

07.02.22.

Механика сплошных сред

Тренировка

Ирина Мрзевка. Грозное

Этапы: допуск → задача (бу тетрадей) → теория (можно во всем).

- Литература:
- 1) Гурбанов - Основы по механике сплошных сред.
 - 2) Манджу - Мифическая - Гидродинамика
 - 3) Брыковских - Голубов - Введение в механику сплошных сред.
 - 4) Кошечки, Кибель, Роду - Теоретическая гидродинамика в 2 томах.
 - 5) Озоровский - Вопросы динамики жидкости.
 - 6) Редкинский -
 - * 7) Подземельский - Механика жидкости и газа.
 - 8) Бетельер - Введение в динамическую жидкость.
 - 9) Райбокин - Волны в жидкости.

! Обязательное:

10) Сборник задач по механике сплошных сред - Гурбанов, Грозное.

План практических занятий:

1. Элементы векторного анализа.
2. Основы уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости.
3. Гидростатика.
4. Стационарное течение жидкости. Уравнение Бернулли.
5. Закон сохранения импульса.
6. Потенциальное движение жидкости.
7. Потенциал скорости. - К.р.
8. Движение вихрей жидкости. Уравнение Навье - Стокса.
9. Вихри вихря. - К.р.

1. Элементы векторного анализа.

Оператор Гамильтона

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

вектор (принято так обозначать)

 $\varphi(\vec{r})$ - скалярное поле.

$$\Rightarrow \text{grad } \varphi = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi$$

 $\vec{A}(\vec{r})$ - векторное поле:

$$\Rightarrow (\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div } \vec{A}$$

$$(\vec{A} \cdot \nabla) = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$[\nabla \times \vec{A}] = \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

 $\vec{A} = \text{grad } \varphi$ - потенциал

потенциальное поле

 $\text{div } \vec{A} = 0$ - соленоидальное поле

Условия существования вектора:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = 0 \quad \sim \text{безвихровое}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{A} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{A} = 0 \end{cases} \sim \text{потенциальное поле}$$

Производная по направлению:

$$\vec{e} \nearrow e \quad \frac{d\vec{A}}{de} = (\vec{e}, \nabla) \vec{A}$$

$$\frac{d\varphi}{de} = \vec{e} \operatorname{grad} \varphi \sim \text{проекция градиента}$$

Векторные тождества:

1-е тождество: 1) $\nabla(\vec{A}, \vec{B}) = [\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B}] + [\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A}] + (\vec{A}, \nabla) \vec{B} + (\vec{B}, \nabla) \vec{A}$

2) $\operatorname{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + (\nabla \varphi, \vec{A})$

3) $\operatorname{rot}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{A} + [\nabla \varphi, \vec{A}]$

4) $\operatorname{div}[\vec{A}, \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}$

5) $\operatorname{rot}[\vec{A}, \vec{B}] = \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B}, \nabla) \vec{A} - (\vec{A}, \nabla) \vec{B}$

2-е тождество: 1) $\nabla \operatorname{div} \vec{A} = \nabla(\nabla \vec{A})$

2) $\operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi$

3) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$

4) $\operatorname{rot} \nabla \varphi = 0$

5) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$

Векторные операторы для полей.

Потенциал:

$$\nabla \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$(\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2})$$

$$\Delta \vec{A} = \vec{i}_x \Delta A_x + \vec{i}_y \Delta A_y + \vec{i}_z \Delta A_z$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$$

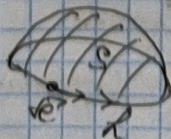
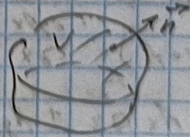
Теорема Остроградского - Гаусса

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV$$

$$\oint_S \varphi d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{grad} \varphi dV$$

Теорема Стокса:

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{e} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$



Что будет, если поле зависит от времени $\Phi(x, y, z, t)$?

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \Phi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)$$

полная производная

14.02.2023

Скользящая фреда:

$\square$ - физически беск. малый объект

вектор с точки зр. кол-во зависит в квант.

или, с точки зрения хар-к, где они постоянны ("точка измерения", "квант измерения")

Для описания среды нужно: $\vec{v}$ - вектор скорости + 2 термодинамические величины (p, ρ) (всего 5 величин)

2 способа описания движения и газа:

Эйлера

ф-ии коорд. и времени

$$\vec{v} = \vec{v}(x_k, t), \quad k=1, 2, 3$$

$$T = T(x_k, t)$$

Лагранж

связать не со временем в пр-ве, а с координатами движения (газа)

$$\vec{v} = \vec{v}(\xi_k, t), \quad k=1, 2, 3$$

матрица координат

Объемно-матрица: $\xi_k = x_k(t=0)$

т.е. в $t=t_{max}$

Температура: $T = T(\xi_k, t)$ - темп. в матрице

т.е. в пр-ве координат, которая зависит коэфф. ξ_k в квант. измерениях времени.

Можно считать и координатами

$$x_k = x_k(\xi_k, t)$$

Любая преобразование:

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \neq 0, \quad \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \text{div} \vec{v}(x)$$

Пробь существует некоторое поле $\Phi(x_k, t)$ $k=1, 2, 3$

$$\frac{d}{dt} \int_V \Phi(\vec{r}, t) dV = ?$$

V - объект, который движется и перемещается

Как изменяется во времени

этот объект? Д.к. объект "наблюдается" в течение времени

Но переходя в лагранжеские координаты

$$\frac{d}{dt} \int_V \Phi(\vec{r}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} J \Phi d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (J \Phi) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} J \Phi d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

в квант. измерениях времени

Эйлера

$$= \iiint_V \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} (J\Phi) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_V \left(\underbrace{\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt}}_{= \operatorname{div} \vec{v}} \cdot \Phi + \frac{d\Phi}{dt} \right) dV$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \iiint_V \Phi(\vec{r}, t) dV = \iiint_V \left[\frac{d\Phi}{dt} + \Phi \operatorname{div} \vec{v} \right] dV \quad (**)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \quad (***)$$

Основное уравнение гидродинамики
идеальной жидкости.

Инертность $\leftrightarrow$ Вязкость
Идеальная $\downarrow$ Вязкая

Уравнение неразрывности (неразрывности):
~ аналог закона сохр. массы.

Рассмотрим объект движущийся вместе с жидкостью, состоящий из точек с тех же масс, т.е. $m = \text{const}$.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = 0 \quad \leftarrow \text{записали } \frac{d}{dt} \text{ по интегралу.}$$

$$\iiint_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right] dV = 0, \text{ т.к. } V - \text{произвольная}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (I) \quad \text{~ уравнение неразрывности.}$$

Упр. идеальной жидкости $\frac{d\rho}{dt} = 0$
 $\operatorname{div} \vec{v} = 0$!

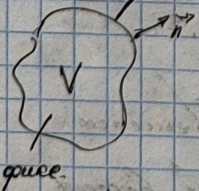
Газ всегда сжимаем.

Используем формулу (***):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (II)$$

Рассмотрим некоторый дифференциальный объект:



$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \left\{ \begin{array}{l} \text{т.к. объект} \\ \text{фиксир.-и} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV =$$

Уравнение Эйлера (движение идеальной жидкости):

Рассмотрим V - состоящий из точек с тех же масс, произвольный объект с жидкостью. И запишем для него закон Ньютона.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \vec{F}_V + \vec{F}_S$$

$$\vec{F}_V = \iiint_V \rho \vec{f} dV$$

плотность силы,
(сила действов. на ед. масс.)

или проще: $\vec{F} = \vec{g}$

$\vec{F}_S \sim$ сила действующая на объект через пов-ть.

$$\vec{F}_S = - \oint_S p \vec{n} dS = - \iiint_V \nabla p dV$$

др. об.

тангенциальная сила - это сила трения, (когда мы говорим об идеальной жидкости $\rightarrow$ трения нет.)
нормальная сила - сила давления

$$\iiint_V \left[\frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} \right] dV = \iiint_V \rho \vec{f} dV - \iiint_V \nabla p dV$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} = \rho \vec{f} - \nabla p$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \rho \operatorname{div} \vec{v} = \rho \vec{f} - \nabla p$$

= 0 из ур-я непрерывности

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho}} \quad (I) \sim \text{ур-е Эйлера}$$

Используя (***):

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho}} \quad (II)$$

$\sim$ кинематическое ур-е. скалярные составляющие решаются только для задан.

Всё вместе:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

Система ур-ий гидродинамики идеальной жидкости.

$\rho = \rho(p, \vec{r}) = \rho(p)$ - ур-е состояния
второй (хар-т хаотическое движение молекул)

Без времени $S = \text{const}$ - изокорическая поверхность (в случае др. плотности.)

Проекция ур-я Эйлера в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} \vec{x}_0 + \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{y}_0 + \frac{\partial v_z}{\partial t} \vec{z}_0 + (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (v_x \vec{x}_0 + v_y \vec{y}_0 + v_z \vec{z}_0) = \\ = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{x}_0 + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{y}_0 + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{z}_0 \right) + (f_x \vec{x}_0 + f_y \vec{y}_0 + f_z \vec{z}_0) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\text{ок: } \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x$$

В/з: ~~28~~, ~~28~~ (графиковое задание)

x 1.27

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$\delta \rightarrow \delta$

$$\rho = \kappa \rho$$

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} \right]$$

Рассчитать движение вдоль трубы однофазным
по сеч. χ . $\gamma = 1/2$.

Тогда $\vec{u}$ является преобразованием: (в проекции на OX):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \cdot v_x + \rho \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0 \quad (5)$$

$$\rho = \kappa \rho$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2) \quad \therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(**): \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$$

$$(X): \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi \partial^2 \psi}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi \partial \psi}{\partial x \partial t x} + \frac{\partial^2 \psi \partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial x x} + \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = \frac{\sqrt{2} \partial \rho}{\sqrt{t} \rho \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2v \frac{\partial \psi}{\partial t} + v^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} + 2v \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + 2v \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2v \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = v \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{dt} \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \leftarrow \text{сложно}$$

$$v \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = v \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial t} + \frac{\kappa}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial t} - v_x \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + v \frac{\kappa}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 = \{ \text{neglectable terms} \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(\frac{\partial \psi}{\partial x})^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\kappa}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \cancel{\psi \frac{\partial \rho}{\partial x^2}} - \cancel{\kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} +$$

$$- \cancel{\psi \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}} + \cancel{\psi \frac{\kappa}{\rho^2} (\frac{\partial \rho}{\partial x})^2} = \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\kappa}{\rho} \psi \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} +$$

$$= \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\kappa}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\kappa}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \quad \text{⑤}$$

$$\Leftrightarrow \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \psi \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Т.е. из правой части остаются только слагаемые, в
которые входит $\frac{1}{2}$.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\psi \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

28.

$$\begin{cases} p = \kappa p \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad / \cdot \rho \quad (1) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad / \cdot v \quad (2) \end{cases}$$

(1) + (2):

$$v \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v \frac{\partial \rho}{\partial t} + 2v\rho \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + v^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (v\rho) + \rho \frac{\partial (v^2 + \kappa)}{\partial x} + (v^2 + \kappa) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (v\rho) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho(v^2 + \kappa)) = 0 \quad / \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

Усл-ии др-е непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \quad / \cdot \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 (\rho v)}{\partial x \partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(v^2 + \kappa)\rho]$$

21.02.2022.

Выводятся уравнения системы координат

1. Цилиндрические координаты.

Проблемы дифференциалов:

$$\begin{array}{ccc} \vec{r} & \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} & \vec{e}_\varphi & -\vec{e}_r \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \end{array}$$

уравнения др-го как произведение.

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$$

Дифференцирование операторов

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\text{Аксиал: } J = r$$

2. Сферические координаты.
 Правило дифференцирования векторов:

	$\vec{I}_r$	$\vec{I}_\theta$	$\vec{I}_\varphi$
$\frac{\partial}{\partial r}$	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\vec{I}_\theta$	$-\vec{I}_r$	0
$\frac{\partial}{\partial \varphi}$	$\vec{I}_\varphi \sin \theta$	$\vec{I}_\varphi \cos \theta$	$-\vec{I}_r \sin \theta - \vec{I}_\theta \cos \theta$

Дифференциальные операторы

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{I}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{I}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \vec{I}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} \right)$$

Линейная: $J = r^2 \sin \theta$

Ур-е Лапласа в сферических координатах:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}$$

$$\nabla = \vec{I}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{I}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \vec{I}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\vec{v} = \vec{I}_r v_r + \vec{I}_\theta v_\theta + \vec{I}_\varphi v_\varphi$$

$$(\vec{v}, \nabla) \vec{v} = v_r \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \nabla) \vec{v} &= \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (v_r \vec{I}_r + v_\theta \vec{I}_\theta + v_\varphi \vec{I}_\varphi) = \\ &= v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \vec{I}_r + v_r v_\theta \frac{\partial \vec{I}_r}{\partial r} + v_r v_\varphi \frac{\partial \vec{I}_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \vec{I}_r + \frac{v_\theta}{r} v_\theta \frac{\partial \vec{I}_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} v_\varphi \frac{\partial \vec{I}_\theta}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \vec{I}_r + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} v_\theta \frac{\partial \vec{I}_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} v_\varphi \frac{\partial \vec{I}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} v_\theta \frac{\partial \vec{I}_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} v_\varphi \frac{\partial \vec{I}_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_\varphi \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + f_r$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + v_\varphi \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_\varphi$$

Ур-е Лапласа в сферических координатах:

н.л. 30



$R, \rho, H(\varphi=0) = H_0$; ρ_a

$\rho(r, \theta) = ?$

$z_{\text{своб}} = ?$

$F = ?$ (считая $g_{\text{св}}$)

Векторное уравнение гидростатического равновесия в поле тяжести:

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \quad \vec{f} = \vec{g}$$

$$\Rightarrow (\vec{r}, \nabla) \vec{v} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \vec{g}$$

Гидростатическое равновесие: $\vec{v} = v_{\varphi} \cdot \vec{e}_{\varphi}$

$$-\frac{v_{\varphi}^2}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{v_{\varphi} \partial v_{\varphi}}{r \partial \varphi} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_{\varphi}^2}{r}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho v_{\varphi}^2 / r$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$p(r, z) = -\rho g z + \frac{\rho v_{\varphi}^2 r^2}{2} + p_0$$

Зависимость $p(r)$ от радиуса r при $z = z_0$

$$p_{\text{стат}} = -\rho g z_0 + \frac{\rho v_{\varphi}^2 r^2}{2} + p_0$$

$$z_0(r) = \left[\frac{\rho v_{\varphi}^2 r^2}{2} + p_0 - p_{\text{стат}} \right] / \rho g$$

