Кинематика прямолинейного движения.

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \longrightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x\, dt' \longrightarrow x\Big|_{x_0}^{x(t)} = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_x\, dt'$$

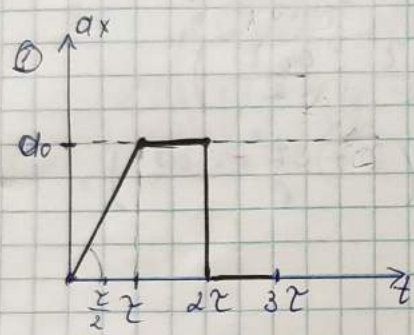
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Нач. условие $\quad v_x(t=t_0) = v_{0x}$

$$x(t=t_0) = x_0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \longrightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x(t)} dv_x = \int_{t_0}^{t} a_x\, dt' \longrightarrow v_x\Big|_{v_{0x}}^{v_x(t)} = v_x(t) - v_{0x} = \int_{t_0}^{t} a_x\, dt'.$$

$$\Rightarrow v_x(t) = \int_{t_0}^{t} a_x\, dt' + v_{0x}$$



$v_x(t=0) = 0$

$x(t=0) = 0$

1) $v_x(t) = ?$
2) $x(t) = ?$

$$a_x(t) = \begin{cases} \frac{a_0}{\tau} t, & t \in [0; \tau] \\ a_0, \text{ при } \tau < t \leq 2\tau & t \in [\tau; 2\tau] \\ 0, \text{ при } 2\tau < t \leq 3\tau & t \in (2\tau; 3\tau] \end{cases}$$

$t \in [0; \tau]$

1)
$$v_x(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{a_0}{\tau} \cdot t'\right) dt' + \underbrace{v_{0x}}_{=0} =$$

$$= \frac{a_0}{\tau} \frac{(t')^2}{2}\Big|_0^t = \frac{a_0 t^2}{2\tau}$$

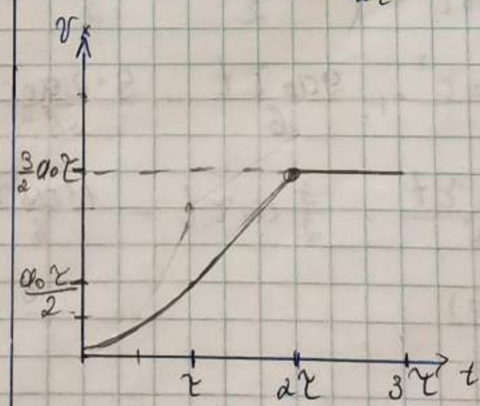
$\frac{a_0 \tau^2}{8\tau} \quad \frac{a_0 \tau}{8}$

$t \in [\tau; 2\tau]$

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_{\underset{=\tau}{t_0}}^{t} a_0\, dt' = \frac{a_0 \tau}{2} + a_0(t - \tau)$$

$t \in (2\tau; 3\tau]$

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_{\underset{=2\tau}{t_0}}^{t} 0\, dt' = \frac{a_0 \tau}{2} + a_0 \tau = \frac{3}{2} a_0 \tau$$



$$v_x(t) = \begin{cases} \frac{a_0 t^2}{2\tau} & t \in [0;\tau) \\ a_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right) & ; t \in [\tau; 2\tau) \\ \frac{3}{2} a_0 \tau & ; t \in [2\tau; 3\tau] \end{cases}$$

$$x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^{t} v_x \, dt'$$

1) $t \in [0; \tau]$

$$x(t) = 0 + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{a_0 (t')^2}{2\tau}\right) dt' = \frac{a_0}{2\tau} \cdot \frac{(t')^3}{3}\Big|_0^t = \frac{a_0 t^3}{6\tau}$$

2) $t \in [\tau; 2\tau]$

$$x(t) = \frac{a_0 \tau^2}{6} + \int_{t_0}^{t} \left(a_0 t' - \frac{a_0 \tau}{2}\right) dt' = \frac{a_0 \tau^2}{6} + \left(\left(\frac{a_0 (t')^2}{2} - \frac{a_0 \tau t'}{2}\right)\Big|_{t_0}^{t}\right) =$$

$$= \frac{a_0 \tau^2}{6} + \left(\left(\frac{a_0 t^2}{2} - \frac{a_0 \tau t}{2}\right) - \left(\frac{a_0 \tau^2}{2} - \frac{a_0 \tau^2}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{a_0 \tau^2}{6} + \frac{a_0 t^2}{2} - \frac{a_0 \tau t}{2} = a_0 \left(\frac{\tau^2 + 3t^2 - 3\tau t}{6}\right) =$$

$$= a_0 \left(\frac{3t^2 - 3\tau t + \tau^2}{6}\right)$$

3) $t \in [2\tau; 3\tau]$

$$x_0 = a_0 \left(\frac{3 \cdot 4\tau^2 - 6\tau^2 + \tau^2}{6}\right) = \frac{7 a_0 \tau^2}{6}$$

$$x(t) = \frac{7 a_0 \tau^2}{6} + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{3}{2} a_0 \tau\right) dt' = \frac{7}{6} a_0 \tau^2 + \left(\frac{3 a_0 \tau}{2} t' \Big|_{t_0}^{t}\right) =$$

$$= \frac{7}{6} a_0 \tau^2 + \left(\frac{3 a_0 \tau \cdot t}{2} - \frac{3 a_0 \tau \cdot 2\tau}{2}\right) =$$

$$= \frac{7 a_0 \tau^2}{6} + \frac{9 a_0 \tau t}{6} - \frac{9 \cdot 2 a_0 \cdot \tau^2}{6} = \frac{7 a_0 \tau^2}{6} - \frac{18 a_0 \tau^2}{6} +$$

$$+ \frac{9 a_0 \tau t}{6} = \frac{3}{2} a_0 \tau t - \frac{11 a_0 \tau^2}{6} = a_0 \tau \left(\frac{3t}{2} - \frac{11\tau}{6}\right)$$

$$v_{x(2\tau)}^{\text{ср пост.}} = \frac{x(2\tau) - x(0)}{2\tau} =$$

М.т. движ. замедляясь прямолинейно так, что модуль ~~ax~~ ускорения $a = \alpha\sqrt{v}$ ($\alpha = const.$)

$v_x(t=0) = v_0$

Как ск-ть зависит от времени — $v_x(t) = ?$

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_x = -\alpha\sqrt{v_x} \end{cases} \Rightarrow \quad -\alpha\sqrt{v_x} = \frac{dv_x}{dt} \quad \Big| \cdot \frac{dt}{\sqrt{v_x}}$$

$$\frac{dv_x}{\sqrt{v_x}} = -\alpha\, dt$$

$$\int_{v_0}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{\sqrt{v_x}} = -\int_0^t \alpha\, dt'$$

$$\int_{v_0}^{v_x(t)} \frac{1}{\sqrt{v_x}}\, dv_x = -\left(\alpha t' \Big|_0^t\right)$$

$$2\sqrt{v_x}\Big|_{v_0}^{v_x(t)} = -\alpha t$$

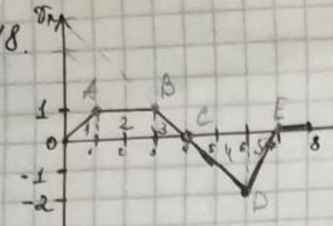
$$2\left(\sqrt{v_x(t)} - \sqrt{v_0}\right) = -\alpha t$$

$$2\sqrt{v_x(t)} = 2\sqrt{v_0} - \alpha t$$

$$4 v_x(t) = 4v_0 - 4\sqrt{v_0}\,\alpha t + \alpha^2 t^2$$

$$v_x(t) = \left(\sqrt{v_0} - \frac{\alpha t}{2}\right)^2$$

1. 18.



Нач. усл.: $x(t=0)=0$

Д-и $a_x(t)$ - ?
$x(t)$?
$S(t)$ - ?

$4-t$

$-2+2t-12=$
$=2t-14$

$-5+4t-\frac{t^2}{2}=$
$-5+24-\frac{36}{2}=$
$=-5+24-18=$
$=-5+24-23=1$
$=24-23=1$

$$v_x=\begin{cases} t, & \text{при } t\in[0;1) \\ 1, & \text{при } t\in[1;3) \\ -t, & \text{при } t\in[3;6) \\ 2t, & \text{при } t\in[6;7] \end{cases}$$

1) $t\in[0;1]$:
$a_x=1$

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} t'\,dt' = 0+\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^t\right)=\frac{t^2}{2}$$

$\Delta x_1 = S_1 = \frac{1}{2}$

2) $t\in[1;3]$; $a_x=0$

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} 1\,dt' = \frac{1}{2}+\left(t'\Big|_1^t\right)=\frac{1}{2}+(t-1)$$

$\Delta x_2 = S_2 = t-1 = 2$

3) $t\in[3;6.]$; $a_x=-1$

$$x(t)=\frac{5}{2}+\int_{t_0}^{t} -t'\,dt' = \frac{5}{2}+\left(\left(-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t_0}^{t}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}+\left(\frac{-t^2}{2}-\frac{-9}{2}\right)=\frac{5}{2}+\frac{9}{2}-\frac{t^2}{2}=\frac{14}{2}-\frac{t^2}{2}=$$

$$=7-\frac{t^2}{2}$$

$S_3=\frac{1}{2}$; $S_4=2$

4) $t\in[6;7]$; $a_x=2$.

$$x(t)=-11+\int_{t_0}^{t}(2t')\,dt' = -11+\left(t^2\Big|_6^t\right)=$$

$$=-11+t^3-36=t^3-47.$$

$S_5=1.$

$$v_x = \begin{cases} t, \text{ при } t \in [0;1) \\ 1, \text{ при } t \in [1;3) \\ 4-t, \text{ при } t \in [3;6) \\ -2+2(t-6) = 2t-14, \text{ при } t \in [6;7] \end{cases}$$

1) $t \in [0;1]$; $a_x = 1$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} t'\,dt' = \frac{(t')^2}{2}\Big|_0^t = \frac{t^2}{2}$$

$S_1 = \Delta x_1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ (у.ед.) $\qquad \Delta x_1(t) = \frac{t^2}{2}$

2) $t \in [1;3]$; $a_x = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \int_{t_0}^{t} 1\,dt' = \frac{1}{2} + t'\Big|_{t_0}^{t} = \frac{1}{2} + \underbrace{(t-1)} = t - 1 + \frac{1}{2} = t - \frac{1}{2}$$

$\Delta x_2(t) = t - 1 \qquad \Delta x_2(t) = t-1.$

$S_2 = 2$ (у.ед.)

3) $t \in [3;6]$; $a_x = -1$

$$x(t) = 3 - \frac{1}{2} + \int_{t_0}^{t} (4-t')\,dt' = \frac{5}{2} + \left(4t' - \frac{t'^2}{2}\Big|_{t_0}^{t}\right) =$$

$$= \frac{5}{2} + \left(4t - \frac{t^2}{2} - 4\cdot 3 + \frac{9}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} - 12 + 4t - \frac{t^2}{2} =$$

$$= \frac{14}{2} - 12 + 4t - \frac{t^2}{2} = 7 - 12 + 4t - \frac{t^2}{2} = -5 + 4t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Delta x_3(t) = 4t - \frac{t^2}{2} - 12 + \frac{9}{2} = 4t - \frac{t^2}{2} - \frac{15}{2}$$

$\Rightarrow S_3 = \frac{1}{2} + 2 = 2{,}5$ (у.ед.)

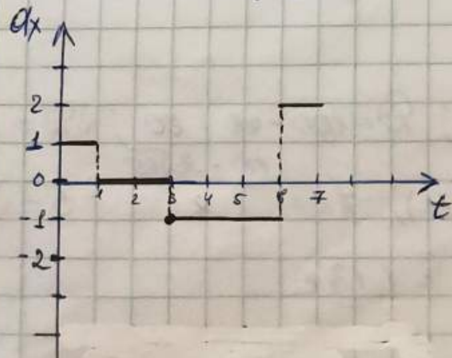
4) $t \in [6;7]$; $a_x = 2$

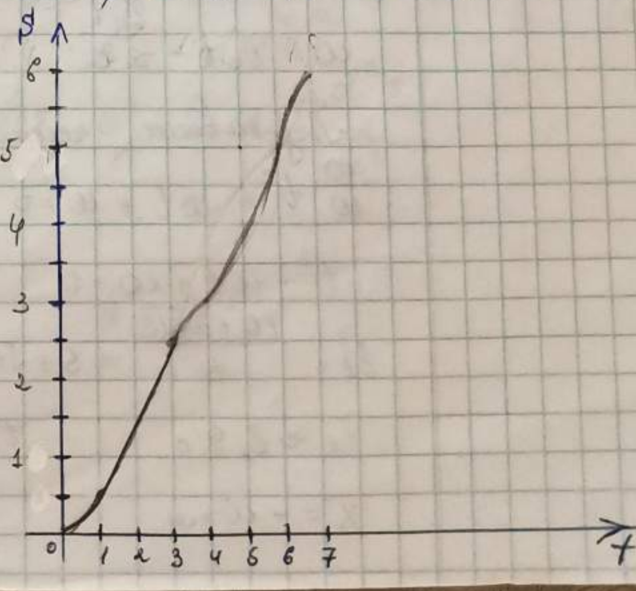
$$x(t) = 1 + \int_{t_0}^{t} (2t' - 14)\,dt' = 1 + \left((t')^2 - 14t'\Big|_{t_0 = 6}^{t}\right) =$$

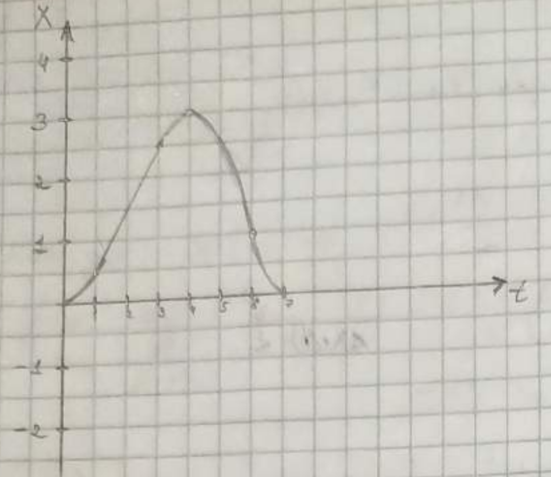
$$= 1 + (t^2 - 14t - 36 + 14\cdot 6) = 1 + t^2 - 14t - 36 + 84 = t^2 - 14t + 49$$

$\Delta x_4(t) = t^2 - 14t + 48$

$\Rightarrow S_4 = 1$ (у.ед.)







На участке BC м.т. движется ещё вдоль OX

$4t - \frac{t^2}{2} - \frac{15}{2}$

$t = 4 \Rightarrow 16 - \frac{16}{2} - \frac{15}{2} = 16 - 8 - 7,5 =$

$= 8 - 7,5 = 0,5$ (увелич на $\frac{1}{2}$)

На участке CD м.т. движется против OX:

$-5 + 4t - \frac{t^2}{2}$

$t = 6 \Rightarrow -5 + 24 - \frac{36}{2} = -5 + 24 - 18 = 1$

На участке DE м.т. движется против OX:

$t^2 - 14t + 49$

$t = 7 \Rightarrow 49 + 49 - 14 \cdot 7 = 0$

1.21.

$x(t=0) = 0$

$v(t) = v_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$

$v_0 = 10\ \frac{см}{с}$

$\tau = 5с$

а) $x(6)$ - ?
$x(10)$ - ?
$x(20)$ - ?

б) $x = \pm 10$ см.
t - ?

а) $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' = \int_{t_0}^{t} v_0\left(1 - \frac{t'}{\tau}\right) dt' =$

$= \int_{t_0}^{t}\left(v_0 - \frac{v_0}{\tau}t'\right)dt' = v_0 t' - \frac{v_0}{2\tau}(t')^2 \Big|_{t_0}^{t} =$

$= v_0 t - \frac{v_0 t^2}{2\tau}$

т.к. $v_0 = 10\ \frac{см}{с}$, $\tau = 5с$ наберём:

$x(t=6) = 10\frac{см}{с}\cdot 6с - \frac{10\frac{см}{с}\cdot 36с^2}{2\cdot 5с} = 24$ см $= 0,24$м.

$x(t=10) = 10\frac{см}{с}\cdot 10с - \frac{10\frac{см}{с}\cdot 100с^2}{2\cdot 5с} = 0$ см

$x(t=20) = 10\frac{см}{с}\cdot 20с - \frac{10\frac{см}{с}\cdot 400с^2}{2\cdot 5с} = -200$ см $= -2$м.

б) $x = 10$ см.

$10 = v_0 t - \frac{v_0 t^2}{2\tau} \rightarrow \frac{v_0 t^2}{2\tau} - v_0 t + 10 = 0$

Подставим численные значения.

$\frac{10}{10}t^2 - 10t + 10 = 0$

$t^2 - 10t + 10 = 0$; $D = 100 - 40 = 60$, $\sqrt{D} = 2\sqrt{15}$

$t_1 = \frac{10 + 2\sqrt{15}}{2} = 5 + \sqrt{15}$ (с.); $t_2 = \frac{10 - 2\sqrt{15}}{2} = 5 - \sqrt{15}$ (с.)

$t_1 \approx 8,9$ с $\qquad t_2 \approx 1,13$ с.

$x = -10$ см.

$\Rightarrow t^2 - 10t - 10 = 0$, $D = 100 + 4 \cdot 10 = 140$, $\sqrt{D} = 2\sqrt{35}$

$t_{3,4} = \frac{10 \pm 2\sqrt{35}}{2} = 5 \pm \sqrt{35}$ (с)

$t_3 \approx 10{,}91$ с $t_4 \approx -0{,}91$ с — посторонний корень

Ответ: а) 0,24 м; 0 м; −2 м.

б) $t_1 \approx 8{,}9$ с; $t_2 \approx 1{,}19$ с; $t_3 \approx 10{,}91$ с.

1.22.

$v = \alpha\sqrt{x}$ $x(t=0) = 0$ а) $v_x(t)$ − ? $a_x(t)$ − ? б) $v_x^{ср}$ − ?	а) Т.к. тело движется вдоль оси x, то можно записать:

$v_x = \alpha\sqrt{x}$; по определению: $v_x = \frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x} \quad \Big| \cdot \frac{dt}{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt$$

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int_{t_0}^{t} \alpha t' dt' \quad ; \quad 2\sqrt{x}\Big|_0^{x(t)} = \alpha t$$

$$2\sqrt{x(t)} - 0 = \alpha t$$

$$2\sqrt{x(t)} = \alpha t$$

$$\sqrt{x(t)} = \frac{\alpha t}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\frac{\alpha t}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 t^2}{4}$$

$$v_x(t) = x'(t) = \frac{\alpha^2 t}{2}$$

$$a_x(t) = v_x'(t) = \frac{\alpha^2}{2}$$

б) $S = \frac{\alpha^2 t^2}{4} \Rightarrow t^2 = \frac{4S}{\alpha^2} \rightarrow t = \frac{2}{\alpha}\sqrt{S}$

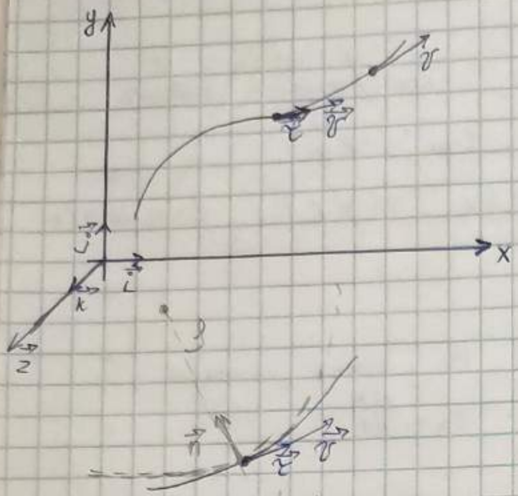
$$v^{ср.} = \frac{S}{t} = \frac{\alpha^2 t^2}{4t} = \frac{\alpha^2 t}{4} = \frac{\alpha^2 \cdot 2\sqrt{S}}{4\alpha} = \frac{\alpha\sqrt{S}}{2} \quad \text{(по опр.)}$$

Ответ: а) $v_x(t) = \frac{\alpha^2 t}{2}$

$a_x(t) = \frac{\alpha^2}{2}$

б) $v^{ср} = \frac{\alpha\sqrt{S}}{2}$

Кинематика криволинейного движения.



ρ - радиус кривизны

$$\vec a = \{a_x; a_y; a_z\}$$
$$\vec v = \{v_x, v_y, v_z\}$$
$$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$$

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} \quad ; \quad \vec v = v\vec \tau$$

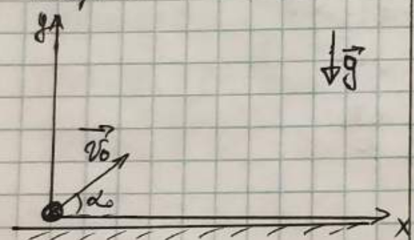
$$\vec a = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec \tau}_{\vec a_\tau} + \underbrace{\frac{v\, d\vec \tau}{dt}}_{\vec a_n}$$

$$\vec a_n = \frac{v^2}{\rho}\vec n$$

1) $\vec v_0$, $\vec a = \vec g$

α_0

$F_{сопр.} = 0$



$x(t=0)=0$

$y(t=0)=0$

1) $x(t) = ?$
$y(t) = ?$

2) $y(x) = ?$ - траектория.

