1) Как определяется тип системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка?
В случае трёх переменных.

Классификация уравнений:

Общий вид уравнения 2-го порядка в частных производных:

$$\Phi(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

1. Квазилинейное уравнение ~ уравнение, линейное относительно старших производных

$$a(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + b(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy} + c(x,y,u,u_x,u_y)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y)$$

2. Линейное уравнение - линейно относительно самой ф-ии u и всех её производных

$$a(x,y)\cdot u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + h(x,y)\cdot u = f(x,y)$$

~ это уравнение называется гиперболическим в т. (x_0, y_0), если: $(b^2 - ac)|_{x_0,y_0} > 0$

аналогично: параболическое: $(b^2 - ac)|_{x_0,y_0} = 0$

эллиптическое $(b^2 - ac)|_{x_0,y_0} < 0$

Пусть $u = u(x,y,z)$ ~ функция трёх независимых переменных. Квазилинейным уравнением первого порядка в частных производных наз-ся ур-е вида:

(1) $P(x,y,z,u)\cdot u_x + Q(x,y,z,u)\cdot u_y + R(x,y,z,u)u_z = T(x,y,z,u)$

где P, Q, R - заданные функции.

Если функции P, Q, R, T зависят только от переменных x, y и z, то уравнение (1) принимает вид:

$$P(x,y,z)\cdot u_x + Q(x,y,z)u_y + R(x,y,z)u_z = T(x,y,z)$$

~ и называется линейным

Если функция $T(x,y,z) = 0$, то оно называется однородным.

2) Как привести гиперболическую систему полулинейных уравнений в частных производных первого порядка к виду в инвариантах Римана?

(1) $\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t)$ – пусть есть система уравнений в частных производных, где u - вектор размерности n.

Пусть A - матрица с постоянными коэффициентами

У гиперболической системы:

$\det(A - \lambda E) = 0 \rightarrow$ все λ_k действительные.

Можем найти собственные вектора (например левые для матрицы A). Смотрим случай, когда нет кратных корней.

$\omega(A - \lambda E) = 0$, где ω - вектор строка,
где λ_i соответствует ω_i.

$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ – невырожденная $\Rightarrow \exists \Omega^{-1}$

Тогда $A = \Omega^{-1}\Lambda\Omega$ – диагональная матрица с собственными числами.

Домножим систему (1) слева на Ω

$\Omega\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda\Omega\frac{\partial u}{\partial x} = \Omega f$

Введём вектора $I = \Omega u$, $\varphi = \Omega f$ $\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial I}{\partial x} = \varphi$

$\frac{\partial I_k}{\partial t} + \lambda_k\frac{\partial I_k}{\partial x} = \varphi_k$ $\leftarrow$ распадается на совокупность отдельных уравнений

т.е. I - инварианты Римана.

Вдоль своих характеристик инварианты Римана остаются постоянными.

Пример: волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = const)$$

Оно сводится к гиперболической системе

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

характеристическая форма которой имеет вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x}\right) - a\left(\frac{\partial v}{\partial t} - a\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}\right) + a\left(\frac{\partial v}{\partial t} + a\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

Определяемые формулами инварианты:

$$i_1 = u - av, \quad i_2 = u + av$$

Система, записанная в инвариантах:

$$\frac{\partial i_1}{\partial t} - a\frac{\partial i_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial i_2}{\partial t} + a\frac{\partial i_2}{\partial x} = 0$$

показывает, что инвариант i_1 постоянен вдоль прямых $x + at = c$, а i_2 – вдоль линий $x - at = c$; поэтому

$$i_1 = f(x + at), \quad i_2 = g(x - at)$$

где f и g – определяются начальными и граничными условиями

3) Дайте определение характеристики.

Пусть есть линейное однородное уравнение:

$$v_1(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+v_n(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \quad (1)$$

Характеристическая система: $\dot{x}=v(x)$ (2)

или

отдельные хар-ки $\begin{cases}\dot{x}_1=v_1(x_1,\ldots,x_n)\\ \dot{x}_2=v_2(x_1,\ldots,x_n)\\ \ldots\\ \dot{x}_n=v_n(x_1,\ldots,x_n)\end{cases}$

решения $x=x(t)$

Утв. u - решение (1), если u - первый интеграл уравнения характеристик $\dot{x}=v(x)$)

т.е. $u(x(t))=const$

Опр. Характеристикой называется такая кривая γ, для которой задача Коши либо неразрешима, либо разрешима, но не единственным образом.

Пусть дано уравнение второго порядка

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$$

Кривая γ, заданная уравнением $\varphi(x,y)=const$, назыв. характеристикой, если вектор нормали к кривой удовлетворяет уравнению

$$a(x,y)\varphi_x^2+2b(x,y)\varphi_x\cdot\varphi_y+c(x,y)\varphi_y^2=0$$

или, касательный вектор (dx,dy) к кривой удовл. уравнению

$$a(x,y)(dy)^2-2b(x,y)\,dx\,dy+c(x,y)\,dx^2=0$$

~ характеристическое уравнение

$\frac{dy}{dx}=\lambda$ ~ характеристика, где λ - корень уравнения

если $a\neq0 \rightarrow a(x,y)\lambda^2-2b(x,y)\lambda+c(x,y)=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

4) Чем отличается гиперболическая система уравнений в частных производных первого порядка от строго гиперболической системы?

Если система гиперболическая, но не строго, то это означает, что среди вещественных собственных значений есть кратные, но эти кратные собственные значения λ_α являются полупростыми, т.е. каждому кратному собственному значению λ_α кратности m соответствует m линейно независимых собственных векторов.

Число линейно независимых векторов (где C - матрица $n \times n$) вычисляется по ф-ле $n - \operatorname{rank}(C - \lambda E)$ и следовательно λ_α будет полупростым, если $m = n - \operatorname{rank}(C - \lambda E)$.

Можно сказать и проще, если собственные значения различны (все), то система называется строго гиперболической.

5) Каким условиям должна удовлетворять кривая, чтобы на неё можно было задать начальные данные для системы или ур-я гиперболического типа?

Чтобы на кривой можно было задать начальные данные для системы или уравнения гиперболического типа необходимо, чтобы кривая трансверсально пересекала характеристики и не пересекала одну и ту же характеристику дважды.

Например линейное ДУ:

$$v_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+v_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad \to \vec{v}(x)\in C^1$$

Хар-ая система: $\dot{x}=v(x)$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=v_1(x_1,\dots,x_n)\\ \dot{x}_2=v_2(x_1,\dots,x_n)\\ \dots\\ \dot{x}_n=v_n(x_1,\dots,x_n)\end{cases}$$

$$\begin{cases}L_{\vec{v}}u=0\\ u|_{\gamma}=u_0(x)\end{cases}$$

задача Коши

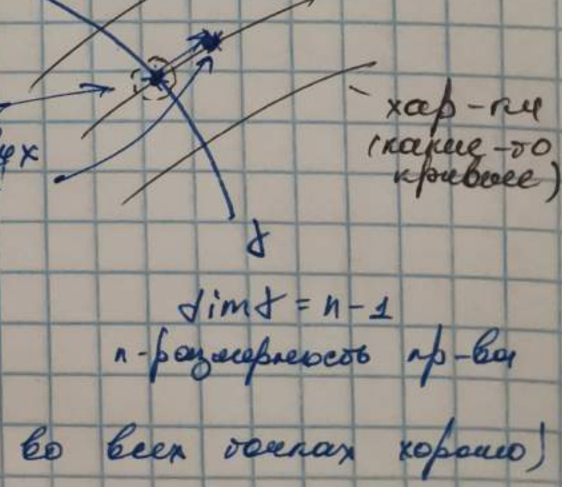
Теорема.

~ В окрестности нехарактеристической точки существует, и при том единственное решение задачи Коши.

Пусть γ - гиперповерхность, где как-то задана наша ф-я

через любую точку проходит ровно одна хар-ка

значения в этих двух точках равны.



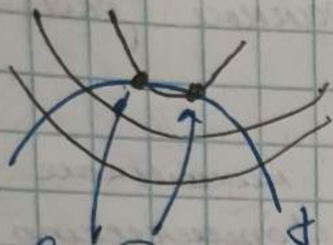
$\dim\gamma=n-1$

n - размерность пр-ва

Замечания для теоремы

1) Она локальная.
2) Окрестность нехар. точки (не во всех точках хорошо)

т. $x_0\in\gamma$ - наз-ся хар-ой точкой, если $\vec{v}(x_0)$ касается γ. Отсюда и выходит понятие трансверсальности



-хар-ки

две близкие точки, казалось бы должны быть одинаковые значения, но не обязательно! В таких точках всё плохо

· Трансверсальность – отсутствие касания.