Зависимость $z_0(r)$ от радиуса r при $z = z_0$ (изменение уровня) $g/g = 1.30$

$$V^{(1)} = \pi R^2 H_0$$

$$V^{(2)} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{z_0(r)}^H r dr d\varphi dz = 2\pi \int_0^R \left[\frac{\rho v_{\varphi}^2 r^3}{6g} + \frac{p_0}{\rho g} r - \frac{p_{\text{стат}}}{\rho g} r \right] dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \left(\frac{\rho v_{\varphi}^2 r^3}{6g} + \frac{p_0}{\rho g} r - \frac{p_{\text{стат}}}{\rho g} r \right) dr = 2\pi \left(\frac{\rho v_{\varphi}^2 R^4}{24g} + \frac{p_0 R^2}{2\rho g} - \frac{p_{\text{стат}} R^2}{2\rho g} \right)$$

$$\Rightarrow 2\pi \left(\frac{\rho v_{\varphi}^2 R^4}{24g} + \frac{p_0 R^2}{2\rho g} - \frac{p_{\text{стат}} R^2}{2\rho g} \right) = \pi R^2 H_0 \quad / : \pi R^2$$

$$\frac{\rho v_{\varphi}^2 R^2}{4g} + \frac{p_0}{\rho g} - \frac{p_{\text{стат}}}{\rho g} = H_0 / \rho g$$

$$\frac{\rho v_{\varphi}^2 R^2}{4} + p_0 = H_0 \rho g + p_{\text{стат}} - \frac{\rho v_{\varphi}^2 R^2}{4}$$

$$\Rightarrow p(r, z) = -\rho g z + \frac{\rho v_{\varphi}^2 r^2}{2} + H_0 \rho g + p_{\text{стат}} - \frac{\rho v_{\varphi}^2 R^2}{4} =$$

$$= \rho g (H_0 - z) + \frac{\rho v_{\varphi}^2}{4} (2r^2 - R^2) + p_{\text{стат}}$$

Полная сила, действующая на дно: $(F = p \cdot S)$

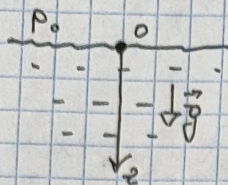
$$F = \int_0^R \int_0^{2\pi} p(r, z=0) r dr d\varphi = \int_0^R \left(\rho g H_0 + \frac{\rho v_{\varphi}^2 r^2}{2} + p_{\text{стат}} - \frac{\rho v_{\varphi}^2 R^2}{4} \right) r dr d\varphi =$$

$$= 2\pi \left(\frac{\rho g H_0 R^2}{2} + \frac{\rho v_{\varphi}^2 R^4}{8} + p_{\text{стат}} \frac{R^2}{2} - \frac{\rho v_{\varphi}^2 R^4}{8} \right) =$$

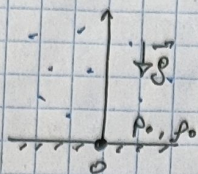
$$= \pi R^2 p_{\text{стат}} + \pi R^2 \rho g H_0 = mg + \pi R^2 p_{\text{стат}}$$

$$\vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla p}{\rho} = -\vec{g} \quad \text{гидростатика}$$



$$\frac{dp}{dz} = \rho g, \quad \rho = \text{const} \Rightarrow p = \rho g z + p_0$$

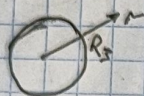


$$\frac{dp}{dz} = -\rho g, \quad PV = \frac{m}{\mu} RT, \quad T = \text{const}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\rho g}{RT} dz \Rightarrow p = p_0 e^{-\frac{\rho g}{RT} z}$$

Барометрическая формула

2.13



$$\frac{dp}{dr} = -\rho g, \quad PV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{\mu}$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{dr} \cdot \frac{RT}{\mu} = -\rho g \Rightarrow \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_{R_3}^r \frac{g}{RT} dr$$

$$\Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{RT} (r - R_3) \Rightarrow p(r) = p_0 e^{-\frac{g}{RT} (r - R_3)}$$

$$M_{\text{атм}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_3}^\infty p_0 e^{-\frac{g}{RT} (r - R_3)} r^2 \sin \theta dr = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{R_3}^\infty p_0 e^{-\frac{g}{RT} (r - R_3)} r^2 dr$$

$$= 4\pi p_0 \int_{R_3}^\infty r^2 e^{-\frac{g}{RT} (r - R_3)} dr = 4\pi p_0 e^{\frac{g R_3}{RT}} \int_{R_3}^\infty r^2 e^{-\frac{g r}{RT}} dr$$

$$\alpha = \frac{g}{RT}$$

$$I_0 = \int_R^\infty r^2 e^{-\alpha r} dr$$

$$I = \int_R^\infty e^{-\alpha r} dr = \frac{e^{-\alpha R}}{\alpha}$$

$$I'_\alpha = \left(\frac{e^{-\alpha R}}{\alpha} \right)' = e^{-\alpha R} \left(-\frac{R}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right)$$

$$I''_\alpha = -R e^{-\alpha R} \left(-\frac{R}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) + e^{-\alpha R} \frac{2}{\alpha^3}$$

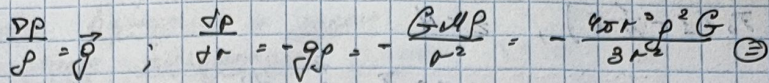
$$= e^{-\alpha R} \left(\frac{R^2}{\alpha} + \frac{2R}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) + e^{-\alpha R} \frac{1}{\alpha^2}$$

$$I_0 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} I = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \int_R^\infty e^{-\alpha r} dr = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_R^\infty (-r) e^{-\alpha r} dr = \int_R^\infty r^2 e^{-\alpha r} dr$$

$$\Rightarrow M_{\text{атм}} = 4\pi p_0 e^{\frac{g R_3}{RT}} \cdot e^{-\frac{g R_3}{RT}} \left(R^2 + \frac{R}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) = \frac{4\pi p_0}{\alpha} \left(R^2 + \frac{R}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right)$$

$$\textcircled{1} \left\{ \alpha = \frac{g}{RT} \right\} \Rightarrow \frac{p_0}{p_0 g} = \frac{p_0}{p_0 g}$$

$$\textcircled{2} \frac{4\pi p_0}{\alpha} \left(R^2 + \frac{2}{\alpha} \left(R + \frac{1}{\alpha} \right) \right) = \frac{4\pi p_0}{g} \left(R^2 + \frac{2 p_0}{p_0 g} \left(R + \frac{p_0}{p_0 g} \right) \right)$$



$$mg = G \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{r^2} ; M = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \rho$$

$$\textcircled{2} - \frac{4\pi \rho^2 G}{3} r = 0$$

$$\int_P^A \Delta p = - \frac{4\pi \rho^2 G}{3} \int_r^{R_0} r' dr' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p - p_* = \frac{4\pi\rho^2 G}{6} (R_0^2 - r^2)$$

$$P = P_A + \frac{\rho \cdot g \cdot h}{\rho} (\rho_0 - \rho)$$

$$p = p_A + \frac{\rho_0 p^2}{2R_3 \rho} (R_3^2 - r^2)$$

$$P = P_A + \frac{\rho_0 g}{2R_0} (R_0^2 - r^2)$$

$$g_0 = g_0 = \frac{G \cdot \frac{4}{3} \pi R_3^3 \rho}{R_3^2} = \frac{\hat{G} \cdot 4\pi R_3 \rho}{3}$$

$$\text{iii) } \frac{G \cdot m_3}{R_3^2}$$

$\frac{2}{3}$ - додел ~~2.13~~, ~~покажу тек в 2.12~~ + ~~2.10~~,
Дополнительная работа:

к2.12. (прогнозирование):

$$p = p_s + \frac{\gamma_0 \rho}{2R_3} (R_3^2 - r^2), \quad \text{zge} \quad \gamma_0 = \frac{G \cdot m_3}{R_3^2}$$

250 будет в чеке?

$$p(r) = p_1 + \frac{p_0 R_3}{2 R_3} \cdot R_3^2 = p_1 + \frac{p_0 R_3}{2} = p_1 + \frac{m_3 g_0 R_3}{\frac{4}{3} \pi R_3^3 \cdot 2} = p_1 + \frac{3}{8} \frac{g_0}{R_3}$$

н. 2.10. $\rho_{\text{г-56}}$ $\rho(z)$, если температура газа ^{измен.} изменяется по закону $T(z)$

$$\frac{\Delta p}{\rho} = g \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta z} = -g$$

Из ур. о Мещеневе - Киселёвском.

$$pV = \gamma RT = \frac{\gamma}{\mu} RT = \frac{V \cdot \rho}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{\rho}{\mu} RT$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\mu p}{RT}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\rho g}{RT}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{4g}{R} \cdot \frac{\Delta z}{T(z)}$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = -\frac{4g}{R} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{z \sqrt{2}}{1+z^2} dz \Rightarrow \ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{4g}{R} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{z \sqrt{2}}{1+z^2} dz$$

Можно массу не знать, но здесь знаем параметра при $z=0$: $\frac{V \cdot \rho_0}{\rho_0 \cdot T_0}$

$$\rho_0 V = \frac{V \cdot \rho_0}{\mu R T_0} \Rightarrow \mu = \frac{\rho_0 R T_0}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow \underline{p(z)} = p_0 \cdot \exp. \left\{ \frac{p_0 T_0 g}{p_0 g} \int_0^z \frac{\sqrt{z}}{T(z)} dz \right\}$$

Частные случаи.

$$a) \tau = \tau_0 (1 - \frac{z}{H})^2, \quad z < H$$

$$\Rightarrow p(z) = p_0 \cdot \exp \left\{ - \frac{g \rho_0 \tau_0}{\rho_0} \int_0^z \frac{\sqrt{z}}{\tau_0 (1 - \frac{z}{H})^2} dz \right\}$$

$$\int_0^z \frac{\sqrt{z}}{\tau_0 (1 - \frac{z}{H})^2} dz = \frac{1}{\tau_0} \cdot (-H) \cdot \ln \left| 1 - \frac{z}{H} \right| \Big|_0^z = -\frac{H}{\tau_0} \ln \left(1 - \frac{z}{H} \right)$$

$$\exp \left\{ + \frac{g \rho_0 \tau_0}{\rho_0} \cdot \frac{H}{\tau_0} \ln \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right\} = \left(1 - \frac{z}{H} \right)^{\frac{g \rho_0 H}{\rho_0}}$$

$$\Rightarrow \underline{p(z) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{z}{H} \right)^{\frac{g \rho_0 H}{\rho_0}}}$$

$$b) \tau = \tau_0 \left(1 - \frac{z^2}{H^2} \right), \quad z < H$$

$$\frac{1}{\tau_0} \int_0^z \frac{\sqrt{z}}{\left(1 - \frac{z^2}{H^2} \right)} dz = \left\{ \text{неизвестно} \right\} = \frac{H^2}{\tau_0} \int_0^z \frac{dz}{(H^2 - z^2)}$$

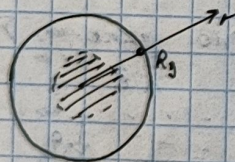
$$= \frac{H^2}{\tau_0} \cdot \left(\frac{1}{2H} \ln \left| \frac{H+z}{H-z} \right| \right) \Big|_0^z = \frac{H}{2\tau_0} \ln \left| \frac{H+z}{H-z} \right| = \frac{H}{2\tau_0} \ln \left| \frac{1 + \frac{z}{H}}{1 - \frac{z}{H}} \right|$$

$$\exp \left\{ - \frac{g \rho_0 \tau_0}{\rho_0} \cdot \frac{H}{2\tau_0} \ln \left[\frac{1 + \frac{z}{H}}{1 - \frac{z}{H}} \right] \right\} = \left[\frac{1 - \frac{z}{H}}{1 + \frac{z}{H}} \right]^{\frac{g \rho_0 H}{2\rho_0}}$$

$$\Rightarrow \underline{p(z) = p_0 \left[\frac{1 - \frac{z}{H}}{1 + \frac{z}{H}} \right]^{\frac{g \rho_0 H}{2\rho_0}}}$$

М.Д.З. 23.2.

Решение 2.12.



$$\frac{\nabla p}{\rho} = \vec{g} \Rightarrow \frac{dp}{dr} = -g\rho$$

$$mg = G \frac{dm}{r^2} \Rightarrow g = \frac{Gm}{r^2}$$

$$\text{где } m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dr} = -g\rho = -\frac{Gm\rho}{r^2} = -\frac{4\pi r^3 \rho^2 G}{3r^2} = -\frac{4\pi \rho^2 G}{3} r$$

$$\Rightarrow \int_p^{p_A} dp = -\frac{4\pi \rho^2 G}{3} \int_r^{R_3} r dr \Rightarrow p - p_A = + \frac{4\pi \rho^2 G}{3 \cdot 2} (R_3^2 - r^2)$$

если обозначить

$$g_0 = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi R_3^3 \rho}{R_3^2} = \frac{G \cdot 4\pi}{3} R_3 \rho \Rightarrow G \cdot 4\pi = \frac{3g_0}{R_3 \rho}$$

$$\Rightarrow p = p_A + \frac{g_0 \rho}{2 R_3 \rho} (R_3^2 - r^2) = p_A + \frac{g_0}{2 R_3} (R_3^2 - r^2)$$

Уравнение Бернулли и закон сохранения энергии.

Получим из ур-я Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$$

представим векторное поле скорости:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - [\vec{v}, \text{rot} \vec{v}] = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla(gz) = [\vec{v}, \text{rot} \vec{v}]$$

введём термодинамическое уравнение: W - энтальпия, g - гравитационный потенциал

$$W = u + pV$$

$$dW = du + p dV + V dp = dQ + V dp$$

$$dQ = du + p dV$$

в уравнении энергии: $dS = \frac{dQ}{T}$; $dQ = T dS$

$$\Rightarrow dW = T dS + V dp$$

для адиабатического процесса: $dS = 0$

$$\Rightarrow dW = \frac{1}{\rho} dp \Rightarrow \nabla W = \frac{p \nabla p}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + \nabla W + \nabla(gz) = [\vec{v}, \text{rot} \vec{v}]$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + W + gz \right) = [\vec{v}, \text{rot} \vec{v}] \quad (*)$$

1) Движение стационарное и потенциальное: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, $\text{rot} \vec{v} = 0$

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + W + gz \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + W + gz = \text{const}$$

если скорость постоянна и не зависит от ρ : $\rho = \text{const}$

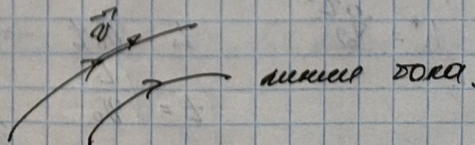
$$\left\{ \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \right\}$$

- это ур-е Бернулли.

2) течение стационарное $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, но $\text{rot} \vec{v} \neq 0$.