1) x:

$a_x = 0$

$v_x = v_0 \cos\alpha_0$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 \cos\alpha_0 \, dt' = v_0 \cos\alpha_0 t$

y:

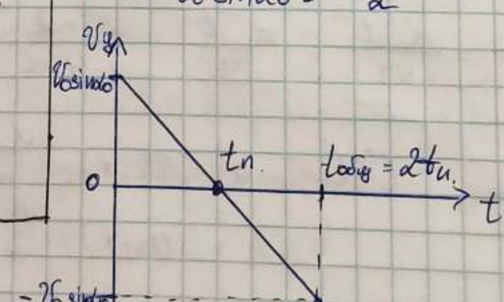
$a_y = -g$

$v_y = v_{0y} + \int_{t_0}^{t} (-g)\, dt' = v_0 \sin\alpha_0 + \left(-gt \Big|_{t_0}^{t}\right) =$

$= v_0 \sin\alpha_0 - gt$

$y(t) = 0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 \sin\alpha_0 - gt')\, dt' = v_0 \sin\alpha_0 t' - \frac{gt'^2}{2} \Big|_{t_0}^{t} =$

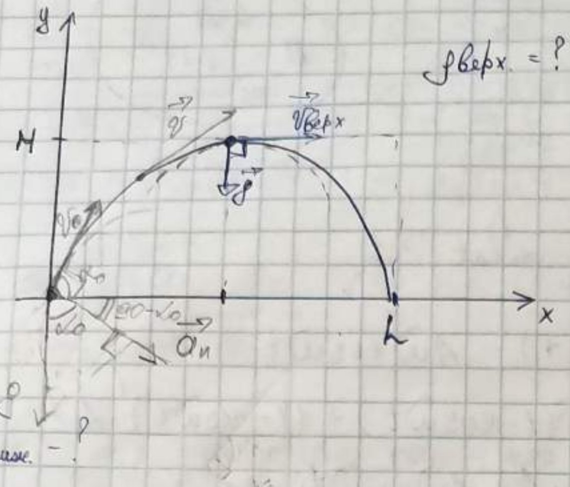
$= v_0 \sin\alpha_0 t - \frac{gt^2}{2}$



$$t_п = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$$

2) $x(t) = v_0 \cos\alpha_0 t \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}$

$\rightarrow y(x) = x \, tg\alpha_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha_0}$



$\rho_{верх.} = ?$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$v_{верх} = v_x = v_0 \cos\alpha_0$$

$$a_n^{верх} = g$$

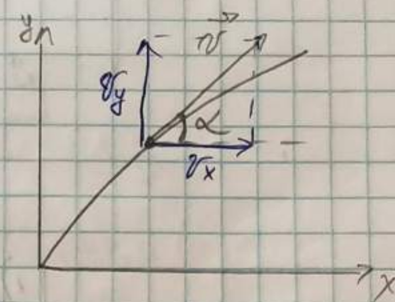
$$\Rightarrow \rho = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha_0}{g}$$

$\rho_{нижн.} - ?$

$v_{нижн} = v_0$

$\cancel{a_n = g\cos\alpha_0}$ $a_n^{нижн} = g\sin\alpha_0$ $\qquad \vec{a} = \vec{g} = \{a_\tau, a_n\}$

$$\cancel{\rho_{нижн.} = \frac{v_0^2}{g\sin\alpha_0}}$$



$a_n = g\cos\alpha_0$; $\rho_{нижн.} = \dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha_0}$

$\alpha(t) = ?$

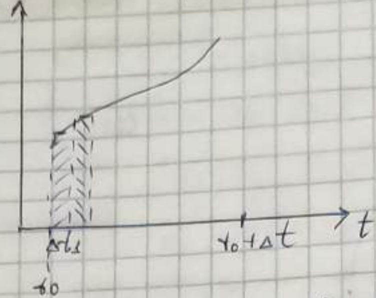
$$tg\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0\sin\alpha_0 - gt}{v_0\cos\alpha_0} = tg\,\alpha_0 - \frac{gt}{v_0\cos\alpha_0}$$

②
$x(t) = A\sin\omega t$

$y(t) = A(1-\cos\omega t)$

A, ω − const $(A>0, \omega>0)$

$S(\tau) = ?$



$$S = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} v\,dt' \quad !$$

$v_x(t) = x'(t) = A\omega\cos\omega t$

$v_y(t) = A'(1-\cos\omega t) + (1-\cos\omega t)'\cdot A =$

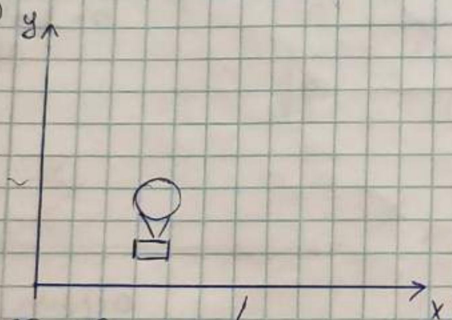
$= \omega\sin\omega t\cdot A = A\omega\sin\omega t$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{A^2\omega^2\cos^2\omega t + A^2\omega^2\sin^2\omega t} =$

$= A\omega$

$$\boxed{S = \int_0^{\tau}(A\omega)\,dt = A\omega\tau} = A\omega t\Big|_0^{\tau}$$

③



$v_y = v_0 = $ const

$v_x = \alpha y \quad (\alpha>0, \alpha = \text{const})$

1) $x(y) = ?$

2) $a = ?$

3) $a_\tau = ?$

1) $y(t) = \int_0^t v_y(t')\,dt' + \underbrace{y(t=0)}_{0} = v_0 t$

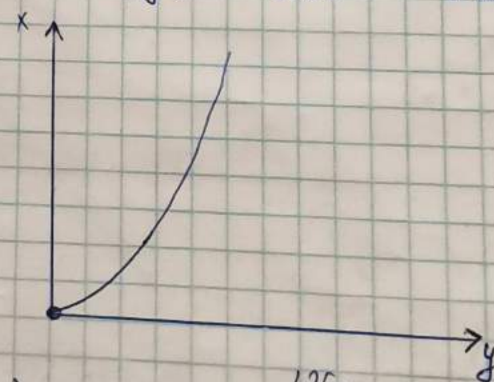
$\cancel{x(t)} = v_x(t) = \alpha v_0 t$

$\Rightarrow x(t) = \underbrace{x(t=0)}_{=0} + \int_0^t(\alpha v_0 t')\,dt' =$

$= \dfrac{\alpha v_0 t^2}{2}$

$t = \dfrac{y}{v_0}$

$\Rightarrow x(y) = \dfrac{\alpha v_0 y^2}{2 v_0^2} = \dfrac{\alpha y^2}{2 v_0}$



2) $a_x = \alpha v_0 = \dfrac{dv_x}{dt}$

$a_y = 0$

$\Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \alpha v_0$

3) $\vec{a_\tau} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} \Rightarrow a_\tau = \frac{dV}{dt} = v'$

$V = \sqrt{V_y^2 + V_x^2} = \sqrt{V_0^2 + \alpha^2 V_0^2 t^2} = V_0\sqrt{1+\alpha^2 t^2}$

$\Rightarrow a_\tau = \left(V_0\sqrt{1+\alpha^2 t^2}\right)' = \frac{V_0 2\alpha^2 t}{2\sqrt{1+\alpha^2 t^2}} = \frac{V_0\alpha^2 t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}} =$

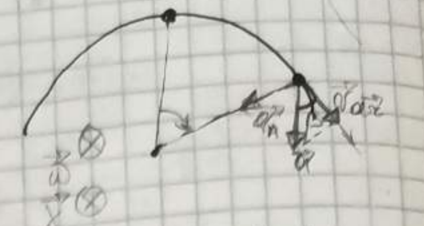
a_n $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$ (по т-е Пифагора.)

$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$

Д/3: м.т. движется так, что проекция скорости: $V_x(t) = V_0\cos(\omega t)$
$V_y(t) = V_0\sin(\omega t)$, V_0, ω - const.
$x(0) = y(0) = 0$

$x(t)$ - ? $y(t)$ - ?
траектория ($y(x)$)
a_n - ? a_τ - ?

Вращательное движение.



① $\gamma = \alpha t$

α - const.

$\omega_0 = 0$

$\beta = (\widehat{\vec{a}, \vec{v}})$

t^* - ?

$$tg\beta = \frac{a_n}{a_\tau}, \quad \vec{a_\tau} \uparrow\uparrow \vec{v}$$

$$tg\beta = \frac{v^2}{\gamma R \cdot R}$$

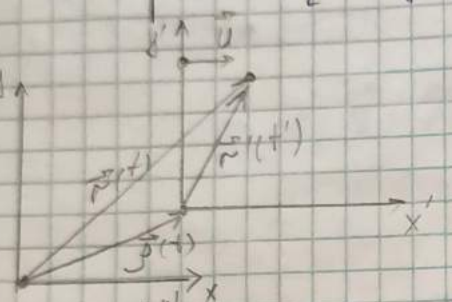
$$a_\tau = \gamma R$$

$$a_n: \ v = \omega R \ ; \ \omega^2 R^2 = v^2$$

$$\omega(t) = \int_0^t \gamma(t')\,dt' = \frac{\alpha t^2}{2} \quad \Rightarrow v^2 = \frac{\alpha^2 t^4 R^2}{4}$$

$$\Rightarrow tg\beta = \frac{\alpha^2 t^4 \cdot R^2}{\alpha t R^2 4}\Big|_{t^*} = \frac{\alpha t^3}{4}\Big|_{t^*}$$

$$t^* = \sqrt[3]{\frac{4 tg\beta}{\alpha}}$$



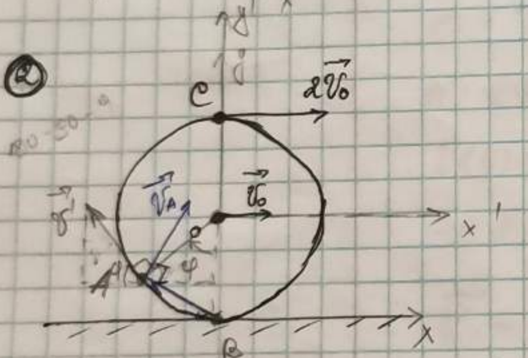
$t = t'$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{\rho}(t) \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{u}(t)$$

— принцип относительности Галилея.

②



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v_0}$$

$$v_x = v_0 - v_A' \cos\varphi$$

$$v_y = v_A' \sin\varphi$$

R

$x(0) = y(0) = 0$

$\varphi(0) = 0$

v_x - ?

v_y = ?

v = ?

$\alpha = (\widehat{\vec{v}; \vec{v_0}})$

$2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - \cos\varphi$

1) $\vec{v_B} = \vec{v_B}' + \vec{v_0} = 0$

$\vec{v_B}' = v_0$

$v_{AB}' = \omega R$

$v_x = v_0(1 - \cos\varphi)$

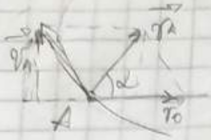
$v_y = v_0 \sin\varphi$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2(1-\cos\varphi)^2 + v_0^2 \sin^2\varphi} = v_0\sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

$$= v_0\sqrt{2 - 2\cos\varphi} = v_0\sqrt{2(1-\cos\varphi)} = 2v_0\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = 2v_0\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$$

2) $tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0\sin\varphi}{v_0(1-\cos\varphi)} = \frac{\sin\varphi}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = ctg\frac{\varphi}{2} =$

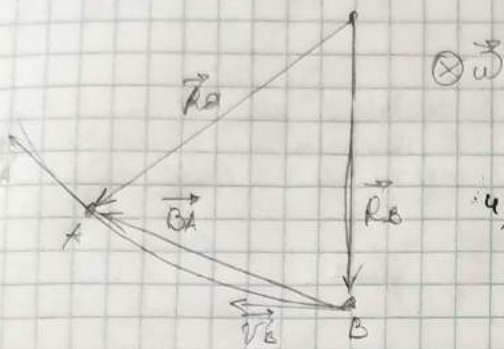
$= -tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)$



$\Rightarrow \alpha = -\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)$

3) Док-ть, что $\vec v_A \perp \vec{BA}$

$$\vec v_A = \vec v_A' + \vec v_0 = \vec v_A' - \vec v_B' = [\vec\omega, \vec R_A] - [\vec\omega, \vec R_B] = [\vec\omega, \vec R_A - \vec R_B] = [\vec\omega, \vec{BA}]$$



По св-ву векторного произв-я $\vec v_A \perp \vec{BA}$

4) Траектория точки A - ?

$\cancel{\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const}$ $\quad \omega = const$

$\varphi = \omega t$

$v_x = v_0(1-\cos\omega t)$

$x = 0 + \int_0^t v_0(1-\cos\omega t')\,dt' = v_0\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right) = R(\omega t - \sin\omega t)$

$y = 0 + \int_0^t v_0 \sin\omega t'\,dt' = \cancel{\frac{v_0\cos\omega t}{\omega}}$

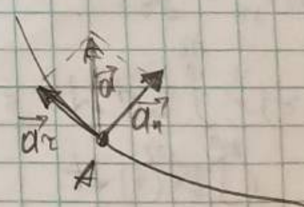
$\cancel{x = v_0 t}$ $\quad \cancel{x = v_0 t - \frac{v_0\sqrt{1-\cos^2\omega t}}{\omega}}$

$\Rightarrow y(t) = \frac{-v_0\cos\omega t}{\omega}\Big|_0^t = \frac{-v_0\cos\omega t}{\omega} + \frac{v_0}{\omega} = R(1-\cos\omega t)$

~ траектория в параметрической форме

Траекторией движения авт. → циклоида.

$\cancel{a = \frac{dv}{dt} = v' = \left(2v_0\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\right)' = 2v_0\left(\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\right)'}$



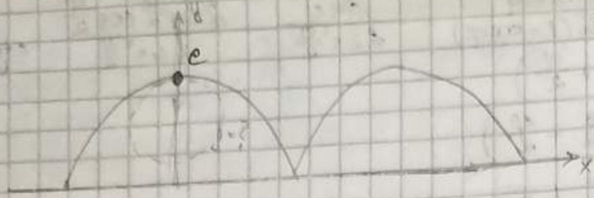
$\vec a = \vec a_\tau + \vec a_n$ $\quad$; $a = \cancel{\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{2v_0\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt R}}$

$a_\tau = \cancel{\frac{dv_A'}{dt} = v_0' = 0}$

$a_n = \cancel{\frac{v^2}{R} = \frac{4v_0^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{R}}$

$\vec a_A = \frac{d\vec v_A}{dt} = \frac{d(\vec v_A' + \vec v_0)}{dt} = \frac{dv_A'}{dt} = \vec a_n = \frac{v_A'^2}{R}\vec n = \frac{v_0^2}{R}\vec n$

$|\vec v_A'| = \omega R = const \quad \Rightarrow a_\tau = 0$



$V_C = 2V_0$

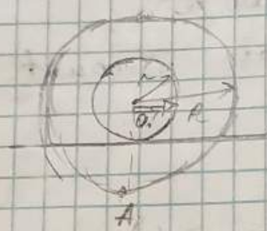
$a_n = \frac{V_0^2}{R}$

$\rho = \frac{V_C^2}{a_n}$

$\rho = \frac{4V_0^2 R}{V_0^2} = 4R$

② Под каким углом к горизонту надо бросить с поверхности земли камень, чтобы радиус кривизны в вершине траектории был равен максимальной высоте подъёма. $F_{сопр.} = 0$

③



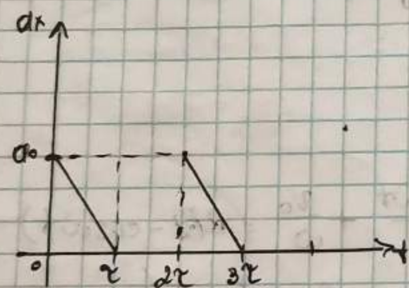
Радиус известен, катится без проск.

$\vec{a}_0 = const$

Найти скорость и ускорение в точке A.

$V_A = ?$

$a_A = ?$



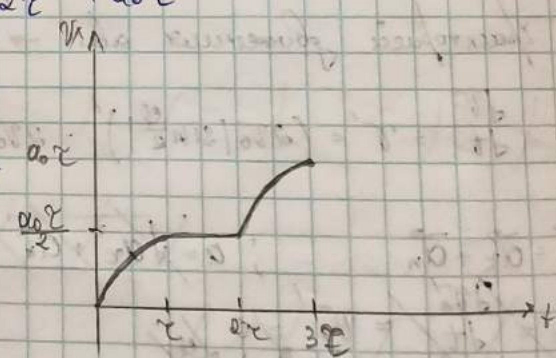
$$\left.\begin{aligned} &a_x(t) = kt + b \\ &t \in [0;\tau] \quad b = a_0 \\ &0 = k\tau + a_0 \rightarrow k = -\frac{a_0}{\tau} \end{aligned}\right\} a_x(t) = -\frac{a_0 t}{\tau} + a_0$$

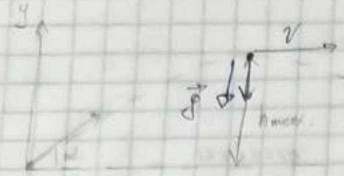
$$t \in [2\tau; 3\tau] \rightarrow 0 = -\frac{a_0}{\tau} \cdot 3\tau + b_2 \rightarrow b_2 = 3a_0$$

$$V_x(t) = V_x(0) + \int_0^t \left(-\frac{a_0 t'}{\tau} + a_0\right) dt' = -\frac{a_0 t^2}{2\tau} + a_0 t$$

$$\langle V_x \rangle_{3\tau} = \frac{x(3\tau) - x(0)}{3\tau}$$

$$x(3\tau) = \int_0^{3\tau} V_x(t)\,dt = \int_0^{\tau} V_x^{(1)}(t)\,dt + \int_{\tau}^{2\tau} V_x^{(2)}(t)\,dt + \int_{2\tau}^{3\tau} V_x^{(3)}(t)\,dt$$





$a_y = -g$

$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt \rightarrow t_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

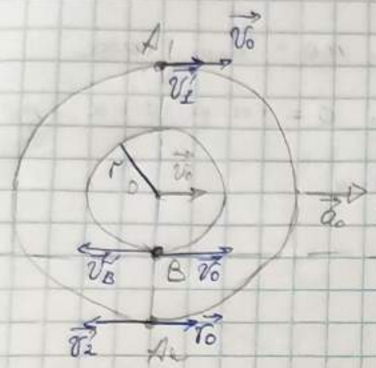
$y(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} \longrightarrow$

$\rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$v = v_0 \cos\alpha$

$g = a_n = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g}$

③



$\vec v = \vec{v_0} + \vec{v}'$

$\vec{v_B} = \vec{v_0} + \vec{v_B}' = 0$

$Ox:\ 0 = v_0 - v_B' = 0 \Rightarrow v_B' = v_0$

$v_B' = \omega r$

$\Rightarrow v_0 = \omega r$

$v_0(t) = a_0 t$

Для второй точки: $\vec{v_2} = \vec{v_0} + \vec{v_2'}$

$v_2' = \omega \cdot R = \frac{a_0 t}{r} R$

$v_{2x} = v_0 - v_2' = a_0 t - a_0 t \frac{R}{r} =$

$\underbrace{= a_0 t \left(1 - \frac{R}{r}\right)}$

$a_\tau = \frac{dv}{dt}$

$a_n = \frac{v'^2}{r} = \frac{v_B'^2}{r} \Rightarrow a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

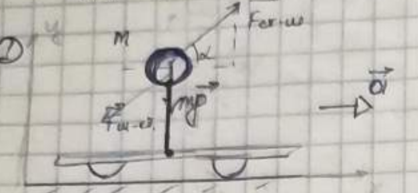
(центростремительная ск-ть)

Динамика.

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $v << c \Rightarrow m$ - const.

$m\vec{a} = \vec{F}$ – только в инерциальной системе отсчёта.

①



$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F}_{ст-ш} = -\vec{F}_{ш-ст}$

$\vec{F}_{ш-ст} = ?$

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{ст-ш}$ $\rightarrow$ x: $ma = F_{ст-ш} \cdot \cos\alpha$

$\vec{F}_{ст-ш} = m(\vec{a} - \vec{g})$ y: $0 = F_{ст-ш} \cdot \sin\alpha - mg$

$F_{ст-ш}$

$\begin{cases} F_{ст-ш} \cdot \sin\alpha = mg \\ F_{ст-ш} \cdot \cos\alpha = ma \end{cases}$ $\rightarrow$ $\overset{+}{\begin{cases} F_{ст-ш}^2 \sin^2\alpha = (mg)^2 \\ F_{ст-ш}^2 \cdot \cos^2\alpha = (ma)^2 \end{cases}}$

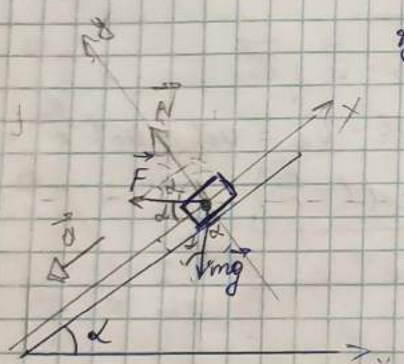
$tg\,\alpha = \frac{g}{a}$

$F_{ст-ш}^2 = m^2(g^2 + a^2)$

$F_{ст-ш} = m\sqrt{g^2 + a^2}$

$tg\,\alpha = \frac{g}{a}$

②



m, α
$\vec{F}$ - const
P = ?
a = ?

