Вопросы

Как определяется тип системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка?

Как привести гиперболическую систему полулинейных уравнений в частных производных первого порядка к виду в инвариантах Римана?

Дайте определение характеристики.

Чем отличается гиперболическая система уравнений в частных производных первого порядка от строго гиперболической системы?

Каким условиям должна удовлетворять кривая, чтобы на ней можно было задать начальные данные для системы или уравнения гиперболического типа?

Как определяется, какое число условий у гиперболической системы должно быть поставлено на границе?

Докажите эллиптичность системы Коши–Римана.

Как определяется тип уравнения в частных производных второго порядка от двух переменных? Дать определения уравнения гиперболического типа, уравнения эллиптического типа, уравнения параболического типа. Канонические формы уравнений с частными производными второго порядка. Как осуществляется приведение к каноническому виду уравнения в частных производных второго порядка от двух переменных, если дискриминант положителен (отрицателен, равен нулю)?

Есть ли вещественные характеристики у уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, а если есть, то какие?

Дать вывод формулы Даламбера для однородного волнового уравнения.

Упростить уравнение с постоянными коэффициентами

$$u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$$

Какие граничные условия должны выполняться в математической постановке задачи о поперечных колебаниях струны, закрепленной концах?

По струне ударяют молоточком. Запишите возникающее начальное условие в соответствующей математической постановке задачи.

Что входит в понятие корректной задачи по Адамару?

Для каких уравнений задача Коши является некорректной по Адамару?

Какого типа система

$$\begin{aligned} &u_t + f(x,t)v_x = 0 \\ &u_x + f(x,t)v_t = 0 \end{aligned} \; ?$$

Найдите у этой системы характеристики и уравнения на характеристиках (уравнения переноса).

Найдите собственные функции и собственные значения задачи Шгурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y(2) = 0$$

Уравнение Хопфа. Пересечение характеристик. Градиентная катастрофа (Условие на разрыве не нужно).

Дайте определение гильбертова пространства.

Дайте определение линейного оператора. Основное свойство линейных операторов.

Дайте определение симметрического оператора, самосопряженного оператора.

Собственное значение оператора. Дать определение.

Какая система функций называется ортогональной?

Являются ли функции $f(x)=\sin\pi x$ и $g(x)=\cos 3\pi x$ ортогональными на отрезке [0,1] ?

Какая система функций называется ортонормированной?

Задача Штурма-Лиувилля.

Свойства собственных значений оператора регулярной задачи Штурма-Лиувилля.

Каким условиям удовлетворяет система функций в методе разделения переменных при получении классического решения?

Как в общем виде записывается ряд Фурье по полной ортогональной системе функций?

Теорема Стеклова.

Запишите уравнение теплопроводности. Какого типа это уравнение? Какой вид оно приобретет после преобразования Фурье по пространственной переменной?

Схема метода Фурье на примере задачи для неоднородного уравнения $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ с однородными граничными условиями.

Найдите собственные функции краевой задачи

$$u_{xx} - 9u_{yy} = 0, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$$

в простейшей задаче с однородными краевыми условиями 1-го рода для уравнения колебаний струны.

Схема метода Фурье в задаче Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Схема метода Фурье на примере задачи для неоднородного уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$ с однородными граничными условиями 2-го рода.

Основные и обобщенные функции. Примеры. Дифференцирование обобщенных функций.

Докажите, что обобщенная функция $\dfrac{1}{2c}\theta(ct-|x|)$ является фундаментальным решением волнового уравнения $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

К какому виду приводится одномерное волнового уравнение с помощью преобразования Фурье по пространственной переменной? Напишите общее решение получившегося уравнения.

Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^2$ (без вывода).
Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$ (без вывода).

Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Простейшая задача вариационного исчисления. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

Обратите внимание на следующую задачу. Она нередко вызывает затруднения по непонятным причинам.
Вычислить точное значение решения задачи

$$u_{tt} = u_{xx}$$
$$u\big|_{t=0} = \sin x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0,$$
$$u\big|_{x=0} = \sin 9t$$

в точке $x = \frac{3}{4}\pi$ в момент времени $t = \frac{2}{3}\pi$.

Какого типа уравнение Чаплыгина $u_{xx} + k(x)u_{yy} = 0$ ($k(x)$ – непрерывная функция, $k(0) = 0$; $k(x) > 0, \text{if } x > 0$; $k(x) < 0, \text{if } x < 0$)?

Пояснения

Характеристикой называется такая кривая γ, для которой задача Коши либо неразрешима, либо разрешима, но не единственным образом.

