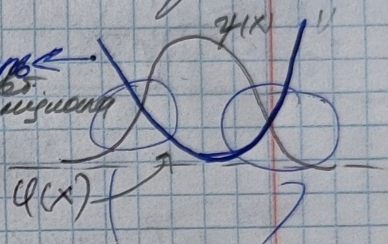
$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi_{st}}{\partial x^2} \to 0$$

$$\Rightarrow |\psi_{st}|^2 = 1 - U(x) \quad \text{где } U(x) < 1.$$

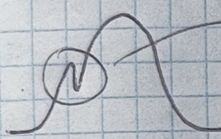
приближение Томаса-Ферми.

Но на фоне профиля м.б. возмущения.

профиль повт. форму потенциала



искажения необх. учит. другую производную.



которые хорошо аппроксимир. решением квадисолитонного типа.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (1-|\psi|^2)\psi = U(x)\psi(x,t)$$

Представим в факторизованном виде:

$$\psi = G(x)F(x,t)$$

опис. эффекты при действии $U(x)$ — опис. возмущение на фон. невозм. профиле G.

$G(x)$ ~ из решения стац. задачи

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + (1-|G|^2)G = U(x)G(x)$$

считаем потенциал. главным.

Рассм-м в приближ. Томаса-Ферми:

$|G|^2 = 1 - U(x), \quad U(x) < 1.$

$|G|^2 \approx 0, \quad U(x) > 1.$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}F - U(x)FG = -(1-|G|^2)GF$$

Подставим в исходное ур-е:

$$i\frac{\partial F}{\partial t}G + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}F + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}G + (1-|G|^2|F|^2)GF = U(x)\cdot GF$$

учитыв.: $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}F - U(x)FG = (1-|G|^2)GF$ почему?

$$\Rightarrow i\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + |G|^2(1-|F|^2)F = 0$$

$$(*) \quad i\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + |G|^2(1-|F|^2)F = -\frac{1}{G}\underbrace{\frac{\partial G}{\partial x}}_{\to 0,\ \text{плавн. ф-я}}\frac{\partial F}{\partial x}$$

Решение солитонного вида:

$$F = F_0(\xi, v(\mu t)) + \mu F_1(\xi, \mu t) + \ldots$$

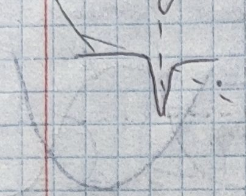
→ нулевое приближение "0" + поправки

где $\xi = x - x_s(t) = x - \int v(\mu t)\,dt$ → μ - параметр малости, в виде асимптотического ряда.

медленная зав-ть

локальный фон м.б. аппроксимирован разложением в ряд Тейлора

(*) имеет смысл рассматривать в точке где солитон находится, т.е в F_0.



$$\frac{\partial G}{\partial x} \sim \mu$$

Другие слаг. в (*) для удобства слаг. коэффициентов необх. раскл. в ряд Тейлора.

$$|G|^2 = |G(x_s(t))|^2 + \frac{\partial |G|^2}{\partial x}\Big|_{x_s(t)} \underbrace{(x - x_s(t))}_{\xi} + \ldots$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} \to \frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$-iv\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \mu i\frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} - iv\mu\frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi^2} + |G(x_s)|^2 \cdot$$

$$\cdot (1 - |F_0|^2) F_0 - \mu |G(x_s)|^2 2|F_0|^2 F_1 - \mu F_0^2 F_1^* \ominus$$

$$(1 - |F|^2)F = (1 - |F_0|^2)F_0 - 2\mu |F_0|^2 F_1 - \mu F_0^2 F_1^*$$

$$\ominus \mu |G(x_s)|^2 2|F_0|^2 F_1 - \mu F_0^2 F_1^* \ominus -\mu\left(\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial x}\right)\Big|_{x_s}\xi\frac{\partial F_0}{\partial x} -$$

$$-\frac{\partial |G|^2}{\partial x}\Big|_{x_s}(1 - |F_0|^2)F_0.$$

$$\mu^1: \; -iv\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \mu i\frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} - iv\mu\frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi^2} +$$

$$+ |G(x_s)|^2 (1 - |F_0|^2) F_0 + \oplus_1$$

$$\mu^0: \; -iv\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} + \cancel{|G(x_s)|}(1 - |F_0|^2)F_0 = 0$$