6) Как определяется, какое число условий у гиперболической системы должно быть поставлено на границе?

Необходимое число граничных условий для одномерных гиперболических систем однозначно определяется количеством характеристик, отсекаемых границей от области зависимости решения.

1) Докажите эллиптичность системы Коши - Римана.

Система Коши - Римана:

$$\begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ u_y + v_x = 0 \end{cases}$$

Её можно записать и так $u_x + v_y = 0$, $u_y - v_x = 0$, если выбрать не правую, а левую систему координат, т.е. ось y направить вниз, вместо традиционного направления вверх.

=> Система Коши - Римана является эллиптической

Пусть $\vec{W} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\vec{W}_x - \vec{C}\vec{W}_y = 0 \quad \text{где } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -v_y \\ u_y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ v_x - u_y = 0 \end{cases}$$ „левая" система.

или $\vec{W}_x + \vec{C}\vec{W}_y = 0$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_y \\ u_y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ v_x + u_y = 0 \end{cases}$$ - наша система

$$\det(C - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Собственные числа → комплексные (чисто мнимые) => эллиптический тип.

8) Пусть есть какое-то уравнение в частных производных 2го порядка от двух переменных:

$a(x,y)\,u_{xx} + 2b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\cdot u_{yy} + \ldots = 0$

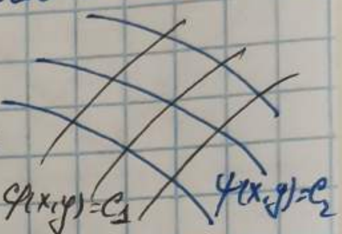
Составляем уравнение характеристик:

$a(x,y)(dy)^2 + 2b(x,y)\,dx\,dy + c(x,y)(dx)^2 = 0$ $\quad |a|+|b|+|c| \neq 0$

Пусть $a \neq 0$ (более общий случай): $D = b^2 - ac$.

1) $D = b^2 - ac > 0$ ~ гиперболический тип => уравнение имеет 2 решения

$y' = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}$ ~ два семейства характеристик (трансверсальные)



Приводится к каноническому виду заменой:

$\begin{cases} z = \varphi(x,y) \\ w = \psi(x,y) \end{cases}$ => $\boxed{u_{zw} = \text{младшие члены}}$,

2) $D = b^2 - ac < 0$ ~ эллиптический тип => действительных характеристик нет.

Получим два семейства комплексно-сопряжённых характеристик:

=> $\varphi(x,y) \pm i\psi(x,y) = C$, $C \in \mathbb{C}$

=> приводится к каноническому виду заменой

$\begin{cases} z = \varphi(x,y) \\ w = \psi(x,y) \end{cases}$ - действит. и мнимые части.

Характеристики: $z + iw = C$

$\boxed{u_{zz} + u_{ww} = \text{мл. чл.}}$ ~ канонический вид эллиптического уравнения

3) $D = b^2 - ac = 0$ ~ параболический тип.

Характеристики: $y' = -\frac{b}{a}$ => 1 семейство действительных характеристик $\rightarrow \varphi(x,y) = C$

Приводится к каноническому виду заменой

$$\begin{cases} z = \varphi(x,y) \\ w = \psi(x,y) \end{cases}$$ – произв. ф-я (невырожденная с $\varphi(x,y)$) проверяется с помощью якобиана

$\boxed{u_{ww} = \text{мл. чл.}}$ – канонический вид параболического уравнения.

9) Есть ли вещественные характеристики у уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, а если есть, то какие?

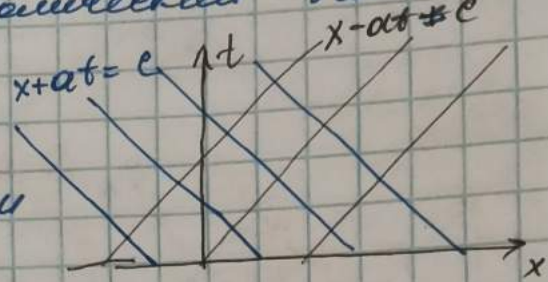
$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ ~ это волновое уравнение

Уравнение характеристик:

$$(dx)^2 - a^2 (dt^2) = 0 \;\to\; x'^2 - a^2 = 0$$

$b^2 - ac = +a^2 > 0$ => гиперболический тип.

$$(x' - a)(x' + a) = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x - at = c \\ x + at = c \end{cases}$$ ~ характеристики вещественные

При замене переменных $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ уравнение примет канонический вид $u_{\xi\eta} = 0$, проверим:

$$|J| = \left|\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, t)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{vmatrix} = a + a = 2a \neq 0$$

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi + u_\eta \\ u_t = u_\xi \cdot \xi_t + u_\eta \eta_t = -a u_\xi + a u_\eta \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + u_{\xi\eta} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta} \end{cases}$$

=> подставляем:

$$a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta} - 2a^2 u_{\xi\eta} - a^2 u_{\xi\xi} - a^2 u_{\eta\eta} = 0$$

$$\Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$$

Понятно, что решение представляется в виде:

$$u = f(\xi) + g(\eta) = f(x - at) + g(x + at)$$

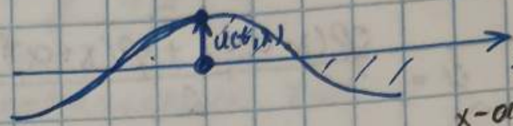
~ суперпозиция двух бегущих волн.

10) Вывод формулы Даламбера для однородного волнового уравнения.

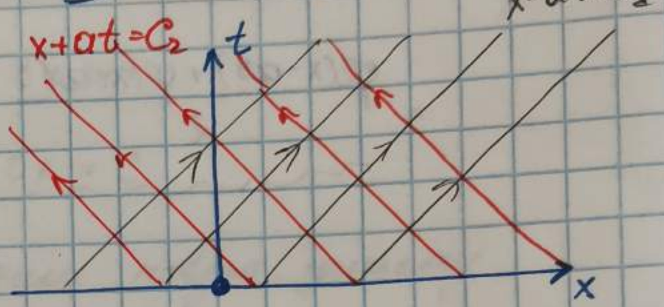
Например уравнение струны (гиперболическое)

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$, где a ~ ск-ть распространения волны.

Решаем задачу Коши: $t > 0$



$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)$$



Уравнение характеристик:

$$(dx)^2 - a^2 (dt)^2 = 0$$

$$d(x-at) \cdot d(x+a) = 0$$

$$x \pm at = c$$ ~ хар-ки

$$\begin{cases} z = x+at \\ w = x-at \end{cases} \rightsquigarrow u_{zw} + \text{мл. чл} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{zw} = 0}$$

Решение представляется в виде: $u = g(z) + f(w)$
условно в виде двух бегущих волн. Т.е. волны двигаются по своим хар-ам

$$u = f(x-at) + g(x+at)$$

$$f(x-at) \qquad\qquad g(x+at)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$u_t + a u_x = 0 \qquad\qquad u_t - a u_x = 0$$

Подставляем нач. условия:

$$\begin{cases} u|_{t=0} = f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

интегрируем 2е уравнение:

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi + C$$

$$\Rightarrow \quad 2f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi - C$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi - \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi + \frac{C}{2}$$

Подставляем в u; только учитываем аргументы, которые были в ф-ях f и g.

$$u = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} - \int_0^{x-at}\psi(\xi)\,d\xi + \int_0^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi$$ – ф-ла Даламбера

11) Упростите уравнение с постоянными коэффициентами

$$u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$$

Составляем уравнение характеристик:

$$dy^2 - 0 + dx^2 = 0 \ \Big/ : dx^2 \quad \Rightarrow y'^2 + 1 = 0$$

$b^2 - ac = 0 - 1 = -1 < 0$ ~ эллиптический тип

$$\Rightarrow dy = \pm i\,dx \quad \Rightarrow y = \pm i x + C$$

$$y \mp i x = C$$

$\begin{cases} \xi = \mathrm{Re}\,(y + ix) = y \\ \eta = \mathrm{Im}\,(y + ix) = x \end{cases}$ ~ вводим новую замену

$$|J| = \left|\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\eta$$

$$u_y = u_\xi$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} + u_\eta + u_\xi + \gamma u = 0$$

$$u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = -u_\eta - u_\xi - \gamma u$$ ~ канонический вид

12) Какие граничные условия должны выполняться в математической постановке задачи о поперечных колебаниях струны, закреплённых на концах?