Пусть дано уравнение второго порядка $a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$.
Кривая γ, заданная уравнением $\varphi(x,y)=\text{const}$, называется характеристической (или просто *характеристикой*),

если вектор нормали (φ_x, φ_y) к кривой удовлетворяет уравнению

$$a(x, y)\varphi_x^2 + 2b(x, y)\varphi_x\varphi_y + c(x, y)\varphi_y^2 = 0$$

или, касательный вектор (dx, dy) к кривой удовлетворяет уравнению

$$a(x, y)dy^2 - 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0,$$

(называемому характеристическим),

или, *характеристика* – это кривая, задаваемая уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \lambda,$$

где λ – корень уравнения

$$a(x, y)\lambda^2 - 2b(x, y)\lambda + c(x, y) = 0 \quad \left(\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right)$$

если $a(x, y) \neq 0$.

Пусть дана система квазилинейных уравнений первого порядка

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{C}(x, y, \mathbf{u})\mathbf{u}_x + \mathbf{D}(x, y, \mathbf{u}) = 0 .$$

Кривая γ, определяемая уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \lambda ,$$

где λ – собственное значение матрицы $\mathbf{C}(x, y, \mathbf{u})$ (т.е. $\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = 0$) называется *характеристикой*.

Если система *гиперболическая*, но не *строго гиперболическая*, то это означает, что среди вещественных собственных значений есть кратные собственные значения, но эти кратные собственные значения λ_α являются полупростыми, т.е. каждому кратному собственному значению λ_α кратности *m* соответствует *m* линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{l}^{m,\alpha}$ (для λ_α кратности *m* – собственного значения $n \times n$ матрицы $\mathbf{C}$, число линейно независимых векторов вычисляется по формуле $n - \operatorname{rank}(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I})$ и, следовательно, λ_α будет полупростым, если $m = n - \operatorname{rank}(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I})$. Здесь $\mathbf{I}$ – единичная матрица).

Чтобы на кривой можно было задать начальные данные для системы или уравнения гиперболического типа необходимо, чтобы кривая трансверсально пересекала характеристики и не пересекала одну и ту же характеристику дважды.

Система Коши–Римана

$$u_x - v_y = 0$$
$$u_y + v_x = 0$$

(которую, можно записать и так $u_x + v_y = 0,\ u_y - v_x = 0$, если выбрать не правую, а левую систему координат, т.е. ось *y* направить вниз, вместо традиционного направления вверх. Такая запись иногда несколько удобнее, поскольку $u_x + v_y = \operatorname{div}\mathbf{v},\ \mathbf{v} = (u, v)$ и т.д.) является эллиптической, поскольку собственные значения матрицы *C* чисто мнимые

$$\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Тип уравнения в частных производных второго порядка от двух переменных определяется знаком дискриминанта $b^2 - ac$, а именно $b^2 - ac > 0$ – гиперболическое, $b^2 - ac < 0$ – эллиптическое, $b^2 - ac = 0$ – параболическое.

Канонические формы уравнений с частными производными второго порядка от двух переменных

$$u_{xy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,\ u_{xx} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,\ u_{xx} + u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 .$$

Уравнение Хопфа (уравнение Римана, уравнение Эйлера, иногда его также называют невязким уравнением Бюргерса),

$$u_t + uu_x = 0$$

описывает эволюцию поля скоростей невзаимодействующих частиц.
Задача Коши для уравнения Хопфа

$$u_t + uu_x = 0,$$
$$u(x,0) = f(x),$$

сводится к задаче Коши для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = x_0, \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad u(0) = f(x_0),$$

Решение уравнения Хопфа можно представить в неявной форме

$$u = f(x - ut)$$

Продифференцируем решение по переменной x, получим

$$u_x = f'(x - ut) - tu_x f'(x - ut),$$

откуда выводим следующее представление для производной u_x

$$u_x = \frac{f'(x - ut)}{1 + tf'(x - ut)} \qquad \text{(h1)}$$

Возьмем какую-нибудь произвольную точку x_0 на прямой $t = 0$ (на которой задано начальное условие). Характеристика, выходящая из этой точки, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{dt} = f(x_0).$$

Причем функция f вдоль характеристики не меняется $\frac{df}{dt} = 0$, т.е. характеристика задается соотношением $x = f(x_0)t + x_0$, а $u = f(x_0)$ вдоль характеристики. В то же время частная производная u_x изменяет свое значение вдоль характеристики, как следует из (h1)

$$u_x = \frac{f'(x_0)}{1 + tf'(x_0)}$$

Из последнего выражения следует, что если $f'(x_0) < 0$ (что характеризует волну сжатия в газовой динамике), то u_x ограничена только для $t < -\left(f'(x_0)\right)^{-1}$, а при $t = -\left(f'(x_0)\right)^{-1}$ наступает «градиентная катастрофа» (производные решения задачи Коши становятся неограниченными). Таким образом, непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши может существовать только для $t < \min\limits_{x_0, f'(x_0)<0} \left(-f'(x_0)\right)^{-1}$.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ — 1) линейное (векторное) пространство (над полем вещественных или комплексных чисел)