Возможны (*) / $\cdot \vec{v} \Rightarrow (\vec{v}, [\vec{v}, \text{rot} \vec{v}]) = 0$

$$\Rightarrow \nabla_{\vec{v}} \left(\frac{v^2}{2} + W + gz \right) = 0$$



линия тока.

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{const} \quad \text{в поле шимми тал.}$$

Если говорить про газы, то там $\rho \neq \text{const}$. В основном $\rho = \text{const}$ для жидкостей.

Для газов: $w = \int \frac{dp}{\rho}$, для жидкостей: $w = \frac{p}{\rho}$

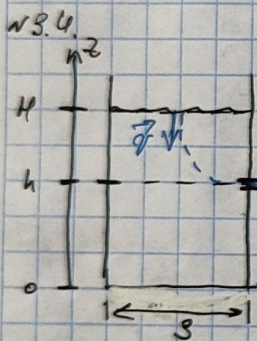
В) Если течение нестационарное $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$, но потенциальное $\text{rot } \vec{v} = 0$.

Можно ввести потенциал скорости: $\vec{v} = \text{grad } \varphi$, где φ - потенциал.

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi = \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w + gz \right) = 0 \quad \text{и.б. зависимость от времени.}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w + gz = F(t) \quad \text{- интеграл Коши.}$$



Скорость вытекания жидкости через S_0 ?

Движение считаем стационарным (дифференциал): $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Выбираем линию тока:

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + w + gz \right) = \text{const}$$

т.е. жидкость дифференциал и масса: $w = \frac{p}{\rho}$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_0 \rho_0}{\rho} + gH = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0 \rho_0}{\rho} + gh$$

3-е соотношение массы: сколько вышло на сколько ушло.

$$v_0 \cdot S_0 = v \cdot S \Rightarrow v = \frac{v_0 S_0}{S}$$

$$\frac{v_0^2 S_0^2}{2 S^2} + gH = \frac{v_0^2}{2} + gh$$

$$\frac{v_0^2}{2} \left(1 - \frac{S_0^2}{S^2} \right) = g(H-h) \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1 - \frac{S_0^2}{S^2}}}$$

$S_0 \ll S$: $v_0 = \sqrt{2g \Delta h}$ - формула Торричелли.

Про какое h^* струя уходит максимально далеко?

$$h^* = \frac{g t^2}{2} \quad L = v_0 t \rightarrow \text{max}$$

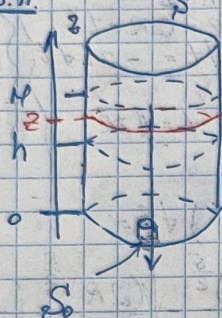
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad v_0 = \frac{L}{t} = L\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

$$L\sqrt{\frac{g}{2h}} = \sqrt{2g(M-h)}$$

$$L = \sqrt{4h(M-h)}$$

$$L'_h = 2 \cdot \frac{(M-h) - h}{\sqrt{h(M-h)}} = 0 \quad \text{или} \quad M - 2h^* = 0 \Rightarrow \underline{h^* = \frac{M}{2}}$$

п.8.11



Возьмем произвольный уровень z и будем считать за начало.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{v_0^2(z)}{2} + \frac{p}{\rho}$$

$$v_0 \cdot S_0 = vS \Rightarrow$$

$$v = v_0 \frac{S_0}{S}$$

$$\frac{v_0^2(z) \cdot S_0^2}{2S^2} + gz = \frac{v_0^2(z)}{2}$$

$$\Rightarrow v_0(z) = \sqrt{\frac{2gz}{1 - \frac{S_0^2}{S^2}}}$$

$$S_0 v_0 dt = S \frac{v dt}{dz} \Rightarrow \int dt = \int \frac{S}{S_0 v_0(z)} dz$$

$$t = \int_h^H \frac{\rho S}{S_0} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{S_0^2}{S^2}}{2gz}} dz = \int_h^H \frac{\sqrt{\frac{S^2}{S_0^2} - 1}}{\sqrt{2g}} \cdot z^{-\frac{1}{2}} dz =$$

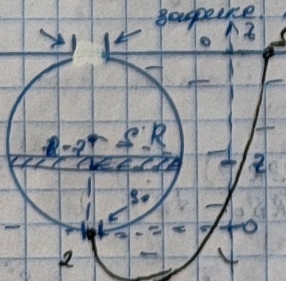
$$= \frac{\sqrt{\frac{S^2}{S_0^2} - 1}}{\sqrt{2g}} \cdot 2 \cdot z^{\frac{1}{2}} \Big|_h^H = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{S_0^2} - 1} \cdot (\sqrt{H} - \sqrt{h})}}$$

Когда вынется весь воздух? Когда $h=0$

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \sqrt{\left(\frac{S}{S_0}\right)^2 - 1}$$

Р/з: 8.18, (8.14), 8.15, 8.18

п.8.13



$$S' = \pi R^2 = \pi(R^2 - (R-z)^2)$$

$$vS dt = v_0 S_0 dt$$

линия тока
эф.е Бернулли для z, s, z, s
 $\frac{p_0}{\rho} + 2Rg + \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz$
читаем на пов-ти атмосферы + часть на высоте z

$$2Rg = \frac{v_0^2}{2} + gZ \rightarrow \frac{v_0^2}{2} = 2Rg - gZ$$

$$v_0 = \sqrt{2g(2R - Z)}$$

$$S = \pi(R^2 - R^2 + 2RZ - Z^2) = \pi Z(2R - Z)$$

$$v_0 S_0 dt = v_0 S_0 dt \quad v dt = \frac{v_0}{dt} \cdot dt$$

$$\pi Z(2R - Z) dz = \sqrt{2g(2R - Z)} \cdot S_0 dt$$

$$dt = \frac{S_0}{\sqrt{2g}} \int_0^{2R} Z \cdot \sqrt{2R - Z} dz = \left\{ \begin{array}{l} 2R - Z = t^2 \\ -dz = 2t dt \\ dz = -2t dt \\ z = 2R \rightarrow t^2 = 0 \\ z = 0 \rightarrow t^2 = 2R \rightarrow t = \sqrt{2R} \end{array} \right\} \Rightarrow Z = (2R - t^2)$$

$$= \frac{S_0}{\sqrt{2g}} \int_{\sqrt{2R}}^0 (2R - t^2) \cdot 2t dt = \frac{\sqrt{2} S_0}{5 \sqrt{g}} \int_0^{\sqrt{2R}} (2R t^2 - t^4) dt =$$

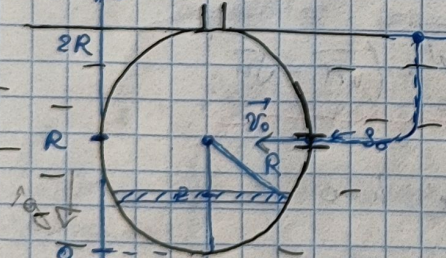
$$= \frac{\sqrt{2}}{g} \cdot \frac{S_0}{5} \cdot \left[2R \frac{(t^3)^3}{3} - \frac{(t^5)^5}{5} \right] = \frac{\sqrt{2}}{g} \cdot \frac{S_0}{5} \left[\frac{(2R)^{\frac{5}{2}}}{3} - \frac{(2R)^{\frac{5}{2}}}{5} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{g} \cdot \frac{S_0}{5} \cdot \frac{2 \cdot (2R)^{\frac{5}{2}}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{g} \cdot \frac{S_0}{5} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 2^3 \sqrt{R} \cdot R^2}{15} =$$

$$= \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{S_0 R^2}{5} \cdot \frac{16}{15}$$

$$\text{Ответ: } t = \frac{16}{15} \frac{S_0 R^2}{g} \sqrt{\frac{R}{g}}$$

1.3.14.2



Разделим заполнение на 2 этапа.
Перый аналогичен 3.13, заполняется
наполовину до S_0 , потом $2R$ —
заполняется до поверхности, но для
 S_0 будет дополнительное давление со
свободной поверхностью

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$1) \frac{v_0^2}{2} + gR + \frac{P_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + 2gR + \frac{P_0}{\rho} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR}$$

Закон сохранения массы:

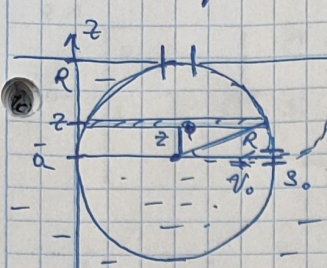
$$v_0 S_0 dt = S v dt$$

$$\sqrt{2gR} S_0 dt = \pi Z(2R - Z) dz \Rightarrow dt = \frac{\pi Z(2R - Z)}{\sqrt{2gR} S_0} dz$$

$$Z_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2gR} S_0} \int_0^R (2R - Z) Z dz = \frac{\pi}{\sqrt{2gR} S_0} \int_0^R (2RZ - Z^2) dz = \frac{\pi}{\sqrt{2gR} S_0} \cdot \left(2R \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2gR} S_0} \cdot \frac{2}{3} R^3 = \frac{2\pi}{3} \frac{R^2 \sqrt{R}}{\sqrt{2g} \cdot S_0}$$

2) Пересечем ось z в центр масс. Рассуждения аналогичны:



$$gz + \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} = \frac{p_A}{\rho} + gR + \frac{v^2}{2}$$

$$\frac{v_0^2}{2} = g(R-z) \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g(R-z)}$$

Пересчитываем площадь:

$$S = \pi r^2 = \pi (R^2 - z^2)$$

$$v \cdot S \cdot dt = v_0 S_0 \cdot dt$$

$$\pi (R^2 - z^2) dz = \sqrt{2g(R-z)} \cdot S_0 \cdot dt$$

$$\int_0^{t_2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2g} S_0} \int_0^R \sqrt{R-z} (R+z) dz = \left\{ \begin{array}{l} (R-z) = t^2 \\ 2t dt = -dz \rightarrow dz = -2t dt \\ R - t^2 = z \rightarrow z+R = 2R - t^2 \\ z=R \rightarrow t=0 \\ z=0 \rightarrow t=\sqrt{R} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2g} S_0} \int_0^{\sqrt{R}} t \cdot (2R - t^2) \cdot 2t dt$$

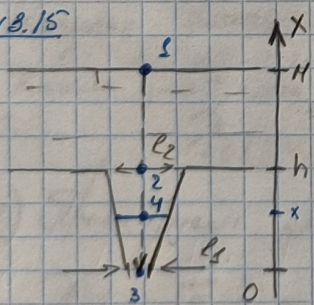
$$\Rightarrow t_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2g} S_0} \int_0^{\sqrt{R}} t^2 \cdot (2R - t^2) dt = \frac{\sqrt{2}}{g} \frac{\pi}{S_0} \cdot \left[\frac{2R \cdot t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^{\sqrt{R}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{g} \frac{\pi}{S_0} \cdot \left[\frac{2R \cdot R^{3/2}}{3} - \frac{R^{5/2}}{5} \right] = \frac{\sqrt{2}}{g} \cdot \frac{\pi}{15} \frac{R^{5/2}}{S_0} = \frac{\sqrt{2}}{g} \cdot \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \sqrt{R}}{15} \frac{\pi}{S_0}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{2}}{g} \frac{\pi}{S_0} \cdot \frac{7R^2 \sqrt{R}}{15} + \frac{\sqrt{2}}{g} \frac{\pi}{S_0} \cdot \frac{R^2 \sqrt{R}}{3} = \frac{12}{15} \frac{\sqrt{2}}{g} \frac{\pi}{S_0} \cdot R^2 \sqrt{R} =$$

$$= \frac{\pi}{S_0} \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{4R^2 \sqrt{R}}{5} \quad (?)$$

18.15

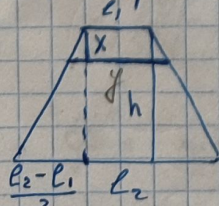


Определим распределение давления жидкости в направлении $px(x)$ - в направлении 1-4

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{v^2}{2} + Hg = g x + \frac{v'^2(x)}{2} + \frac{p(x)}{\rho}$$

$$\Rightarrow p(x) = p_A - \rho g x + \rho g H - \frac{\rho v'^2(x)}{2}$$

Валочка сохр. массы:



$$\frac{y-l_1}{x-l_1} = \frac{l_2-l_1}{x-l_1} \leftarrow \text{из подобия } \Delta$$

$$y = \frac{x(l_2-l_1)}{h} + l_1$$

Две массовы, не цилиндр!

$$v_0 l_1 \cdot dt = v' \cdot \left[\frac{x(l_2-l_1)}{h} + l_1 \right] \cdot dt$$

$$\Rightarrow v' = \frac{h v_0 l_1}{l_1 h + x(l_2 - l_1)}$$

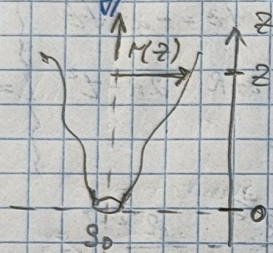
v_0 найдём рассматривая 1-3:

$$\frac{\rho_0}{2} + \frac{\rho_0}{\rho} + \mu g = \frac{v_0^2}{2} + \frac{\rho_0}{\rho} + g \cdot 0 \rightarrow v_0^2 = 2gH \rightarrow$$

$$\Rightarrow v'^2 = 2gH \cdot \left[\frac{h l_1}{h l_1 + x(l_2 - l_1)} \right]^2$$

$$\Rightarrow p(x) = \rho_0 - \rho g x + \rho g H \left(1 - \left[\frac{h l_1}{h l_1 + (l_2 - l_1)x} \right]^2 \right)$$

18.18. Оп-ть форму скорости, ускор. для вращения колес. к-то опускается со уровня ската поочередно "равной" v . Поиском обретения S_0 .



$$v_0 S_0 \sqrt{z} = v(z) \cdot S(z) \sqrt{z}$$

$$S(z) = \pi r^2(z) \rightarrow r(z) = ?$$

$$\frac{v^2(z)}{2} + \frac{\rho_0}{\rho} + g z = \frac{v_0^2}{2} + \frac{\rho_0}{\rho}$$

$$v^2(z) = \frac{v_0^2}{2} \cdot 2 - 2g z$$

$$\text{По условию } v(z) = v \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2g z \Rightarrow v_0 = \sqrt{v^2 + 2g z}$$

$$\sqrt{v^2 + 2g z} \cdot S_0 \sqrt{z} = - \sqrt{z} \cdot \pi r^2(z)$$

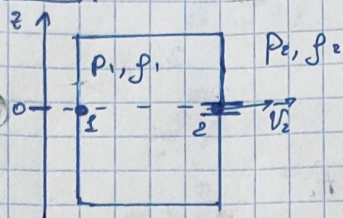
$$-\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = v \Rightarrow \frac{1}{\pi} \sqrt{v^2 + 2g z} \cdot S_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} = r^2(z)$$

$$r^2(z) = \sqrt{\frac{S_0^2}{\pi^2} + \frac{2g S_0^2 z}{\pi^2 v^2}}$$

$$\Rightarrow r(z) = \sqrt{\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{S_0^2}{v^2} + \frac{2g S_0^2 z}{v^2} \right)}$$

21.08.23г.