Заменой $\xi = G(x_s)\,\xi$ → Пришли к уравнению решением которого является солитон:

$$\bar{v} = \frac{v}{|G(x_s)|} \qquad v = \dot{x}_s(t)$$

$$\mathcal{F}_0(\xi, \bar v) = \sqrt{1-\bar v^2}\, th\left(\sqrt{1-\bar v^2}\,\xi\right) - i v$$

$$\mu^{(1)}: \quad -i v \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial \xi^2} - 2|G(x_s)|^2 |\mathcal{F}_0|^2 \mathcal{F}_1 - |G(x_s)|^2 \mathcal{F}_0^2 \mathcal{F}_1^* =$$

$$= -i \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar v}\cdot\frac{\partial \bar v}{\partial t} - \left(\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial x}\right)\Big|_{x_s} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial x}|G|^2\Big|_{x_s} \xi\,(1-|\mathcal{F}_0|^2)\mathcal{F}_0$$

Можно аналогично отнормировать: на $|G(x_s)|^2$

$$-i\bar v \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial \xi^2} - 2|\mathcal{F}_0|^2 \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0^2 \mathcal{F}_1^* =$$

$$= \underbrace{-\frac{i}{|G(x_s)|^2}\cdot\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar v}\cdot\frac{\partial \bar v}{\partial t} - \left(\frac{1}{G^2}\frac{\partial G}{\partial x}\right)\Big|_{x_s}\cdot\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \xi} - \frac{1}{|G(x_s)|^3}\frac{\partial |G|^2}{\partial x}\Big|_{x_s}\cdot \xi(1-|\mathcal{F}_0|^2)\mathcal{F}_0}_{R(G(x_s),\, \bar v,\, \mathcal{F}_0(\xi))}$$

Незнаем зависимость параметра $\bar v(t)$, но это ф-е уже не линейное. Знаем $\mathcal{F}_0$ из $\mu^{(0)}$

Для существования хорошего решения необх. выполнения теоремы Фредгольма об альтернативе (мат. физ.)

т.е. $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left(R\cdot \underbrace{\hat{\mathcal{F}}_1^*}_{} + R^* \underbrace{\hat{\mathcal{F}}_1}_{}\right) = 0}$!

сопр. решение

$$\Rightarrow \quad -i\bar v \frac{\partial \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{\mathcal{F}}_1}{\partial \xi^2} - 2|\mathcal{F}_0|^2 \hat{\mathcal{F}}_1 - \mathcal{F}_0^2 \hat{\mathcal{F}}_1^* = 0$$

* Задача: док-ть, что необх. усл. Фредгольма (док-во на листе) = задача.

$$\hat{\mathcal{F}}_1 = \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \xi} \qquad -i\bar v \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial \xi^2} + (1-|\mathcal{F}_0|^2)\mathcal{F}_0 = 0 \;\Big/ \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}|\mathcal{F}_0|^2 \mathcal{F}_0 = \frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{F}_0^2 \mathcal{F}_0^* = 2|\mathcal{F}_0|^2 \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \xi} + \mathcal{F}_0^2 \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_0^*}{\partial \xi}$$

убедились, наше решение доходит ур-я

$$-\frac{1}{G(x_s)}\frac{\partial \bar v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \bar v}\left(i\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathcal{F}_0 \frac{\partial \mathcal{F}_0^*}{\partial \xi} - \mathcal{F}_0^* \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \xi}\right)d\xi\right) - \frac{2}{G^2(x_s)}\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x_s}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \xi}\right|^2 d\xi -$$

$$-\frac{1}{G^3(x_s)}\cdot\frac{\partial |G|^2}{\partial x}\Big|_{x_s}\int d\xi\, \underbrace{\xi\,(1-|\mathcal{F}_0|^2)\left|\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi}\right|^2}_{=0 \text{ нечётн. ф-я}} = 0$$

$$= -2\,\mathrm{Im}\left(\mathcal{F}_0 \frac{\partial \mathcal{F}_0^*}{\partial \xi}\right) = \frac{2\cdot(1-\bar v^2)}{ch^2(\sqrt{1-\bar v^2}\,\xi)}$$

