

Тема 5. Обобщенные функции, обобщенное решение

Обобщенные функции: определения (пространство основных функций) и основные свойства. Дельта функция Дирака. Дельтообразные последовательности. Операции над обобщенными функциями. Свертка. Регуляризация степенных особенностей. Формулы Сохоцкого. Понятие обобщенного решения.

Фундаментальное решение. Сверточная алгебра в подпространстве обобщенных функций D'_+ . Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения произвольной степени n . Метод спуска. Функция Грина.

Тема 6. Метод Фурье (метод разделения переменных) для уравнений гиперболического типа

Схема метода разделения переменных на примере задачи о свободных колебаниях струны с жестко закрепленными концами. Связь с теорией рядов Фурье. Задача Штурма-Лиувилля. Обобщенные ряды Фурье (разложения по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля). Гильбертово пространство. Симметрический оператор. Свойства собственных значений и собственных функций. Ортогональность собственных функций. Нормы. Ортонормированные системы функций. Теорема Стеклова (без док-ва). Три условия, которым должна удовлетворять система функций для получения классического решения: 1) ортогональность 2) полнота 3) равномерная сходимость. Эквивалентность понятий полноты и замкнутости системы функций. Интерпретация решения, стоячие волны. Общая схема разделения переменных для одномерного однородного уравнения гиперболического типа с однородными граничными условиями. Сведение задачи с неоднородным уравнением и неоднородными граничными условиями к однородному уравнению с неоднородными граничными условиями и к неоднородному уравнению с однородными граничными условиями.

Уточнение условий на начальные данные на примере решения с помощью формулы Даламбера.

Функция Грина краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Интегральное уравнение. Счётное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля.

Постановка начально-краевой задачи для многомерного уравнения гиперболического типа. Метод разделения переменных в многомерном случае. Метод разделения переменных для неоднородного одномерного уравнения гиперболического типа. Неоднородные граничные условия. Оператор Шредингера.

Тема 7. Высшие трансцендентные функции

Определение и основные свойства гамма-функции. Уравнение Бесселя. Отыскание решения уравнения Бесселя в виде обобщенного степенного ряда. Общее решение уравнения Бесселя. Цилиндрические функции. Функции Бесселя 1 и 2 рода (функция Неймана).

Функции Ганкеля. Модифицированные функции Бесселя 1 и 2 рода. Задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя. Ряды Фурье-Бесселя и Дини. Полиномы Лежандра, Эрмита и Лаггера и их основные свойства.

Тема 8. Уравнения параболического типа

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности, его свойства. Неоднородное уравнение теплопроводности. Решение начальной задачи в трехмерном пространстве. Решение уравнения теплопроводности на полупрямой. Функция Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой. Представление решения простейшей задачи на полупрямой с

помощью функции Грина. Постановка смешанной задачи для уравнения теплопроводности в одномерном и многомерном случаях. Решение смешанной задачи методом разделения переменных. Функция Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Ее физический смысл. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности с помощью функции Грина.

Тема 8. Уравнения эллиптического типа

Корректность по Адамару. Уравнение Лапласа и уравнение Пуассона. Три рода краевых задач для уравнений эллиптического типа. Первая и вторая формулы Грина. Гармонические функции и их свойства. Функция Грина внутренней задачи Дирихле. Ее свойства, физическая интерпретация. Интегральное представление решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с помощью функции Грина. Метод электростатических отображений построения функции Грина. Решения задач Дирихле для уравнения Лапласа в верхнем полупространстве и внутри шара. Функция Грина задачи Неймана и третьей краевой задачи. Объемный и поверхностные потенциалы: определения и основные свойства. Гауссов потенциал. Применение потенциалов для решения краевых задач. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям.

Тема 9. Интегральные преобразования.

Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье: прямое и обратное преобразования Фурье. Свойства преобразования Фурье. Решение начальной задачи для уравнения теплопроводности методом преобразования Фурье. Применение преобразования Фурье по пространственным переменным к решению задачи Коши для гиперболических уравнений. Преобразование Лапласа. Применение преобразования Лапласа к решению краевых задач.