$\vec{P} = -\vec{N}$ - по III з-ну Ньютона

$\vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$

ox: $-F\cos\alpha - mg\sin\alpha = -ma$

$F\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma$

oy: $N + F\sin\alpha = mg\cos\alpha$

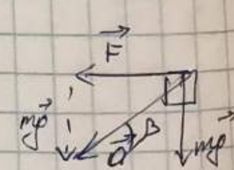
$N = mg\cos\alpha - F\sin\alpha$

$\Rightarrow a = g\sin\alpha + \frac{F}{m}\cos\alpha$

$P = N = mg\cos\alpha - F\sin\alpha$

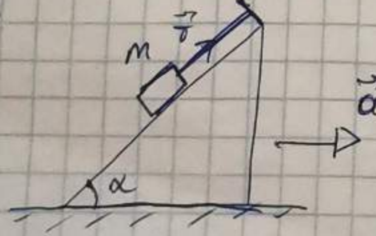
Справедливо пока $N > 0$ $\rightarrow$ при $F < mg\,ctg\,\alpha$

Если $F \geq mg\,ctg\,\alpha$, тогда $P = 0$; $a = \sqrt{\left(\frac{F}{m}\right)^2 + g^2}$



$tg\,\beta = \frac{mg}{F}$

Д/з



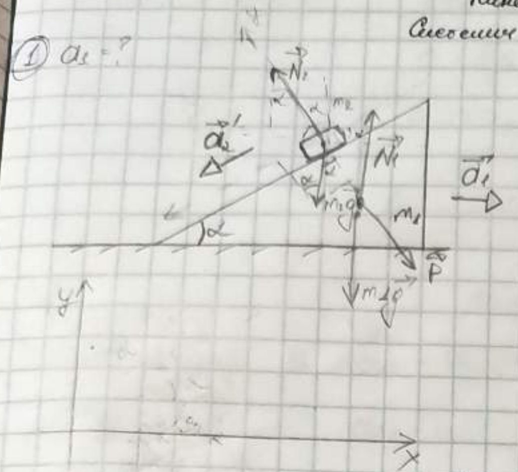
m, $\vec{a}$, α

(T - ?) P = ?

$F_н$ - ?

Кинематические связи.
Системы связанных тел.

① $a_1 - ?$



~~II з-н Ньютона~~

$\cancel{m_1\vec{g} + \vec{N_1} = \vec{a_1}\cdot m_1}$

$\cancel{OX: -m_1 a_1 \cos\alpha = m_1 g \sin\alpha - N_1 \sin\alpha}$

$\cancel{N_1 \sin\alpha - m_1 g \sin\alpha = m_1 a_1 \cos\alpha}$

$\cancel{y: -m_1 a_1 \sin\alpha = N_1 \cos\alpha - m_1 g \cos\alpha}$

$\cancel{m_1 g \cos\alpha - N_1 \cos\alpha = m_1 a_1 \sin\alpha}$

II з-н Ньютона для бруска: $m_2\vec{g} + \vec{N_2} = m_2\vec{a_2}$

Для клина: $m_1\vec{g} + \vec{N_1} + \vec{P} = m_1\vec{a_1}$

$\vec{a_2} = \vec{a_1} + \vec{a_2}'$ (мы находимся в ИСО.)

III з-н Ньютона: $\vec{P} = -\vec{N_2}$

$$\begin{cases} m_2\vec{g} + \vec{N_2} = m_2\vec{a_2} \\ m_1\vec{g} + \vec{N_1} + \vec{P} = m_1\vec{a_1} \\ \vec{a_2} = \vec{a_1} + \vec{a_2}' \\ \vec{P} = -\vec{N_2} \end{cases}$$

$x: \; P\sin\alpha = m_1 a_1$

$-P\sin\alpha = m_2 a_{2x} = m_2(a_1 - a_2'\cos\alpha)$

$y: \; P\cos\alpha - m_2 g = -a_2'\sin\alpha \cdot m_2$

$$\begin{cases} -m_1 a_1 = m_2(a_1 - a_2'\cos\alpha) \\ m_1 a_1 \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - m_2 g = -m_2 a_2' \sin\alpha \quad \Big/ : m_2 \; \Big/ : \sin\alpha \end{cases}$$

$\cancel{\frac{m_1 a_1 \cos\alpha}{m_2 \sin^2\alpha} - \frac{g}{\sin\alpha} = -a_2'}$

$$a_2' = \frac{g}{\sin\alpha} - \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot a_1$$

$$-m_1 a_1 = m_2\left(a_1 + \frac{m_1}{m_2} a_1 \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - g\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

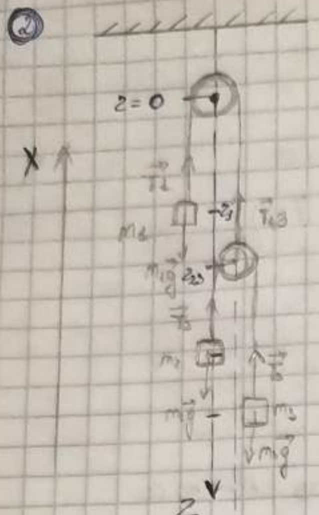
$$-m_1 a_1 = m_2 a_1 + m_1 a_1 \operatorname{ctg}^2\alpha - m_2 g \operatorname{ctg}\alpha$$

$$m_2 g \operatorname{ctg}\alpha = m_2 a_1 + m_1 a_1 \operatorname{ctg}^2\alpha + m_1 a_1.$$

$$a_1(m_1 + m_2 + m_1 \operatorname{ctg}^2\alpha) = m_2 g \operatorname{ctg}\alpha \quad \Big/ \cdot \sin^2\alpha$$

$$a_1 = g\frac{m_2 \sin\alpha\cos\alpha}{m_1\sin^2\alpha + m_2\sin^2\alpha + m_1\cos^2\alpha} = g\frac{m_2\sin\alpha\cos\alpha}{m_1 + m_2\sin^2\alpha}$$

②



Дано: m_1, m_2, m_3

$T_1 = ?$ $T_2 = ?$

1т: $m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$

3т: $m_3\vec{g} + \vec{T}_3 = m_3\vec{a}$

$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$

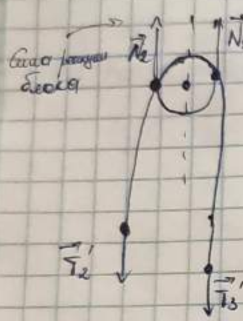
$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$

$m_3\vec{g} + \vec{T}_3 = m_3\vec{a}_3$

$$x: \begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a_{1x} \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_{2x} \\ T_3 - m_3 g = m_3 a_{3x} \end{cases}$$

Уметь проделывать

в д/з в данной задаче направлять

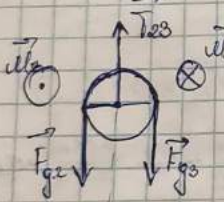


По III з-ну Ньютона: $\vec{T}_2 = -\vec{T}_2'$, $\vec{T}_3 = -\vec{T}_3'$

$\vec{T}_2' = -\vec{N}_2$

$\vec{T}_2' + \vec{N}_2 = \overset{0}{m_{н2}} \cdot \vec{a}_{н2}$ $\Rightarrow$ $\vec{T}_3' = -\vec{N}_3$

$\vec{T}_3' + \vec{N}_3 = \underbrace{m_{н3}}_{0} \cdot \vec{a}_{н3}$



$\vec{F}_{д2} = -\vec{N}_2$

$\vec{F}_{д3} = -\vec{N}_3$

$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$

Уравнение моментов: $\vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \underbrace{J_{бл.}}_{=0} \cdot \vec{\gamma}$ — момент инерции для блока.

$\Downarrow$

$M_2 = M_3 \Rightarrow F_{д2} = F_{д3}$

$\Downarrow$

$T_2' = T_3' \Leftarrow N_2 = N_3$

$\Downarrow$

$T_2 = T_3$

Для подв. блока:

$\vec{T}_{23} + \vec{F}_{д2} + \vec{F}_{д3} + \underbrace{m_{бл}\vec{g}}_{=0} = \underbrace{m_{бл}}_{=0}\vec{a}_{бл.}$

$x: T_{23} - F_{д2} - F_{д3} = 0 \to T_{23} = T_2 + T_3$

Следующий (неподвижный) блок:

По аналогии: $T_{23} = T_2 + T_3$

Введём ось x: $l_{\text{верх. нитки}} = x_1 + x_{23} + \pi R \quad \Big| \frac{d}{dt}$

$$0 = v_{1x} + v_{\text{бл}x} \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$0 = a_{1x} + a_{\text{бл}.x}$$

$$l_{\text{нижн. нитки}} = x'_2 + x'_3 + \pi R_{\text{нижн.}}$$

$$\Downarrow$$

$$a'_{2x} + a'_{3x} = 0$$

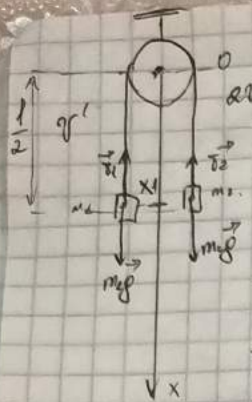
Для ускорений выводим всегда

$$a_{2x} = a_{\text{бл}.x} + a'_{2x} = -a_{1x} + a'_{2x}$$

$$a_{3x} = a_{\text{бл}x} + a'_{3x} = -a_{1x} - a'_{2x}$$

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a_{1x} \\ T_2 - m_2 g = m_2 \left(-a_{1x} + a'_{2x}\right) \\ T_2 - m_3 g = m_3 \left(-a_{1x} - a'_{2x}\right) \end{cases}$$

$$T_1 = 2T_2$$



$m_1\vec a_1 = m_1\vec g + \vec T_1$

$\vec a_1 = \vec a_2$ (отн. блока) $\Rightarrow$ $\vec V_1 = \vec V_2$ (добегут одновременно)

$\frac{l}{2} + \frac{l}{2} = x_1 + x_2$

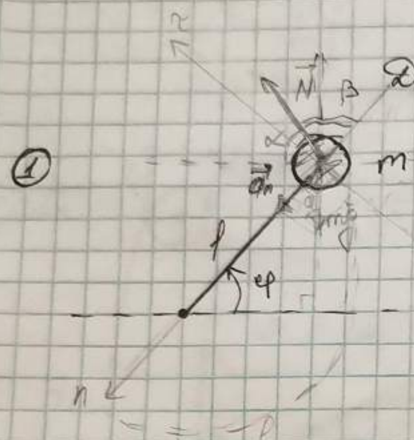
$\frac{d(\frac{l}{2})}{dt} + \frac{d(\frac{l}{2})}{dt} = V_{1x} + V_{2x} = 2V_{1x}$

$-V' - 2V' = 2V_{1x} \Rightarrow V_{1x} = -\frac{3}{2}V'$

$t^* = \frac{l}{3V'}$

Динамика вращательного движения.

①



$\omega = const$

С какой силой ($F_{ш-ст}(\varphi)$) - ?

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, $a_n = \frac{V^2}{l}$ $\quad V = \omega R$

$a_n = \omega^2 l$

$\vec N + m\vec g = m\vec a$

$\omega = const \Rightarrow V = const \Rightarrow a_\tau = 0$

$\vec F_{ш-ст} = -\vec N$

$\vec a = \vec a_n + \vec a_\tau = \vec a_n$

$\vec N = (m\vec a - m\vec g) = m(\vec a - \vec g)$

n: $ma_n = mg\sin\varphi + N_n$ $\quad N_n$

τ: $0 = -mg\cos\varphi + N_\tau \rightarrow N_\tau = mg\cos\varphi$

$N = \sqrt{N_\tau^2 + N_n^2} = \sqrt{m^2g^2\cos^2\varphi + (ma_n - mg\sin\varphi)^2} =$

$= \sqrt{m^2g^2\cos^2\varphi + m^2a_n^2 - 2m^2a_ng\sin\varphi + m^2g^2\sin^2\varphi} =$

$= \sqrt{m^2g^2 + m^2a_n^2 - 2m^2a_ng\sin\varphi} = \sqrt{m^2g^2 + m^2\cdot\omega^4l^2 - 2m^2\omega^2lg\sin\varphi} =$

$= m\sqrt{g^2 + \omega^4l^2 - 2\omega^2lg\sin\varphi}$

$tg\beta = \frac{N_\tau}{N_n} = \frac{mg\cos\varphi}{m(\omega^2l - g\sin\varphi)} = \frac{g\cos\varphi}{\omega^2l - g\sin\varphi}$

Частные случаи:

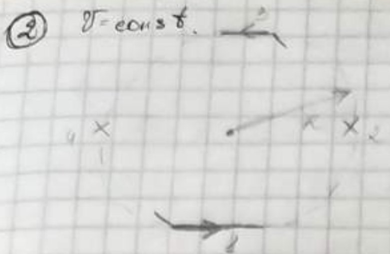
① $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

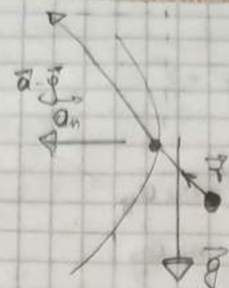
$N = m(g + \omega^2 l)$

② $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$N = m|(g - \omega^2 l)|$

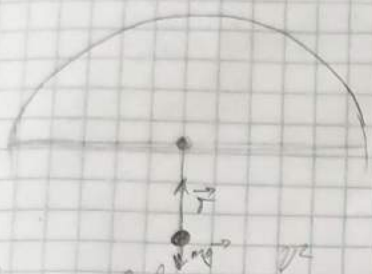
② $v = const.$





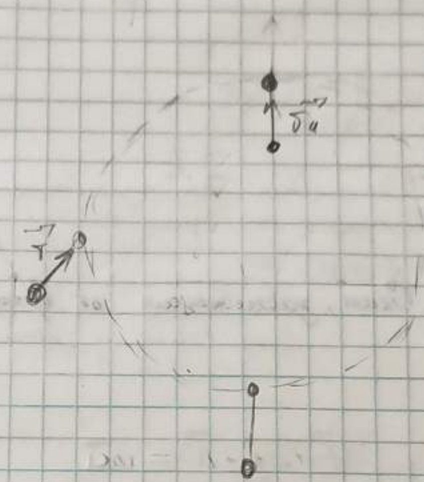
$m\vec a = m\vec g + \vec T$

$\vec T = m(\vec a - \vec g)$

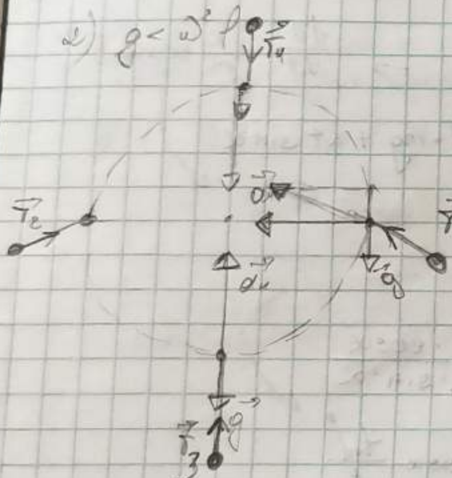


1) $g > \omega^2 l$ $a_n = \frac{v^2}{R}$

2) $g < \omega^2 l$

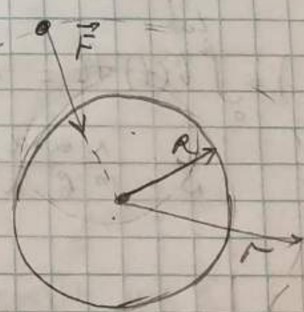


2) $g < \omega^2 l$



③ $r = ?$
$v = ?$
$\omega_З = \omega_c$

$F = G\frac{M\cdot m}{r^2}$



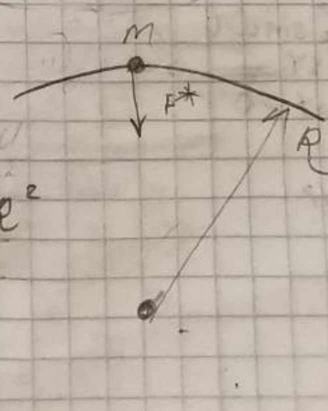
$\vec F = m\vec a$, $a_n = \frac{v^2}{r}$

$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\cdot a$

$v = \omega R$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega^2 r = \frac{GM}{r^2}$

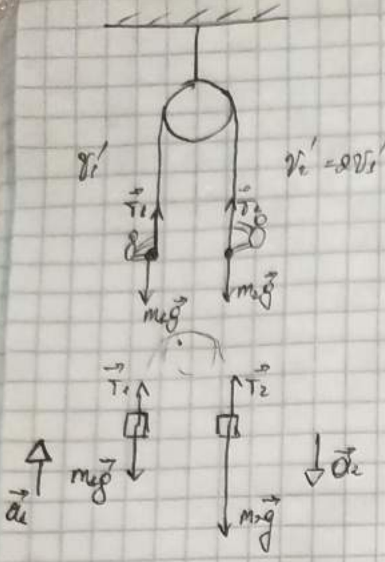


$r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$

$F^* = G\frac{mM}{R^2} = mg \Rightarrow M = \frac{gR^2}{G} \Rightarrow GM = gR^2$

$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}}$

$v = \omega r = \frac{2\pi}{T}\sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}}$



$$m\vec a = m\vec g + \vec T$$

$$T_1 = T_2$$

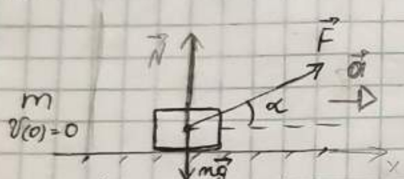
$$T_1 - m_1 g = m_1 a_{1y}$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_{2y}$$

Сила, зависящая от времени.

$$\vec F = \vec F(t)$$

①



m

$v(0)=0$

$F = kt$ $(k = const > 0)$

$v_{отр} = ?$ $S = ?$

$$\vec F + m\vec g + \vec N = m\vec a$$

ox: $ma = F\cos\alpha = kt\cos\alpha \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}\cos\alpha\, t$

oy: $0 = N - mg + F\sin\alpha \Rightarrow N = mg + kt\sin\alpha$

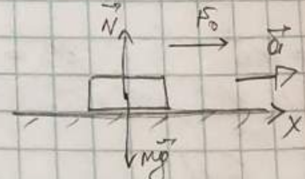
$$v(t) = \frac{k}{m}\cos\alpha\cdot\frac{t^2}{2}$$

Отрыв: $N = 0 \Rightarrow t_{отр} = \frac{mg}{k\sin\alpha}$

$$\Rightarrow v_{отр} = \frac{k}{m}\,\frac{\cos\alpha\cdot m^2 g^2}{2\cdot k^2\cdot\sin^2\alpha} = \frac{mg^2\cdot\cos\alpha}{2k\cdot\sin^2\alpha}$$

$$S(t_{отр}) = \int_0^{t_{отр}} v(t)\,dt = \frac{k}{m}\cos\alpha\,\frac{t^3}{6}\Big|_0^{t_{отр}} = \frac{k}{m}\cdot\cos\alpha\,\frac{t_{отр}^3}{6}$$

$$S = \frac{k\cos\alpha\cdot m^3 g^3}{m\;6\;k^3\sin^3\alpha} = \frac{m^2 g^3\cos\alpha}{6k^2\sin^3\alpha}$$



② m

$v(0) = 0$

$\vec F(t) = \vec F_0\sin\omega t$

$F_0 = const$

$\omega = const > 0$

$S(t) = ?$

II з-н Ньютона: $\vec F = m\vec a$

$$F = ma$$

$$\vec F_0\sin\omega t = m\vec a$$

$$\vec F_0\sin\omega t = \frac{m\,d\vec v}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{\vec v(t)} d\vec v = \int_0^t \frac{\vec F_0}{m}\sin\omega t'\,dt'$$

$$\vec v(t) = \frac{\vec F_0}{m}\left(-\frac{\cos\omega t}{\omega}\Big|_0^t\right) = \frac{F_0}{m}\left(-\frac{\cos\omega t}{\omega} + \frac{1}{\omega}\right) =$$

$$= \frac{F_0}{m\omega} - \frac{F_0 \cos\omega t}{m\omega} = \frac{F_0}{m\omega}(1-\cos\omega t)$$

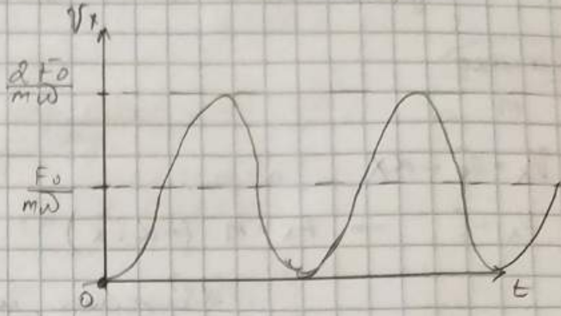
x: $v_x(t) = \frac{F_0}{m\omega}(1-\cos\omega t) \geq 0$

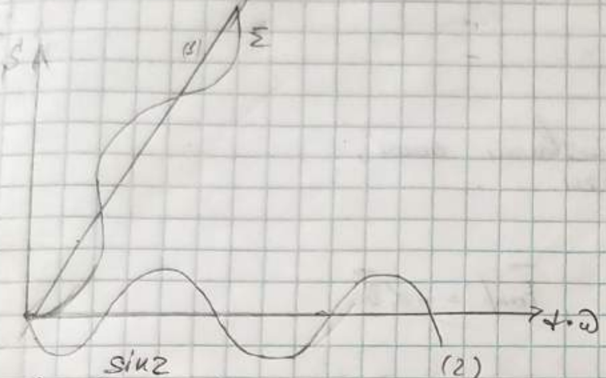
S – интеграл от модуля ск-ти.