Колебания струны, закреплённой на концах описывается волновым уравнением:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \text{ где } a^2 = \frac{T}{\rho}, \text{ а}$$

$$f(x,t) = \frac{g(x,t)}{\rho} \text{ ~ внешние силы}$$

Из динамики известно, что для определения движения точки нужно знать её начальное положение и начальную скорость. Для уравнения колебаний струны естественно задавать в начальный момент $t=0$ положение и скорость всех точек струны:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \qquad (1)$$

Условие (1) называют начальными условиями ($\varphi(x)$ ~ начальное смещение, $\psi(x)$ ~ начальная скорость)

Далее, так как струна ограничена, нужно указать, что происходит на её концах. Для закреплённой струны на концах мы должны иметь

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \qquad (2).$$

т.е. струна на краях неподвижна при всяком $t \geq 0$.

Условия (2) называются краевыми или граничными. Возможны и другие граничные условия.

13) По струне ударяют молоточком. Запишите возникающее нач. условие в соотв. математической постановке задачи.

При игре на ударных музыкальных инструментах (например рояле) по струне ударяют молоточком, то есть сообщают небольшому куску струны в начальный момент времени некоторую начальную скорость. Простейший способ описать эту ситуацию, принять.

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \begin{cases} v, & |x-c| < \delta \\ 0, & |x-c| > \delta \end{cases}$$

14) Что входит в понятие корректной задачи по Адамару?

Дифференциальные уравнения с обыкновенными, а тем более частными производными имеют бесконечно много решений. Для однозначного определения процесса нужны дополнительные условия.

Задача мат физики называется корректно поставленной (по Адамару), если:

1) решение задачи существует в некотором классе функций;

2) решение единственно в некотором классе функций;

3) решение задачи устойчиво (непрерывно зависит от входных данных)

Адамар.

1) и 2) ~ матем. определённость задачи

3) ~ физическая определённость задачи.

15) Для каких уравнений задача Коши явл. некорректной по Адамару?

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа в полуплоскости $\Omega = \{(x,y): x>0\}$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y)\in\Omega \\ u(0,y)=0 & |y|<\infty \\ u'_x(0,y) = \frac{1}{k}\sin ky & |y|<\infty \end{cases} \qquad (1.)$$

Здесь k - натуральное число - параметр задачи.

Нетрудно проверить непосредственной подстановкой, что решением данной задачи (притом, единственным) является функция:

$$u_k(x,y) = \frac{\operatorname{sh} kx}{k^2}\sin ky$$

Рассмотрим также задачу

$$\begin{cases} \Delta u \equiv u''_{xx} + u''_{yy} = 0 & (x,y)\in\Omega \\ u(0,y)=0 & |y|<\infty \\ u'_x(0,y)=0 & |y|<\infty \end{cases} \qquad (2)$$

$\to$ единственным решением которой является тождественно равная нулю функция $u_0(x,y)\equiv 0$.

Задачу (1) можно рассматривать как малое „возмущение" задачи (2). Действительно, для сколь угодно малого $\varepsilon>0$ можно взять такое достаточно большое k, что

$$\max_y \left|\frac{1}{k}\sin ky - 0\right| < \varepsilon.$$

Сравним теперь решения соответствующих задач. Если $y \neq \frac{\pi m}{k}$, $m\in\mathbb{Z}$ и $x\neq 0$, то

$$|u_k(x,y) - u_0(x,y)| = |u_k(x,y)| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

Таким образом, хотя краевые условия этих двух задач при $k\to\infty$ неограниченно сближаются в равномерной метрике, сами решения сколь угодно сильно в этой метрике разбегаются.

(18) Какого типа система

$$\begin{cases} u_t + f(x,t) v_x = 0 \\ u_x + f(x,t) u_t = 0 \end{cases}$$

найти у этой системы характеристики и ур-я на характеристиках (уравнения переноса)

Перепишем по-другому:

$$u_t + f(x,t) v_x = 0$$
$$u_t + \frac{1}{f(x,t)} u_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 0 & f(x,t) \\ \frac{1}{f(x,t)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(C - \lambda E) = \begin{pmatrix} -\lambda & f(x,t) \\ \frac{1}{f(x,t)} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1$ - вещественное

система гиперболическая

Уравнения характеристик:

3)

17) Найти собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = 0 \quad \sim \text{г.у II рода}$$
$$y(2) = 0 \quad \sim \text{г.у I рода}$$

II – I:

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$\nu^2 + \lambda = 0 \rightarrow \nu = \pm\sqrt{-\lambda}$$

1) при $\lambda < 0 \rightarrow \nu = \pm\sqrt{+\lambda}$

$$X(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}$$
$$X' = \sqrt{-\lambda}\, C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda} x} - \sqrt{-\lambda}\, C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}$$

$$X'(0) = C_1 - C_2 = 0 \quad \Rightarrow C_1 = C_2 = C \Rightarrow X(x) = C(e^{\sqrt{-\lambda} x} + e^{-\sqrt{-\lambda} x})$$

$$X(2) = C \cdot (e^{2\sqrt{-\lambda}} + e^{-2\sqrt{-\lambda}}) = 0 \quad \Rightarrow C = 0 \quad \Rightarrow X(x) = 0$$

не тривиального решения <u>нет</u>

2) при $\lambda = 0 \rightarrow \nu = \pm 0$ – два кратных корня

$$X(x) = C_1 x + C_2 \quad \rightarrow X'(x) = C_1 \quad \Rightarrow C_1 = 0$$
$$\Rightarrow X(2) = C_2 = 0$$

не тривиального решения нет

3) $\lambda > 0 \rightarrow \lambda = -\nu^2$ или $\nu = \pm i\sqrt{\lambda}$

$$\Rightarrow X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\, x$$

$$\Rightarrow X'(x) = \sqrt{\lambda}\, C_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x - \sqrt{\lambda}\, C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x$$

$$X'(0) = \sqrt{\lambda}\, C_1 = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0$$

$$X(2) = C_2 \cdot \cos\sqrt{\lambda} \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow 2\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$
$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi + 2\pi k}{4} = \frac{\pi(1+2k)}{4} \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)^2$$

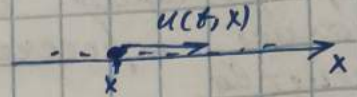
собственные значения

=> Собственные функции:

$$X_k(x) = \cos\frac{\pi(2k+1)}{4}x$$

18) Уравнение Хопфа. Пересечение характеристик. Градиентная катастрофа.

~ описывает одномерное поле скоростей из невзаимодействующих частиц.



$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = 0 \\ u|_{t=0} = f(x) \end{cases}$$

~ квазилинейное уравнение типа $u_t + f'(u) \cdot u_x = 0$, где $f(u) = \frac{u^2}{2}$

постановка задачи Коши.

=> сводится к задаче Коши для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = x_0; \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad u(0) = f(x_0), \quad \dot{t} = 1$$

~ по сути уравнения характеристик.

Решение можно представить в неявной форме:

$$u = f(x - ut)$$

$$\Rightarrow u_x = f'(x-ut) - t \cdot u_x \cdot f'(x-ut)$$ и выражаем u_x

$$\Rightarrow u_x = \frac{f'(x-ut)}{1 + t f'(x-ut)} \quad (1)$$

Из задачи Коши берём произвольную точку x_0 на прямой при $t=0$. Характеристика, выходящая из этой точки, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = f(x_0)$$

Причём функция f вдоль характеристики не меняется $\frac{df}{dt} = 0$, т.е. характеристика задаётся соотношением

$$x = f(x_0)t + x_0$$ ~ как и должно быть, а

$u = f(x_0)$ вдоль характеристики. В то же время, частная производная u_x изменяет своё значение вдоль характеристики, как следует из (1)

$$\Rightarrow u_x = \frac{f'(x_0)}{1 + t \cdot f'(x_0)}$$

Из последнего выражения следует что если $f'(x_0) < 0$ (что характеризует волну сжатия в газовой динамике), то u_x ограничена только для $t < -(f'(x_0))^{-1}$, а при $t = -(f'(x_0))^{-1}$ наступает „градиентная катастрофа"

Градиентная катастрофа в простой волне сжатия означает пересечение двух характеристик соответствующего семейства.
(производные решения задачи Коши становятся неограниченными.) Таким образом, непрерывно дифф-ое решение задачи Коши может существовать только для

$$t < \min_{x_0,\, f'(x_0)<0} (-f'(x_0))^{-1}$$

19) Определение гильбертова пространства.

Гильбертово пространство H ~ полное линейное (векторное) пространство (над полем вещественных и комплексных чисел), в котором определено скалярное произведение, т.е. указано правило, которое определяет для любых двух элементов пространства x и y их скалярное произведение (x, y).

Полное линейное пространство называется гильбертовым, если любым двум элементам φ, ψ этого множества поставлено в соответствие число (скалярное произведение), (φ, ψ), удовл. аксиомам:

- $(\varphi, \psi) = (\overline{\varphi, \psi})$
- $(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2, \psi) = \lambda_1 (\varphi_1, \psi) + \lambda_2 (\varphi_2, \psi)$
- $(\varphi, \varphi) \geq 0$
- $(\varphi, \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

Норма элемента (метрика) в гильбертовом пространстве:

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$$

Пример гильбертового пр-ва:

$$L_2(\Omega), \quad (\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi(P)\, \overline{\psi(P)}\, d\Omega$$

20) Дайте определение линейного оператора. Основное св-во линейных операторов.