2) в котором определено скалярное произведение $(\, , \,)$,

3) являющееся полным относительно метрики, порождаемой нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$,

4) являющееся сепарабельным, т.е. в пространстве существует счётная полная система элементов (требование сепарабельности часто опускается, но для нас оно важно, позволяя исключить из рассмотрения несепарабельные гильбертовы пространства). Пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность элементов пространства имеет предел (принадлежащий тому же пространству).

Оператор L называется *линейным*, если для любых функций $f, g \in \Omega(L)$ из области определения оператора и любых (комплексных или вещественных) чисел α, β выполняется

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g).$$

Основным свойством линейных операторов (линейных однородных уравнений) является принцип линейной суперпозиции, позволяющий собирать сложные решения из простейших:

если функции u_j $(j=1,...n)$ являются частными решениями линейного уравнения $L(u_j)=0$, то и функция, полученная конечной линейной комбинацией этих решений $u=\sum_{j=1}^{n} C_j u_j$, также будет решением $L(u)=0$. Обобщенный принцип суперпозиции: ряд $u=\sum_{j=1}^{\infty} C_j u_j$ также будет решением $L(u)=0$, но при условии, что производные от *u*, фигурирующие в уравнении $L(u)=0$, можно вычислить путем почленного дифференцирования ряда (достаточным условием для этого является равномерная сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} C_j L(u_j)$, полученного дифференцированием). Пусть $U(\mathbf{x},\alpha)$ – решение линейного однородного уравнения, зависящее от параметра α. Решением уравнения будет также $u(\mathbf{x})=\int_a^b U(\mathbf{x},\alpha)\varphi(\alpha)d\alpha$, где $\varphi(\alpha)$ – произвольная абсолютно интегрируемая функция. Если пределы интегрирования бесконечны, то требуется равномерная сходимость интеграла, полученного в результате дифференцирования подынтегральной функции по параметру.

Оператор *A* называется *симметрическим* (симметричным), если для любых функций $f,g\in\Omega(A)$ из области определения оператора выполнено: $(Af,g)=(f,Ag)$, при этом область определения $\Omega(A)$ всюду плотна в $\mathcal{H}$ (т.е. каждый элемент гильбертова пространства $\mathcal{H}$ есть предел некоторой фундаментальной последовательности из $\Omega(A)$).

Чтобы дать определение *самосопряженного* оператора, необходимо ввести понятие *сопряженного* оператора. Оператор *A** называется *сопряженным* к оператору *A*, определённому на всём гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, если для любых двух функций из $\mathcal{H}$

$$(Af,g)=(f,A^*g).$$

Оператор *A* называется *самосопряженным*, если он определен для каждого элемента из $\mathcal{H}$ и равен своему сопряженному $A=A^*$, так что $(Af,g)=(f,Ag)$.

(Самосопряжённый оператор является симметрическим; обратное, вообще говоря, неверно. (Обратите внимание на отличие с конечномерным случаем: вещественная симметричная матрица – частный случай комплексной эрмитовой (самосопряженной) матрицы). Здесь дано суженное определение самосопряженного оператора, как оператора, определённого на всём гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (такое определение достаточно для наших целей – общее определение является более тонким). Для непрерывных операторов, определённых на всём гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, понятия симметрический и самосопряжённый совпадают. Если же область определения оператора не всё пространство $\mathcal{H}$, а некоторая плотная область $\Omega(A)$ в $\mathcal{H}$, то тогда для самосопряженного оператора должны быть выполнены условия $\Omega(A)=\Omega(A^*)$, $A=A^*$. Именно условие, что области определения оператора и сопряженного оператора совпадают, отличает самосопряжённый оператор от симметрического: у последнего возможна ситуация $\Omega(A)\subset\Omega(A^*)$).

(Элемент *x* называется предельной точкой множества $\mathcal{M}$, если в любой окрестности *x* содержится хотя бы одна точка множества $\mathcal{M}$, отличная от *x*.

Множество, получающееся из данного множества $\mathcal{M}$ присоединением к нему всех его предельных точек, называется замыканием множества $\mathcal{M}$ и обозначается $\overline{M}$.

Множество *E* называется всюду плотным в $\mathcal{M}$, если его замыкание совпадает с $\mathcal{M}$ $\overline{E}=M$.)