$$S(t) = \int_0^t v(t')dt' = \frac{F_0}{m\omega}\int_0^t (1-\cos\omega t')dt' =$$

$$= \frac{F_0}{m\omega}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right) =$$

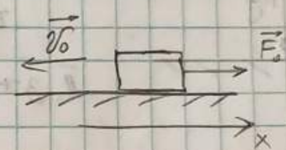
$$= \frac{F_0}{m\omega^2}(\omega t - \sin\omega t)$$





→ $\omega t \equiv z$

$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1.$



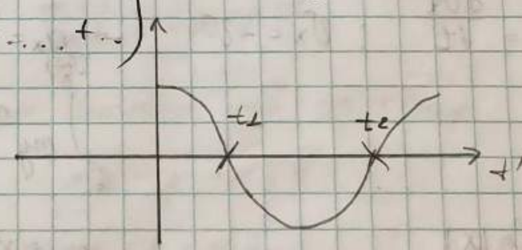
$v_x(0) = ?$ – для чисто колеб. движе.

$$v_x(t) = v_0 - \frac{F_0}{m\omega}\cdot\cos\omega t + \frac{F_0}{m\omega}$$

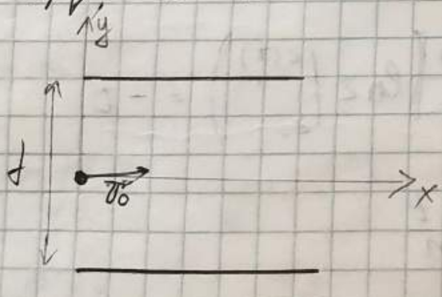
=> если $v_{0x} = -\frac{F_0}{m\omega}$ => $v_x(t) = -\frac{F_0}{m\omega}\cos\omega t$

$$S(t) = \int_0^t v(t')dt' = \frac{F_0}{m\omega}\int_0^t |\cos\omega t'|dt' =$$

$$= \frac{F_0}{m\omega}\left(\int_0^{t_1}\cos\omega t' dt' + \int_{t_1}^{t_2}(-\cos\omega t')dt' + \dots + \dots\right)$$



③ m, q, $U(t) = U_0\cos\omega t$ $x(0) = y(0) = 0$



$$\vec F = q\vec E =$$

$E_y = \frac{U}{d}$ → $F_y = qE_y = \frac{Uq}{d}$

oy: $F_y = ma_y$ → $\frac{U_0\cos\omega t\cdot q}{d} = ma_y$

ox: $a_x = 0$

$$a_y = \frac{U_0 q}{dm}\cdot\cos\omega t$$

$v_x = v_0$; $x(t) = v_0 t$

$$v_y(t) = \frac{U_0 q}{dm}\int_0^t \cos\omega t = \frac{U_0 q}{\omega d m}\sin\omega t$$

$$v_y(t) = \frac{q U_0 \sin\omega t}{m d\omega}$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{q U_0 \sin\omega t'}{m d\omega}\, dt' = \frac{-q U_0}{m d\omega^2}\cos\omega t'\Big|_0^t = \frac{q U_0}{m d\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

$$y(x) = \frac{q U_0}{m d\omega^2}\left(1-\cos\left(\frac{\omega x}{v_0}\right)\right)$$ ~ колебания со сносом

18.10.2020

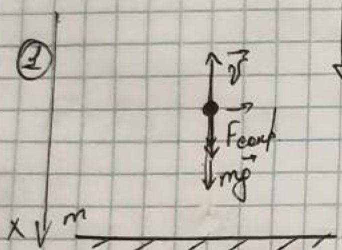
m

$v_x = v_0 - \alpha x$ $\alpha = const > 0$

$F_x = ?$ → $F_x = m\cdot(-\alpha v_x)$

Движение, под действием силы, зависящей от скорости.

①



$\downarrow \vec g$

$v(0) = v_0$

$F_{сопр} \sim v$; $\vec F_{сопр} = -\alpha \vec v$

$v(t) = ?$

$t_{под} = ?$

II з-н Ньютона: ox: $F_{сопр} + mg = ma$

$$F_{сопр} + mg = \frac{m\,dv}{dt}$$

$$m\vec a = m\vec g + \vec F_{сопр} = m\vec g - \alpha\vec v$$

x: $ma_x = mg + \alpha v$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}\ ; \quad v_x = -v \quad \rightarrow a_x = -\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -(mg+\alpha v) \quad \Big| \cdot \frac{dt}{mg+\alpha v}$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{m\,dv}{mg+\alpha v} = -\int_0^t dt'$$

$$\int \frac{dz}{z} = \ln|z|$$

$$mg + \alpha v = z$$

$$0 + \alpha\, dv = dz \ ; \quad dv = \frac{dz}{\alpha}$$

$$\frac{m}{\alpha}\int_{z_0}^{z(t)} \frac{dz}{z} = -t \Rightarrow \frac{m}{\alpha}\left(\ln z\Big|_{z_0}^{z(t)}\right) = -t$$

$$\Rightarrow \ln\frac{mg+\alpha v(t)}{mg+\alpha v_0} = -\frac{\alpha t}{m}$$

$$\frac{mg+\alpha v(t)}{mg+\alpha v_0} = e^{-\frac{\alpha t}{m}}$$

$$v(t) = \frac{(mg+\alpha v_0)\cdot e^{-\frac{\alpha t}{m}} - mg}{\alpha}$$

$t_{под}$ при $V(t)=0$

$\to (mg+\alpha V_0)\cdot e^{-\frac{\alpha t}{m}} = mg$

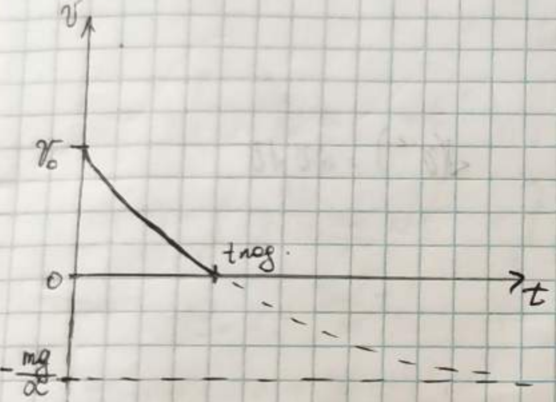
$$e^{-\frac{\alpha t}{m}} = \frac{mg}{mg+\alpha V_0}$$

$$\cancel{-\frac{\alpha t}{m} = \ln\left(\frac{mg}{mg+\alpha V_0}\right)} \to$$

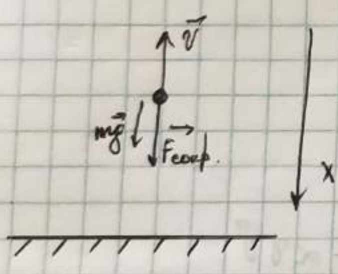
$$\frac{1}{e^{\frac{\alpha t}{m}}} = \frac{mg}{mg+\alpha V_0} \to e^{\frac{\alpha t}{m}} = \frac{mg+\alpha V_0}{mg}.$$

$$\frac{\alpha t}{m} = \ln\left(1+\frac{\alpha V_0}{mg}\right)$$

$$t_n = \frac{m}{\alpha}\cdot\ln\left(1+\frac{\alpha V_0}{mg}\right)$$



②



$V(0)=V_0$

$F_{сопр} \sim V^2$

$t_{под} = ?$

$h_{max} = ?$

$$\vec{F}_{сопр} = -\alpha V\cdot\vec{V}$$

II з-н Ньютона: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{сопр}$

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \alpha V\vec{V}$$

$$x:\ ma_x = mg + \alpha V^2$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt};\ V_x = -V \Rightarrow a_x = -\frac{dV}{dt}$$

$$-m\cdot\frac{dV}{dt} = mg+\alpha V^2;$$

$$\frac{m\,dV}{dt} = -(mg+\alpha V^2) \quad \Big| \cdot\frac{dt}{mg+\alpha V^2}$$

$$\frac{m\,dV}{mg+\alpha V^2} = -dt;\quad \frac{m}{\alpha}\int_{V_0}^{V(t)}\frac{dV}{V^2+\frac{mg}{\alpha}} = -\int_0^t dt$$

$$\frac{m}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{V\sqrt{\alpha}}{\sqrt{mg}}\Bigg|_{V_0}^{V(t)}\right) = -t$$

$$\frac{m}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\alpha}\,v(t)}{\sqrt{mg}} - \sqrt{\frac{\alpha}{mg}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{v_0\sqrt{\alpha}}{\sqrt{mg}}\right) = -t$$

$$t = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}\,\mathrm{arctg}\frac{v_0\sqrt{\alpha}}{\sqrt{mg}} - \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}\,\mathrm{arctg}\frac{v(t)\sqrt{\alpha}}{\sqrt{mg}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{\alpha g}}\left(\mathrm{arctg}\left(v_0\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}\right) - \mathrm{arctg}\left(v(t)\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}\right)\right)$$

$$t_{под.} = \sqrt{\frac{m}{\alpha g}}\cdot\mathrm{arctg}\left(v_0\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}\right)$$

$$v = \frac{dh}{dt} \rightarrow dt = \frac{dh}{v}$$

$$\frac{m\,dv}{dt} = -(mg+\alpha v^2)$$

$$\frac{v\,m\,dv}{dh} = -(mg+\alpha v^2) \quad \Big|\cdot\frac{dh}{mg+\alpha v^2}$$

$\cancel{m v dv =}$ -

$$\frac{m v\,dv}{mg+\alpha v^2} = -dh \quad \Big|\cdot\frac{2}{2} \qquad d(v^2) = 2v\,dv$$

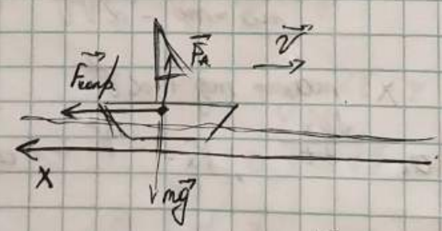
$$\int_{v_0}^{0}\frac{m\,(dv^2)}{2(mg+\alpha v^2)} = -\int_0^{h_{max}} dh$$

$$\frac{m}{2\alpha}\int_{v_0}^{0}\frac{dv^2}{\frac{mg}{\alpha}+v^2} = -h_{max}$$

$$h_{max} = \frac{m}{2\alpha}\ln\frac{\frac{mg}{\alpha}+v_0^2}{\frac{mg}{\alpha}}$$

(3) v_0, m

$F_{сопр.} \sim v^2$



$$\vec F_{сопр.} = -\alpha v\vec v$$

$v(t) = ?$

$t_{ост.} = ?$

$S_{ост.} = ?$

II з-н Ньютона: $\vec F_A + m\vec g + \vec F_{сопр.} = m\vec a$

$$\vec F_A + m\vec g - \alpha v\vec v = m\vec a$$

$$ox:\ \alpha v^2 = m a_x$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow a_x = \frac{-dv}{dt}$$

$$\alpha v^2 = -\frac{m\,dv}{dt} \quad \Big|\cdot\frac{dt}{v^2}$$

$$\int_{v_0}^{v(t)}\frac{dv}{v^2} = \int_0^t -\frac{\alpha}{m}\,dt$$

$$-\frac{1}{v}\Big|_{v_0}^{v(t)} = -\frac{\alpha t}{m}$$

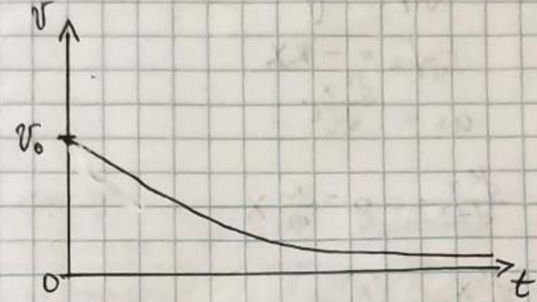
$$\frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v_0} = \frac{\alpha}{m}t \qquad \frac{1}{v(t)} = \frac{\alpha t}{m} + \frac{1}{v_0}$$

$$v(t) = \frac{1}{\frac{\alpha}{m}t + \frac{1}{v_0}} = \frac{m v_0}{\alpha t v_0 + m} \qquad \frac{1}{v(t)} = \frac{\alpha t v_0 + m}{m v_0}$$

$$v(t) = \frac{m v_0}{\alpha t v_0 + m}$$

$t_{ост.} \to v(t) = 0$

$\cancel{\frac{m v_0}{\alpha t v_0 + m} = 0}$



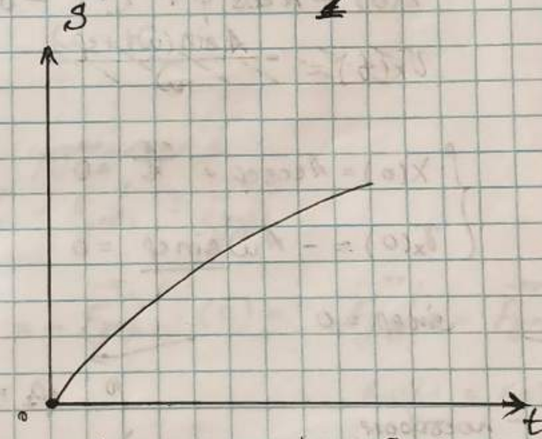
$t_{ост.} \to \infty$

$$\int dS = \int \frac{v_0}{1 + v_0 \frac{\alpha}{m} t} dt'$$

$$S(t) = \int_0^t \frac{v_0}{1 + v_0 \frac{\alpha t'}{m}} dt' = \int_0^t \frac{v_0 dt'}{1 + \frac{v_0 \alpha}{m} t'} = v_0 \frac{m}{\alpha v_0} \int_1^{1 + v_0 \frac{\alpha t}{m}} \frac{dz}{z} = \frac{m}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{v_0 \alpha}{m} t\right)$$

$$z = 1 + \frac{v_0 \alpha t'}{m}$$

$$dz = 0 + \frac{v_0 \alpha dt'}{m}$$



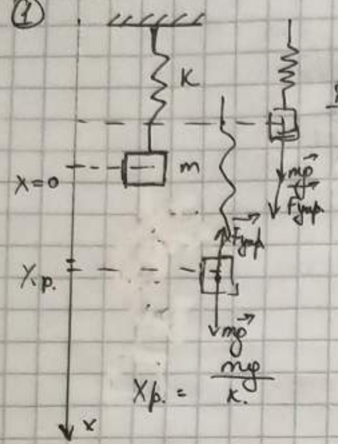
$$S_{ост.} = S(t_{ост.}) = S(t \to \infty) \to \infty$$

20.10.2020

Движение под действием квазиупругой силы $\longleftrightarrow \vec{F}(\vec{r})$

$|\vec{F}| \sim |\vec{r}|$

1.



$X_p = \frac{mg}{k}$

$v_x(0) = 0$
$x(0) = 0$
$x(t) = ?$

II з-н Ньютона: $m\vec{g} + \vec{F}_{упр.} = m\vec{a}$

$$ma_x = mg + F_{упр x}$$

$$F_{упр.x} = -kx$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{k}{m}x$$

в 1 степени!
только если будет плюс.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2}x = g$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(0) = A\cos\varphi + \frac{mg}{k} = 0$$

$$v_x(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} x(0) = A\cos\varphi + \frac{mg}{k} = 0 \\ v_x(0) = -A\omega\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

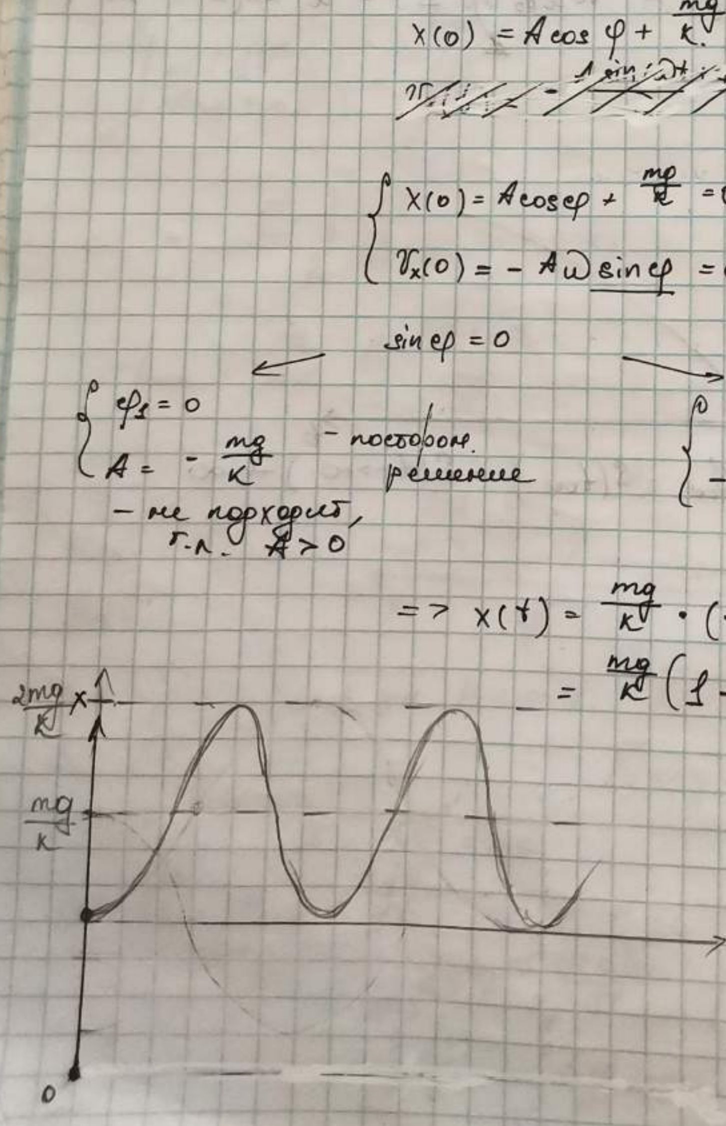
$$\sin\varphi = 0$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ A = -\frac{mg}{k} \end{cases}$$ – посторон. решение

– не подходит, т.к. $A > 0$

$$\begin{cases} \varphi_2 = \pi \\ -A + \frac{mg}{k} = 0 \rightarrow A = \frac{mg}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{mg}{k} \cdot (-\cos\omega t) + \frac{mg}{k} = $$
$$= \frac{mg}{k}(1 - \cos\omega t)$$ ~ ответ.

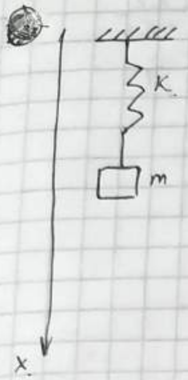


$y = 1 - \cos\omega t$

$$(F_{упр.})_{max} = k \cdot \frac{2mg}{k} = 2mg$$

$$(F_{упр.})_{min} = 0$$

$v_x(0)=0$
$x(0)=?$ чтобы не сорвался.

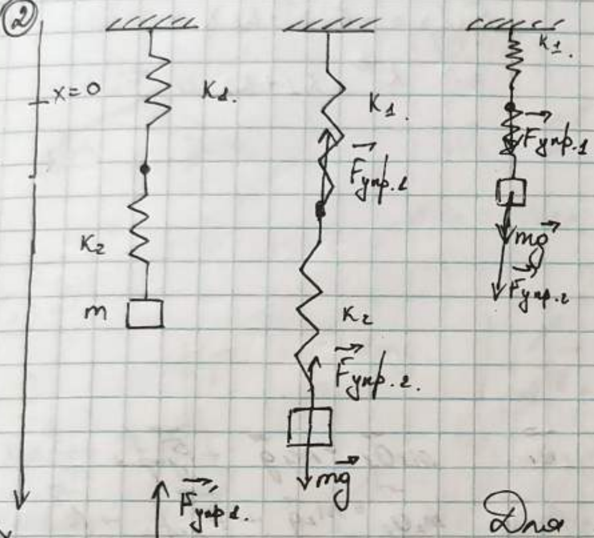


$(F^*_{упр})_{max} \le 2mg$. Если будет больше, то в верхней точке грузик оторвётся от крючка.