№3.21.

Говорим про току: $\rho \neq \text{const.}$ $v_2 = ?$

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{const.}$$

Скорость у правой стенки меньше скорости = 0

$$w_2 = \frac{v_2^2}{2} + w_2$$

По условию процесс адиабатический: $\rho V^{\gamma} = \text{const}$

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dw}{\rho} \quad \rightarrow \text{массу можно считать в const.}$$

$$\rho \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma} = C \Rightarrow \rho = \rho^{\frac{1}{1-\gamma}} \cdot C$$

По опр-ю энthalпии:

$$dw = \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho^{\frac{1}{1-\gamma}}} C d\rho = C \rho^{\frac{1}{1-\gamma}-1} d\rho$$

$$w = \int C \rho^{\frac{1}{1-\gamma}-1} d\rho = \frac{C \cdot \frac{1}{1-\gamma}}{\frac{1}{1-\gamma}-1} \rho^{\frac{1}{1-\gamma}-1} + C_2$$

$$v_2^2 = 2(w_1 - w_2) = 2 \left(\frac{C \cdot \frac{1}{1-\gamma}}{\frac{1}{1-\gamma}-1} \rho_1^{\frac{1}{1-\gamma}-1} + C_2 - \frac{C \cdot \frac{1}{1-\gamma}}{\frac{1}{1-\gamma}-1} \rho_2^{\frac{1}{1-\gamma}-1} - C_2 \right)$$

$$C = \frac{\rho_1}{\rho_1^{\frac{1}{1-\gamma}}} = \frac{\rho_2}{\rho_2^{\frac{1}{1-\gamma}}}$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 2 \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_1^{\frac{1}{1-\gamma}}} - \frac{\rho_2}{\rho_2^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)$$

Д/з: 2.12, 3.19, 3.25

Закон сохранения импульсаИмпульс единицы объема: $\rho \vec{v}$

Хотим знать как изменяется какой-то компонент со временем.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

1) Процедура гр-е Эйлера:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i$$

сила на единицу массы.

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \sum_{k=1}^3 \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \rho$$

 f_i — сила на единицу объема

Гр-е непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = 0$$

Гр-е кепр.

Все сохраняется вместе:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \sum_{k=1}^3 \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i - \sum_{k=1}^3 v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (\rho v_i v_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik}) + f_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik}) + f_i$$

Π_{ik} — тензор напряжений Лангемана.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + f_i$$

$$\Pi_{ik} = \begin{pmatrix} \rho v_x^2 + p & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_x & \rho v_y^2 + p & \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z^2 + p \end{pmatrix} \quad (6)$$

Рассмотрим элемент объема V :

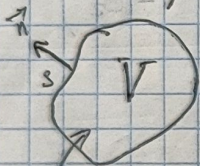


рис.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_i dV = \iiint_V f_i dV - \oint_S \Pi_{ik} n_k dS$$

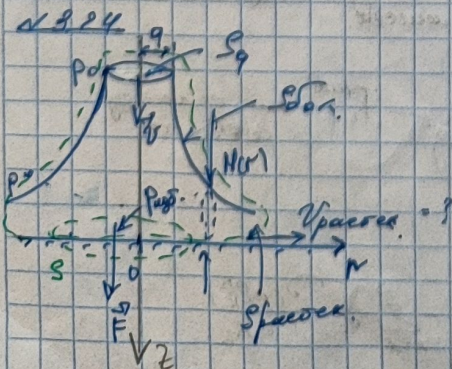
Изменение импульса в объеме V связано с действием внешних объемных сил и потоком импульса через граничную пов-сть S .

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iiint_V \vec{f} dV - \oint_S (\rho \vec{v} v_n + p \vec{n}) dS$$

$$v_n = (\vec{v}, \vec{n})$$

Если движение стационарное $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\vec{f} = 0$, то получим:

$$\oint_S (\rho \vec{v} v_n + p \vec{n}) dS = 0$$



В эту приближения, считаем, что в V нет источников и sinks.

$v = v$ — из Бернулли.

Из закона сохр-я масс:

$$v \cdot \rho a^2 = 2\pi r N(r) \cdot v$$

$$\Rightarrow N(r) = \frac{Q^2}{2\pi r}$$

Сила гидродинамического давления:

исп. закон сохранения импульса:

$$\oint_S \rho \vec{n} dS = - \oint_S \rho \vec{v} v_n dS$$

$$\oint_S \rho_0 \vec{n} dS + \oint_{Sc} \rho \vec{n} dS = \vec{F}' - \text{сила изд. давления}$$

по т. О.-Г.

Продолжим на 02:

$$F_z' = - \oint_S \rho v_z \cdot v_n dS = + \rho v^2 \pi a^2$$

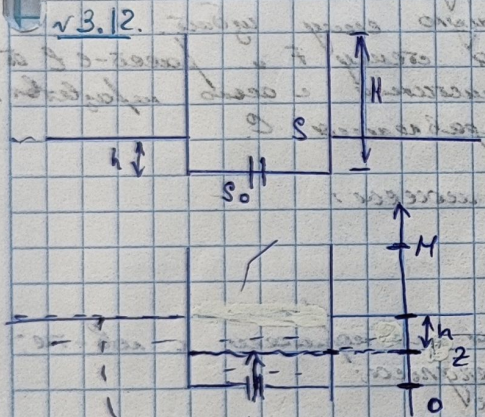
$$S' = S_a + S_{бок} + S_c + S_{раздел}$$

$$\begin{matrix} v_z = v & v_n = 0 & v_z = 0 & v_z = 0 \\ v_n = -v & & & v_n = v \end{matrix}$$

за стенку не течёт

Домашняя работа.

н.з.12.



2/3 раз какое время сработки утонет?
Уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho g}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + gz = \frac{v^2}{2} + \frac{\rho g}{\rho} + g(h+z)$$

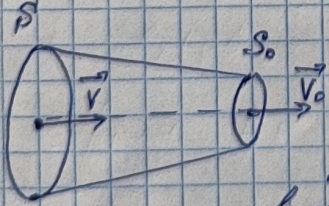
$$v_0^2 = (gh + gz - gz) \cdot 2 = 2gh$$

$$v_0 S_0 dt = S \frac{dz}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2gh} \cdot S_0 dt = S dz$$

$$t = \frac{S_0 \sqrt{2gh}}{S} \int_h^H dz = \frac{S_0}{S} \frac{H-h}{\sqrt{2gh}}$$

н.з.19



Движение совершается изотермически

$$p = \kappa p$$

Найти соотношение между скоростями v и v_0 в сечениях, площадь которых S и S_0

Говорим про газ: p — конст., но

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{const}$$

$$\frac{v^2}{2} + w_3 = \frac{v_0^2}{2} + w_2$$

$p = \kappa p$, по опр-но энтропии:

$$dw = \frac{1}{\rho} dp = \frac{\kappa}{\rho} \cdot dp \Rightarrow w = \kappa \cdot \ln p \Rightarrow w_3 = \kappa \cdot \ln p$$

$$w_2 = \kappa \cdot \ln p_0$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + \kappa \ln \rho = \frac{v_0^2}{2} + \kappa \ln \rho_0$$

Закон сохранения массы:

$$\times \textcircled{?} v_0 S_0 = v S \rightarrow S_0 \sqrt{2} = S \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{v_0} = \sqrt{v}$$

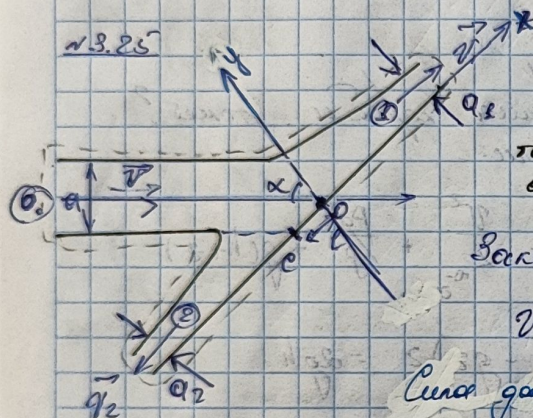
$$V = \frac{m}{\rho} \rightarrow m = \rho V \Rightarrow S_0 v_0 \rho_0 = S v \rho$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{S_0 v_0}{S v}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + \kappa \ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{v_0^2}{2} ; \quad \frac{v^2}{2} + \kappa \ln \frac{S_0 v_0}{S v} = \frac{v_0^2}{2}$$

$$\kappa \ln \frac{S_0 v_0}{S v} = \frac{v_0^2 - v^2}{2} \quad \frac{S_0 v_0}{S v} = \frac{e^{\frac{v_0^2}{2\kappa}}}{e^{\frac{v^2}{2\kappa}}}$$

$$\Rightarrow S_0 v_0 e^{-\frac{v_0^2}{2\kappa}} = S v e^{-\frac{v^2}{2\kappa}}$$



Опр-ть кривизны α_1 и α_2 на бесконечности, параллельно оси шланга. давления α_1 на стенку F и радиус-вектор α_2 точки O центра масс α_1 с осью α_2 шланга до центра давления C .

Закон сохранения массы:

$$v \alpha = v_1 \alpha_1 + v_2 \alpha_2$$

Сила давления направлена по нормали к об-ту:

$$\oint_S (p n_y + \rho v_y v_n) dS = 0$$

$$S = S_{\alpha_1} + S_{\alpha_2} + S_{\alpha_3} + S_{\alpha_4} + S_{\alpha_5}$$

$$v_y = 0 \quad v_n = 0 \quad v_z = 0$$

$$\Rightarrow v_y = -v \cos \alpha ; \quad v_n = -v$$

$$\Rightarrow F_y = - \oint_S p v_y v_n dS = - \rho v^2 \cos \alpha$$

$$x: S = S_{\alpha_1} + S_{\alpha_2} + S_{\alpha_3} + S_{\alpha_4} + S_{\alpha_5}$$

$$v_n = -v \quad v_x = v \sin \alpha \quad v_n = v \quad v_x = v \quad v_n = 0 \quad v_x = 0$$

$$\text{Из гр-а Бернулли: } v_1 = v_2 = v \Rightarrow \alpha v = v \alpha_1 + v \alpha_2$$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\oint_S \rho v_x v_n dS = 0$$

$$\Rightarrow -\rho v^2 \sin \alpha + \rho v^2 \alpha_1 - \rho v^2 \alpha_2 = 0$$

$$-a \sin \alpha + a_1 - a_2 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2} a (1 + \sin \alpha)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} a (1 - \sin \alpha)$$

Как найти точку приложения силы?

$$M_2 = l_x F_y' \Rightarrow l_x = \frac{M_2}{F_y'} \leftarrow \text{знаем}$$

$$\vec{r}_x / \oint \rho \vec{r} \vec{v} ds = - \oint \rho \vec{r} \vec{v} ds$$

$$\Rightarrow \vec{M}' = \oint \rho [\vec{r}, \vec{v}] v ds \Rightarrow M_2'$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$Q = P \Delta$$

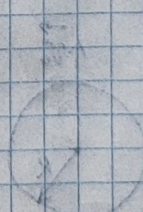
$$Q = \frac{1}{2} \rho v^2 \Delta$$

$$Q = \frac{1}{2} \rho v^2 \Delta$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$Q = \frac{1}{2} \rho v^2 \Delta$$

$$Q = \frac{1}{2} \rho v^2 \Delta$$



Потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости.

Без вязкости, несжимаемая жидкость опис-ся ур-ем Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$$

Из ур-я неразрывности:

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + \nabla W + \nabla g z = [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}] \quad / \cdot \text{rot.}$$

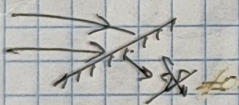
$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{v} = \text{rot} [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}]$$

Потенциальное течение $\text{rot } \vec{v} = 0$. Данное течение $\rightarrow$ безвихревое
решается ур-ем Лапласа.

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{v} = 0 \\ \text{div } \vec{v} = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{v} = \text{grad } \Phi$$

$$\Delta \Phi = 0$$

Граничные условия:



На пов-ти жесткой стенки:

$$v_n|_s = 0, \text{ если } \vec{v}_{\text{об.}} = 0$$

$$v_n|_s = v_{\text{об.}n}|_s, \text{ если } \vec{v}_{\text{об.}} \neq 0$$

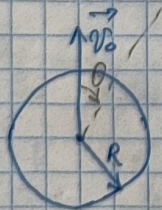
Φ -потенциал сл-ти:

$$v_n = \text{grad}_n \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_s = 0, \vec{v}_{\text{об.}} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_s = v_{\text{об.}n}, \vec{v}_{\text{об.}} \neq 0$$

к 4.7.



$\Phi = ?$

Потенциал ур-я Лапласа в сферич. сл-и:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Пот. Φ должно быть ос. симметрично кр-ю

По φ все симметрично $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$

Реш: $\frac{\partial \Phi}{\partial r}|_{r=R} = v_0 \cos \theta$

$$\vec{v}|_{r \rightarrow \infty} = 0 \Rightarrow \Phi|_{r \rightarrow \infty} = \text{const.}$$

Угловая симметрия 6 бугор:

$$\Phi(r, \theta) = U(r) \cos \theta \quad \cos \theta \sim \text{угловая часть}$$

$$\frac{1}{r^2} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin^2 \theta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) - 2U = 0 \quad \text{уравнение Эйлера}$$

$$U \sim r^k$$

$$k(k+1)r^k - 2r^k = 0$$

$$r^k (k^2 + k - 2) = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -2$$

$$\Rightarrow \Phi(r, \theta) = Ar \cos \theta + Br \cos \theta$$

на $\Phi(\infty, \theta) = \text{const.} \Rightarrow B = 0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -2Ar \cos \theta$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = -2A \cos \theta / R^3 = V_0 \cos \theta \Rightarrow A = -\frac{V_0 R^3}{2}$$

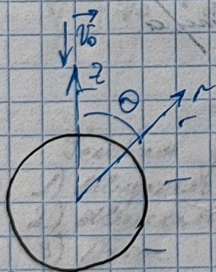
$$\Rightarrow \Phi(r, \theta) = -\frac{V_0 R^3}{2r^2} \cos \theta$$

$$\vec{v} = \text{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{r}_0 + r \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{\theta}_0$$

$$\Rightarrow \vec{v} = + \frac{V_0 R^3}{r^3} \cos \theta \cdot \vec{r}_0 + \frac{V_0 R^3}{2r^3} \sin \theta \cdot \vec{\theta}_0$$

$$\Rightarrow \underline{v_r = \frac{V_0 R^3}{r^3} \cos \theta}; \quad \underline{v_\theta = \frac{V_0 R^3}{2r^3} \sin \theta}; \quad v_\varphi = 0$$

48.