Напомним вид $\mathcal{F}_0$:

$$\mathcal{F}_0 = \sqrt{1-\bar v^2}\, th\left(\sqrt{1-\bar v^2}\,\xi\right) - i\bar v$$

$$\left|\frac{\partial f_0}{\partial \xi}\right|^2 = \frac{(1-v^2)^2}{ch^4(\sqrt{1-v^2}\,\xi)}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{ch^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)}\, d\xi = \frac{2}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{ch^4(\sqrt{1-v^2}\,\xi)}\, d\xi =$$

$$\frac{1}{G^2(X_s)} \frac{dv}{dt} \cdot I_1 = \frac{-(1-v^2)}{G^2(X_s)} \cdot \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{X_s} \cdot I_2$$

Знаем, что $\dot{X}_s = v$ => ур-е второго порядка

$$\frac{d^2 X_s}{dt^2} = -\frac{I_2}{I_1}(1-v^2) \cdot \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{X_s}$$

где $|G|^2 = (1-U(x))$

$G = \sqrt{1-U(x)}$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ch^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)}\, d(th[\sqrt{1-v^2}\,\xi]) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - th^2(\sqrt{1-v^2}\,\xi)\right) d(th\sqrt{1-v^2}\,\xi) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{1-v^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 X_s}{dt^2} = -\frac{2}{3}(1-v^2) \cdot \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{X_s}$$

$$\frac{d^2 X_s}{dt^2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial X_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-U(X_s)}}$$

$$\frac{d^2 X_s}{dt^2} = -\frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial X_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-U(X_s)}}$$ → похоже на движ. частицы в поле потенциальной силы.

движение солитона опис. своей координатой и потенциалом.

$i\partial_t u + \Delta u + \beta |u|^2 u = 0$

$u = u_0 e^{i\Omega t} + \delta u$ → возмущение от однородного решения.

$-\Omega u_0 e^{i\Omega t} + i\partial_t \delta u + \Delta \delta u$

$$|u|^2 = (u_0 e^{i\Omega t} + \delta u)(u_0 e^{-i\Omega t} + \delta u^*) = u_0^2 + u_0 e^{i\Omega t}\delta u^* + \delta u\, u_0 e^{-i\Omega t} + \cancel{\delta u^2}$$

$$|u|^2 \cdot u = (u_0^2 + u_0 \delta u^* e^{i\Omega t} + u_0 \delta u\, e^{-i\Omega t})(u_0 e^{i\Omega t} + \delta u) =$$

$$= u_0^3 e^{i\Omega t} + u_0^2 \delta u + u_0^2 \delta u^* e^{2i\Omega t} + u_0^2 \delta u + o(\delta u^2) =$$

$$\approx u_0^3 e^{i\Omega t} + 2u_0^2 \delta u + u_0^2 \delta u^* e^{2i\Omega t}$$

$\Delta(u_0) = 0$

$$-\Omega u_0 e^{i\Omega t} + i\partial_t \delta u + \Delta \delta u + \beta u_0^3 e^{i\Omega t} + 2\beta u_0^2 \delta u + \beta u_0^2 \delta u^* e^{2i\Omega t} = 0$$

решение одн. ур-я $= 0$

$$\Rightarrow i\partial_t \delta u + \Delta \delta u + 2\beta |u_0|^2 \delta u + \beta u_0^2 e^{2i\Omega t} \delta u^* = 0$$

В линеаризованном виде явно присутствует $e^{2i\Omega t}$. Можно ввести замену:

$$\overline{\delta u} = \delta u\, e^{-i\Omega t}$$

$$\delta u = \overline{\delta u}\, e^{+i\Omega t} \to \delta u^* = \overline{\delta u}^* e^{-i\Omega t}$$

$$\Rightarrow i\partial_t[\overline{\delta u}\, e^{+i\Omega t}] + e^{+i\Omega t} \Delta \overline{\delta u} + 2\beta |u_0|^2 \overline{\delta u}\, e^{+i\Omega t} + \beta u_0^2 e^{i\Omega t} \overline{\delta u}^* = 0$$

$$-\Omega e^{i\Omega t} \overline{\delta u} + i e^{i\Omega t} \partial_t \overline{\delta u} + e^{i\Omega t} \Delta \overline{\delta u} + 2\beta |u_0|^2 \overline{\delta u}\, e^{i\Omega t} + \beta u_0^2 e^{i\Omega t} \overline{\delta u}^* = 0$$

$$-\Omega \overline{\delta u} + i\partial_t \overline{\delta u} + \Delta \overline{\delta u} + 2\beta |u_0|^2 \overline{\delta u} + \beta u_0^2 \overline{\delta u}^* = 0$$