$x_{max} \le \frac{2mg}{k}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

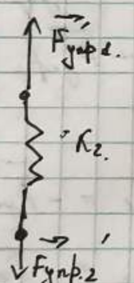
(2)



II з-н Ньютона:

$$\vec F_{упр.2} + m\vec g = m\vec a$$

$$\vec F_{упр.2}' = -\vec F_{упр.2} \quad (\text{III})$$



Для пружинки 2:

$$\underbrace{m_{пр.2}}_{=0}\vec a_2 = \vec F'_{упр2} + \vec F'_{упр1}$$

$$\vec F'_{упр.2} = -\vec F'_{упр.1} \quad (\text{II}) \Rightarrow \vec F_{упр2} = \vec F_{упр.1}.$$

$$x = x_1 + x_2 \qquad k_1x_1 = k_2x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{k_2}{k_1}x_2$$

$$x:\ ma_x = mg + F_{упр.2x}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = g - \frac{k_2}{m}x_2$$

$$\frac{d^2\left(\frac{k_2}{k_1}x_2 + x_2\right)}{dt^2} + \frac{k_2}{m}x_2 = g$$

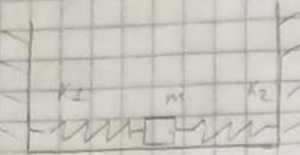
$$\left(\frac{k_2}{k_1}+1\right)\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k_2}{m}x_2 = g \quad \Big| : \left(\frac{k_2}{k_1}+1\right)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \underbrace{\frac{k_2}{m\left(\frac{k_2}{k_1}+1\right)}}_{=\omega^2}x_2 = \frac{g}{\left(\frac{k_2}{k_1}+1\right)}$$

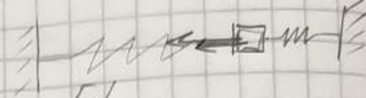
$$\omega^2 = \frac{k_2}{m\left(\frac{k_2}{k_1}+1\right)}; \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 m\left(\frac{k_2}{k_1}+1\right)}{k_2}$$

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m\left(\frac{k_2}{k_1}+1\right)} = \frac{k_2 k_1}{m(k_2+k_1)} \rightarrow k^* = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{m(k_2+k_1)}}{\sqrt{k_2 k_1}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m(k_2+k_1)}{k_2 k_1}}$$



$$\omega^2 = \frac{k_1+k_2}{m}$$



$$\vec{F}_{упр} = \vec{F}_{упр.1} + \vec{F}_{упр.2}$$

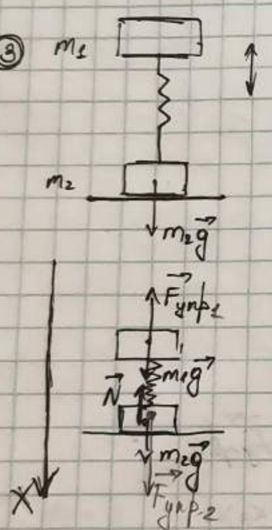
$$F_{упр\,x} = -k_1 x - k_2 x$$

$$\Rightarrow k^* = k_1 + k_2$$

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 = m a_x$$

$$\omega^2 = \frac{k_1+k_2}{m}$$

③



A, ω

$P_{min} = ?$

$P_{max} = ?$

~~Для 1: $\vec{F}_{упр} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1$~~

~~Для 2: $\vec{F}_{упр_2} + m_2\vec{g} + \vec{N} = \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{=0}$~~

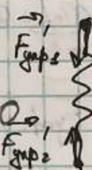
$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{F}_{упр.1}$$

$$\underbrace{m_2\vec{a}_2}_{=0} = m_2\vec{g} + \vec{F}_{упр.2} + \vec{N}$$

~~Ox: $F_{упр.1x} + m_1 g = m_1 a_x$~~

~~$F_{упр.2x} + m_2 g - N = 0$~~

~~$F_{упр.1} = F_{упр.2x}$~~



$$\vec{F}_{упр.1} = -\vec{F}'_{упр.1}$$

$$\vec{F}_{упр.2} = -\vec{F}'_{упр.2}$$

$$\underbrace{m_{пр.}\vec{a}}_{=0} = \vec{F}'_{упр.1} + \vec{F}'_{упр.2}$$

$$\underset{(II)}{\vec{F}'_{упр.1}} = -\vec{F}'_{упр.2} \Rightarrow \underset{(III)}{\vec{F}_{упр.2}} = -\vec{F}_{упр.1}$$

$$X:\ 0 = m_2 g + F_{упр.2x} - N \rightarrow N = m_2 g + F_{упр.2x} = m_2 g - F_{упр.1x}$$

$$m_1 a_{1x} = m_1 g + F_{упр.1x}$$

$$N = m_2 g + m_1 g - m_1 a_{1x} = (m_1+m_2)g - m_1 a_{1x}$$

Закон движения для 1 груза:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v_{1x}'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \rightarrow a_{1x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$N = (m_1 + m_2)g + m_1 A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\vec{P} = -\vec{N} \quad \Rightarrow \quad P = N \quad (\text{по модулю})$$

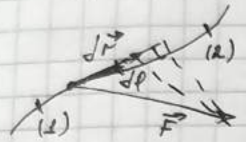
$$\underline{P_{min.} = (m_1 + m_2)g - A\omega^2 \cdot m_1.} \quad \longrightarrow \quad (m_1 + m_2)g - A\omega^2 m_1 \geqslant 0$$

$$P_{max} = (m_1 + m_2)g + A\omega^2 m_1. \qquad \underline{A \leqslant \frac{(m_1 + m_2)g}{\omega^2 m_1}}$$

$\boxed{21.10.2020}$

Работа и энергия.

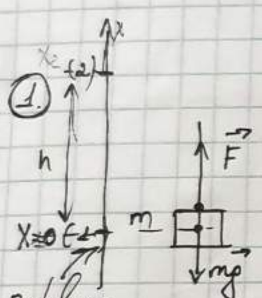
$$A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} F_l \, dl$$



$$W_п(\vec{r}_1) - W_п(\vec{r}_2) = A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} F_l^{конс} dl$$

$$W_к = \frac{mv^2}{2}$$

$$W_{к2} - W_{к1} \equiv \Delta W_к = A_{12}^{всех\ сил}$$



1.

$$F = 2mg. \quad \Big| \quad A^F = ?$$
$$h \qquad\quad \Big| \quad A^{mg} = ?$$

0 уровень
$\to W_п(x=0) = 0$

$$A^F = \int_{(1)}^{(2)} F_x \, dx = \int_{(1)}^{(2)} 2mg \cdot dx = 2mg \cdot x \Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= 2mg(x_2 - x_1) = 2mgh$$

$$A^{mg} = \int_{x_1}^{x_2} mg_x \, dx = -\left(mg \Big|_{x_1}^{x_2}\right) = -(mgh) = -mgh$$

$$A^F = \int_0^h F_x \, dx = \int_0^h 2mg \, dx = 2mgh$$

$$W_п(h) - \underbrace{W_п(0)}_{=0} = \int_h^0 (-mg) \, dx = mgh$$

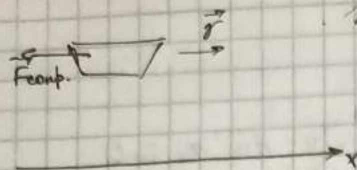
Пусть $v(x=0) = 0 = v_1$
$v_2 = v(x = h) = ?$

$$W_{к2} - \underbrace{W_{к1}}_{=0} = A^F + A^{mg}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} = 2mgh - mgh. \quad \to v_2^2 = 2gh. \quad \to v_2 = \sqrt{2gh}$$

(2)

$$\vec{F}_{сопр.} = -\alpha v \cdot \vec{v}$$



$$\frac{v(t=0) = v_0}{A^{сопр.} = ?}$$

II з-н Ньютона: $\vec{F}_{сопр.} + m\vec{g} + \vec{F}_A = m\vec{a}$

$$\vec{F}_A + m\vec{g} - \alpha v \cdot \vec{v} = m\vec{a}$$

$$Ox: -\alpha v^2 = m a_x \quad ; \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

$$-\alpha v^2 = \frac{m\,dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{\alpha}{m}\,dt$$

$$-\frac{1}{v}\Big|_{v_0}^{v(t)} = \frac{-\alpha t}{m}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 \alpha t}{m}}$$

$v \to 0$ при $t \to +\infty$

$$S(t) = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \frac{v_0\alpha t}{m}}\,dt' = \frac{m}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{v_0 \alpha t}{m}\right)$$

$$\cancel{\lim_{t\to\infty} S(t) = \frac{m}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{v_0\alpha t}{m}\right)^{\frac{m}{v_0\alpha t}}}$$

$$A^{сопр.} = \int_0^{x_{ост.}} F_x^{сопр.}\,dx = \int_0^{x_{ост}} (-\alpha v^2)\underbrace{dx}_{= v\,dt} = -\alpha \int_0^{t_{ост}} v^3\,dt =$$

$$= -\alpha \int_0^{t_{ост.}} \frac{v_0^3}{\left(1 + \frac{v_0\alpha t}{m}\right)^3}\,dt = -\alpha \int_0^{t_{ост}} \frac{(m v_0)^3\,dt}{(m + v_0\,\alpha t)^3} =$$

$$= -\alpha (m v_0)^3 \int_0^{t_{ост.}} \frac{dt}{(m + v_0\alpha t)^3} \ominus$$

$$z = (m + v_0 \alpha t) \xrightarrow{t\to\infty} z_{ост.} = \infty$$

$$dz = v_0 \alpha \cdot dt \qquad \xrightarrow{t=0} z_0 = m$$

$$\ominus\ -\alpha (m v_0)^3 \frac{1}{v_0\alpha} \int_{z_0}^{z_{ост.}} \frac{dz}{z^3} = \cancel{-\alpha \frac{(m v_0)^3}{v_0 \alpha} \cdot \left(\frac{z^2}{-2}\right)\Big|_{z_0}^{z_{ост}}} =$$

$$= -m^3 v_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \frac{1}{z^2}\Big|_{z_0}^{z_{ост.}} = \frac{m^3 v_0^2}{2}\left(\frac{1}{z_{ост}^2} - \frac{1}{z_0^2}\right) =$$

$$= -\frac{m v_0^2}{2}$$

③ $r_0 \to \infty$

$F_{сопр.} = 0$

$v = ?$

$\cancel{F_{\varphi} = G\frac{Mm}{}}$ $\qquad F = G\frac{Mm}{r^2}$

$$W_{k2} - W_{k1} = A^{F_{тяг}} = \int_{r_0}^{R_3} F_{тяг\,r}\,dr$$

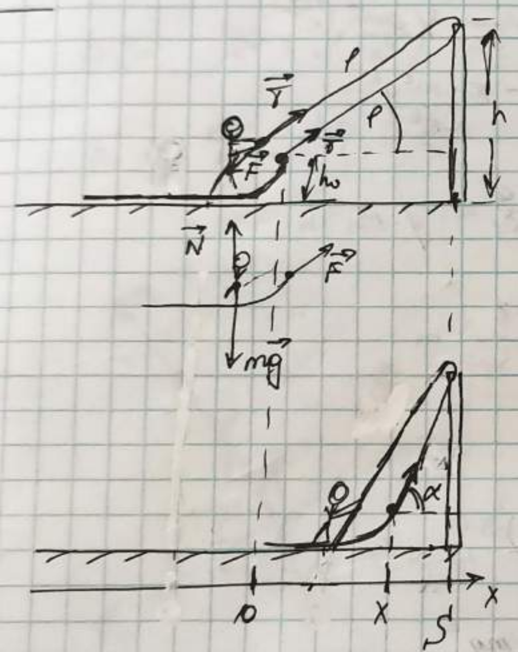
$$W_{k2} - \underbrace{W_{k1}}_{=0} = A^{тяг} = \int_{\infty}^{R_3} F_r\,dr =$$

$$= -\int_{\infty}^{R_3} G\frac{M\cdot m}{r^2}\,dr = -\frac{GM\cdot m}{1}\left(-\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{R_3}\right) =$$

$$= -\frac{GM\cdot m}{1}\cdot\left(-\frac{1}{R_3} + \underbrace{\frac{1}{\infty}}_{0}\right) = \frac{GM\cdot m}{R_3}$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GM\cdot m}{R_3} \to v = \sqrt{\frac{2GM}{R_3}}$$

④



$h,\ 2f,\ F = const,\ m;\quad h_0 \lll h$

$v = ?\qquad$ по 3 з-ну: $\vec{T} = -\vec{F}$

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = A^{всех\ сил} = \underbrace{A^{mg}}_{=0} + \underbrace{A^{N}}_{=0} + 2A^{T} =$$

$$= 2\int_0^S T_x\,dx =$$

$$= 2\int_0^S F\cos\alpha\,dx \ (=)$$

$$\cos\alpha = \frac{S-x}{\sqrt{(S-x)^2+h^2}}$$

① $S - x = z$

$-dx = dz$

② $z^2 + h^2 = y$

$d(z^2) = dy$

$\underline{d(z^2) = dy}$

$$(=)\ 2F\int_0^S \frac{(S-x)\,dx}{\sqrt{(S-x)^2+h^2}} = -2F\int_S^0 \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+h^2}} =$$

$$= -F\int_S^0 \frac{d(z^2)}{\sqrt{z^2+h^2}} = -F\int_{S^2+h^2}^{h^2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -F\cdot 2\sqrt{y}\,\Big|_{S^2+h^2}^{h^2} =$$

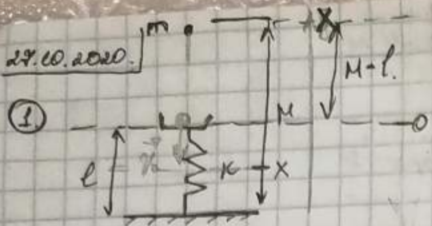
$$= -F\cdot 2\sqrt{h^2} + F\,2\sqrt{S^2+h^2} = 2F\sqrt{S^2+h^2} - 2Fh =$$

$$= 2F(l - h)$$

$$v^2 = \frac{4F(l-h)}{m} \to v = 2\sqrt{\frac{F(l-h)}{m}}$$

27.10.2020

①



$\Delta W_к = A^{mg}$

$\frac{m v_0^2}{2} = \int_0^{H-l} m g_y \, dy = mg(H-l)$

$\Delta W_{мех.} = A_{упр.}$

$W_{мех\,2} - W_{мех.\,1} = \cancel{\frac{mv^2}{2} - mg} = \left(\frac{mv^2}{2} + mgx\right) - mg(H-l)$

$W_п(x=0) - W_п(x) \quad \int_0^x (-mg)\, dx = -mgx$

$v_{max} - ?$

$v_2 = v\,; \; v_1 = 0$

$W_п(x=0) = 0$

$W_{мех\,2} - W_{мех\,1} = \frac{mv^2}{2} + mgx - mg(H-l) = \int_0^x \underbrace{F_{упр.x}}_{=-kx'} dx' =$

$= -\frac{kx^2}{2}$

$v = v_{max} \iff a_x = 0 \implies m\vec{g} + \vec{F}_{упр.} = 0$

$ox: \quad -mg - kx = 0 \quad \to \quad x = -\frac{mg}{k}$

$\frac{mv^2}{2} + mg\left(-\frac{mg}{k}\right) - mgH + mgl = -\frac{\cancel{k} \cdot m^2 g^2}{2k^2}$

$\frac{mv^2}{2} - \frac{m^2 g^2}{k} - mgH + mgl = -\frac{m^2 g^2}{2k} \quad /:m$

$\frac{v^2}{2} = \cancel{\frac{mg^2}{k}} + \cancel{\frac{mg^2}{2}} \cancel{- g(H-l)} \quad /\cdot 2$

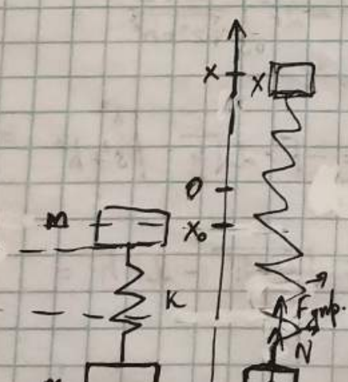
$v^2 = \cancel{\frac{2mg^2}{k} + \frac{2mg^2}{2} - 2g(H-l)}$

$v^2 = \cancel{\frac{2}{m}\left(\frac{(mg)^2}{2k}\right)}$

$v^2 = 2g(H-l) + \frac{mg^2}{k} = \left(\frac{(mg)^2}{2k} + mg(H-l)\right) \cdot \frac{2}{m}$

$\implies v^2 = 2g(H-l) + \frac{mg^2}{k}$

②



$(\Delta l)_{min} = ?$

$W_{мех.2} - W_{мех.1} = A^{р.сил} = A^{F_{упр.}}$

$x=0$ − недеформ.

$\Delta W_{мех} = A^{F_{упр.}} = \int_{x_0}^{x} F_{упр\,x}\, dx' = -\frac{kx^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}$

$\cancel{\frac{mv_0^2}{2}}$

$W_{мех\,2} - W_{мех.\,1} = A_{mg} + A_{F_{упр.}} = \int_{x_0}^{x} F_{упр\,x}\, dx' + \int_{x_0}^{x} (-mg)\, dx' =$

$= -\frac{kx^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} - mg(x - x_0)$

$$\frac{mV_2^2}{2} - \underbrace{\frac{mV_1^2}{2}}_{=0} = -\frac{kx^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} - mg(x-x_0)$$

т.к. отпускаем кубик.

II з-н Ньютона для нижнего кубика: $m\vec{g} + \vec{F}_{упр.} + \vec{N} = 0$

Условие отрыва $\vec{N} = 0$

$$-mg - kx = 0 \rightarrow x = +\frac{mg}{k}$$

$$x_0^2 + \frac{2mg}{k}x_0 - \frac{2mgx}{k} - \frac{mV_2^2}{k} - x^2 = 0$$

$$x_0 = -\frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + x^2 + \frac{2mgx}{k} + \underbrace{\frac{mV_2^2}{k}}_{=0}}$$

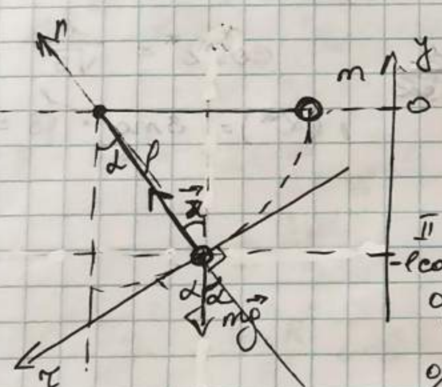
Т.е. если хотим найти $\Delta l_{min} \rightarrow V_2 = 0$

$$x_0 = -\frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2m^2g^2}{k^2}}$$

$$x_0 = -\frac{mg}{k} \pm \sqrt{4\frac{m^2g^2}{k^2}} = -\frac{mg}{k} \pm 2\frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow \Delta l_{min} = \left|-3\frac{mg}{k}\right| = 3\frac{mg}{k}$$

③



$a(\alpha) = ?$
$T(\alpha) = ?$

II з-н Ньютона: $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$

$\cancel{oy: T\cos\alpha - mg = ma_y}$

$\cancel{ox: T\sin\alpha = ma_x}$

$\cancel{a^2 = a_x^2 + a_y^2}$

$$n: \quad T - mg\cos\alpha = ma_n = m\frac{v^2}{l} \qquad (1)$$

$$\tau: \quad \cancel{m}g\sin\alpha = \cancel{m}a_\tau \qquad (2)$$

$$\vec{T} \perp \vec{v} \Rightarrow A_T = 0$$

$$\Delta W_k = \underbrace{A_T}_{=0} + A_{mg} = A_{mg}$$

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = A_{mg} = \int_0^{-l\cos\alpha} (-mg)\,dy = -mgy\Big|_0^{-l\cos\alpha} = mgl\cos\alpha$$

$$mv^2 = 2mgl\cos\alpha \xrightarrow{в\ (1)} T - mg\cos\alpha = 2mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow T = 3mg\cos\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{l} = 2g\cos\alpha$$

$$a_\tau = g\sin\alpha.$$

$$a(\alpha) = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \cancel{\ldots} \quad g\sqrt{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} =$$

$$= g\sqrt{3\cos^2\alpha + 1}$$

$$\underline{T = 3mg\cos\alpha.}$$

$T = ?$ при $v_y - max$.

• $v_{y\,max} \rightarrow a_y = 0$; $g\sqrt{3\cos^2\alpha+1}\cdot\cos\alpha = 0$

$$oy: \; -mg + T\cos\alpha^* = 0$$

$$T\cos\alpha^* = mg$$

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha^*}$$

$$T = 3mg\cos\alpha^*$$

$$3\cos\alpha^* = \frac{1}{\cos\alpha^*}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha^* = \frac{1}{3\cos\alpha^*}$$

$$\cos\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cancel{T = \frac{mg}{3\cos\alpha}} \qquad T(\alpha^*) = 3mg\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\sqrt{3}\,mg}$$

3.11.2020

Момент импульса.

$$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

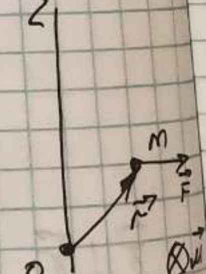
$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M} \quad ; \; \vec{M} = [\vec{r}; \vec{F}]$$

$\vec{N} = const$ при $\vec{M} = 0$

1) $\vec{r} \parallel \vec{F}$

2) $\vec{F} = 0$

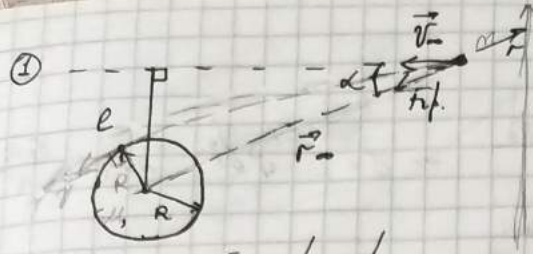
3) $\vec{r} = 0$



$\vec{M} \neq 0$, но $M_z = 0$

$N_z = const$

①



$v_\infty - ?$

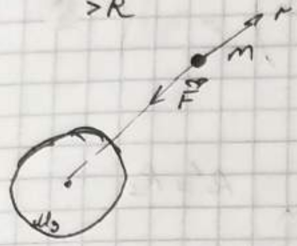
$\vec N = [\vec r, m\vec v]$

$\vec F = G\frac{M_3 \cdot m}{r^3}\cdot\vec r \Rightarrow \vec M = 0$

$\Downarrow$

$\vec N = const$

ℓ - прицельный параметр
$> R$



$[\vec r_\infty, m\vec v_\infty] = [\vec R, m\vec v]$

$[\vec r_\infty, \vec v_\infty] = [\vec R, \vec v]$

$Rv = \ell\cdot v_\infty = \underbrace{r_\infty \sin\alpha}_{\ell} v_\infty$

$\Rightarrow v_\infty = \frac{Rv}{\ell} \to v = \frac{\ell v_\infty}{R}$

Теорема об изменении кин. энергии:

$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_\infty^2}{2} = \cancel{\int_\infty^R F_r\, d\ell}$

$W_k - W_{k\infty} = A_F = \int_\infty^R F_r\, dr$

$\frac{\cancel{m}v^2}{2} - \frac{\cancel{m}v_\infty^2}{2} = \int_\infty^R \left(-G\frac{M_3 \cancel{m}}{r^2}\right)dr =$

$v^2 - v_\infty^2 = -2GM_3\int_\infty^R r^{-2}\cdot dr' = +2GM_3\left(\frac{1}{r}\Big|_\infty^R\right) =$

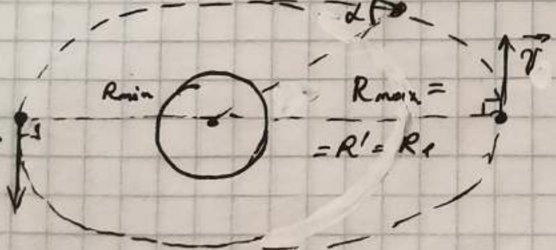
$= 2\frac{GM_3}{R}$

$\frac{\ell^2 v_\infty^2}{R^2} - \frac{v_\infty^2 R^2}{R^2} = 2\frac{GM_3 R}{\cancel{R^2}} \ /\cdot R^2$

$v_\infty^2(\ell^2 - R^2) = 2GM_3R \to v_\infty^2 = \frac{2GM_3R}{\ell^2 - R^2}$

$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM_3R}{\ell^2 - R^2}}$

②



$R = 1,25\, R_3 = \frac{5}{4}R_3.$

$v_0 = v_I$

$R_{min} = ?$

$R_{max} = ?$

$\vec F = G\frac{M_3\cdot m\cdot\vec r}{r^3}$

$\vec M = 0 \Rightarrow \vec N = const$

$$[\vec{R}; \vec{v}_0] = [\vec{R'}; \vec{v}]$$

$$R v_0 = R' \cdot v \cdot \sin\alpha$$

$$R' = \frac{R v_0}{v \sin\alpha} = \frac{1{,}25 R_з v_0}{v} \rightarrow v = \frac{5 R_з v_0}{4 R'} \Rightarrow v = \frac{v_0 R}{R'}$$

По теореме об изменении кин. энергии:

$$\cancel{\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int_{1{,}25R_з}^{R'} F_r\,dr = +2GM_з m\left(\frac{1}{r}\Big|_{1{,}25R_з}^{R'}\right) =}$$

$$\cancel{v^2 - v_0^2 = 2GM_з\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{1{,}25 R_з}\right)}$$

$$\cancel{v^2 - v_0^2 = 2GM_з\left(\frac{1}{R'} - \frac{4}{5R_з}\right)}$$

$$\cancel{\frac{25 R_з^2 v_0^2}{16 R'^2} - v_0^2 = \frac{2GM_з}{R'} - \frac{8GM_з}{5R_з}}$$

$R' = R_1$.