$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\int v_r / r = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_r = 0$$

$$\Phi|_{r \rightarrow \infty} = -V_0 r \cos \theta$$

$$\Phi(r, \theta) = U(r) \cos \theta$$

Аналогично:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) - 2U = 0, \quad U(r) \sim r^k$$

$$k(k+1)r^k - 2r^k = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -2$$

$$\Phi(r, \theta) = Ar^2 \cos \theta + Br \cos \theta$$

$$\Phi_{r \rightarrow \infty} = Br \cos \theta = -V_0 r \cos \theta \Rightarrow B = -V_0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -2A \frac{\cos \theta}{r^3} + B \cos \theta = -2A \frac{\cos \theta}{r^3} - V_0 \cos \theta$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{2A \cos \theta}{R^3} - V_0 \cos \theta = 0 \Rightarrow A = -\frac{V_0 R^3}{2}$$

$$\Rightarrow \Phi(r, \theta) = -\frac{V_0 R^3}{2r^2} \cos \theta - V_0 r \cos \theta$$

$$\vec{v} = \text{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{\theta}_0 \quad \text{---}$$

$$\text{---} \left(+\frac{V_0 R^3}{r^3} \cos \theta - V_0 \cos \theta \right) \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \left(+\frac{V_0 R^3}{2r^3} \sin \theta + V_0 r \sin \theta \right) \vec{\theta}_0$$

$$\Rightarrow v_r = -V_0 \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right)$$

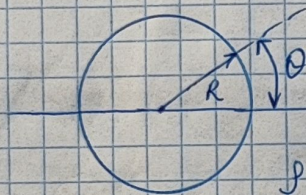
$$v_\theta = V_0 \sin \theta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right)$$

Д/З: ~~4/10~~

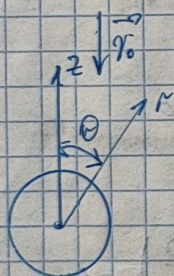
Домашняя работа.

н 4.10 ~~исполнено~~ 4.8:

$$\vec{v}_0, \rho_0 \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$



$$\Phi(r, \theta) = U(r) \cos \theta$$



$$\frac{1}{r^2} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\sin^3 \theta \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) - 2U = 0 \quad \text{--- упр-е Эйлера}$$

$$U(r) = r^k$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (k \cdot r^{k+2}) - 2r^k = 0$$

$$k(k+2) - 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1; k_2 = -2$$

$$U(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$$

г.у: условия непрерывности: $v_n|_S = 0 \Rightarrow v_r|_{r=R} = 0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$$

Условие на бесконечности: $\Phi|_{r \rightarrow \infty} = -V_0 r \cos \theta$

$$\Phi = \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$\Phi|_{r \rightarrow \infty} = Ar \cos \theta = -V_0 r \cos \theta \Rightarrow A = -V_0$$

$$\Phi = \left(-V_0 r + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \left(-V_0 - \frac{2B}{R^3} \right) \cos \theta = 0 \Rightarrow B = -\frac{V_0 R^3}{2}$$

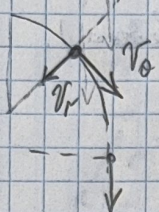
$$\Phi(r, \theta) = -\frac{V_0 R^3}{2r^2} \cos \theta - V_0 r \cos \theta$$

$$\Rightarrow v_r = -V_0 \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

$$v_\theta = V_0 \sin \theta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right)$$

уравнение Бернулли: $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w + gz = F(t)$; $w = \frac{p}{\rho}$

$$\frac{V_0^2}{2} + \frac{V_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = V_0^2 \sin^2 \theta + \frac{g}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{p}{\rho} \Rightarrow p = p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 \left(1 - \frac{g}{4} \sin^2 \theta\right)$$



Полная сила, действующая на сферу:

$$\vec{F} = \oint_S p \vec{n} dS = \oint_V \text{grad } p dV$$

$$\begin{aligned} \text{grad}(p) &= \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{g}{8} \rho V_0^2 \sin^2 \theta \right) \vec{e}_\theta = -\frac{g}{8} \rho V_0^2 \cdot 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \frac{1}{r} \vec{e}_\theta = \\ &= -\frac{g}{4} \rho V_0^2 \cdot \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R -\frac{g}{4} \rho V_0^2 \cdot \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= -\frac{g}{4} \rho V_0^2 \cdot 2\pi \int_0^\pi \int_0^R r \sin^2 \theta \cos \theta d\theta dr = 0$$

$$\Rightarrow F = 0$$

Условия для парадокса Даламбера - Дюпэра:

- 4.04.23. 1) Вязкость незначительна.
- 2) Вязкость пренебрежимо мала.
- 3) Поток невязкости - течение потенциальное.
- 4) Скорость постоянна!
- 5) Вязкость неограниченно мала.
- 6) Парadox пов-ть жидкости.

Что если ск-ть не постоянна?

$m \rightarrow V_0(t)$ — переменная ск-ть, и пусть есть $\vec{\sigma} = \text{const}$

Пусть $V_0 = 0$ при $t=0$. Расстояние: $S = \frac{V_0^2}{2a}$

Внешняя сила совершила работу: $A = F \cdot S = F \cdot \frac{V_0^2}{2a}$

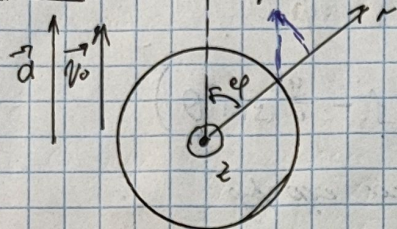
$$F \cdot \frac{V_0^2}{2a} = \frac{m V_0^2}{2} + \iiint_{V_{\text{жидк.}}} \frac{\rho^2}{2} dV$$

$$\Rightarrow F = ma + \frac{a}{v_0^2} \iiint_{V_{\text{вс}}} \rho v^2 dV$$

Если $\rho = \text{const}$: $F = ma + \frac{\rho}{v_0^2} \iiint_{V_{\text{вс}}} v^2 dV \rightarrow M - \text{присоединенная масса}$

$$F_{\text{соед.}} = Ma.$$

н.ч. 16. Цилиндр



Работа присоед. масс на ер. линии
 сф. цилиндра радиуса R. На-об р.

Тензор потенциально (подразумевается).

$$\Delta \Phi = 0$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

об z меньше не зависит

$$\Phi = U(r) \cos \varphi$$

г.у.: $V_{r \rightarrow \infty} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0$
 $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = v_0 \cos \varphi$

$$\frac{1}{r} \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} (r U') + \frac{1}{r^2} (-U \cos \varphi) \right] = 0$$

$$\frac{1}{r} [\cos \varphi \cdot (U' + r U'') - \frac{1}{r^2} U \cos \varphi] = 0$$

$$U'' + \frac{1}{r} U' - \frac{U}{r^2} = 0 \quad U \sim r^k$$

$$k(k-1)r^{k-2} + k r^{k-2} - r^{k-2} = 0$$

$$k(k-1) + k - 1 = 0 \Leftrightarrow k^2 - k + k - 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\Phi = A r \cos \varphi + \frac{B}{r} \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = A \cos \varphi - \frac{B}{r^2} \cos \varphi \quad ; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{B}{R^2} \cos \varphi = v_0 \cos \varphi \Rightarrow B = -v_0 R^2$$

$$\Phi = -\frac{v_0 R^2}{r} \cos \varphi$$

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = +\frac{v_0 R^2}{r^2} \cos \varphi$$

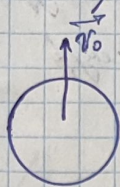
$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{v_0 R^2}{r^2} \sin \varphi$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \frac{v_0^2 R^4}{r^4}$$

$$M = \frac{\rho}{v_0^2} \iiint_{V_{\text{вс}}} \frac{v_0^2 R^4}{r^4} dV = \frac{\rho}{v_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty \frac{v_0^2 R^4}{r^3} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\rho \cdot 2\pi}{v_0^2} \cdot \frac{v_0^2 R^4}{(-2)} \left(\frac{1}{r^2} \right)_R^\infty$$

$$\Rightarrow dI = \rho \pi R^2$$

№ 4.14. Задача 4.7, решение:



$$v_r = \frac{v_0 R^2}{r^3} \cos \theta; \quad v_\theta = \frac{v_0 R^2}{2r^3} \sin \theta; \quad v_\varphi = 0$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \frac{v_0^2 R^6}{r^6} \cos^2 \theta + \frac{v_0^2 R^6}{4r^6} \sin^2 \theta$$

$$dI = \frac{\rho}{v_0^2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty \frac{v_0^2 R^6}{r^6} (\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta) \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \frac{\rho}{v_0^2} \frac{v_0^2 R^6}{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty r^{-4} (\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta) \sin \theta \, d\theta \, dr$$

$$\int_R^\infty r^{-4} \, dr = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{r^3} \Big|_R^\infty \right) = \frac{1}{3R^3}$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta + \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \cos^2 \theta \, d(\cos \theta) + \frac{1}{4} \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1) \, d(\cos \theta) =$$

$$= \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi + \frac{1}{4} \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \Big|_0^\pi \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} =$$

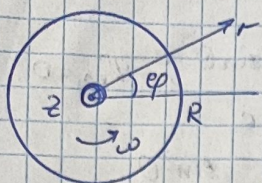
$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

$$\Rightarrow dI = \rho R^6 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3R^3} = \frac{2}{3} \rho \pi R^3$$

Р/з: 6/9, 6/10 (на экзамене) из лекций.

Ротационная задача.

№6.9.



Найти распределение сл-ти скорости $\vec{v}(r)$ в зависимости от расстояния от оси цилиндра.

Течение потенциально, и вне цилиндра
вращается как одно целое, т.е.

при $r > R$ $r < R$: $v_\varphi = r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega r$
 сов-но: $v_z = 0$ и $v_r = 0$

Течение потенциально вне цилиндра: ($r > R$)

$$\Delta \varphi = 0$$

В цилиндрической с.к.:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

если, что от z ничего не зависит $\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$

Граничные условия:

$$\begin{cases} v_r|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}|_{r=R} = 0 \\ v_\varphi|_{r=R} = r \frac{\partial \varphi}{\partial r}|_{r=R} = \omega R \\ v|_{r \rightarrow \infty} = \text{градиент} \varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}$$

Вращение жидкости (вращ.)

Каждому сл-ти скорости вращается и на фоновые скорости
 сл-ти скорости действует центробежная сила, должна появ.
 v_r и скорость разбегается. Но по условию скорость
 движется как одно целое $\Rightarrow v_r = 0$

тогда $\varphi = \varphi(\varphi)$ и чтоб удовлетворял φ -я урав. по
 тогда:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} \neq 0 \quad \text{и} \quad r \cdot r^2 \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = C_1 \Rightarrow \varphi = C_1 \varphi + C_2$$

Ищем $\vec{v} = \vec{v}(r)$

$$\text{градиент } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{1}{r} \cdot C_1 \vec{e}_\varphi \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty$$

$$\left(\frac{1}{r} \cdot C_1 \right) |_{r=R} = \frac{C_1}{R} = \omega R \Rightarrow C_1 = \omega R^2$$

при $r > R$: $\Rightarrow v_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \omega R^2 = \frac{\omega R^2}{r}$; $v_r = v_z = 0$

кв. 10.

Запишем при $r > R$ ур-е Бернулли:

$$\frac{v_\varphi^2(r)}{2} + \frac{p(r)}{\rho} = p_\infty; \quad \frac{\omega^2 R^4}{2r^2} + \frac{p(r)}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho}$$

$$\Rightarrow p(r) = p_\infty - \frac{\rho \omega^2 R^4}{2r^2}$$

Внутри цилиндра течение потенциально, нельзя пользоваться ур-ом Бернулли. Иск-ые ур-е Эйлера:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} \rightarrow \text{исход записано в деп. о.т. (деп-т по 1-й симметрии)}$$

движение стационарное: $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$

$$(\vec{v}, \nabla) \vec{v} = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \nabla) \vec{v} &= (v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) (v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z) = \\ &= v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{v_\varphi^2}{r} (-1) \vec{e}_r + \\ &+ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\varphi + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \vec{e}_\varphi + \frac{v_\varphi v_r}{r} \vec{e}_\varphi + \\ &+ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \vec{e}_z + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \vec{e}_z + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right)$$

Используя, что $p = p(r)$ и $v_r = 0$, $v_z = 0$, процируем по $\vec{e}_r$:

$$-\frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\partial p(r)}{\partial r} = \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{\rho \omega^2 r^2}{r}$$

$$\int_{p(r)} \frac{\partial p}{\partial r} = \int_r \rho \omega^2 r \cdot dr$$

$$p(r) - p(r) = \frac{\rho \omega^2 R^2}{2} - \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}$$

$$\text{при } r \geq R \text{ знаем: } p(R) = p_\infty - \frac{\rho \omega^2 R^2}{2}$$

$$p_\infty - \frac{\rho \omega^2 R^2}{2} - p(r) = \frac{\rho \omega^2 R^2}{2} - \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}$$

$$\Rightarrow p(r) = p_\infty - \frac{\rho \omega^2 R^2}{2} + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}, \quad r < R$$

11.04.23.

Плоское потенциальное течение несжимаемой жидкости. Функция тока. Комплексный потенциал.

1. Функция тока.
т.е. жидкость несжимаемая, то уравнение неразрывности:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Плоское течение - по дугам из осей некого ξ и η (или x и y не зависящих):

$$v_x = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

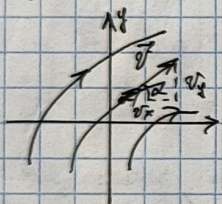
Тогда уравнение неразрывности примет вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Введем новую ф-но тока ψ , чтобы это уравнение выполнялось автоматически. Договоримся:

$$(*) \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{можно проверить})$$

Линии $\psi = \text{const}$ совпадают с линиями тока. (линии, в каждой из которых $\vec{v}$ направлена по касательной).



$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow v_x dy - v_y dx = 0$$

Подставим (*):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0 \Rightarrow d\psi = 0 \Rightarrow \psi = \text{const} \text{ на линии тока.}$$

2. Каким уравнением удовл. функция тока.

Для потенциального течения: $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ разделим на $\vec{e}_z$

Плоское течение:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \leftarrow \text{подставим } (*)$$

$$\Rightarrow \Delta \psi = 0$$

Этому же уравнению удовлетворяет потенциал φ - график

$$\Delta \varphi = 0$$

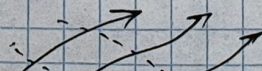
3. Связь между φ и ψ .

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (**)$$

$$\nabla \varphi \cdot \nabla \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \left\{ \text{подставим } (*) \text{ и } (**) \right\} = 0$$

$\Rightarrow$ линии $\varphi = \text{const}$ ортогональны $\psi = \text{const}$, линии тока.

Эквипотенциальные линии.