Оператор L называется линейным, если для любых функций $f, g \in \mathcal{D}(L)$ из области опр-я оператора и любых чисел α, β выполняется

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

Основным свойством линейных операторов (линейных однородных уравнений) является принцип линейной суперпозиции, позволяющий собирать сложные решения из простейших:

если ф-ии u_j являются частными решениями линейного уравнения $L(u_j) = 0$, то и функция, полученная конечной линейной комбинацией этих решений

$$u = \sum_{j=1}^{n} C_j u_j$$, также будет решением $L(u) = 0$

Например: линейный дифф-ый оператор:

$$L = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + a_1\frac{d}{dx} + a_0$$

где a_i ~ вообще говоря, могут зависеть от x

Неоднородное линейное уравнение $Lu = F$, где
u – искомая ф-я
F – заданная ф-я.
ищется в виде суммы частного решения этого уравнения и общего решения линейного однородного уравнения $Lu = 0$.

21) Дайте определение симметрического оператора, самосопряжённого оператора.

Оператор L называется симметрическим, если для любых функций $f, g \in \mathcal{R}(L)$ из области опр-я оператора выполнено: $(Lf, g) = (f, Lg)$, при этом область определения $\mathcal{R}(L)$ всюду плотна в гильбертовом пр-ве.

Чтобы дать определение самосопряжённого оператора, необходимо ввести понятие сопряжённого оператора. Оператор L^* называется сопряжённым к оператору L, определённому на всём гильбертовом пр-ве, если для двух функций из H (гильб. пр-во)

$$(Lf, g) = (f, L^* g)$$

Оператор L называется самосопряжённым, если он определён для каждого элемента из H и равен своему сопряжённому $L = L^*$, так, что $(Lf, g) = (f, Lg)$

Самосопряжённый оператор явл-ся симметрическим; обратное, вообще говоря, неверно.
\+ мы дали опр-е во всём гильбертовом пр-ве, в огранич-х областях опр-е с доп. условием $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(L^*)$ - для самосопр. оператора.

22) Собственные значения оператора. Дать определение.

Собственной функцией оператора L называется такая функция f, при действии на которую оператором L получается снова функция f с точностью до множителя λ:

$$Lf = \lambda f$$ ~ как в задаче Штурма-Лиувилля.

Численный множитель λ называется собственным значением оператора L. Собственное значение оператора L называется невырожденным, если существует единственная собственная функция оператора L с таким собственным значением.

Собственное значение λ оператора L называется вырожденным, если у оператора L есть более, чем 1 собственная функция с собственным значением λ.

$$Lf_1 = \lambda f_1, \quad Lf_2 = \lambda f_2, \ldots$$

23) Какая система функций называется ортогональной?

<u>Опр.</u> Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определённые и интегрируемые на отрезке $[a, b]$, называются ортогональными на этом отрезке, если

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x)\, dx = 0$$

Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$, определённых на отрезке $[a, b]$ и интегрируемых на нём вместе с их квадратами, называется ортогональной на отрезке $[a, b]$, если все функции последовательности попарно ортогональны на этом отрезке, т.е. если

$$\int_a^b \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x)\, dx = 0 \qquad (i \neq j)$$

<u>Замечание:</u> предполагается, что среди ф-ий $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x)$ нет ф-ии, тождественно равной 0.

2a) Являются ли функции $f(x) = \sin \pi x$ и $g(x) = \cos 3\pi x$ ортогональными на отрезке $[0, 1]$?

Опр. Функции u и v являются ортогональными в векторном пр-ве, если их (u, v) ~ скалярное произведение $= 0$ в этом пространстве.

$$(f, g) = \int_0^1 \sin \pi x \cdot \cos 3\pi x \cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\sin 4\pi x + \sin(-2\pi x))\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\sin 4\pi x - \sin 2\pi x)\, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4\pi}\cos 4\pi x \Big|_0^1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x \Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4\pi}(\cos 4\pi - \cos 0) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}(\cos 2\pi - \cos 0)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4\pi}(1-1) + \frac{1}{2\pi}(1-1)\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ и $g(x)$ ~ ортогональны на отр. $[0, 1]$

25) Какая система функций называется ортонормированной?

Опр. Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, нормированные на единицу длины и ортогональные на промежутке (a, b), называются ортонормированными.
Условие ортонормированности функций $\varphi_n(x)$ имеет вид

$$(\varphi_k, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)\,dx = \delta_{kn}$$

т.е. система $\{\varphi_n\}$ назыв. ортонормированной, если

$(\varphi_k, \varphi_n) = \delta_{kn}$ ~ символ Кронекера.

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

26) Задача Штурма - Лиувилля.

Задачей Штурма - Лиувилля или краевой задачей на собственные значения называется задача об отыскании собственных значений и собственных функций линейного оператора L.

Вообще, можно сказать, что это задача - отыскания решения уравнения вида:

$$pu = Lu$$, p - дифф-ый оператор по t; L - дифф-ый оператор по x

где $L = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) - q(x)$ ~ L должен быть 2го порядка и самосопряжённый

Если мы применим метод Фурье: $u = T(t)X(x)$

$\Rightarrow (pT(t))\cdot X(x) = T(t)(L\,X(x))$ → разделяем переменные

$$\frac{pT(t)}{T(t)} = \frac{L\,X(x)}{X(x)} = \lambda$$ ~ т.к. зависят от разных переменных

$\{ L X = \lambda X$ + краевые условия $\}$ ~ это и есть задача Штурма - Лиувилля

мы ищем собственные векторы этого линейного оператора

собственные значения

собственный вектор

$$L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x) \rightarrow Ly = (py')' - qy = p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) - q(x)y(x)$$

Физически $p(x)$ ~ например учитывает неоднородности.

Требуем $p \in C^1[0;l]$; $p(x) \geq p_0 > 0$; $q(x) \in C[0;l]$

1). Область определения оператора L:

$$D(L) = \{ y \in C^2[0;l] \mid (A), (B) \}$$ - линейное пр-во

краевые условия

Есть 3 типа задания краевых условий:

(A) $- x=0$ (B) $- x=\ell$

1) $y(0)=0$ $y(\ell)=0$

2) $y'(0)=0$ $y'(\ell)=0$

3) $y(0)-\alpha y'(0)=0$ $y(\ell)+\beta y'(\ell)=0$ ~ упругое закрепление

физически правильно $\alpha>0, \beta>0$

Лемма: L - симметрический (самосопряжённый) оператор, т.е.

$$(Lf,g)=(f,Lg), \text{ где } (f,g)=\int_0^\ell f(x)g(x)\,dx$$

Док-во:

$$(Lf,g)=\int_0^\ell (pf')'g\,dx-\int_0^\ell qfg\,dx=\{\text{инт. по частям}\}=$$

$$=\underline{\underline{pf'g\Big|_0^\ell}}-\int_0^\ell pf'g'\,dx-\int_0^\ell qfg\,dx$$

$$(f,Lg)=\int_0^\ell f(pg')'\,dx-\int_0^\ell f\cdot qg\,dx=\underline{\underline{pfg'\Big|_0^\ell}}-\int_0^\ell pf'g'\,dx-\int_0^\ell qfg\,dx$$

Внеинтегральные члены в т. $x=0$, и $x=\ell$: (исп. краевые условия):

$$p(0)\left[f'(0)g(0)-f(0)g'(0)\right]\overset{?}{=}0$$

Для (A_1), (A_2) - выполняется.

(A_3) $[\alpha f(0)g(0)-\alpha f(0)g(0)]=0$ => оператор симметрический

27) Свойства собственных значений оператора регулярной задачи Штурма-Лиувилля.

$$\boxed{L X = \lambda X + \text{краевые условия}}$$ - задача Ш-Л

Теорема.
1) Собственные значения λ - действительные и однократные;
2) Собственные вектора, отвечающие разным собств. значениям $\Rightarrow$ ортогональные:

$$(X_k, X_e) = \int_0^l X_k(x)\, X_e(x)\, dx = 0 \quad , \quad k \neq l$$

Замечание: Если задача физически правильная, то $\lambda \le 0$, причём $\lambda_0 = 0$ возможно $\Leftrightarrow q(x) = 0$ + гран. усл. $A_2 + B_2$ (ф-я $X_0 \equiv 1$)

Лемма. L - симметрический (самосопряжённый) оператор, т.е.

$$(Lf, g) = (f, Lg), \quad \text{где} \quad (f,g) = \int_0^l f(x)\, g(x)\, dx$$

Док-во: $(Lf, g) = \int_0^l (pf')' g\, dx - \int_0^l q f g\, dx$ = {инт. по частям} =

$$= pf'g\Big|_0^l - \int_0^l pf'g'\, dx - \int_0^l q f g\, dx$$

$$(f, Lg) = \int_0^l f (pg')'\, dx - \int_0^l f \cdot q g\, dx = pfg'\Big|_0^l - \int_0^l pf'g'\, dx - \int_0^l q f g\, dx$$

Внеинтегральные члены в т. $x=0$ и $x=l$ (исп. краевые условия):

$$p(0)\left[f'(0)g(0) - f(0)g'(0)\right] \overset{?}{=} 0$$

Для (A_1), (A_2) - выполняется

(A_3): $[\alpha f(0) g(0) - \alpha f(0) g(0)] = 0 \Rightarrow$ оператор симметр.