Просто запутался с обозначением.

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int_R^{R_1} F_r\,dr = -GM_з m \int_R^{R_1} \frac{dr}{r^2} = +GM_з m\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2GM_з\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right)$$

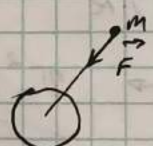
$$v_0^2\left(\left(\frac{R}{R_1}\right)^2 - 1\right) = 2GM_з \cdot \frac{1}{R}\left(\frac{R}{R_1} - 1\right), \text{ т.е. 1) } \frac{R}{R_1} - 1 = 0 \Rightarrow R_1^{(1)} = R$$

$$v_0^2\left(\frac{R}{R_1} + 1\right) = 2GM_з \frac{1}{R}$$

2) $$\frac{v_0^2 R}{R_1} + v_0^2 = \frac{2GM_з}{R}$$

$$\frac{v_0^2 R}{R_1} = \frac{2GM_з}{R} - v_0^2 \Rightarrow R_1^{(2)} = \frac{R}{\frac{2GM_з}{R v_0^2} - 1}$$

$$G\frac{M_з m}{R_з^2} = mg$$

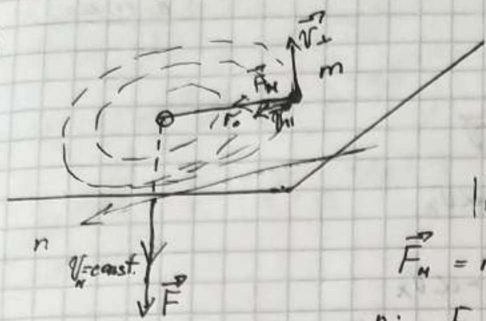


$$\frac{m v_1^2}{R_з} = G\frac{M_з m}{R_з^2}$$

$$R_1^{(2)} = \frac{1{,}25 R_з}{\frac{2GM_з}{1{,}25 R_з \cdot \frac{GM_з}{R_з}} - 1} = \frac{1{,}25 R_з}{0{,}6} \Rightarrow R_1^{(2)} = 2{,}08 R_з$$

$\frac{v_0 R}{R'}$

③



$\omega(r_0) = \omega_0$

$F(r) = ?$

$\vec{M} = [\vec{r}; \vec{F}_н] = 0 \quad \Rightarrow \vec{N} = const. \quad \vec{F}_н \parallel \vec{r}$

$|\vec{F}_н| = |\vec{F}|$

$\vec{F}_н = m\vec{a}_n$

$O^n: \quad F_н = ma_n = m\omega^2 r$

$[\vec{r}, \vec{v}] = [\vec{r}_0, \vec{v}_0]$

$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp \rightarrow \underbrace{[\vec{r}, \vec{v}_\parallel]}_{=0} + [\vec{r}, \vec{v}_\perp] = \underbrace{[\vec{r}_0; \vec{v}_{0\parallel}]}_{=0} + [\vec{r}_0, \vec{v}_0]$

$[\vec{r}, \vec{v}_\perp] = [\vec{r}_0, \vec{v}_{0\perp}]$

$r v_\perp = r_0 v_{0\perp}$

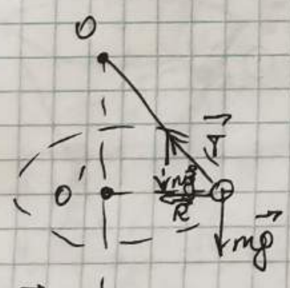
Известно: $v_\perp = \omega R$

$\rightarrow r \cdot \omega r = r_0 \cdot \omega_0 r_0$

$\omega = \omega_0 \frac{r_0^2}{r^2}$

$$\underline{F_н} = \frac{m\omega_0^2 r_0^4 \cdot r}{r^4} = \underline{\frac{m\omega_0^2 r_0^4}{r^3}}$$

Частный случай



$\vec{N} = const$

$\omega = const$

$\Downarrow$

$\vec{a} = \vec{a}_n$

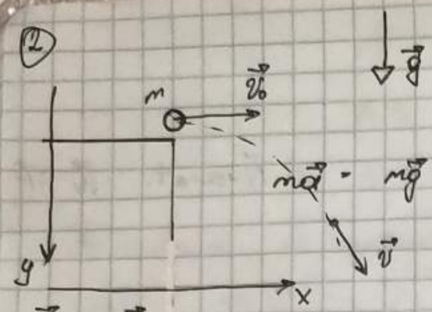
$\vec{F}_\Sigma = \vec{T} + m\vec{g}$

$\vec{a}_n \uparrow\uparrow \vec{F}_\Sigma \parallel \vec{r} \quad \Rightarrow \vec{M}_\Sigma = [\vec{r}, \vec{F}_\Sigma] = 0$

т.е. $\vec{N} = const$ отн. т. O'

{10.11.2020}

(2)



$\vec F_{сопр.} = -\alpha \vec v$

$$m\vec a = m\vec g + \vec F_{сопр.} = m\vec g - \alpha \vec v$$

x: $ma_x = -\alpha v_x$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\alpha}{m} v_x$$

$$\int_{v_0}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\alpha}{m}\int_0^t dt'$$

$$\ln v_x(t) - \ln v_0 = -\frac{\alpha t}{m}$$

$$\ln\frac{v_x(t)}{v_0} = -\frac{\alpha t}{m}$$

$$v_x(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{\alpha t}{m}} = v_0 \cdot e^{-\frac{2gt}{v_0}}$$

$2mg = \alpha v_0$

$\frac{\alpha}{m} = \frac{2g}{v_0}$

$\frac{m}{\alpha} = \frac{v_0}{2g}$

y: $ma_y = mg - \alpha v_y$

$$m\,dv_y = (mg - \alpha v_y)\,dt$$

$$dv_y = \left(g - \frac{\alpha}{m} v_y\right) dt$$

$$\int_0^{v_y(t)} \frac{dv_y}{\left(g - \frac{\alpha}{m} v_y\right)} = \int_0^t 1\,dt'$$

$$g - \frac{\alpha}{m} v_y = z$$

$$dz = 0 - \frac{\alpha}{m} dv_y \rightarrow \frac{\alpha\, dv_y}{m} = -dz$$

$$dv_y = \frac{-dz \cdot m}{\alpha}$$

$$-\frac{m}{\alpha}\int_{z_0}^{z(t)} \frac{dz}{z} = t \qquad z_0 = g$$

$$-\frac{m}{\alpha}\left(\ln z(t) - \ln z_0\right) = t$$

$$-\frac{m}{\alpha} \ln\frac{z(t)}{z_0} = t$$

$$-\frac{m}{\alpha} \ln\frac{g - \frac{\alpha}{m} v_y(t)}{g} = t, \qquad \ln\frac{g - \frac{\alpha}{m} v_y(t)}{g} = \frac{-\alpha t}{m}$$

$$g - \frac{\alpha}{m} v_y(t) = g \cdot e^{-\frac{\alpha t}{m}}$$

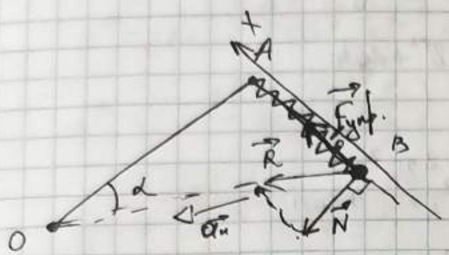
$$\frac{\alpha}{m} v_y(t) = g - g \cdot e^{-\frac{\alpha t}{m}}$$

$$v_y(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)$$

$$v_y(t) = \frac{v_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{2gt}{v_0}}\right)$$

и т.д.

③



$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{F}_{упр.}$

$\vec{a}_\tau = 0 \quad (\omega = const)$

$\vec{a} = \vec{a}_n$

$F_{упр.} = k|x|$

$AB = l_0 + |x|$

$R = OB = \frac{AB}{\sin\alpha}$

$a_n = \omega^2 R$

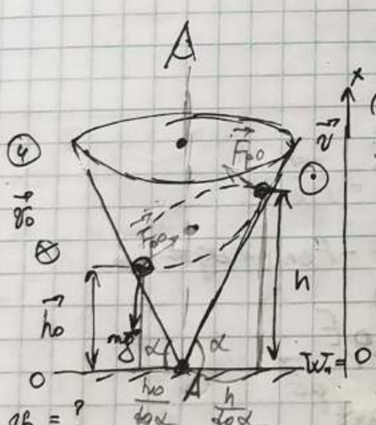
$x: \quad ma_x = F_{упр.x}$

$ma_n \sin\alpha = k|x|$

$m\omega^2(l_0 + |x|) = k|x|$

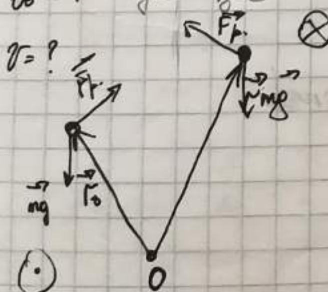
Момент импульса.
(продолжение)

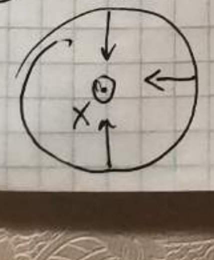
④



$v_0 = ?$

$v = ?$





По теореме об. изм. кин. энергии.

$$\cancel{\frac{mv^2}{2}} - \cancel{\frac{mv_0^2}{2}} = \cancel{\int_{h_0}^{h} mg_x\,dx} + \underbrace{A_{F_p}}_{=0}$$

$$\cancel{\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(h - h_0)}$$

$\vec{F}_p \perp \vec{v} \Rightarrow A_{F_p} = 0 \quad ; \quad \vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \neq 0$

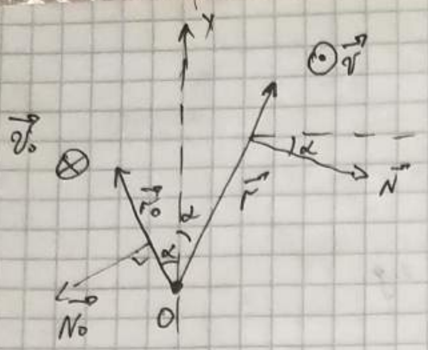
$x: \; M_x = 0$

$N_{0x} = N_x$

$\vec{N}_0 = [\vec{r}_0, m\vec{v}_0]$

$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$

вид сверху



$N_{0x} = N_x$

$m r_0 v_0 \sin\alpha = m r v \sin\alpha$

$$\frac{v_0}{v} = \frac{h}{h_0}$$

ЗСЭ: $\frac{mv_0^2}{2} + mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + mgh$

$$\frac{v_0^2}{2} + gh_0 = \frac{v^2}{2} + gh \quad \Big|\cdot 2$$

$$v_0^2 + 2gh_0 = v^2 + 2gh$$

$$v = \frac{h_0 v_0}{h}$$

$$v_0^2 + 2gh_0 = \frac{h_0^2 v_0^2}{h^2} + 2gh$$

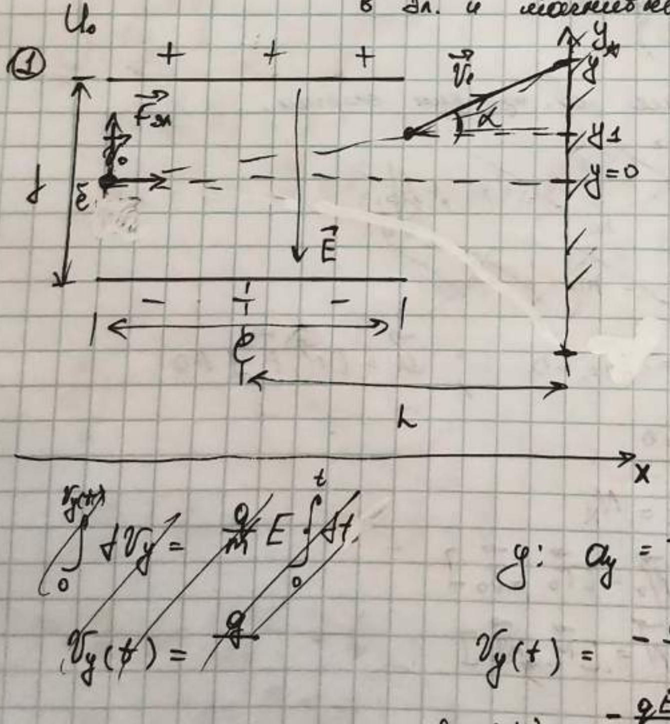
$$v_0^2\left(1 - \frac{h_0^2}{h^2}\right) = 2g(h - h_0)$$

$$v_0^2 = \frac{2g(h-h_0)\cdot h^2}{(h^2 - h_0^2)^2} = \frac{2gh^2}{(h+h_0)}$$

соотв. $v^2 = \frac{2gh_0^2}{(h+h_0)}$

Решение задач.
Движение заряженных частиц в эл. и магнитных полях.

1



$y^* = ?$

II ЗН: $m\vec a = \vec F_{эл}$

y: ~~$ma_y = F_{эл}$~~

$$\vec E = \frac{\vec F_{эл}}{q}$$

$$m\vec a = \vec F_{эл} = q\vec E$$

x: $a_x = 0$

$v_x = v_0 = const$

$\cancel{\int_0^{v_y(t)} dv_y = \frac{q}{m}E\int_0^t dt}$

$\cancel{v_y(t) = \frac{q}{}}$

y: $a_y = \frac{q}{m}(-E)$

$$v_y(t) = -\frac{qE}{m}\cdot t$$

$$\begin{cases} y(t) = -\frac{qE}{2m}t^2 \\ x \le l \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{l}{v_0} \quad \to y_1 = y(t_1) = -\frac{qE}{2m}\cdot\frac{l^2}{v_0^2}$$

$$tg\alpha = \frac{v_{1y}}{v_x} = \frac{-qE\cdot l}{m v_0^2}$$

$$\frac{y^* - y_1}{L - \frac{l}{2}} = -\frac{qE\cdot l}{m v_0^2}$$

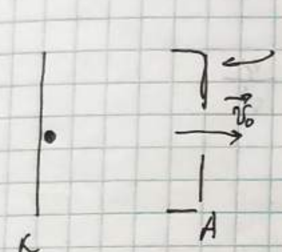
$$y^* - y_1 = -\frac{qE\cdot l}{m v_0^2}\left(L - \frac{l}{2}\right)$$

$$y^* = -\frac{qE\cdot l}{m v_0^2}\left(L - \frac{l}{2}\right) - \frac{qE\cdot l^2}{2m v_0^2} =$$

$$= -\frac{qEl}{m v_0^2}\left(L - \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\right) = -\frac{qElL}{m v_0^2} = -\frac{qU_0 lL}{d m v_0^2}$$

$$E = \frac{U_0}{d}$$

$$-qU = \frac{mv^2}{2}$$



$$U_A \equiv \varphi_A - \varphi_K$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{2qU_A}{m}} \quad \text{— „ — , т.к. } \tilde{e}$$

$$\underbrace{\frac{m v_{(1)}^2}{2}}_{=0} + \underbrace{q\varphi_K}_{=0} = \frac{m v_0^2}{2} + q\varphi_A \quad \text{— ЗСЭ.}$$

$$\to v_0 = \sqrt{-\frac{2qU_A}{m}}$$

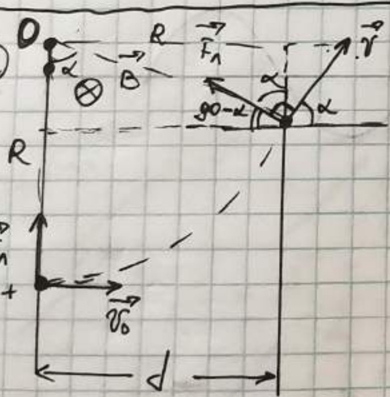
$$180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$$

2

q, m

R

$\alpha - ?$



$$\vec F_Л = q[\vec v, \vec B]$$

$$\vec F_Л \perp \vec v \Rightarrow A = 0 \Rightarrow W_к = const \quad и \quad a_\tau = 0$$

$$\vec a = \vec a_n$$

$$m\vec a = \vec F_Л$$

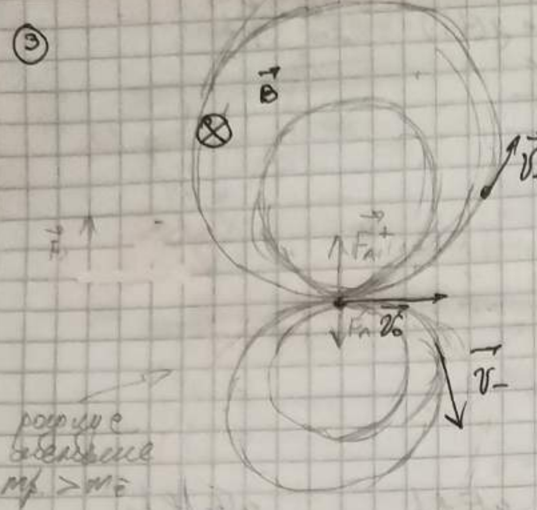
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}\ ; \quad v = const \to a_n = \frac{v_0^2}{\rho}$$

$$\frac{m v_0^2}{R} = q v_0 B \to R = \frac{m v_0}{qB}$$

$$\sin\alpha = \frac{d}{R} = \frac{dqB}{m v_0} \to \alpha = \arcsin\left(\frac{dqB}{m v_0}\right)$$

Ответ: $\alpha = \arcsin\left(\frac{dqB}{m v_0}\right)$

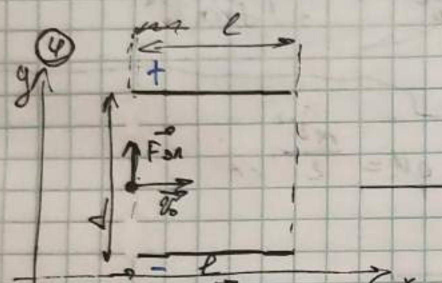
③



$R = \frac{mv}{|q|B}$

$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{|q|B}$

④



$U(t) = U_0 \cos\omega t$

1) $F_{эл} = ma_1$ ~ движение в $\vec{E}$

$U = Ed \rightarrow E = \frac{U}{d}$

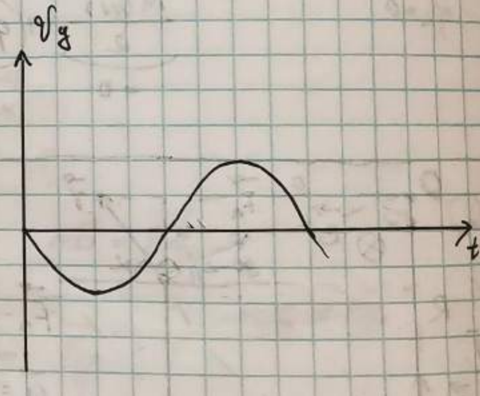
Oy: $qE_y = \frac{m\,dv_y}{dt}$

$q\frac{U}{d} = \frac{m\,dv_y}{dt}$

$\frac{qU_0\cos\omega t}{d} = \frac{m\,dv_y}{dt}$

$\int_0^{v_y(t)} dv_y = \frac{qU_0}{dm}\int_0^t \cos\omega t\, dt'$

$v_y(t) = \frac{qU_0 \sin\omega t}{\omega d m}$



$a_x = 0 \rightarrow v_x(t) = const = v_0$

$l = v_0 t_1 \rightarrow t_1 = \frac{l}{v_0}$;

2) $v_y(t_1) = \frac{qU_0}{md\omega}\sin(\omega t_1)$ ~ движение в поле $\vec{B}$

1) $\omega t_1 = \pi n$, $n = 0, 1, \dots$

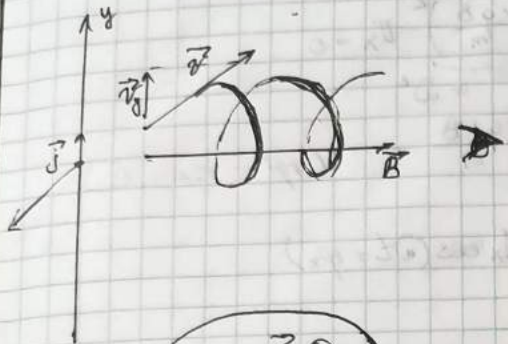
$v_y = 0 \Rightarrow \vec{F}_л = 0$

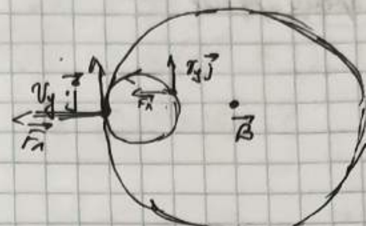
2) $\omega t_1 \neq \pi n \rightarrow$ винтовая линия;

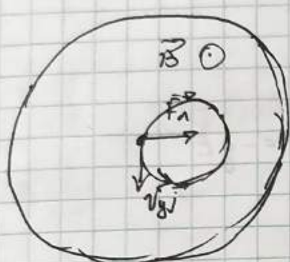
$\vec{F}_л = q[\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \vec{B}]$

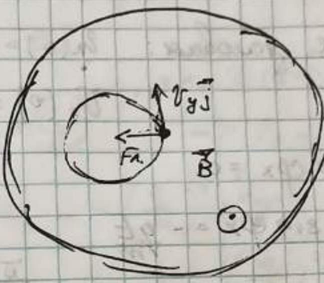
$$R = \frac{m|v_y|}{|q|B}$$

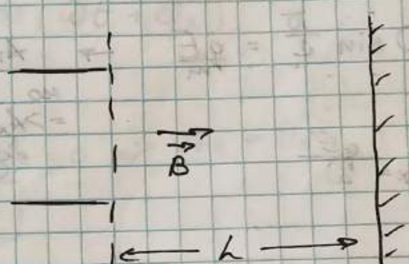
$$h = v_0 \cdot T = \frac{2\pi m}{|q|B} \cdot v_0$$







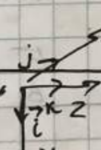




$L = kh, \quad K = 1, 2, \ldots$ - тогда увидим точку иначе размытое пятно.