Это же должно вып-ся и для компл. сопр. → получим систему:

$$\begin{cases} -\Omega \overline{\delta u} + i\partial_t \overline{\delta u} + \Delta \overline{\delta u} + 2\beta |u_0|^2 \overline{\delta u} + \beta u_0^2 \overline{\delta u}^* = 0 \\ -\Omega \overline{\delta u}^* + i\partial_t \overline{\delta u}^* + \Delta \overline{\delta u}^* + 2\beta |u_0|^2 \overline{\delta u}^* + \beta u_0^2 \overline{\delta u} = 0 \end{cases}$$

→ Нужно разрешить относительно δu и δu^*

В силу линейной независимости δu и δu^* для $e^{i\omega t - i\vec k \vec r}$

$$\delta u = a e^{i\omega t - i\vec k \vec r}, \quad \overline{\delta u} = a^* e^{-i\omega t + i\vec k \vec r}$$

$$\begin{vmatrix} -\Omega - \omega - k^2 + 2\beta |u_0|^2 & \beta u_0^2 \\ \beta |u_0|^2 & -\Omega + \omega - k^2 + 2\beta |u_0|^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\Omega - \omega - k^2 + 2\beta |u_0|^2)(-\Omega + \omega - k^2 + 2\beta |u_0|^2) - \beta^2 |u_0|^4 =$$

Чему равно Ω? Ищем из однородного ур-я.

$$-\Omega \cdot u_0 e^{i\Omega t} + \beta |u_0|^2 \cdot u_0 e^{i\Omega t} = 0 \Rightarrow \Omega = \beta |u_0|^2$$ → подставим.

$$(-\omega - k^2 + \beta |u_0|^2)(\omega - k^2 + \beta |u_0|^2) - \beta^2 |u_0|^4 =$$

$$\Rightarrow \xi : -\omega^2 + \cancel{\omega k^2} - \cancel{\omega\beta|u_0|^2} - \cancel{\omega k^2} + k^4 - k^2\beta|u_0|^2 +$$

$$+ \cancel{\omega\beta|u_0|^2} - k^2\beta|u_0|^2 + \cancel{\beta^2|u_0|^4} - \cancel{\beta^2|u_0|^4} =$$

$$= -\omega^2 + k^4 - k^2\beta|u_0|^2 = 0$$

$$\omega^2 = k^2(k^2 - 2\beta|u_0|^2)$$ – неуст., когда $\omega^2 < 0$

8.3. Исследовать на устойчивость однородное решение ур-я НУШ с нелинейной дисперсией

2 лекция

$$i\partial_t u + \Delta u + \beta|u|^2 u + i\alpha|u|^2 \partial_z u = 0$$

Однородное решение: $u = u_0 e^{i\Omega t}$ $\to \partial_z u = 0$; $\Delta u = 0$

$$-\Omega + \beta|u_0|^2 = 0 \quad \to \Omega = \beta|u_0|^2$$

$|u|^2 = u \cdot u^*$

Возмущение от неоднородного решения:

$$u = u_0 e^{i\Omega t} + \delta u$$

$$i\partial_t \delta u + \Delta \delta u + 2\beta|u_0|^2 \delta u + \beta u_0^2 e^{2i\Omega t} \delta u^* + i\alpha(u_0^2 + u_0 e^{i\Omega t} \delta u^* + u_0 \delta u e^{-i\Omega t}).$$

$\cdot \partial_z \delta u = 0$

$\partial_z \delta u \to$ малое и δu - малое. $\Rightarrow$ пренебр. членами 2го порядка малости

$$i\partial_t \delta u + \Delta \delta u + 2\beta|u_0|^2 \delta u + \beta u_0^2 e^{2i\Omega t} \delta u^* + i\alpha|u_0|^2 \partial_z \delta u = 0$$

Избавляемся от явной зависимости от времени:

$$\delta \bar{u} = \delta u e^{-i\Omega t} \to \delta u = \delta \bar{u} e^{i\Omega t} \to \delta u^* = \delta \bar{u}^* e^{-i\Omega t}$$

$$-\Omega e^{i\Omega t} \delta \bar{u} + i e^{i\Omega t} \partial_t \delta \bar{u} + e^{i\Omega t} \Delta \delta \bar{u} + 2\beta|u_0|^2 \delta \bar{u} e^{i\Omega t} + \beta u_0^2 \delta \bar{u}^* e^{i\Omega t} +$$

$$+ i\alpha|u_0|^2 e^{i\Omega t} \partial_z \delta \bar{u} = 0 \quad \Big/ : e^{i\Omega t}$$