Комплексное число λ называется *собственным* значением линейного оператора *A*, если существует такой ненулевой элемент $f\in\Omega(A)$ из области определения $\Omega(A)$ оператора, что

$$Af=\lambda f.$$

Множество собственных значений является точечным спектром оператора.

Система $\{\varphi_n\}$ называется ортонормированной, если

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$$

где $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$ – символ Кронекера.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство и $\{\varphi_n\}$ – *ортогональная* система в нем (т.е. $(\varphi_n, \varphi_m) = \|\varphi_n\|^2 \delta_{nm}$. Ортогональную систему всегда можно сделать ортонормированной $\varphi_n \to \dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$).

Будем называть эту систему полной в $\mathcal{H}$, если не существует элемента $\mathcal{H}$ (кроме нулевого) который был бы ортогонален ко всем элементам системы.

Система функций в методе разделения переменных при получении классического решения удовлетворяет трем условиям

1) полнота (из которой следует замкнутость) 2) ортогональность 3) равномерная сходимость

Ряд Фурье разложения элемента f по ортонормированной системе $\{\varphi_n\}$:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k ,$$

$a_k = (f, \varphi_k)$ – коэффициенты Фурье элемента f по отношению к ортонормированной системе $\{\varphi_n\}$.

Теорема разложимости Стеклова.

Произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция *f(x)*, удовлетворяющая граничным условиям $\left.(\alpha_1 f' + \alpha_2 f)\right|_{x=a} = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \quad \left.(\beta_1 f' + \beta_2 f)\right|_{x=b} = 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n X_n(x), \quad \hat{f}_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b f(x) X_n(x) dx$$

по собственным функциям $X_n(x)$ краевой задачи Штурма – Лиувилля

$$-\frac{d^2 X}{dx^2} + q(x) X = \lambda X ,$$

$$\left.(\alpha_1 X' + \alpha_2 X)\right|_{x=a} = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \quad \left.(\beta_1 X' + \beta_2 X)\right|_{x=b} = 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0 .$$

Задачей Штурма – Лиувилля (регулярной) или краевой задачей на собственные значения называется задача об отыскании собственных значений и собственных функций линейного оператора

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

$$\left.\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\right|_{x=a} = 0 , \quad \left.\left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\right|_{x=b} = 0 , \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0, \quad j = 1,2.$$

где функция $q(x)$ на интервале (a,b) предполагается интегрируемой. Другими словами, нужно найти λ при которых уравнение

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+q(x)u=\lambda u$$

имеет ненулевые решения, удовлетворяющие краевым условиям

$$\left.\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u\right)\right|_{x=a}=0, \quad \left.\left(\alpha_2\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_2 u\right)\right|_{x=b}=0, \quad \alpha_j^2+\beta_j^2\neq 0, \quad j=1,2.$$

вместе с этим найти сами решения. (Краевые условия включают граничные условия I рода (при $\beta_j=0,\ j=1,2$), граничные условия II рода (при $\alpha_j=0,\ j=1,2$), граничные условия III рода и смешанные случаи. Часто задача Штурма – Лиувилля формулируется для уравнения более общего вида $y''+p(x)y'+\big(g(x)+\lambda r(x)\big)y=0$ или $-(p(x)y')'+\big(g(x)+\lambda r(x)\big)y=0$ – запоминать две последние формулы не нужно).

Метод Фурье или метод разделения переменных заключается в нахождении частных решений заданного уравнения с частными производными не равных тождественно нулю в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^2$ – $\mathcal{E}=\frac{1}{2\pi}\ln r$

Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$ – $\mathcal{E}=-\frac{1}{4\pi r}$

Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Чтобы найти функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа нужно, используя фундаментальное решение $\mathcal{E}$, найти такую гармоническую функцию v (её часто называют компенсирующей), чтобы на границе рассматриваемой области $\partial\Omega$ сумма фундаментального решения $\mathcal{E}$ и гармонической функции v удовлетворяла граничному условию Дирихле

$$(\mathcal{E}+v)\big|_{\partial\Omega}=0.$$

Например, чтобы найти функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области на плоскости нам нужно найти такую гармоническую функцию, чтобы выполнялось

$$G(M,M_0)=\left[\frac{\ln r^{-1}(M,M_0)}{2\pi}-v(M,M_1)\right]_{M\in\partial\Omega}=0.$$

В трехмерном случае

$$G(M,M_0)=\mathcal{E}+v=\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}+v$$

где $$v\big|_{\partial\Omega}=\left.\frac{1}{4\pi r}\right|_{r\in\partial\Omega}$$