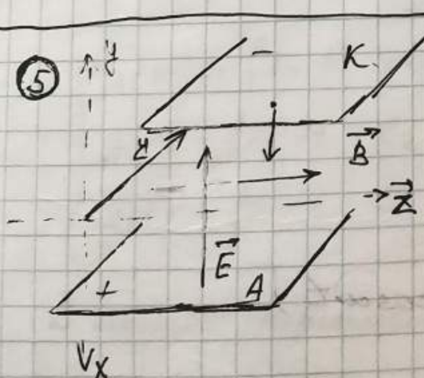
---

⑤



$\vec{E} \perp \vec{B}$; $v_0 = 0$

Ур-е траектории



$$m\vec{a} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

$$x: \ ma_x = -qE + q([\vec{v}, \vec{B}])_x = -qE + qv_y B$$

$$y: \ ma_y = q([\vec{v}, \vec{B}])_y = -qv_x B$$

$$z: \ ma_z = q([\vec{v}, \vec{B}])_z = 0 \quad \Rightarrow a_z = 0, \ v_z = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{B} &= B \cdot \vec{k} \\ \vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} \end{aligned}\right\} [\vec{v}, \vec{B}] = \cancel{[(v_x \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}) \times B\vec{k}]} = -v_x B\vec{j} + v_y B\vec{i}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{-q}{m}E + \dfrac{q}{m}V_y B \\ \dfrac{dV_y}{dt} = -\dfrac{q}{m} \cdot V_x \cdot B \\ \text{дифференцируем} \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow \ddot{V}_x = \frac{q}{m}\dot{V}_y B = -\left(\frac{q}{m}B\right)^2 V_x$$

$$\cancel{\dot{V}_y = \frac{m\ddot{V}_x}{qB}}$$

$$\ddot{V}_x + \underbrace{\left(\frac{qB}{m}\right)^2}_{=\omega^2} V_x = 0$$

$$\omega = \frac{|q|B}{m} \quad (|q| - \text{т.к. } \tilde{e})$$

$$V_x(t) = A_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$

Начальные условия: $V_x(0) = 0$

$\dot{V}_x(0) = -qE$

$$\begin{cases} A_x \cos\varphi_x = 0 \\ -A_x\omega \sin\varphi_x = -\dfrac{qE}{m} \end{cases} \qquad -A_x \omega \sin\varphi_x = -qE$$

$\cos\varphi_x = 0 \quad \rightarrow \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi_x = \frac{3}{2}\pi$

$A_x \omega \sin\frac{\pi}{2} = \frac{qE}{m} \quad \rightarrow \quad A_x = \frac{qE}{\omega m}$ ~~при $\varphi_x = \frac{3}{2}\pi$ $A_x < 0$ посл. корень.~~

но $q<0$

$\Rightarrow A_x < 0$ - не подходит

$\Rightarrow A_x = \frac{qE}{\omega}$

$$A_x \omega \sin\frac{3}{2}\pi = \frac{qE}{m}$$

$$-A_x \cdot \omega = \frac{qE}{m}$$

$$\Rightarrow A_x = -\frac{qE}{\omega m}, \text{ т.к. } q<0 \rightarrow A_x > 0 \sim \text{верно}$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{E}{B}.$$

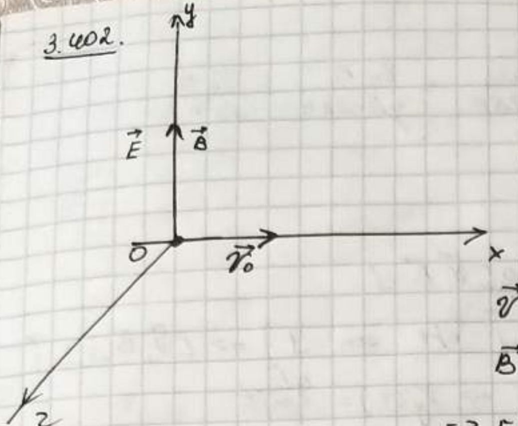
$$V_x = \frac{E}{B}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E}{B}\sin\omega t$$

$$V_y(t) = -\frac{q}{m}\cancel{B} \cdot \frac{E}{\cancel{B}}\int_0^t \sin\omega t \cdot dt$$

$$V_y(t) = -\frac{q}{m}E \cdot \left(-\frac{\cos\omega t}{\omega}\Big|_0^t\right) = -\frac{qE}{m\omega}(1-\cos\omega t)$$

$$\Rightarrow V_y(t) = \frac{E}{B}(1-\cos\omega t)$$

3.402.



$$m\vec a = q\vec E + q[\vec v, \vec B]$$

$$x:\quad \frac{m\,dv_x}{dt} = q([\vec v, \vec B])_x$$

$$y:\quad \frac{m\,dv_y}{dt} = qE + q([\vec v, \vec B])_y = qE$$

$$z:\quad \frac{m\,dv_z}{dt} = q([\vec v, \vec B])_z$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec v = v_x \cdot \vec x_0 + v_y \cdot \vec y_0 + v_z \cdot \vec z_0 \\ &\vec B = B \cdot \vec y_0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow [\vec v, \vec B] = [(v_x \cdot \vec x_0 + v_y \cdot \vec y_0 + v_z \cdot \vec z_0), B\vec y_0] =$$

$$= v_x B \vec z_0 - v_z \cdot B \vec x_0$$

$$\begin{cases} \frac{m\,dv_x}{dt} = -q v_z B \\ \frac{m\,dv_y}{dt} = qE \\ \frac{m\,dv_z}{dt} = q v_x B \end{cases}$$

а) $v_y = \frac{q}{m} E t + C_y$, $C_y = 0$, т.к. $v_y(t=0)=0$ $\Rightarrow v_y = \frac{q}{m} E t$

б) $\ddot v_x = -\frac{q}{m} B \dot v_z = -\left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2 v_x$

$\ddot v_x + \omega^2 v_x = 0$; $\omega^2 = \left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2$

$v_x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x)$

$v_x(t=0) = A_x \cos\varphi_x = v_0$

$a_x(t=0) = -A_x \omega \sin\varphi_x = 0 \rightarrow \varphi_x = 0 \Rightarrow A_x = v_0$

$$\boxed{v_x = v_0 \cos\omega t}$$

в) $\frac{m\,dv_z}{dt} = q v_0 \cos\omega t \cdot B \rightarrow v_z = \frac{q}{m} v_0 B \cdot \frac{1}{\omega} \sin\omega t + C_z$, $C_z = 0$

$v_z(t=0) = 0 \rightarrow C_z = 0 \Rightarrow \boxed{v_z = \frac{q}{m} \cdot \frac{v_0 B}{\omega} \sin\omega t = v_0 \sin\omega t}$

$$\begin{cases} x(t) = \int v_x\,dt + C_1 = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + C_1 = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ y(t) = \int v_y\,dt + C_2 = \frac{q}{m} E \frac{t^2}{2} \\ z(t) = \int v_z\,dt + C_3 = \frac{q}{m} \cdot \frac{v_0 B}{\omega^2}(1 - \cos\omega t) \end{cases}$$

В момент пересечения оси y $x(t_n) = 0$ и $z(t_n) = 0$

$\Rightarrow 1 - \cos\omega t_n = 0$

$\Rightarrow \omega t_n = 2\pi \cdot n \Rightarrow t_n = \frac{2\pi n}{\omega}$ — момент n-ого пересечения.

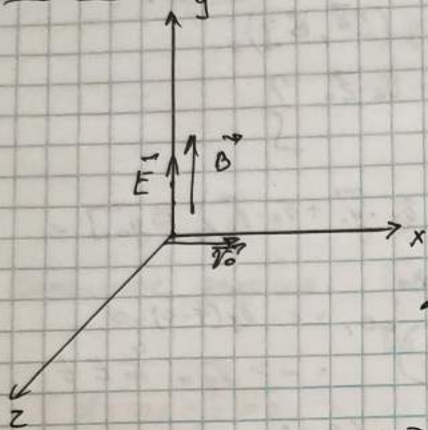
$$y_n = \frac{q}{m} E \cdot \frac{4\pi^2 n^2}{2\omega^2} = \frac{q}{m} \cdot E \cdot \frac{2\pi^2 n^2}{q^2 B^2} \cdot m^2 = \frac{2\pi^2 n^2 m E}{q B^2}$$

Представим $\vec v$ в виде $v_\parallel = v_y$ и $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{v_0^2} = v_0$

т.е. +y.

Тогда $tg\,\alpha_n = \frac{v_\perp}{v_\parallel} = \frac{v_0}{\frac{q}{m}E t_n} = \frac{m v_0 \cdot \omega}{qE \cdot 2\pi n} = \frac{v_0 B}{qE \cdot 2\pi n} = \frac{v_0 B}{2\pi n E}$

2 способ.



$m\vec{a} = q\vec{E} + q[\vec{v}\,\vec{B}]$

1) $\vec{B} \parallel \vec{j}$ ($\vec{j}$ - орт оси y) $\Rightarrow [\vec{v}, \vec{B}] \perp \vec{j}$

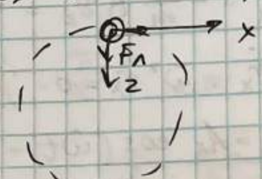
y: $ma_y = qE \Rightarrow v_y(t) = \frac{qE}{m}t$

$y(t) = \frac{qE}{2m}t^2$

2) в пл-ти (XZ) — гармоническое вращение,

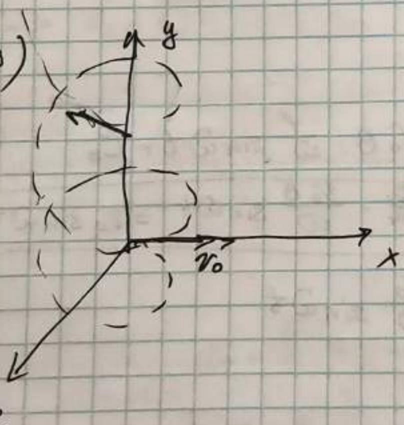
$T_B = \frac{2\pi m}{qB}$.

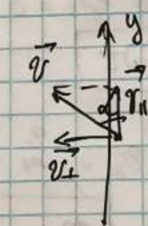
$\Rightarrow$ ось y пересекается в моменты $t_n = nT_B$



$$\boxed{y(nT_B) = \frac{qE}{2m}(nT_B)^2 = \frac{2\pi^2 n^2 mE}{qB^2}}$$

3)





$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$ (относит. $\vec{B}$)

$v_\perp = v_0$

$v_\parallel = v_y$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{v_\perp}{v_\parallel(t_n)} = \frac{v_0}{\frac{qE}{m}(nT_B)} = \frac{v_0 B}{2\pi n E}}$$

3.411.

$r_2 = r_1 + \Delta r$

1) В магн. поле: $\frac{m v^2}{R_B} = q v B$ всегда

$\Rightarrow \boxed{R_B = \frac{mv}{qB}}$ (ларморовский радиус),

2) Ускорение — эл. полем в зазоре:

$$T_B = \frac{2\pi m}{qB}$$

а) Пусть после пролёта зазора ск-ть v_1, $R_B(v_1) = r_1$:

$$r_1 = \frac{mv_1}{qB} \Rightarrow v_1 = \frac{qBr_1}{m}$$

б) после ускорения — ск-ть v_2, $r_2 = r_1 + \Delta r$

$$r_1 + \Delta r = \frac{mv_2}{qB} \Rightarrow v_2 = \frac{qB(r_1+\Delta r)}{m}$$

в) Магн. поле работы не совершает, эл. поле совершает 2 раза за период (при усл. $\nu = \frac{1}{T_B}$) $\Rightarrow$ по теор. ΔW_k:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = 2A_{эл.} = 2qU$$

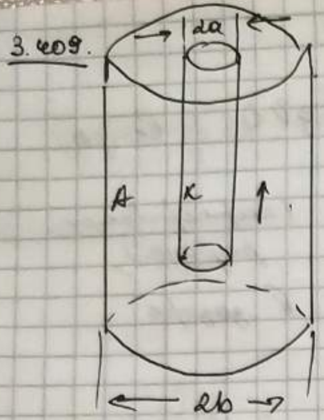
$$\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \left[(r_1+\Delta r)^2 - r_1^2\right] = 2qU \cdot \frac{2}{m}$$

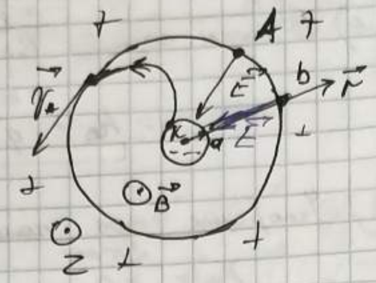
Учтём: $\frac{qB}{m} = \frac{2\pi}{T_B} = 2\pi\nu$ и $(\Delta r)^2 \ll 2r_1 \cdot \Delta r$

$$\Rightarrow 4\pi^2\nu^2 \cdot 2r_1\Delta r = 2qU \cdot \frac{2}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{2\pi^2\nu^2 m r_1 \Delta r}{q}}$$

3.409.





1) Теор. об изм. W_k: $\frac{m v_A^2}{2} - 0 = |q|\cdot U$

$\Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2|q|\cdot U}{m}}$

2) $\vec F_л = q(\vec E + [\vec v, \vec B])$

Теор. об изменении $\vec N$: $\frac{d\vec N}{dt} = \vec M = [\vec r, \vec F_л] = q[\vec r,[\vec v,\vec B]]$

т.к. ($\vec E \parallel \vec r$)

$[\vec r,[\vec v,\vec B]] = \vec v(\vec r,\vec B) - \vec B(\vec r,\vec v) = \vec v\cdot 0 - \vec B r v_r = -\vec B r v_r$

z: $\frac{dN_z}{dt} = M_z = -qB_z r v_r = |q| B r v_r \,\Big|\cdot dt$

$v_r dt = dr$

$\Rightarrow \int_{N_K}^{N_A} dN_z = |q|B\int_a^b r\, dr \Rightarrow N_A - N_K = \frac{|q|B}{2}(b^2-a^2)$

обдумать как получилось?

$N_K = ma\cdot v_K = 0$ по усл., $N_A = mbv_A$ (т.к. в предельном случае $\vec v_A \perp \vec r_A$ - касание анода) по опр. радиуса.

$\Rightarrow v_A = \frac{|q|B(b^2-a^2)}{2mb}$

Из (1) и (2): $\sqrt{\frac{2\cdot|q|\cdot U}{m}} = \frac{|q|B_{max}(b^2-a^2)}{2mb}$

$$\boxed{B_{max} = \frac{b}{b^2-a^2}\sqrt{\frac{8mU}{|q|}}}$$

(т.к. $R_0 = \frac{mv}{|q|\cdot B} \Rightarrow$ если $B\uparrow$ то $R_0\downarrow$ - не долетит до А)

18.11.2020 }

Закон Гука:

$$\sigma_n = E\varepsilon$$

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S} \quad (\vec{n} - \text{внешняя нормаль}), \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \approx \frac{\Delta l}{l_0}$$

Плотность энергии

$$w_{упр} = \frac{\sigma_n^2}{2E} = \frac{\sigma_n \varepsilon}{2} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

Полная энергия

$$W_{упр} = \int_{(V)} w_{упр} \, dV$$

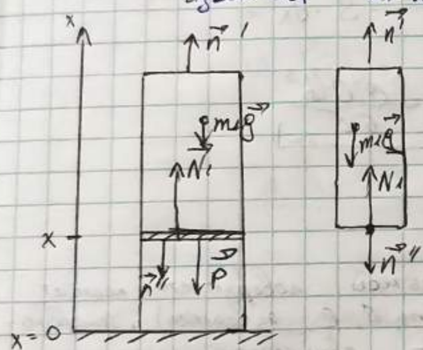
① Однородный упругий стержень, имеющий в недеформированном состоянии длину l_0, стоит вертикально на столе.

Найти: 1) распределение упругих напряжений в стержне;

2) изменение длины стержня;

3) упругую энергию запасённую в стержне.

Известны пл-ть в-ва ρ, модуль Юнга E, площадь сечения S.



Внеш. нормаль $\vec{n}$ принято направлять наружу, ось X сонаправим с $\vec{n}'$.

Используем приближение $S = const$, $\Delta l \ll l_0$.

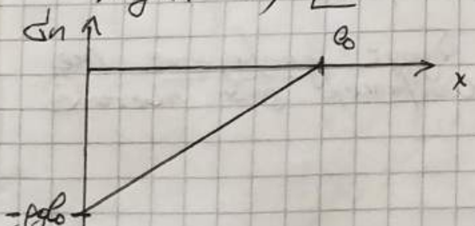
Выделим тонкий слой при коорд-те x. На него действует сила давления (вес) верхн. части $\vec{P}$. В ответ этот слой действует на верхн. часть силой $\vec{N}_1 = -\vec{P}$. Сила $\vec{N}_1$ и есть сила упругости: $\vec{N}_1 = \vec{F}_{упр}$.

Но по II з-ну Ньютона для верхн. части $\vec{N}_1 + m_1\vec{g} = \vec{0}$

Для сжатия по опр. принято: $\sigma_n = -\frac{F_{упр}}{S}$

Тогда: 1) $\sigma_n = -\frac{N_1}{S} = -\frac{m_1 g}{S} = \frac{-\rho g(l_0 - x)S}{S} = -\rho g(l_0 - x)$

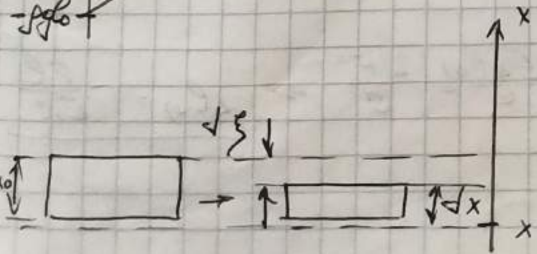
(считаем $l \approx l_0$)



2) Отсюда видно: деформация неоднородная, з-ном Гука надо пользоваться в „дифф." форме:

$$\sigma_n = E\frac{d\xi}{dx}, \text{ где } d\xi - \text{абс. изм-е длины слоя } dx_0 \ (d\xi = dx - dx_0)$$

а $\frac{d\xi}{dx}$ – отн. изменение



Подставим: $-\frac{\rho g}{E}(l_0 - x)\,dx = d\xi$

Нижний конец $(x=0)$ - закреплён, верхнему $(x=l_0)$ припишем всё изменение длины Δl:

$$\int_0^{\Delta l} d\xi = -\frac{\rho g}{E}\int_0^{l_0}(l_0-x)\,dx \to \boxed{\Delta l = -\frac{\rho g l_0^2}{2E}} < 0 \text{ (сжатие)}$$

Примеры: ① сталь: $\rho = 7800\ \text{кг/м}^3$, $E = 2\cdot 10^{11}\ \frac{Н}{м^2}$ ⇒ при $l_0 = 1\ м$ $|\Delta l| = 1,9\cdot 10^{-7}\ м$.