4. Сравним (*) и (**)

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (***)$$

и условие Коши-Риссана.

Это означает, что искомая ф-я:

$$F(z) = \varphi + i\psi \quad \text{где} \quad z = x + iy$$

является аналитической функцией, т.е. имеет производную по z :

$$\frac{dF}{dz} \neq 0$$

$F(z)$ - комплексный потенциал

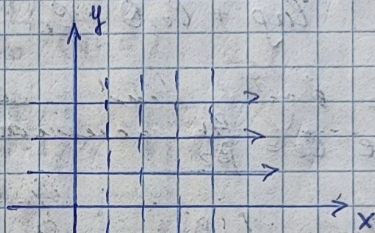
$$\frac{dF}{dz} = W \sim \text{комплексная ск-сть.}$$

№5.8.

$$F(z) = c_1 z = c_1 x + i c_1 y$$

$$\Rightarrow \varphi = c_1 x; \quad \psi = c_1 y$$

$$\Rightarrow v_x = c_1; \quad v_y = 0$$



№5.9.

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z = \left\{ z = \rho e^{i\varphi} \right\} = \frac{q}{2\pi} (\ln \rho + i\varphi)$$

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln \rho; \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \varphi$$

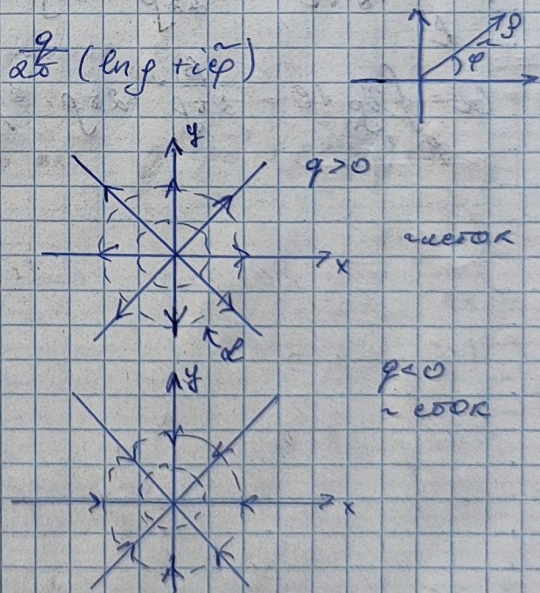
$$v_\rho = \frac{q}{2\pi \rho}; \quad v_\varphi = 0$$

$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{e}$ циркуляция.

$Q = \oint_L \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\ell \sim \text{расторг векторности.}$

т.к. ск-ть перпенд. $\Gamma = 0$

$$Q = \frac{q}{2\pi R} \cdot 2\pi R = q$$



№5.10.

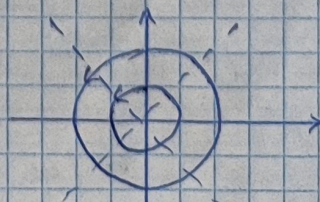
$$F(z) = \frac{i}{2\pi} \ln z = \frac{i}{2\pi} (\ln \rho + i\varphi) = \frac{i}{2\pi} - \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$\varphi = \frac{i}{2\pi}; \quad \psi = -\frac{\varphi}{2\pi}$$

$$v_\rho = 0; \quad v_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{i}{2\pi}$$

$$\Gamma = \oint \frac{1}{\rho} \frac{i}{2\pi} \cdot 2\pi \rho = i$$

$$Q = \oint v_\rho = 0$$



вс. 12.

$$F(z) = \frac{\beta}{2\pi} \ln z, \quad \text{где } \beta - \text{компл. число.}$$

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2$$

$$F(z) = \frac{\beta_1 + i\beta_2}{2\pi} \ln z = \frac{\beta_1 + i\beta_2}{2\pi} (\ln \rho + i\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} (\beta_1 \ln \rho + i\beta_1 \theta + i\beta_2 \ln \rho - \beta_2 \theta) =$$

$$= \frac{\beta_1 \ln \rho - \beta_2 \theta}{2\pi} + i \frac{\beta_1 \theta + \beta_2 \ln \rho}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\beta_1 \ln \rho - \beta_2 \theta}{2\pi}; \quad \psi = \frac{\beta_1 \theta + \beta_2 \ln \rho}{2\pi}$$

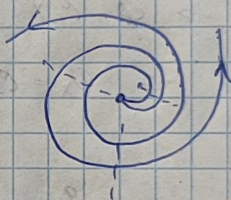
$$\psi_\rho = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \frac{\beta_2}{2\pi \rho}; \quad \psi_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(-\frac{\beta_1}{2\pi}\right) = -\frac{\beta_1}{2\pi \rho}$$

$$\psi = \text{const}: \beta_1 \theta + \beta_2 \ln \rho = C_1$$

$$\ln \rho + C_2 \theta = C_1 \rightarrow \ln \rho = \frac{C_1 - C_2 \theta}{C_2}$$

$$\rho = e^{\frac{C_1 - C_2 \theta}{C_2}}$$

$$\text{где } C_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

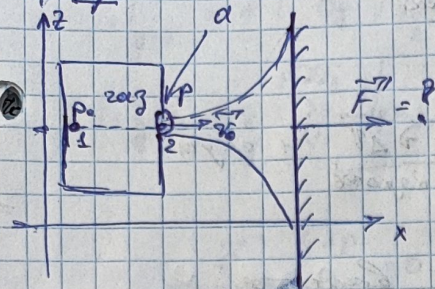


$$\Gamma = \oint_{\Gamma} \psi_\theta d\ell = -\frac{\beta_1}{2\pi \rho} \cdot 2\pi \rho = -\beta_1$$

$$Q = \oint_{\Gamma} \psi_\rho d\ell = \frac{\beta_2}{2\pi \rho} \cdot 2\pi \rho = \beta_2$$

25.04.23.

11. $\frac{1}{\rho}$



$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Упр-е Бернулли в 1-2:

$$\frac{v^2}{2} + w_0 = \frac{v_0^2}{2} + w$$

$$dw = \frac{dp}{\rho} \rightarrow w = \int \frac{dp_0 \cdot p^{\gamma-1} dp}{\rho_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot p} = \frac{dp_0}{\rho_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \cdot \frac{p^{\gamma-1}}{(\gamma-1)} =$$

$$= \frac{dp_0}{\rho_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \cdot \frac{p^{\gamma-1}}{(\gamma-1)}$$

$$\frac{p}{\rho_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot p_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rightarrow \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$w_0 = \frac{dp_0}{\rho_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \cdot \frac{p_0^{\gamma-1}}{(\gamma-1)} = \frac{dp_0}{\rho_0 \cdot (\gamma-1)}$$

$$w = \frac{dp_0}{\rho_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \cdot \frac{p^{\gamma-1}}{(\gamma-1)} = \frac{dp_0}{(\gamma-1) \rho_0} \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\frac{dp_0}{\rho_0 (\gamma-1)} = \frac{v^2}{2} + \frac{dp_0}{(\gamma-1) \rho_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$v_0^2 = 2(w_0 - w) \quad \text{получили } v_0^2$$

Закон сохранения энергии на ок: $\oint (\rho \vec{v} + \rho \vec{v}_0) d\vec{r}$

$$F' = -\rho a' \cdot \rho v_0^2$$

Решение задачи несжимаемой жидкости.
 среда. → среда. среда. → среда.

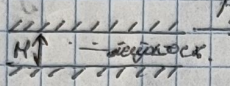
Уравнение Навье - Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} + \underbrace{\nabla \Delta \vec{v}}_{\text{вязкость}} + \text{гравит.}$$

2-х компонент. коэф-т вязкости.

$\eta = \frac{\mu}{\rho}$; η - динамический коэф-т вязкости.

Пусть.

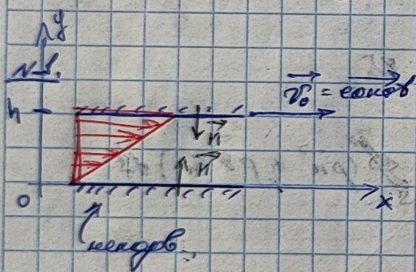
$\vec{F}$ - тап, чтобы среда была покоящейся.

 $F \sim \eta S \cdot \frac{1}{h}$

граничные условия применимы.

$\vec{v}|_s = \vec{v}_0$
 среда

Гипотеза вязких сил. - сила со стороны потока на границу (коэф. тангенциального):

$$f_i|_s = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_n} + \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) \Big|_s \quad n_i$$



внешн. воздействие и течение
 течение стационарно: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
 решаем урав. Навье - Стокса:

продольный градиент созд. внешн. силой

по ОХ: $0 + (\vec{v}, \nabla) v_x = - \frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \Delta v_x$

г.у.: $\begin{cases} v_x(y=0) = 0 \\ v_x(y=h) = v_0 \end{cases}$

$(\vec{v}, \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$ об x ничего не зависит.

$\Rightarrow \nabla \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = C_1$

$v_x(y) = C_1 y + C_2$

$v_x|_{y=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$v_x|_{y=h} = C_1 h = v_0 \Rightarrow C_1 = \frac{v_0}{h}$

$\Rightarrow v_x(y) = \frac{v_0 y}{h}$

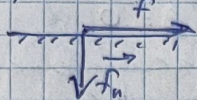
прошло е-го

Ищем м-ов. в заданной сист.

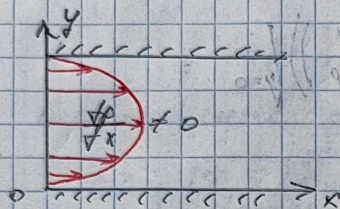
$$f_x|_{y=0} = 2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = 2 \cdot \frac{v_0}{h}$$

$$f_x|_{y=h} = 2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \right) \Big|_{y=h} = -2 \frac{v_0}{h} \leftarrow \text{учет нормальн.}$$

и тем самым кривая,

$$\vec{F} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \rightarrow p = \text{const.}$$


Температура T зависит от координат x, y и времени t . Задача сводится к решению уравнения Лапласа.



Средняя скорость по длине.

$$\vec{v}|_{y=h} = 0; \quad \vec{v}|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta \vec{v}$$

$$v_x(y)$$

Уз: н.б.б.; н.б.б.

Дифференциальная работа

н.б.б. $\vec{v}$

$$\vec{v}(H) = \vec{v}_0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = B = \text{const}$$

$$\vec{v}(0) = 0$$

Ур-е Навье - Стокса: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

$$(\vec{v}, \nabla) \vec{v} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta \vec{v}$$

$$\text{ок: } (\vec{v}, \nabla) v_x = - \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta v_x$$

$$(\vec{v}, \nabla) v_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ок} \\ \text{н.б.б.} \end{array} \right\} = 0$$

$$v_x \Rightarrow - \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta v_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

Условия приращения: $v_x(y=0) = 0$; $v_x(y=H) = v_0$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1; \quad v_x(y) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

$$v_x(0) = C_2 = 0$$

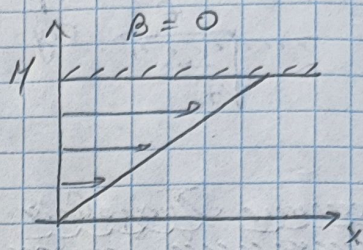
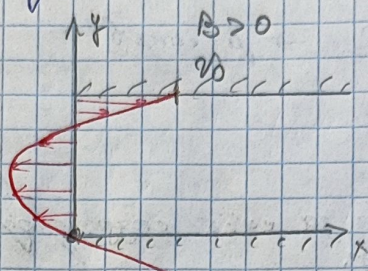
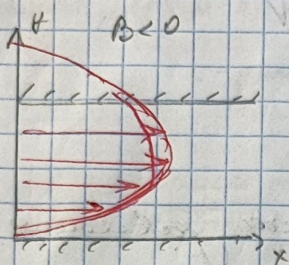
$$v_x(H) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{H^2}{2} + C_1 H = v_0 \Rightarrow C_1 = \frac{v_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{H^2}{2}}{H} = \frac{v_0}{H} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{H}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi_x(y) = \frac{By^2}{2\eta} + \left(\frac{v_0}{H} - \frac{BH}{2\eta}\right)y = \frac{B}{2\eta}y(y-H) + \frac{v_0}{H}y$$

$$\varphi_x = 0? \quad y=0 \quad \text{и} \quad \frac{By}{2\eta} + \frac{v_0}{H} - \frac{BH}{2\eta} = 0$$

$$\frac{By}{2\eta} = \frac{BH}{2\eta} - \frac{v_0}{H}$$

$$y = H - \frac{2\eta v_0}{BH}$$



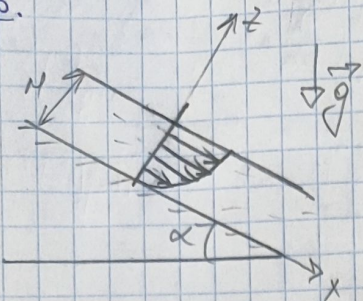
Анализ граничных:

$$f_x|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \eta \cdot \left(\frac{By}{\eta} + \left(\frac{v_0}{H} - \frac{BH}{2\eta} \right) \right) \Big|_{y=0} =$$

$$= \eta \cdot \left(\frac{v_0}{H} - \frac{BH}{2\eta} \right)$$

$$f_x|_{y=H} = -\eta \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \Big|_{y=H} = -\eta \left(\frac{BH}{\eta} + \frac{v_0}{H} - \frac{BH}{2\eta} \right) = -\eta \left(\frac{v_0}{H} + \frac{BH}{2\eta} \right)$$

н.д.13.



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} + \nabla \Delta \vec{v}$$

Угловое распределение давления по oz (гидростатика)

$$-\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} = 0$$

$$+\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = g_z$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \cos \alpha$$

$$\int_0^H \frac{\partial p}{\partial z} dz = \int_0^H -\rho g \cos \alpha dz$$

$$p(H) - p(z) = -\rho g \cos \alpha (H - z) \Rightarrow \underline{p(z) = p_0 + \rho g \cos \alpha (H - z)}$$

На свободной пов-ти $z=H$ должно выполняться д.у.

$$p = p_0; \quad \vec{v} = \eta \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0$$

Распределение эк-ту должно зависеть от z : $v_x(z)$

$$\Rightarrow (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = 0$$

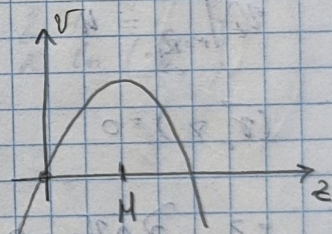
$$\text{О.У.: } \eta \cdot \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} + g \sin \alpha = 0$$

$$\frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} = -\frac{g \sin \alpha}{\eta} \Rightarrow v_x(z) = -\frac{g \sin \alpha}{2\eta} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

$$\text{Г.У.: } v_x(z) \Big|_{z=0} = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \rightarrow C_1 = \frac{g \sin \alpha}{\eta} H$$

$$\Rightarrow \underline{v_x(z) = \frac{g \sin \alpha}{2\eta} z \left(H - \frac{z}{2} \right)}$$



Получим поток через поперечное сечение

$$Q = \int_0^H dy \int_0^H v_x(z) dz = \int_0^H \left(\frac{g \sin \alpha H}{2\eta} z - \frac{g \sin \alpha}{2\eta} \cdot \frac{z^2}{2} \right) dz$$

$$= \frac{g \sin \alpha H}{2\eta} \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{g \sin \alpha}{6\eta} \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_0^H = \frac{g \sin \alpha H^3}{3\eta}$$

Р/з: 8.5; 8.14 (к.р.) | Вывести ур-е Навье-Стокс в цилиндрич. с.к.
8.6; 8.9 | поск. / паралл. ; 8.8; 8.5; 8.16

02.05.23г. м.м.н.р.