Док-во (теоремы):

1) $L X_k = \lambda_k X_k$

$$(\lambda_k X_k, X_k) = (L X_k, X_k) = \left\{\begin{matrix}\text{с другой стороны}\\ \text{он самосопр.}\end{matrix}\right\} = (X_k, L X_k) = (X_k, \lambda_k X_k)$$

$$\lambda_k (X_k, X_k) \qquad\qquad \bar{\lambda}_k (X_k, X_k)$$

$$\Rightarrow \lambda_k (X_k, X_k) = \bar{\lambda}_k (X_k, X_k)$$

$$(X_k, X_k) = \|X_k\|^2 \neq 0 \qquad \Rightarrow \lambda_k = \bar{\lambda}_k, \text{ т.е. они действительные}$$

2) Ортогональность собственных векторов без корня

$$\lambda_k (X_k, X_e) = (L X_k, X_e) = (X_k, L X_e) = \lambda_e (X_k, X_e)$$

$$\Rightarrow \lambda_k (X_k, X_e) = \lambda_e (X_k, X_e) \Rightarrow \underline{(X_k, X_e) = 0}$$

3) $LX_k = \lambda_k X_k$ ($\lambda \le 0$?)

из док-ва леммы

$\lambda_k \| X_k^2 \| = (LX_k, X_k) = p(l) X_k'(l) X_k(l) - p(0) X_k'(0) \cdot X_k(0) -$

$- \underbrace{\int_0^l (X_k')^2 p(x) dx}_{\le 0} - \underbrace{\int_0^l q(x)(X_k)^2 dx}_{\le 0 \text{ для физ. пр. задачи}}$

по краевым условиям.

по A_1 и A_2 - всё понятно

с (A_3): $-p(l)\beta X_k^2(l)$ $\qquad -p(0)\alpha X_k^2(0)$

которго ≤ 0

А т.к. $\|X_k\|^2 \ge 0 \Rightarrow \lambda_k \le 0$

4) Однократность собств. значений

$LX = \lambda X$ - линейное однородное дифф-е ур-е 2го порядка.

$p(x)y'' + p'(x)y' - (q(x) + \lambda)y = 0 \Rightarrow$ решения образует двумерное линейное пр-во

Пусть λ - кратный корень $\to X^{(1)}(x), X^{(2)}(x)$

$\Rightarrow$ Общее решение $y = C_1 X^{(1)}(x) + C_2 X^{(2)}(x)$, но кто сказал, что это решение удовл. краевым условиям.

Например $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ $\Rightarrow$ Не все решения могут удовл. краевым условиям

28) Каким условиям удовлетворяет система функций в методе разделения переменных при получении классического решения?

При получении собственных векторов методом Фурье → они обладают следующими свойствами:

1) Система функций ортогональна:

$$\left.\begin{aligned}(X_n, X_k) &= 0, \text{ при } n \neq k\\ (X_n, X_k) &= 1 \text{ при } n = k\end{aligned}\right\}$$ ортогональная система

2) Система полна в L_2.

Опр. Система функций называется полной, если выполняется

$$\int_0^l F(x)\, X_n(x)\, dx = 0$$ (замкн. система)

3) Система равномерно сходится.

4) Справедлива теорема Стеклова.

Обозначим через f_1' производную ф-ии f_1 по аргументу $ct-x$. Тогда производные по координате:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -f_1'(vt-x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1''(vt-x)$$

Производные по времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v f_1'(vt-x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 f_1''(vt-x)$$

29) Как в общем виде записывается ряд Фурье по полной ортогональной системе функций?

Пусть система функций
(1) $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ ортогональна на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим ряд вида

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x). \quad (2)$$

где a_n – числа, называемые коэффициентами ряда. Пусть ряд (2) сходится на отрезке $[a,b]$ равномерно и $f(x)$ – его сумма. Определим коэффициенты этого ряда.

Будем считать, для простоты, что функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ – непрерывны на отрезке $[a,b]$. Тогда $f(x)$ тоже будет функцией непрерывной (как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций).

Умножим ряд (2) на ф-ю $\varphi_n(x)$. Получится ряд, равномерно сходящийся на отрезке $[a,b]$ к ф-ии $f(x)\varphi_n(x)$ (равномерная сходимость сохранится, т.к. на отрезке $[a,b]$ функция $\varphi_n(x)$ непрерывна и, следовательно, ограничена. Проинтегрируем его почленно в пределах от a до b и получим

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = a_1\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_n(x)\,dx + a_2\int_a^b \varphi_2(x)\varphi_n(x)\,dx + \ldots + a_n\int_a^b (\varphi_n(x))^2\,dx + \ldots$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = a_n\int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx}, \quad n = 1, 2 \ldots \quad (3)$$

Опр. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ или имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода. Рядом Фурье такой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ по ортогональной системе (1) называется ряд

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$$

Если ряд Фурье ф-ии $f(x)$ по системе (1) сходится к $f(x)$ в каждой её точке непрерывности, то говорят, что функция $f(x)$ разлагается в ряд по ортогональной системе (1). Очевидно, что если функция $f(x)$ разлагается в ряд по некоторой ортогональной системе, то это разложение единственно.

30) Теорема Стеклова.

Пусть $f(x) \in C^2(0, l) \cap C^1[0, l]$ и удовлетворяет граничным условиям III типа: $\alpha_1 f'(0) - \beta_1 f(0) = 0$, $\alpha_2 f'(l) + \beta_2 f(l) = 0$, тогда функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \quad \text{с коэффициентами}$$

$$a_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) \rho(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx} = \frac{(f(x), X_n(x))}{\|X_n\|^2}$$

где $\rho(x)$ – весовой коэффициент (можно положить 1)

Этот ряд сходится к функции $f(x)$ абсолютно и равномерно.

81) Запишите уравнение теплопроводности. Какого типа это уравнение? Какой вид оно приобретает после преобразования Фурье по пространственной переменной?

$u_t = a^2 u_{xx}$ ~ уравнение теплопроводности (одномерное)

$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,t)$ ~ общее уравнение теплопроводности

$D = 0$ → параболическое уравнение

Применим метод Фурье: $u = T(t) \cdot X(x)$

$\Rightarrow T'(t)\, X(x) = a^2 T(t)\, X''(x)$

$\Rightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda \rightarrow \begin{cases} X'' = \lambda X \\ T' = \lambda a^2 T \end{cases}$ => дальше всё зависит от начальных условий.

32) Схема метода Фурье на примере задачи для неоднородного уравнения $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ с однородными граничными условиями.

Поставим задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0<x<l, \\ u(x,0)=0 \\ u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{cases} \quad \to \quad u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$$

ОРНУ = ОРОУ + ЧРНУ

$$u = T(t)\,X(x) \quad \to \quad T'(t)\,X(x) = a^2 T(t)\,X''(x) + f(x,t)$$

Функцию $f(x,t)$ запишем по ортогональной системе

$$\Rightarrow f(x,t) = X(x)\cdot F(t)$$

$$T'(t)\,X(x) = a^2 T(t) X''(x) + X(x)\cdot F(t)$$

Решаем однородное ур-е:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \to \quad X'' - \lambda X = 0 \quad \Rightarrow \nu^2 - \lambda = 0 \quad \to \lambda = \nu^2$$

$$X(0) = X(l) = 0$$

$$X = A\sin\nu x + B\cos\omega x$$

Но $\lambda < 0$

$$X(0) \Rightarrow B = 0$$

$$X = \sin\nu x \quad \Rightarrow X(l) = \sin\nu l = 0$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{\pi n}{l}$$

$$X_n = \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$\Rightarrow X_n''(x) = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n(x)$$ перепишем исходное уравнение как:

$$X_n(x)\,T_n'(t) = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 X_n(x)\,T_n(t) + X_n(x)\,F_n(t)$$

$$\Rightarrow T_n'(t) = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) + F_n(t)$$

Решим последнее уравнение методом вариации постоянной.