Надо $\delta \bar{u} = \xi + i\zeta$ и делить Re и Im части

$$-\Omega \delta \bar{u} + i\partial_t \delta \bar{u} + \Delta \delta \bar{u} + 2\beta|u_0|^2 \delta \bar{u} + \beta u_0^2 \delta \bar{u}^* + i\alpha|u_0|^2 \partial_z \delta \bar{u} = 0$$

вып-ся и для к.с.

$$-\Omega \delta \bar{u}^* + i\partial_t \delta \bar{u}^* + \Delta \delta \bar{u}^* + 2\beta|u_0|^2 \delta \bar{u}^* + \beta u_0^2 \delta \bar{u} + i\alpha|u_0|^2 \partial_z \delta \bar{u}^* = 0$$

В силу линейной независимости $\delta \bar{u}$ и $\delta \bar{u}^*$ для $e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$

$$\delta u = a e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \quad ; \quad \delta \bar{u} = a^* e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$$

Чтобы было не трив. реш. отн. $\delta \bar{u}$ и $\delta \bar{u}^*$

$$\begin{vmatrix} -\Omega - \omega - k^2 + 2\beta|u_0|^2 + k_z\alpha|u_0|^2 & \beta u_0^2 \\ \beta u_0^2 & -\Omega + \omega - k^2 + 2\beta|u_0|^2 - k_z\alpha|u_0|^2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Omega = \beta|u_0|^2$

$$\Rightarrow (-\omega - k^2 + k_z\alpha|u_0|^2 + \beta|u_0|^2)(\omega - k^2 - k_z\alpha|u_0|^2 + \beta|u_0|^2) = \beta^2 u_0^4$$

$$-\omega^2 + \cancel{\omega k^2} + \omega k_z\alpha|u_0|^2 - \cancel{\omega\beta|u_0|^2} - \cancel{\omega k^2} + k^4 + \cancel{k_z k^2 \alpha|u_0|^2} - k^2\beta|u_0|^2 +$$

$$+ \omega k_z\alpha|u_0|^2 - \cancel{k_z k^2 \alpha|u_0|^2} - k_z^2\alpha^2|u_0|^4 + \cancel{k_z\alpha\beta|u_0|^4} +$$

$$+ \cancel{\omega\beta|u_0|^2} - k^2\beta|u_0|^2 - \cancel{k_z\beta\alpha|u_0|^4} + \cancel{\beta^2|u_0|^4} = \cancel{\beta^2|u_0|^4}$$

$$-\omega^2 + 2\omega k_z\alpha|u_0|^2 - 2k^2\beta|u_0|^2 - k_z^2\alpha^2|u_0|^4 + k^4 = 0$$

$$k^2(k^2 - 2\beta|u_0|^2) = (\omega - k_z\alpha|u_0|^2)^2$$

$\Rightarrow$ неуст. когда $\omega^2 < 0$ комплексные корни.

11.2. Найти солитон в среде с нелинейной вязкостью:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u + \alpha\,\partial_x u\,\partial_{xx} u = 0$$

Решение в виде стационарной волны: $u = u(x - vt)$

$\xi = x - vt$

$$-v u' + u u' + \alpha u' u'' = 0$$

$$-v\frac{du}{d\xi} + u\frac{du}{d\xi} + \alpha\frac{du}{d\xi}\frac{d^2u}{d\xi^2} = 0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(-vu + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2\right) = 0$$

$$-vu + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = \text{const}$$

при $x \to \infty$ профиль должен спадать $u \to 0$, $\frac{du}{d\xi} \to 0$ $\Rightarrow \text{const} = 0$

$$\frac{\alpha}{2}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 + \frac{u^2}{2} - vu = 0$$

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2\frac{\alpha}{2} = vu - \frac{u^2}{2} \quad \Big| \cdot \frac{2}{\alpha}$$

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right) = \frac{\sqrt{2vu - u^2}}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \int\frac{du}{\sqrt{2vu - u^2}} = \int\frac{d\xi}{\sqrt{\alpha}}$$