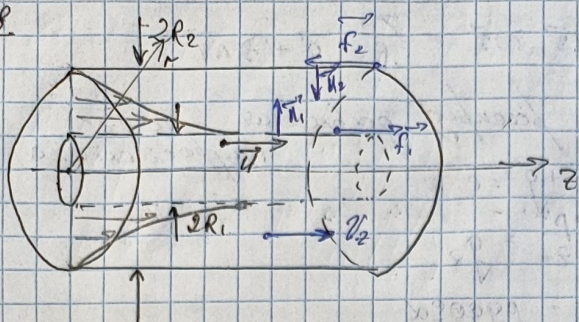
На свободной пов-ти: давление равно:

$$|f_i| = \eta \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right| \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \Big|_{\text{свобод}} = 0$$

$$\vec{v} \Big|_s = 0$$

Угловое распределение эк-ту

н.8.



зп. в. Кавказ - Ермаков:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z$$

$$(\vec{v}, \nabla) = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Решение уравнения попер. зп. есть одно простое.
Уравнение решается:

$$v_z|_{r=R_1} = U; \quad v_z|_{r=R_2} = 0$$

$$(\vec{v}, \nabla) = 0 \quad \text{— нето не}$$

$$\Rightarrow \Delta v_z = 0 \Rightarrow \Delta v_z = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) v_z = 0 \quad / \cdot r \neq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{\partial v_z}{\partial r} = C_1$$

$$dv_z = \frac{C_1 dr}{r} \Rightarrow v_z = C_1 \ln r + C_2$$

Усл-ия зп.

$$v_z|_{r=R_2} = C_1 \ln R_2 + C_2 = 0$$

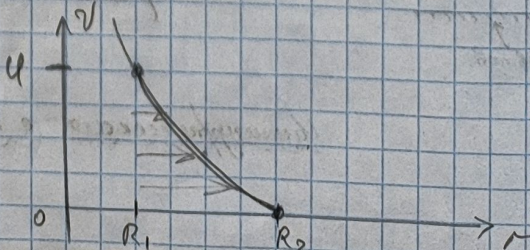
$$C_1 \ln R_1 + C_2 = U$$

$$-\frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \ln R_2 + C_2 = 0$$

$$C_2 = \frac{U \ln R_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$C_1 \ln \frac{R_2}{R_1} = -U \Rightarrow C_1 = -\frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$v_z = -\frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln r + \frac{U \ln R_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{U \ln r}{\ln \frac{R_1}{R_2}} - \frac{U \ln R_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{U \ln \left(\frac{r}{R_2} \right)}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)}$$



$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r \cdot u \cdot \frac{\ln \frac{r}{R_2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}} dr = \frac{2\pi u}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \int_{R_1}^{R_2} r \ln \frac{r}{R_2} dr =$$

$$u = \ln \frac{r}{R_2} \rightarrow du = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{R_2} dr$$

$$dr = r R_2 du \rightarrow r = \frac{R_2}{u}$$

$$= \frac{2\pi u}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \left(\frac{r^2}{2} \ln \frac{r}{R_2} \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{r} dr \right) = \frac{2\pi u}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \left(-\frac{R_1^2}{2} \ln \frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_{R_1}^{R_2} \right) =$$

$$= \frac{2\pi u}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \left(R_1^2 \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2} \right) \quad (?)$$

Решение задачи:

$$f_{\text{возм}} \Big|_{r=R_{1,2}} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R_{1,2}} \rightarrow \eta_{1,2} r$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{4}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{4}{r \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)}$$

$$f_{\text{возм}} \Big|_{r=R_1} = \frac{2u}{R_1 \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} ; f_{\text{возм}} \Big|_{r=R_2} = -\frac{2u}{R_2 \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)}$$

18.9. $\frac{dp}{dz} = B = \text{const}$

предположим, что $B = \text{const}$ 8.8.

г.д: $v_z \Big|_{r=R_2} = 0 ; v_z \Big|_{r=R_1} = 0$

Решение задачи по методу Лагранжа - Коши:

$$-\frac{B}{\rho} + \eta \Delta v_z = 0 \Rightarrow \Delta v_z = \frac{B}{2\eta} = \frac{B}{2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{B}{2\eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{B r}{2\eta}$$

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{B r^2}{4\eta} + C_1$$

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{B r}{4\eta} + \frac{C_1}{r} \Rightarrow v_z = \frac{B r^2}{8\eta} + C_1 \ln r + C_2$$

$$v_z \Big|_{r=R_1} = \frac{B R_1^2}{8\eta} + C_1 \ln R_1 + C_2 = 0$$

$$v_z \Big|_{r=R_2} = \frac{B R_2^2}{8\eta} + C_1 \ln R_2 + C_2 = 0$$

$$\frac{BR_1^2}{4\eta} + C_1 \ln R_1 - \frac{BR_2^2}{4\eta} - C_1 \ln R_2 = 0$$

$$\frac{B(R_1^2 - R_2^2)}{4\eta} + C_1 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = 0$$

$$C_1 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{B(R_1^2 - R_2^2)}{4\eta}$$

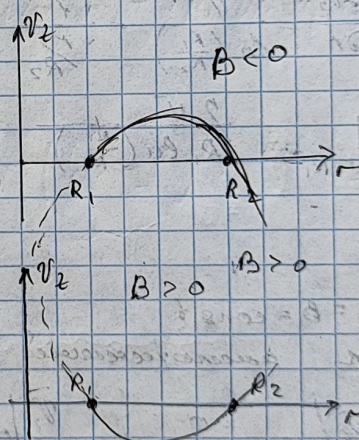
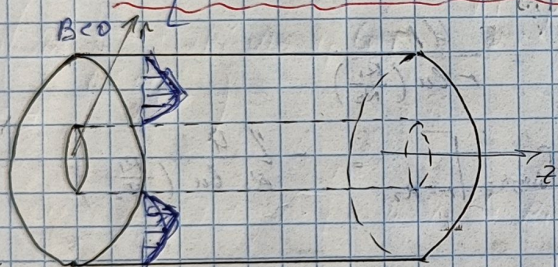
$$\frac{BR_1^2}{4\eta} + \frac{B(R_1^2 - R_2^2)}{4\eta \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln R_1 + C_2 = 0$$

$$C_2 = -\frac{BR_1^2}{4\eta} - \frac{B(R_1^2 - R_2^2)}{4\eta \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln R_1$$

$$\underline{v_2} = \frac{BR_1^2}{4\eta} + \frac{B(R_1^2 - R_2^2)}{4\eta \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln r - \frac{BR_1^2}{4\eta} - \frac{B(R_1^2 - R_2^2)}{4\eta \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln R_1 =$$

$$= \frac{BR_1^2}{4\eta} + \frac{B(R_1^2 - R_2^2) \ln R_1}{4\eta \ln \alpha} - \frac{BR_1^2}{4\eta} =$$

$$= -\frac{BR_1^2}{4\eta} \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2} + \frac{(\alpha^2 - 1) \ln \frac{r}{R_1}}{\ln \alpha} \right)$$



Работу деформации Q

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} v_2(r) \cdot r \cdot dr = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left(-\frac{BR_1^2}{4\eta} \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2} + \frac{(\alpha^2 - 1) \ln \frac{r}{R_1}}{\ln \alpha} \right) \right) r \cdot dr =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{BR_1^2}{4\eta} \right) \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R_1^2} + \frac{(\alpha^2 - 1)}{4 \ln \alpha} (2r^2 \ln \frac{r}{R_1} - r^2) \right] \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$= -\frac{\pi BR_1^2}{2\eta} \left[\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_2^4}{4} + \frac{(\alpha^2 - 1)}{4 \ln \alpha} (2R_2^2 \ln \alpha - R_2^2) \right] - \left[\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_1^4}{4} + \frac{(\alpha^2 - 1)}{4 \ln \alpha} R_1^2 \right] =$$

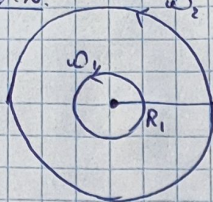
$$= -\frac{\pi BR_1^4}{8\eta} \left[2\alpha^2 - \alpha^4 + \frac{\alpha^2(\alpha^2 - 1)(2 \ln \alpha - 1)}{\ln \alpha} - 1 + \frac{(\alpha^2 - 1)}{\ln \alpha} \right] =$$

$$= -\frac{\pi BR_1^4}{8\eta} (\alpha^2 - 1) \left[1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^2(2 \ln \alpha - 1) + 1}{\ln \alpha} \right] =$$

$$= -\frac{\pi BR_1^4}{8\eta} (\alpha^2 - 1) \left(1 + \alpha^2 - \frac{(\alpha^2 - 1)}{\ln \alpha} \right)$$

(?)

н.с. 16°



Ур. и Ковес - Сократ в гар. в.к:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) v_r - \frac{v_\phi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) v_\phi + \frac{v_r v_\phi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \gamma \left(\Delta v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \Delta v_z \end{aligned}$$

где $(\vec{v}, \nabla) = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$
 $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

1.3 на течение на концах цилиндров.

$$v_\phi / r = \omega_1 \quad ; \quad v_\phi / r = \omega_2$$

Решаем, что течение стационарно: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$
 Все должно быть симметрично: $\frac{\partial}{\partial \phi} \rightarrow 0$ и $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow 0$ и $\frac{\partial}{\partial \phi} \rightarrow 0$

$$-\frac{v_\phi}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma \left(-\frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (1)$$

$$(\vec{v}, \nabla) v_\phi = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \gamma \left(\Delta v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) = \frac{v_\phi}{r^2} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) - \frac{v_\phi}{r} = 0$$

$$v_\phi = r^\kappa$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^\kappa) - r^{\kappa-1} = \kappa^2 r^{\kappa-1} - r^{\kappa-1} = 0 \rightarrow \kappa^2 = 1$$

$$\kappa = \pm 1$$

$$v_\phi = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

$$\left. \begin{aligned} v_\phi / r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} &= \omega_1 \quad \rightarrow C_1 r = \omega_1 r - \frac{C_2}{r} \rightarrow C_1 = \omega_1 - \frac{C_2}{r^2} \\ v_\phi / r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} &= \omega_2 \end{aligned} \right\}$$

$$R_2 \left(\omega_1 - \frac{C_2}{R_1^2} \right) + \frac{C_2}{R_2} = \omega_2 R_2$$

$$R_2 \omega_1 - \frac{R_2}{R_1^2} C_2 + \frac{C_2}{R_2} = \omega_2 R_2$$

$$C_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1^2} \right) = \omega_2 R_2 - R_2 \omega_1$$

$$C_2 \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 R_2} = \omega_2 R_2 - R_2 \omega_1 \rightarrow C_2 = \frac{(\omega_2 - \omega_1) R_1^2 R_2^2}{(R_1^2 - R_2^2)}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_1^2 - R_2^2}$$

$$C_1 = \omega_1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_1^2 (R_2^2 - R_1^2)} = \frac{\omega_1 R_2^2 - \omega_1 R_1^2 - \omega_1 R_2^2 + \omega_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$\Rightarrow v_\phi = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r}$$

Для нахождения уравнения изотермы (1):

$$-\frac{V_p^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{V_p}{r} = \int \frac{V_p^2}{r^2} \Rightarrow p(r) - p(R_1) = \int_{R_1}^r \frac{V_p^2(r)}{r} dr$$

Возьмем:

$$\omega_0 = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$\omega_p = \frac{R_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$\Rightarrow V_p(r) = \omega_0 r + R_1^2 \omega_p \cdot \frac{1}{r}$$

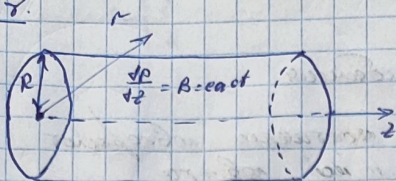
$$V_p^2 = \omega_0^2 r^2 + 2 R_1^2 \omega_0 \omega_p + \frac{R_1^4 \omega_p^2}{r^2}$$

$$\int_{R_1}^r \left(\omega_0^2 r + \frac{2 R_1^2 \omega_0 \omega_p}{r} + \frac{R_1^4 \omega_p^2}{r^3} \right) dr = \left[\omega_0^2 \frac{r^2}{2} + 2 R_1^2 \omega_0 \omega_p \ln r - \frac{R_1^4 \omega_p^2}{2 r^2} \right]_{R_1}^r \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \left(\omega_0^2 \frac{r^2}{2} + 2 R_1^2 \omega_0 \omega_p \ln r - \frac{R_1^4 \omega_p^2}{2 r^2} - \omega_0^2 \frac{R_1^2}{2} - 2 R_1^2 \omega_0 \omega_p \ln R_1 + \frac{R_1^4 \omega_p^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow p(r) = p(R_1) + \rho R_1^2 \left[2 \omega_0 \omega_p \ln \frac{r}{R_1} + \frac{\omega_0^2}{2} \left(\frac{r^2}{R_1^2} - 1 \right) + \frac{\omega_p^2}{2} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \right]$$

н.д. 8.