Общее решение линейного однородного уравнения:

$$T_n'(t) = -\left(\frac{\pi n a^2}{l}\right)^2 T_n(t) \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = D_n\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$$

Заменим $D_n = D_n(t)$ и подставим в исходное уравнение

$$T_n(t) = D_n(t)\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$$

$$D_n'(t)e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t} - \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cancel{e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t}} D_n(t) = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cancel{e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t}} D_n(t) + F_n(t)$$

$$D_n'(t)e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t} = F_n(t) \to D_n'(t) = F_n(t)e^{(\frac{\pi n a}{l})^2 t}$$

$$\Rightarrow D_n(t) = \int F_n(t)e^{(\frac{\pi n a}{l})^2 t}dt + A_n$$

$$T_n(t) = A_n \cdot e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t} + e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t}\int F_n(t)e^{(\frac{\pi n a}{l})^2 t}dt$$

Из начальных условий получаем: $U_n(x,0) = X_n(x)T_n(0) = 0$
$T_n(0) = 0$

и можем найти A_n

$$f_n(x,t) = X_n(x)F_n(t) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)F_n(t)$$

$F_n(t)$ является коэффициентом ряда Фурье, и равен

$$F_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

$\Rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(t)$, которые определяются формулами выше

33) Найдите собственные функции краевой задачи

$$u_{xx} - 9u_{yy} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$$

в простейшей задаче с однородными краевыми условиями 1го рода для уравнения колебаний струны.

Метод Фурье: $u = X(x)\,Y(y)$

$$X''Y - 9XY'' = 0 \rightarrow X''Y = 9XY''$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{9Y''}{Y} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$\nu^2 + \lambda = 0 \longrightarrow \lambda = -\nu^2$$

$\lambda < 0$ как и должно быть.

$$X = C_1 \sin \nu x + C_2 \cos \nu x$$

Из граничных условий: $X(0) = X(l) = 0$

$$X(0) = C_2 = 0 \quad \Rightarrow X = C_1 \sin \nu x$$

$$X(l) = C_1 \sin \nu l = 0 \quad \Rightarrow \sin \nu l = 0$$

$$\nu l = \pi k \rightarrow \nu = \frac{\pi k}{l}$$

$\Rightarrow$ Собственные функции:

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}$$

34) Схема метода Фурье в задаче Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Пусть Ω - открытая область в $\mathbb{R}^2$, $\bar{\Omega}$ - граница этой области.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ ~ оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$

Задача Дирихле: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, удовлетворяющему некоторым граничным условиям

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), \quad f \in C^0(\partial\Omega)$$

Решим задачу в кольце, а потом сведём её к кругу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & a < r < b \\ u|_{r=a} = f_1(\varphi) \\ u|_{r=b} = f_2(\varphi) \end{cases}$$ ~ используем метод Фурье

Легче в полярных координатах: $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\Rightarrow R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0 \quad \Big| \cdot \frac{r^2}{R\Phi}$$

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

$$\begin{cases} \Phi'' = -\lambda\Phi \\ r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases}$$

Важно! Считаем, что ф-ия 2π - периодична

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

$\Phi'' = -\lambda\Phi$, $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$ с этим условием легко

$\partial^2 = -\lambda$ отсеять тривиальные решения

1) $-\lambda > 0 \Rightarrow \exp.$ ~ непериодичен.

2) $\lambda = 0 \Rightarrow$ линейная $\Rightarrow \Phi_0 \equiv 1$, $\lambda_0 = 0$ — просто константа

3) $-\lambda < 0 \Rightarrow \sin, \cos \to \sin k\varphi; \cos k\varphi$, $k = 1, 2, \dots \to \lambda_k = k^2$

с целыми коэффициентами

Рассматриваем второе уравнение:

$$r^2 R_k'' + rR_k' - k^2 R_k = 0$$ ~ уравнение Эйлера

Замена $R_k = r^\lambda$, вместо λ подставляем k^2.

$$\lambda(\lambda-1)r^\lambda + \lambda r^\lambda - k^2 r^\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \pm k$$

Два независимых решения $\to r^k$, $\to r^{-k}$.

Составляем линейную комбинацию:

$$R_k = A_k r^k + B_k r^{-k}$$

Если $\lambda = 0 \to R_0 = A_0 \cdot 1 + B_0 \cdot \underline{\ ?\ }$

$r^2 R_0'' + r R_0' = 0 \Rightarrow$ решая уравнение $R_0 = A_0 \cdot 1 + B_0 \ln r$

$$\Rightarrow u(r,\varphi) = \sum R_k \Phi_k = (A_0 + B_0 \ln r)\cdot \underbrace{1}_{\Phi_0} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k})\cos k\varphi + (C_k r^k + D_k r^{-k})\sin k\varphi$$

$\Rightarrow$ подставляя начальные условия можно найти коэффициенты.

<u>В круге</u> формула будет та же, но в 0 ф-я $\ln r$ и r^{-k} неопределены.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1 \\ u|_{r=1} = f(\varphi) \end{cases}$$

По сути можно проделать всё то же самое.

$$\Rightarrow u(r,\varphi) = \sum R_k \Phi_k = A_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k \cos k\varphi + C_k r^k \sin k\varphi$$

35) Схема метода Фурье на примере задачи для неоднородного уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$ с однородными граничными условиями 2го рода.

Постановка задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & 0<x<l \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x); \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$$

Используем метод Фурье: $u_n = X_n(x)\, T_n(t)$

ОРНУ = ОРОУ + ЧРНУ

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$$\Rightarrow T''X - c^2 T X'' = 0 \rightarrow T''X = c^2 T X''$$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda \rightarrow X'' - \lambda X = 0$$

$$\nu^2 - \lambda = 0 \rightarrow \nu = \pm\sqrt{\lambda}$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

$$X' = -\sqrt{\lambda} C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$$

$X'(0) = C_2 = 0$

$X'(l) = -\sqrt{\lambda}\, C_1 \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0 \rightarrow \sqrt{\lambda}\, l = \pi n$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$$

$$\Rightarrow X_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{l}$$

Представим $f(x,t) = X(x)\cdot F(t)$ ~ разложение по ортогональной системе.

$T''X - c^2 T X'' = X\cdot F$

$$X'' = \left(-\frac{\pi n}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}\right)'_x = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos\frac{\pi n x}{l} = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X$$

$$\Rightarrow T'' + c^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T = F$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\cdot\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,$$

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n c}{l}t + B_n \sin\frac{\pi n c}{l}t$$ – решение однородного уравнения.

Из начальных условий $\rightarrow A_n$ и B_n.

При отыскании частного решения $f_n(t)$ раскладывается в ряд Фурье.

$$\Rightarrow T_n(t) = \text{ч.р.} + A_n \cos \frac{\pi n e}{e} t + B_n \sin \frac{\pi n e}{e} t$$

$$\Rightarrow u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(t)$$

Обобщённые функции.

Функцию $\varphi(x)$ будем называть основной, если она беск. число раз дифференцируема и финитна. Функция финитна, если она вне отрезка $[a, b]$ обращается тождественно в ноль.

Пример $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|ab|}{(x-a)(b-x)}}, & a<x<b \\ 0, & x<a,\ x>b \end{cases}$

На языке знаков: $\varphi(x) \in C^{\infty}$, $\varphi(x) \in D$

Носитель ф-ии отрезок $[a, b]$: $supp\, \varphi(x) = [a, b]$

$$supp\, \varphi(x) = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Обобщённой функцией называется всякий линейный непрерывный функционал, действующий в пр-ве основных функций.

1. Функционал - правило, согласно которому каждой ф-ии $\varphi(x)$ ставится в соответствие число

$$\varphi(x) \xrightarrow{f} (f, \varphi) = (f(x), \varphi(x))$$

обобщённая ф-я не имеет аргумента

x - аргумент основной функции

2. Функционал называется линейным, если

$$(f, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(f, \varphi_1) + c_2(f, \varphi_2)$$

3. Функционал непрерывный, если последовательность основных ф-ий $\varphi_n(x)$ сх-ся к $\varphi(x)$ при $n \to \infty$

$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{D} \varphi(x)$, то последоват. чисел

$$(f, \varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f, \varphi)$$

Свойства (действия) обобщ. функций

1) Обобщённые ф-ии можно складывать и умножать на числа.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - лок. интегр. ф-ции, тогда

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ – лок. интегр. ф-я.

$$\left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x), \varphi(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] \varphi(x)\,dx =$$

$$= c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\varphi(x)\,dx + c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\varphi(x)\,dx = c_1(f_1(x), \varphi(x)) + c_2(f_2(x), \varphi(x))$$

2) Умножение на бесконечное число раз дифф. ф-ю.