решение опр-но: $2vu - u^2 > 0$ $\quad u < 2v \Rightarrow u \in [0, 2v]$

$$\int\frac{du}{\sqrt{2vu - u^2}} = \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}$$

$\to$ солитон

к 11.3

НУШ: $i\partial_t u + \partial_{xx} u + \beta |u|^2 u = 0$

Гамильтоново ур-е с действием:

$$S = \iint \left(\frac{u^* \partial_t u - u \partial_t u^*}{2i} + |\nabla u|^2 - \frac{\beta}{2}|u|^4 \right) dx\, dt$$

$$H = \int \left(|\nabla u|^2 - \frac{\beta}{2}|u|^4 \right) dx = const; \qquad P = \int |u|^2 dx = const$$ – инт. движения

Солитоны сущ-т только в данном случае и только с фокусирующей нелинейностью $\beta > 0$

$$u = f(x - vt)e^{i\omega t + ikx}$$

u в НУШ комплексное. (а в КдВ – действительное)

Разделяя Re и Im части:

$$\begin{cases} f'' + \beta f^3 - k^2 f - \omega f = 0 \\ -vf' + 2kf' = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{v}{2} \end{cases}$$

$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$f'' + \beta f^3 - \frac{v^2}{4} f - \omega f = f'' + \left(\beta f^2 - \frac{v^2}{4} - \omega\right) f = 0$$

$\frac{\hat{p}^2}{2m} =$

$$\Omega = \omega + \frac{v^2}{4}$$

$$\Rightarrow f'' + (\beta f^2 - \Omega) f = 0$$ по сути интегрир.

Для солитонного решения, восходящего на ноль $\xi \to \pm\infty$, нужна седловая точка, расп. при $f = 0$. Этому условию удовлетв. $\beta > 0$. Кроме того, сепаратриса не должна уходить на бесконечность, что дает $\Omega > 0$

Солитонное решение соотв-т сепаратрисе, на которой энергия равна нулю.

$$H = \frac{f'^2}{2} + \frac{\beta}{4} f^4 - \frac{\Omega}{2} f^2 = 0$$

инт. эн.?

$$\Rightarrow \int \frac{df}{f\sqrt{\Omega - \beta f^2/2}} = \xi \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\sqrt{2\Omega/\beta}}{\cosh \sqrt{\Omega}\, \xi} \quad (*)$$

$$u = \frac{\sqrt{2\Omega/\beta}}{\cosh \sqrt{\Omega}\,(x - vt)} \cdot e^{i\left(\Omega - \frac{v^2}{4}\right)t + 2ivx}$$

Длит-ть солитона $l = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}$ убывает с ростом его высоты.

11.3. Найти солитон в КдВ:

$$\partial_t u + u^2 \partial_x u + \beta \partial_{xxx} u = 0$$

Решение в виде: $u = u(x - vt)$

$$-vu' + u^2 u' + \beta u''' = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta \frac{d^3 u}{d\xi^3} + u^2 \frac{du}{d\xi} - v\frac{du}{d\xi} = 0$$

$$\Rightarrow \beta \cdot \left(\frac{d^2 u}{d\xi^2}\right) + \frac{u^3}{3} - vu = 0$$

Сравнивая с (*): $\lambda = \mathcal{V}/\beta$ и $\beta = 1/3\,\beta$.

$$\Rightarrow\ u = \frac{\sqrt{6\mathcal{V}}}{\cosh\sqrt{\mathcal{V}/\beta}\,\xi}$$ при $\beta < 0$

11.4. Найти солитон НУШ в присутствии поглощающей среды:

$$i\left(\partial_t u + \frac{\partial_t \omega}{2\omega} u\right) + \frac{\Delta}{\omega^3}\partial_{xx} u + \omega |u|^2 u = 0$$

$$\partial_t \omega^2 = \partial_t n = W(|u|)(1-n)$$

Замена $u = b/\sqrt{\omega}$ приводит к виду:

$$i\partial_t b + \frac{\Delta}{\omega^3}\partial_{xx} b + |b|^2 b = 0$$

Пренебрегая измен. частоты переменной можно записать решение в виде солитона НУШ: с $\lambda = \lambda\omega^3/\Delta$ и $\beta = \frac{\omega^3}{\Delta}$

$$b = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\cosh\sqrt{\lambda\omega^3/\Delta}\,\xi} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega}}\cdot\frac{1}{\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{\Delta}}\,\omega^{3/2}\xi}$$