От ур-ий Лапласа:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \Delta \varphi_z = 0$$

$$\Delta \varphi_z = \frac{B}{\eta}$$

г.у: $\varphi_z|_{r=R} = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} \right) = \frac{B}{\eta} \Rightarrow r \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} = \frac{B r^2}{2\eta} + C_1$$

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial r} = \frac{B r}{2\eta} + \frac{C_1}{r} \Rightarrow \varphi_z(r) = \frac{B r^2}{4\eta} + C_2$$

не должно быть осевых токов

$$\varphi_z(r=R) = \frac{B R^2}{4\eta} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{B R^2}{4\eta}$$

$$\Rightarrow \varphi_z(r) = -\frac{B R^2}{4\eta} + \frac{B r^2}{4\eta} = -\frac{B}{4\eta} (R^2 - r^2)$$

Плотность возмущ. силы:

$$|f_i| = \eta \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \right|$$

$$f_{\theta z} = -\eta \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial r} \right)_{r=R} = -\eta \frac{B r}{2\eta} \Big|_R = -\frac{B R}{2}$$

Средняя по сеч. - токи:

$$\varphi_{\text{ср}} = \frac{\int_0^R \varphi_z(r) 2\pi r dr}{\int_0^R 2\pi r dr} = \frac{\frac{B}{4\eta} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right)}{\frac{R^2}{2}} = -\frac{B R^2}{8\eta}$$

Поток:

$$Q = 2\pi \int_0^R \varphi_z(r) \cdot r dr = 2\pi \cdot \left(-\frac{B}{4\eta} \right) \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = -\frac{\pi B}{2\eta} \cdot \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{8\eta} \left| \frac{dp}{dz} \right| R^4$$

коэф-т сопротивления: формула из лекций:

$$R_{\text{ср}} = \frac{\Delta \varphi}{Q}$$

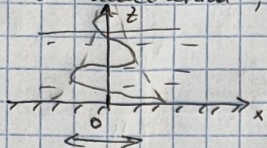
$$\Rightarrow \varphi_0 = \varphi_{\text{ср}} = -\frac{B R^2}{8\eta}$$

$$C_0 = \frac{\Delta \varphi}{\rho \varphi^2}$$

18.05.2021.

Возврат волны.

Рассмотрим, которая совершается сдвигами

Уз Г.У. функция, которая повторяется
каждые $2l$ по z и 2π по t .

$$v_x|_{z=0} = v_0 e^{-i\omega t}; \quad v_z|_{z=0} = v_z|_{z=l} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (\nabla, \nabla) \vec{v} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \Delta \vec{v}$$

Д.п. условие нежесткости: $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z = \text{const} = 0$ Д.о. будет только компонента $v_x(z)$.

Сделаем только:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

Вар $v_x = u(z) e^{-i\omega t}$

$$-i\omega u(z) e^{-i\omega t} = \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} + \left(\frac{i\omega}{\gamma} \right) u = 0 \quad \text{уравнение Гельмгольца}$$

$$k = \pm \sqrt{\frac{i\omega}{\gamma}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}} \cdot \sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} (1+i)$$

$$\Rightarrow u(z) = A e^{ikz}$$

А находится из Г.У.

$$z=0 \Rightarrow A = v_0 \Rightarrow v_x(z) = v_0 e^{ikz} e^{-i\omega t}$$

Удобно u не было по z бесконечности: берем k с "+"

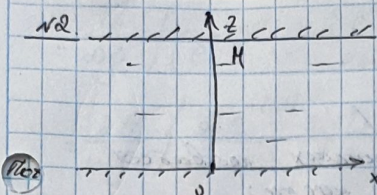
$$\Rightarrow v_x(z) = v_0 e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} z} e^{-i\omega t}$$

Максимум скорости:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{2\gamma}{\omega}} \quad \text{— длина волны}$$

Самое большое ускорение:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{z=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(v_0 e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} z} \right) \right|_{z=0} = \gamma \cdot v_0 (i\sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} - \sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}}) e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} z} e^{-i\omega t} \Big|_{z=0} \\ &= \gamma v_0 \sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} (i-1) e^{-i\omega t} \\ &= \gamma v_0 \sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$



$$V_x|_{z=0} = V_0 e^{-i\omega t}; \quad V_y|_{z=0} = V_z|_{z=0} = 0$$

$$V_x|_{z=H} = 0$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}$$

Assume $V_x = U(z) e^{-i\omega t}$

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} + \frac{i\omega}{\gamma} U = 0$$

D. e. searbo $V_x(z) = A_1 e^{i\sqrt{\frac{\omega}{\alpha\gamma}} z} + A_2 e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{\alpha\gamma}} z} e^{-i\omega t}$

$$V_x|_{z=0} \Rightarrow A_1 + A_2 = V_0$$

$$V_x|_{z=H} \Rightarrow A_1 e^{i\sqrt{\frac{\omega}{\alpha\gamma}} H} + A_2 e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{\alpha\gamma}} H} = 0$$

$$A_1 = -A_2 e^{-2i\sqrt{\frac{\omega}{\alpha\gamma}} H}$$

$$A_2 (1 - e^{-2i\sqrt{\frac{\omega}{\alpha\gamma}} H}) = V_0$$

$$U(z) = A_1 e^{i\kappa z} + A_2 e^{-i\kappa z}$$

$$V_0|_{z=0} \Rightarrow A_1 + A_2 = V_0$$

$$V_x|_{z=H} \Rightarrow A_1 e^{i\kappa H} + A_2 e^{-i\kappa H} = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2 e^{-2i\kappa H}$$

$$A_2 (1 - e^{-2i\kappa H}) = V_0$$

$$A_2 e^{-i\kappa H} (e^{i\kappa H} - e^{-i\kappa H}) = V_0 \Rightarrow A_2 = \frac{V_0}{2i \sin(\kappa H)} e^{i\kappa H}$$

$$A_1 = \frac{V_0}{2i \sin(\kappa H)} e^{-i\kappa H}$$

$$U(z) = \frac{V_0}{2i \sin \kappa H} e^{-i\kappa(H-z)} + \frac{V_0}{2i \sin \kappa H} e^{i\kappa(H-z)} = \frac{V_0}{\sin \kappa H} \cdot \sin(\kappa(H-z))$$

$$\Rightarrow V_x(z) = V_0 \frac{\sin[\kappa(H-z)]}{\sin[\kappa H]} e^{-i\omega t}$$

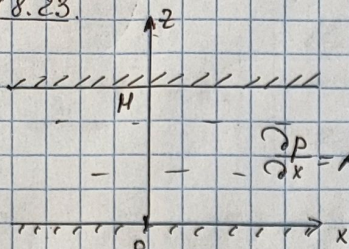
zpe $\kappa = \sqrt{\frac{\omega}{\alpha\gamma}} (1+i)$

$$f_{\text{avg}}|_{z=H} = -\gamma \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=H} = -\gamma V_0 \frac{\kappa \cos[\kappa(H-z)]}{\sin[\kappa H]} \Big|_{z=H}$$

$$= +\gamma \frac{V_0}{\sin[\kappa H]} \cdot \kappa \cos[\kappa(H-z)] \Big|_{z=H} = \frac{\gamma V_0 \kappa}{\sin[\kappa H]} = \frac{\gamma V_0 \sqrt{\frac{\omega}{\alpha\gamma}} (1+i)}{\sin[\sqrt{\frac{\omega}{\alpha\gamma}} (1+i) H]} \quad (?)$$

Р/8: 8.23

№ 8.23.



В отличие от предыдущих, рассматривается
основное в фазовом пространстве:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = A e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial v_x(z)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - \frac{A}{\rho} e^{-i\omega t}$$

$$v_x(z) = u(z) e^{-i\omega t}$$

$$-i\omega u(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{A}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u(z) = \frac{A}{\rho}, \text{ где } k = \sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}} (1+i)$$

г.г: $v_x|_{z=0} = 0$; $v_x|_{z=L} = 0$

Ищем общее однородное решение:

$$u(z) = A_1 e^{-ikz} + A_2 e^{-ikz}$$

Частное неоднородное:

$$u_{\text{ch.}}(z) = C \Rightarrow k^2 C = \frac{A}{\rho} \Rightarrow C = \frac{A}{k^2 \rho} = \frac{A \gamma}{i\omega \rho} = \frac{iA}{\omega \rho}$$

$$k^2 = \frac{i\omega}{2\gamma} \Rightarrow C = -\frac{iA}{\omega \rho}$$

$$u(z) = A_1 e^{-ikz} + A_2 e^{-ikz} - \frac{iA}{\omega \rho}$$

$$v_x|_{z=0} : A_1 + A_2 = \frac{iA}{\omega \rho}$$

$$v_x|_{z=L} : A_1 e^{-ikL} + A_2 e^{-ikL} = \frac{iA}{\omega \rho} \Rightarrow A_1 = \left(-A_2 e^{-ikL} + \frac{iA}{\omega \rho} \right) e^{ikL}$$

$$A_1 = \frac{iA}{\omega \rho} e^{ikL} - A_2 e^{-2ikL}$$

$$\frac{iA}{\omega \rho} e^{-ikL} + A_2 e^{-ikL} (e^{ikL} - e^{-2ikL}) = \frac{iA}{\omega \rho}$$

$$e^{-ikL} 2iA_2 \sin[kL] = \frac{iA}{\omega \rho} - \frac{iA}{\omega \rho} e^{-ikL}$$

$$2iA_2 \sin[kL] = \frac{iA}{\omega \rho} (e^{ikL} - 1) \Rightarrow A_2 = \frac{A}{2\omega \rho \sin[kL]} (e^{ikL} - 1)$$

$$A_1 = \frac{iA}{\omega \rho} e^{-ikL} + (1 - e^{-2ikL}) \frac{A}{2\omega \rho \sin[kL]} =$$

$$= \frac{iA}{\omega \rho} e^{-ikL} + \frac{A e^{-2ikL}}{2\omega \rho \sin[kL]} - \frac{A e^{-ikL}}{2\omega \rho \sin[kL]}$$

$$u = \left(\frac{iA}{\omega \rho} e^{-ikL} + \frac{A e^{-2ikL}}{2\omega \rho \sin[kL]} - \frac{A e^{-ikL}}{2\omega \rho \sin[kL]} \right) e^{ikz} + \left(\frac{A}{2\omega \rho \sin[kL]} e^{ikL} - \frac{A}{2\omega \rho \sin[kL]} \right) e^{-ikz} - \frac{iA}{\omega \rho}$$

$$= \frac{iA}{\omega \rho} \left(e^{-ikL} - \frac{e^{-2ikL}}{2 \sin[kL]} + \frac{e^{-ikL}}{2 \sin[kL]} \right) e^{ikz} + \left(\frac{e^{ikL}}{2 \sin[kL]} - \frac{e^{-ikL}}{2 \sin[kL]} \right) e^{-ikz} - \frac{iA}{\omega \rho}$$

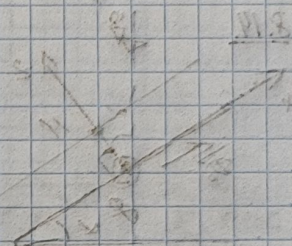
$$= \frac{iA}{\omega \rho} \left(e^{-ikL} - \frac{e^{-2ikL}}{2 \sin[kL]} + \frac{e^{-ikL}}{2 \sin[kL]} \right) e^{ikz} + \left(\frac{e^{ikL}}{2 \sin[kL]} - \frac{e^{-ikL}}{2 \sin[kL]} \right) e^{-ikz} - \frac{iA}{\omega \rho}$$

$$= \frac{iA}{\omega \rho} \left(e^{-ikL} - \frac{e^{-2ikL}}{2 \sin[kL]} + \frac{e^{-ikL}}{2 \sin[kL]} \right) e^{ikz} + \left(\frac{e^{ikL}}{2 \sin[kL]} - \frac{e^{-ikL}}{2 \sin[kL]} \right) e^{-ikz} - \frac{iA}{\omega \rho}$$

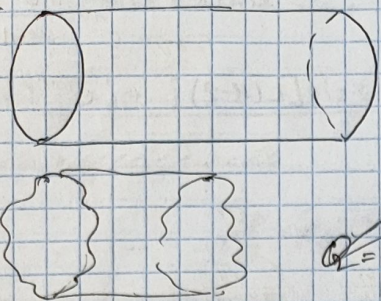
$$= \frac{iA}{\omega p} \left\{ \left(e^{-ikM} - \frac{i e^{-2ikM}}{2 \sin[kM]} \right) e^{ikz} - \frac{i}{2 \sin[kM]} \cdot 2i \sin(k(M-2)) + \frac{i e^{-ikz}}{2 \sin[kM]} \right\}$$

$$= \frac{iA}{\omega p} \left\{ 2 e^{-ikM} \sin[kM] \cdot e^{ikz} - i e^{ikz} e^{-2ikM} + 2 \sin[k(M-2)] + i e^{-ikz} \right\}$$

$$= \frac{iA}{\omega p} \left\{ \dots \right\}$$



пр. 12.

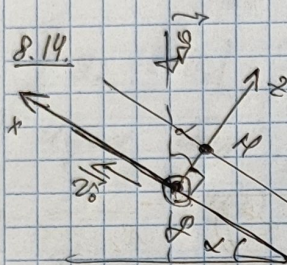


$$-\frac{dp}{dz} = b = \text{const}$$

Скорость течения жидкости, посчитать Q для заданного расхода Q и мале по сеч. попер. $Q = \pi r^2$.

$$Q = \int_{\text{сеч.}} v \, dA = \int_{\text{сеч.}} v \, dA$$

$$Q = \left[\frac{L}{2} \cdot v \cdot L^2 \right] = [L^3]$$



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \vec{\Delta} \vec{v}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

$$v_x(z) = \text{сеч. попер.}$$

$$\text{ор: } -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + g_z = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = g_z = -g \cos \alpha \Rightarrow p(z) - p(H) = \int_H^z -\rho g \cos \alpha \, dz =$$

$$= +\rho g \cos \alpha \cdot (H - z)$$

$$p(z) = p_0 + \rho g \cos \alpha (H - z)$$

$$\text{FV: } v_x(0) = v_0$$

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \quad \text{н вязкие силы} = 0$$

$$\text{ор: } 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} = \frac{g \sin \alpha}{\nu} \Rightarrow \frac{\partial v_x(z)}{\partial z} = \frac{g \sin \alpha}{\nu} z$$

$$\frac{\partial v_x(z)}{\partial z} = \frac{g \sin \alpha}{\nu} \cdot z + C_1 \Rightarrow v_x(z) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} z^2 + C_1 z + C_2$$

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial z} = \left(\frac{g \sin \alpha}{\nu} \cdot z + C_1 \right) \right|_{z=H} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{g \sin \alpha}{\nu} H$$

$$v_x(0) = v_0 = C_2$$

$$\Rightarrow \left\{ v_x(z) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} z^2 - \frac{g \sin \alpha}{\nu} H \cdot z + v_0 \right\}$$

$$v_x(z) = \frac{g \sin \alpha}{\nu} \cdot z \left(\frac{z}{2} - H \right) + v_0$$

$$Q = \int_0^l dy \int_0^H \rho x(z) dz = \rho \sin \alpha \cdot \frac{z^3}{6} - \rho \sin \alpha \cdot H \cdot \frac{z^2}{2} + \rho_0 \cdot z \Big|_0^H$$

$$= \rho \sin \alpha \left(\frac{H^3}{6} - \frac{H^3}{2} \right) + \rho_0 H = -\rho \sin \alpha \frac{H^3}{3} + \rho_0 H$$

Therefore: $\rho_0 H = \rho \sin \alpha \frac{H^3}{3} \rightarrow \rho_0 = \rho \frac{H^2 \sin \alpha}{3}$