Пусть $a(x) \in C^\infty$

Пусть $f(x)$ – лок. интегр. ф-я, тогда $a(x) f(x)$ – лок. инт. функция.

$$(a(x) f(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) f(x) \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(a(x)\varphi(x)\right) dx =$$

$$= \left(f(x), a(x)\cdot\varphi(x)\right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$\mathcal{D}$ - это пр-во основных функций: все финитные бесконечно дифференцируемые в $\mathbb{R}^n$ функции ($\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$).

Пример: $a(x)\cdot\delta(x) = ?$

$$(a(x)\cdot\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x)\cdot a(x)) = a(0)\cdot\varphi(0) = a(0)\cdot(\delta(x), \varphi(x)) =$$

$$= (a(0)\cdot\delta(x), \varphi(x)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

$$\Rightarrow a(x)\cdot\delta(x) = a(0)\cdot\delta(x)$$

3) Определение ф-ии $f(\alpha x + \beta) = ?$

Пусть $f(x)$ – лок. интегр. ф-ция, тогда она опред. регулярную функцию; $f(\alpha x+\beta)$ – лок. инт. ф-я, –//– регулярно обобщ. ф-ю по правилу

$$(f(\alpha x+\beta), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha x+\beta)\varphi(x)\,dx = \left\{ \begin{matrix} \alpha x+\beta = \xi \\ dx = \frac{d\xi}{\alpha} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\varphi\left(\frac{\xi-\beta}{\alpha}\right)\frac{d\xi}{\alpha}, & \alpha > 0 \\ \displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} f(\xi)\,\varphi\left(\frac{\xi-\beta}{\alpha}\right)\frac{d\xi}{\alpha}, & \alpha < 0 \end{cases} = \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|}\left(f(x), \varphi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right)$$

Пусть $f(x)$ – обобщ. ф-ция, тогда $f(\alpha x+\beta)$ – это такая обобщ. ф-я, которая на $\varphi(x)$ действ. по правилу

$$\left(f(\alpha x+\beta), \varphi(x)\right) = \frac{1}{|\alpha|}\left(f(x), \varphi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right)$$

4) Дифференцирование

Пусть $f(x) \in C^1(x)$

$f'(x) \in C(x)$

$$(f'(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \underbrace{f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx =$$

т.к. $\varphi(x)$ - финитная

$$= -(f(x), \varphi'(x))$$

=> Пусть $f(x)$ - обобщ. ф-я. Под производной обобщ. ф-ии понимают такую обобщ. функцию, которая на $\varphi(x)$ действует по правилу:

$$(f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x))$$

5) Обобщённая функция диффер. сколько угодно раз

$$(f''(x), \varphi(x)) = -(f'(x), \varphi'(x)) = +(f(x), \varphi''(x))$$

$$\Rightarrow \quad (f^{(n)}(x), \varphi(x)) = (-1)^n (f(x), \varphi^{(n)}(x))$$

Все определения можно перенести на многие переменные.

6) Для ф-ии многих переменных можно вводить частные производные. $(f(x,y))$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

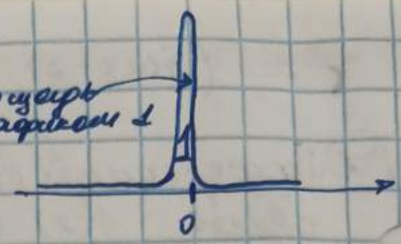
Пусть $f(x,y)$ - обобщ. ф-я, тогда:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \varphi(x,y)\right) = \left(f(x,y), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \varphi(x,y)\right) = \left(f(x,y), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right)$$

правые части равны => равны и левые.

Дельта функция ~ функционал



$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

пло

или по-другому: $\underbrace{(\delta(x)}_{\text{обобщ. ф-я}}, \varphi(x)) = \underbrace{\varphi(0)}_{\text{обычная ф-я}}$ $\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Растянутая дельта-функция:

Опр. Сдвиг $\left(f(x-x_0), \varphi(x)\right) = \left(f(x), \varphi(x+x_0)\right)$

Опр. Растяжение $\left(f(kx), \varphi(x)\right) = \frac{1}{|k|^n}\left(f(x), \varphi\left(\frac{x}{k}\right)\right)$

$$\left(\delta(kx), \varphi(x)\right) = \frac{1}{|k|^n}\left(\delta(x), \varphi\left(\frac{x}{k}\right)\right) = \frac{1}{|k|^n}\underbrace{\varphi(0)}\ =$$

$$= \frac{1}{|k|^n}\left(\delta(x), \varphi(x)\right)$$

$$\Rightarrow \delta(kx) = \frac{1}{|k|^n}\delta(x)$$

$n=1$ – $\delta(x)$ ~ чётная о. ф. $\quad \delta(-x) = \delta(x)$

$\delta(x)$ - однородная, степени однородности $(-n)$

Опр. $\forall \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ $\ f(\lambda \bar{x}) = \lambda^s f(\bar{x})$ ~ однородн. степ. s.

Сдвинутая дельта-функция:

$$\left(\delta(x-x_0), \varphi(x)\right) = \left(\delta(x), \varphi(x+x_0)\right) = \varphi(x_0)$$

Дифференцирование дельта-функции:

$$\left(\delta^{(n)}(x), \varphi(x)\right) = (-1)^n\left(\delta(x), \varphi^{(n)}(x)\right) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

Формулы Сохоцкого.

Введём линейный функционал $P\frac{1}{x}$, действующий по формуле

$$\left(P\frac{1}{x}, \varphi\right) = \underbrace{V.p.\int \frac{\varphi(x)}{x}dx}_{\text{главн. значение}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx, \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$$

Этот функционал непрерывен на $\mathcal{D}$, т.е. $P\frac{1}{x}\in\mathcal{D}'$

Обобщённая функция $P\frac{1}{x}$ совпадает с функцией $\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$. Она называется конечной частью или главным значением интеграла от $1/x$.

Установим теперь равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx = -i\pi\varphi(0) + V.p\int\frac{\varphi(x)}{x}dx, \quad \varphi\in D \qquad (6)$$

Если $\varphi(x)=0$ при $|x|>R$, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx =$$

$$= \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}[\varphi(x)-\varphi(0)]dx =$$

$$= -2i\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\operatorname{arctg}\frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx = -i\pi\varphi + V.p.\int\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

Соотношение (6) означает, что существует предел последовательности $1/(x+i\varepsilon)$ в D', $\varepsilon\to+0$, который мы обозначим $1/(x+i0)$, и этот предел равен

$$-i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}$$, итак.

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x} \qquad (7)$$

Аналогично,

$$\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x} \qquad (7')$$

Формулы (7) и (7') называются формулами Сохоцкого

Обобщённое решение: на примере волнового ур-я:

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

Обобщённую ф-ю $u(x,t)$ будем называть обобщённым решением в области Q, если

(1) $\left(u_{tt} - a^2 u_{xx}, \varphi(x,t)\right) = 0$, $\forall \varphi(x,t) \in C^\infty$, носитель которой лежит в Q

$(u_{tt}, \varphi(x,t)) - a^2(u_{xx}, \varphi(x,t)) = 0$

$(u, \varphi_{tt}) - a^2(u, \varphi_{xx}) = 0$

$\Rightarrow (u, \varphi_{tt} - a^2\varphi_{xx}) = 0$

второе определение

Всякое классическое решение является обобщённым (обратное верно не всегда)

Пусть $u(x,t)$ - лок. интегр. ф-я.

(2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, dt\; u(x,t)(\varphi_{tt} - a^2\varphi_{xx}) = 0$ для $\forall \varphi \in D(Q)$.

Локал. интегр. функция является обобщённым решением, если выполняется (2.)

Про область $D'_+(\mathbb{R})$:

\+ означает, что ф-я сосредоточена только на положительной полуоси

Если возьмём какую-то ф-ию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$
$supp \subset (-\infty; 0)$

$$\Downarrow$$

если $f(x) = 0$ при $x < 0$ $\longrightarrow$ $(f, \varphi) = 0$

т.е. $D'_+(\mathbb{R})$ – те ф-ии, у которых носитель сосредоточен на положительной полуоси.

39 - 40) Фундаментальное решения уравнения Лапласа:

В $\mathbb{R}^2$: $\qquad \mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \ln r$

$\mathbb{R}^3$: $\qquad \mathcal{E} = -\frac{1}{4\pi r}$

при $\mathbb{R}^n$, $n > 3$: $\qquad \mathcal{E} = -\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n\, r^{n-2}}$

σ_n - площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$

41) Простейшая задача вариационного исчисления. Основная лемма вариационного исчисления. Первая вариация. Уравнение Эйлера.

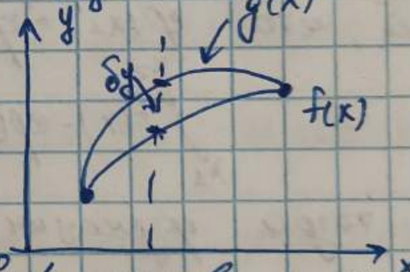
ПЗВИ называется следующая экстремальная задача:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to extr \qquad (1.1)$$

$$x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2$$ ~ начальные (краевые) условия (1.2)

где $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ ~ функция 3х переменных, называемая интегрантом. Отрезок $[t_1, t_2]$ предполагается фиксированным и конечным ($t_1 < t_2$). Экстремум ищется среди непрерывно дифференцируемых функций $x \in C^1([t_1, t_2])$, удовлетворяющих краевым условиям (1.2).

Первое опр-е вариации функционала:
Рассмотрим функционал F. Зафиксируем функцию f из области определения функционала F. Тогда любую другую функцию g из этой области можно представить в виде



$$g = f + \delta y$$ ~ вариация.

Изменение аргумента функционала δy аналогично приращению независимой переменной Δx при исследовании экстремумов ф-ии.

Функционал $F(f)$ называется дифференцируемым в точке f, если $\exists$ линейный относительно δy функционал $A(f, \delta y)$ такой что

$$F(f + \delta y) = F(f) + A(f, \delta y) + o(\delta y).$$

Тогда линейная по отношению к δy часть приращения функционала A называется вариацией функционала, то есть $\delta F = A(f, \delta y)$

Второе определение вариации функционала.
Зафиксируем аргумент f функционала $F(f)$, зададим и тоже зафиксируем некоторую вариацию δy аргумента f. Функционал $F(f + t\delta y)$, рассматриваемый на однопараметрическом множестве функций $f + t\delta y$, при фиксированных f и δy обращается в функцию $(t \in R)$ $\varphi(t) = F(f + t\delta y)$

Вариацией δF функционала $F(f)$ в точке f называют производную ф-ии $\varphi(t)$ по параметру t при $t=0$:

$$\delta F(f, \delta y) = \lim_{t \to 0} \frac{F(f+t \cdot \delta y) - F(f)}{t} = \frac{d}{dt} F(f + t\delta y)\Big|_{t=0} = \varphi'(0)$$

Уравнение:

$$-\frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t) + f_x(t) = 0 \quad , \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

производные по $\dot{x}$ и x

– уравнение Эйлера.

Ф-ии, являющиеся решениями уравнения Эйлера, называются экстремалями. Экстремали, удовл. краевым условиям называются допустимыми экстремалями.

Основная лемма вариационного исчисления:

– Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$ и для любой непрерывно дифференцируемой ф-ии $\varphi(x)$, такой, что $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ имеет место равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \varphi(x)\, dx = 0$$

=> тогда функция $f(x) = 0$ на отрезке $[x_1, x_2]$

12) Вычислить точное значение решения задачи.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x > 0 \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0 & t > 0 \\ u|_{x=0} = \sin 9t \end{cases}$$

Сначала избавимся от неоднородности в краевом условии: $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx} \\ w(0,t) = \sin 9t \end{cases}$$

$w(x,t) = f_1(x-t) + \cancel{f_2(x+at)}$, смотрим $\underline{x>0}$

$f_1(-t) = \sin 9t$; $\quad -t = z$

$f_1(z) = \sin(-9z) = -\sin 9z \quad \to w(x,t) = -\sin 9(x-t)$

$w_t = +9\cos 9(x-t)$

Пересчитываем нач. условия.

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} = v_{xx} \\ v|_{t=0} = \sin x + \sin 9x \\ v_t|_{t=0} = -9\cos 9x \\ v|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$v|_{t=0} = u|_{t=0} - w|_{t=0} = \sin x + \sin 9x$

$v_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - w_t|_{t=0} = -9\cos 9x$

закреплённый конец, исп. метод продолжений
→ н.у. продолжаем нечётным образом.

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} \\ v|_{t=0} = \sin x + \sin 9x \\ v_t|_{t=0} = \begin{cases} -9\cos 9x, & x \geq 0 \\ +9\cos 9x, & x < 0 \end{cases} \\ v|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Используем формулу Даламбера.

$$v(x,t) = \frac{\varphi(x-t) + \varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(z)\,dz$$

Рассматриваем 2 случая:

$x > t$:

$$v(x,t) = \frac{\sin(x-t) + \sin(9(x-t)) + \sin(x+t) + \sin 9(x+t)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} -9\cos 9z \, dz = \frac{\sin(x-t)}{2} + \cancel{\frac{\sin 9(x-t)}{2}} + \frac{\sin(x+t)}{2} + \cancel{\frac{\sin 9(x+t)}{2}} +$$

$$+ \frac{\sin 9(x-t)}{2} - \cancel{\frac{\sin 9(x+t)}{2}} = \frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2} + \sin 9(x-t)$$

$x < t$:

$$v(x,t) = \frac{\sin(x-t) + \sin 9(x-t) + \sin(x+t) + \sin 9(x+t)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{0} 9\cos 9z \, dz + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} (-9\cos 9z) \, dz = \frac{\sin(x-t)}{2} + \cancel{\frac{\sin 9(x-t)}{2}} +$$

$$+ \frac{\sin(x+t)}{2} + \cancel{\frac{\sin 9(x+t)}{2}} - \cancel{\frac{\sin 9(x-t)}{2}} - \cancel{\frac{\sin 9(x+t)}{2}} = \frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2}, & x > t \\ \dfrac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2} - \sin 9(x-t), & 0 < x < t \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{4}\pi > t = \frac{2}{3}\pi$$

$$\Rightarrow u\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{17}{12}\pi\right)}{2}$$

4\. 42) Вычислить точное значение решения задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x > 0 \,? \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0 & t > 0 \,? \\ u|_{x=0} = \sin 9t \end{cases}$$

в точке $x = \frac{3}{4}\pi$ в момент времени $t = \frac{2}{3}\pi$

Уравнение характеристик:

$$(dx)^2 - (dt)^2 = 0$$

$$(dx - dt)(dx + dt) = 0 \rightarrow x \pm t = C \text{ - характеристики}$$

1) $u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$

$$u|_{t=0} = f(x) + g(x) = \sin x$$

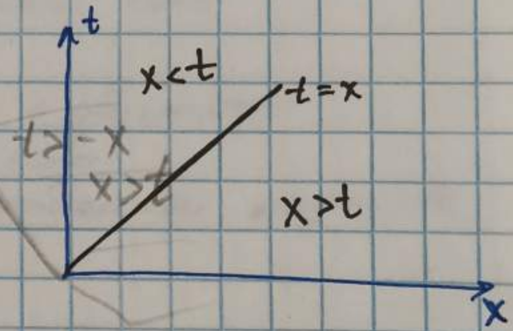
$$u_t'|_{t=0} = -f'(x) + g'(x) = 0 \quad \Rightarrow -f(x) + g(x) = C$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) - C$$

$$\Rightarrow 2g(x) - C = \sin x \rightarrow g(x) = \frac{\sin x + C}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin x - C}{2}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2}, \quad x > t$$



2) $x < t$, пусть $C = 0$

$$\Rightarrow u(x,t) = f_1(x-t) + g(x+t) =$$

$$= f_1(x-t) + \frac{\sin(x+t)}{2}$$

$$u|_{x=0} = f_1(-t) + \frac{\sin t}{2} = \sin 9t$$

$$f_1(-t) = \sin 9t - \frac{\sin t}{2}$$

$$\Rightarrow f_1(t) = \frac{\sin t}{2} - \sin 9t$$

$$f_1(x-t) = \frac{\sin(x-t)}{2} - \sin 9(x-t)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2} - \sin 9(x-t), \quad x < t$$

$$x = \frac{3}{4}\pi > t = \frac{2}{3}\pi$$

$$\Rightarrow u\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{17}{12}\pi\right)}{2}$$

43) Какого типа уравнение Чаплыгина $U_{xx} + k(x) U_{yy} = 0$, где $k(x)$ - непрер функция, $k(0)=0$; $k(x) > 0$ при $x > 0$
$k(x) < 0$ при $x < 0$)

Запишем характеристическое уравнение:

$$dy^2 + k(x)\, dx^2 = 0 \quad / : dx^2$$

$$y'^2 + k(x) = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = -4k(x)$$

=> при $x > 0$ $k(x) > 0$ => $D < 0$
=> эллиптического типа.

при $x < 0$ $k(x) < 0$ => $D > 0$
=> гиперболического типа

при $x = 0$ $k(x) = 0$ => $D = 0$
=> параболического типа

Уравнение Чаплыгина (общая задача о двухмерном стационарном движении сжимаемого газа)
→ выводится из ур-я Эйлера для несжимаемой жидкости.