② свинец: $\rho = 11300\ \frac{кг}{м^3}$, $E = 1,6\cdot 10^{10}\ \frac{Н}{м^2}$ ⇒ при $l_0 = 1\ м$ $|\Delta l| = 3,5\cdot 10^{-6}\ м$.

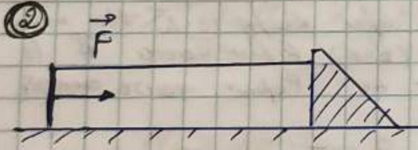
3) Плотность энергии упругой деформации

$$w_{упр} = \frac{\sigma_n^2}{2E} = \frac{\rho^2 g^2 (l_0 - x)^2}{2E}$$

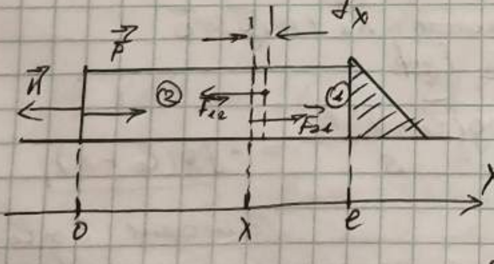
Полная энергия во всём стержне:

$$\underline{W_{упр}} = \int_{(V)} w_{упр}\, dV = \int_0^{l_0} \frac{\rho^2 g^2 (l_0-x)^2}{2E}\cdot S\cdot dx =$$
$$= \frac{\rho^2 g^2 S}{2E}\left(l_0^2 x - l_0 x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{l_0} = \underline{\frac{\rho^2 g^2 S l_0^3}{6E}}$$

②



На гладкой горизонтальной поверхности лежит однородный стержень (m, S, l известны), упирающийся в выступ. На свободный конец действует сила F, равномерно распределённая по сечению. Найти Δl, когда выступ есть и когда его убрали.



1) с выступом: $\vec a = 0$ => в любом сечении x должно быть

$$\vec F_{лев} + \vec F_{пр} = 0 \text{ (силы слева и справа от } x)$$

=> деформации будут однородные (не зависят от x). Например для части ② получим:

$$\underline{F = F_{12}},$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{З-н Гука: } \sigma_n = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l} \ (1) \\ &\text{Опр. } \sigma_n:\ \sigma_n = -\frac{F_{упр}}{S} = -\frac{F}{S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{E\Delta l_{(1)}}{l} = -\frac{F}{S} \Rightarrow \underline{\Delta l_{(1)} = -\frac{Fl}{ES}}$$

2) Убрали воздух, то дн. стол гладкий -> для стержня в целом

$$a = \frac{F}{m} \qquad (1)$$

Это ускорение будет и у каждой части стержня (неразрывность)

Бесконечно тонкий слой dx действ. с $\vec{F}_{21}$ на часть ②, по 3-му 3-му Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, где $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{упр}$ для ①,

т.е часть ① движется с уск. $\vec{a}$ за счёт $\vec{F}_{упр}$.

$$a = \frac{F_{упр}}{m_1} \qquad (2)$$

Стержень однородный $\Longleftrightarrow \rho = const \Rightarrow m = \rho l S, \; m_1 = \rho(l-x)S$

Из (1), (2)

$$\frac{F}{m} = \frac{F_{упр}}{m_1} \Rightarrow F_{упр} = \frac{F m_1}{m} = \frac{F(l-x)}{l}$$

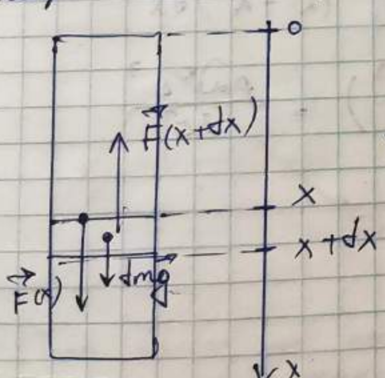
Опр $\sigma_н \Rightarrow \sigma_н = -\frac{F_{упр}}{S} = -F\frac{l-x}{lS}$ - неоднор! (зависит от x)

З-н Гука: $\sigma_н = E\frac{d\xi}{dx} \qquad (d\xi = dx - dx_0)$

$$-F\frac{l-x}{lS} = E\frac{d\xi}{dx} \Rightarrow \int_0^{\Delta l(2)} d\xi = -\frac{F}{lSE}\int_0^l (l-x)dx$$

$$\underbrace{\Delta l(2) = -\frac{Fl}{2SE}} \qquad \left(\text{т.е. } \Delta l(2) = \frac{\Delta l(1)}{2}\right)$$

⑤ Тот же стержень свободно падает. Найти распределение упр. напряжений $\sigma(x)$



Стержень весь движется с $\vec{a} = \vec{g}$

$\downarrow \vec{g}$ Стержень неразрывен => любая часть движ. с $\vec{g}$.

Для тонкого слоя dx:

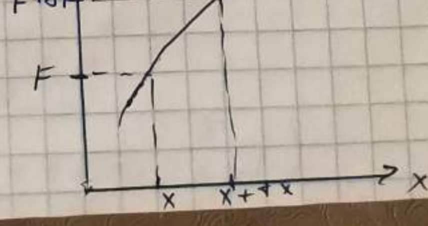
$$\vec{F}(x) + \vec{F}(x+dx) + dm\vec{g} = dm\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \vec{F}(x) + \vec{F}(x+dx) = 0$$

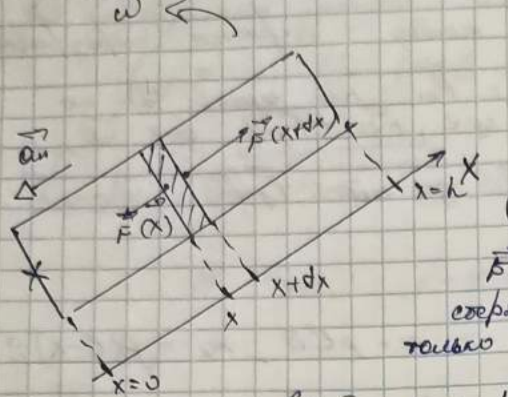
$$x: \; F(x) - F(x+dx) = 0 \Rightarrow \sigma(x) - \sigma(x+dx) = 0$$

$$\sigma(x) - \left(\sigma(x) + \frac{d\sigma}{dx}\cdot dx\right) = d\sigma = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sigma(x) = const = 0}, \quad (\forall x)$$



N 556. Однор. стержень (L, m, E) равномерно вращается с угл. скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов. Найти $\sigma(x)$ и ΔL, считая $S = const$, $\Delta L << L$.



1) Стержень при вращении действует на ось => возникает сила реакции оси, всё передаётся по слоям.

В рез-те в каждом сечении возникает $\vec F_{упр}$ как равнодействующая $\vec F(x+dx)$ — она стремится оторвать стержень от оси и $\vec F(x)$ — направл. к оси, только ось и может сообщать $\vec a_n$.

$\otimes \vec g$

2-ой з-н Н-на для сечения dx с массой dm.

$$x: \quad F(x+dx) - F(x) = -dm \cdot a_n \to$$

$$\Rightarrow S[\sigma_n(x+dx) - \sigma_n(x)] = -S\rho\, dx \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$\cancel{\sigma_n(x)} + \frac{d\sigma_n}{dx} \cdot dx - \cancel{\sigma_n(x)}$$

$$d\sigma_n = -\rho\omega^2 x\, dx \to \sigma_n(x) = -\rho\omega^2 \frac{x^2}{2} + C.$$

Учтём: $\sigma_n(x = L) = 0$ — конец свободный $\to$ $C = \rho\omega^2 \frac{L^2}{2}$

$$\boxed{\sigma_n(x) = \frac{\rho\omega^2}{2}(L^2 - x^2)},$$ — отсюда видно, что $\sigma_n(x) > 0$ (всегда $x < L$), т.е. это растяжение.

2) З-н Гука: $\sigma_n(x) = E\frac{d\xi}{dx} \Rightarrow d\xi = \frac{\rho\omega^2}{2E}(L^2 - x^2)\,dx$

$$\int_0^{\Delta L} d\xi = \frac{\rho\omega^2}{2E}\int_0^L (L^2 - x^2)\,dx = \frac{\rho\omega^2}{2E}\left(L^3 - \frac{L^3}{3}\right) = \frac{\rho\omega^2 L^3}{3E}$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{\rho\omega^2 L^3}{3E}}$$

24.11.2020

Силы сухого трения

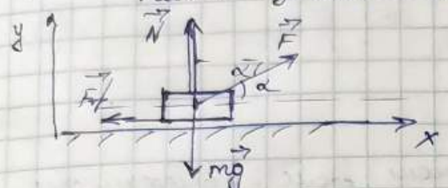
Сила трения покоя: $\vec F_{тр} = -\vec F$

$$(\vec F_{тр})^{max} = -kN\vec\tau \quad \left(\vec\tau = \frac{\vec v}{v}\right)$$

Сила трения скольжения:

$$\vec F_{тр}^{\,ск} = -kN\vec\tau$$

① К телу массы m, находящемся на гор. столе (коэф. трения между телом и столом равен k), прикладывают силу $\vec F$ под углом α к горизонту ($\alpha = const$).
Найти зависимость $F_{тр.}(F)$, построить график.



$$\vec F + \vec N + m\vec g + \vec F_{тр} = m\vec a$$

$$x:\ ma = F\cos\alpha - F_{тр.} \quad (a_x = a)$$

$$y:\ 0 = -mg + N + F\sin\alpha$$

а) $\vec a = 0 \Rightarrow \underline{F_{тр.}^{п} = F\cos\alpha}$ $\quad (F \in [0; F_1])$

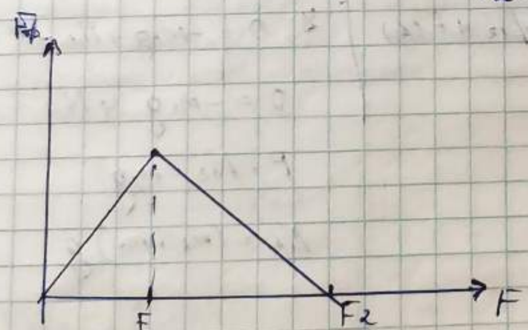
б) $\vec a \neq 0 \Rightarrow \underline{F_{тр.} = F_{тр.}^{ск} = kN = k(mg - F\sin\alpha)}$ $\quad (F \in [F_1; F_2])$

При $F = F_1$: $\quad F_{тр.}^{п} = (F_{тр.}^{п})^{max} = F_{тр.}^{ск}$

$$F_1\cos\alpha = k(mg - F_1\sin\alpha) \Rightarrow F_1 = \frac{kmg}{\cos\alpha + k\sin\alpha}$$

в) При $F = F_2$ получим $N = 0 \Rightarrow F_{тр.} = 0$

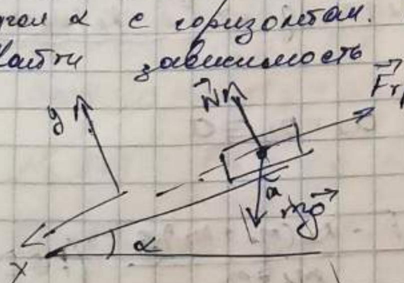
$$F_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}$$



$F \in [0; F_1]$: покой

$F \in [F_1, F_2]$: скольжение

② Тело массы m находится на наклонной пл-ти, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения между телом и плоскостью k.
Найти зависимость $F_{тр.}(\alpha)$, построить график.



$$m\vec a = m\vec g + \vec N + \vec F_{тр}$$

$$x:\ ma = mg\sin\alpha - F_{тр.} \quad (a_x = a)$$

$$y:\ N = mg\cos\alpha$$

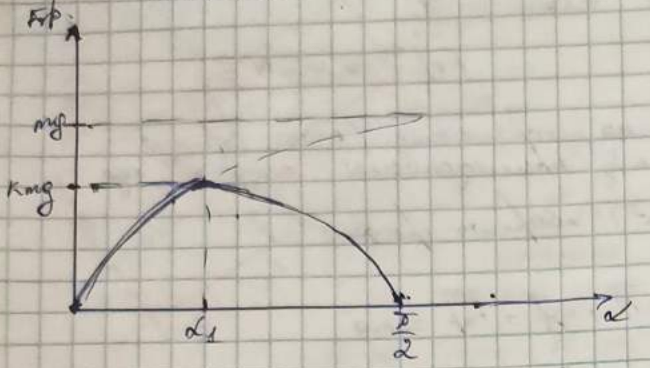
а) $\vec a = 0 \Rightarrow \underline{F_{тр.} = mg\sin\alpha}$ $\quad (\alpha \in [0; \alpha_1])$

б) $\vec a \neq 0 \Rightarrow \underline{F_{тр.}^{ск} = kN = k\,mg\cos\alpha}$ $\quad \left(\alpha \in \left[\alpha_1; \frac{\pi}{2}\right]\right)$

При $\alpha = \alpha_1$: $F_{тр.} = (F_{тр}^{п})^{max} = F_{тр}^{ск}$

$$mg\sin\alpha_1 = k\, mg\cos\alpha_1 \Rightarrow tg\,\alpha_1 = k$$

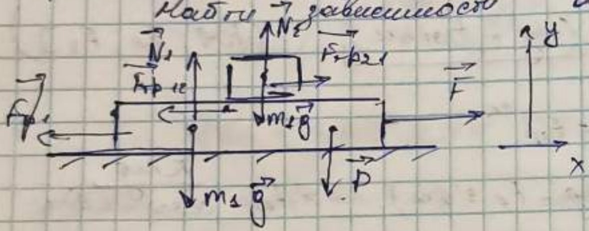
Замечание: $k < 1 \Rightarrow tg\,\alpha_1 < 1 \Rightarrow \alpha_1 < \frac{\pi}{4}$



$\alpha \in [0, \alpha_1]$ - покой

$\alpha \in [\alpha_1; \frac{\pi}{2}]$ - скольжение

③ Доска массы m_1 находится на горизонтальном столе, коэффициент трения между доской и столом k_1. На доске находится брусок массы m_2, коэффициент трения между доской и бруском k_2. К доске приложена горизонтально сила $\vec F$. Найти зависимости $a_1(F)$, $a_2(F)$; графики.



Для доски:

$$m_1\vec a_1 = m_1\vec g + \vec N_1 + \vec F_{тр1} + \vec F_{тр12} + \vec P + \vec F$$

Для бруска:

$$m_2\vec a_2 = m_2\vec g + \vec N_2 + \vec F_{тр21}$$

По 3-му закону:

$\vec N_2 = -\vec P$

$\vec F_{тр12} = -\vec F_{тр21}$

x: $m_1 a_1 = -F_{тр1} - F_{тр12} + F$ (1)

$m_2 a_2 = F_{тр21}$

y: $0 = -m_1 g + N_1 - P$

$0 = -m_2 g + N_2$

$P = N_2 = m_2 g$

$N_1 = (m_1 + m_2) g$

а) $\underbrace{\vec a_1 = \vec a_2 = 0}$ $\Rightarrow F_{тр12} = F_{тр21} = 0$

$F_{тр.1} = F$ $(F \in [0; F_1])$

При $F = F_1$: $F_{тр1} = (F_{тр.1}^{п})^{max} = k_1 N_1 = k_1(m_1+m_2)g \Rightarrow \underline{F_1 = k_1(m_1+m_2)g}$

б) $\vec a_1 = \vec a_2 \neq 0$ (брусок не проскальзывает по доске), $a_1 = a_2 \equiv a$

Из (1), (2): $(m_1+m_2)a = -F_{тр.1} + F$

$F_{тр.1} = F_{тр.1}^{ск} = k_1 N_1 = k_1(m_1+m_2)g \Rightarrow \underbrace{a = \frac{F - k_1(m_1+m_2)g}{m_1+m_2}}$ $(F \in [F_1; F_2])$

в) $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ a_1 \neq a_2$

При этом: $F_{тр1} = F_{тр1}^{ск} = k_1(m_1+m_2)g$

$F_{тр12}^{ск} = F_{тр21}^{ск} = k_2 N_2 = k_2 m_2 g$

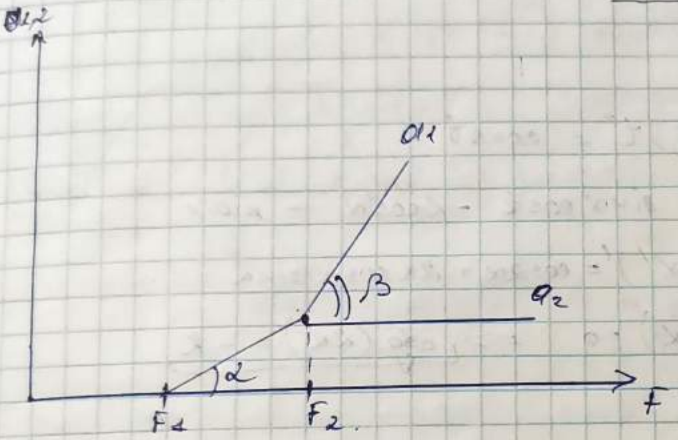
Из (1): $m_1 a_1 = -k_1(m_1+m_2)g - k_2 m_2 g + F$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{F - k_1(m_1+m_2)g - k_2 m_2 g}{m_1}$$

Из (2): $m_2 a_2 = F_{тр21}^{ск} = k_2 m_2 g \Rightarrow \underline{a_2 = k_2 g = const}$

При $F = F_2$ $a_1 = a_2 \Rightarrow \frac{F_2 - k_1(m_1+m_2)g - k_2 m_2 g}{m_1} = k_2 g$

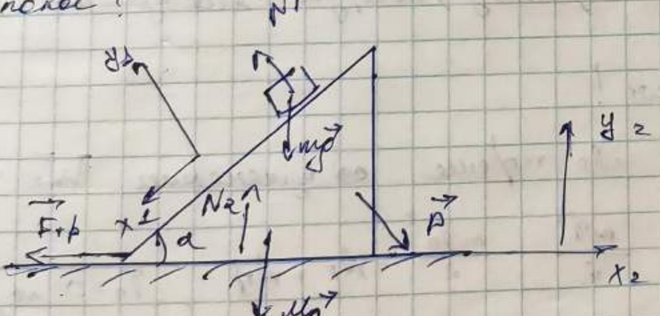
$$\Rightarrow \underline{F_2 = (k_1+k_2)(m_1+m_2)g}$$



$tg\,\alpha = \frac{1}{m_1+m_2}$

$tg\,\beta = \frac{1}{m_1}$

④ Кубик массы m соскальзывает по гладкой поверхности клина массы $M = 2m$, находящегося на горизонтальном шероховатом столе. Угол при основании клина α. При каком коэффициенте трения между столом и клином клин будет в покое?



$m\vec a_1 = m\vec g + \vec N_1$

$M\vec a_2 = M\vec g + \vec N_2 + \vec P + \vec F_{тр}$, $\vec a_2 = 0$ по усл.

$x_1:\ ma = mg\sin\alpha$

$y_1:\ 0 = -mg\cos\alpha + N_1$

$\Rightarrow N_1 = P = mg\cos\alpha$

$x_2:\ 0 = P\sin\alpha - F_{тр}$ (1)

$y_2:\ 0 = -Mg + N_2 - P\cos\alpha$ (2)

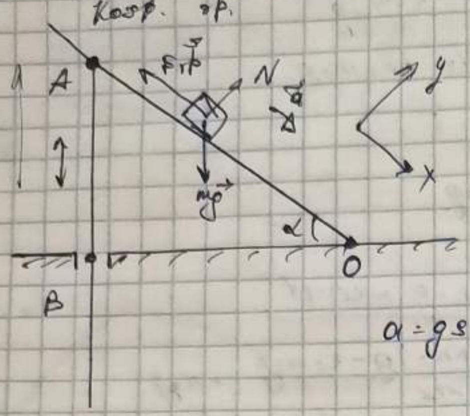
Из (1) $F_{тр} = F_{тр}^{п} = P\sin\alpha = mg\sin\alpha\cos\alpha$

Из (2) $N_2 = Mg + P\cos\alpha = 2mg + mg\cos^2\alpha$

$F_{тр}^{п} \le kN_2 \Rightarrow mg\sin\alpha\cos\alpha \le kmg(2+\cos^2\alpha)$

$$\underline{k \ge \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2+\cos^2\alpha}}$$

⑤ Ир. 1.69 Небольшое тело m начинает скользить по наклонной пл-ти из точки, расп. над верт. упором A. Коэф. тр.



1) $m\vec a = m\vec g + \vec N + \vec F_{тр}$

x: $ma = mg\sin\alpha - F_{тр}^{ск}$ $\quad (a_x = a)$

y: $0 = -mg\cos\alpha + N$

$F_{тр}^{ск} = kN = kmg\cos\alpha$

$a = g\sin\alpha - kg\cos\alpha \Rightarrow S = OA = \frac{at^2}{2} =$

$= \frac{g}{2}(\sin\alpha - k\cos\alpha)t^2$

OB = const, а S − меняется

2) $OB = OA \cdot \cos\alpha = const$ по усл.

$OB = \frac{g}{2}(\sin\alpha\cos\alpha - k\cos^2\alpha)t^2 = const$

$\Rightarrow t - min$ при $f(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha - k\cos^2\alpha - max$.

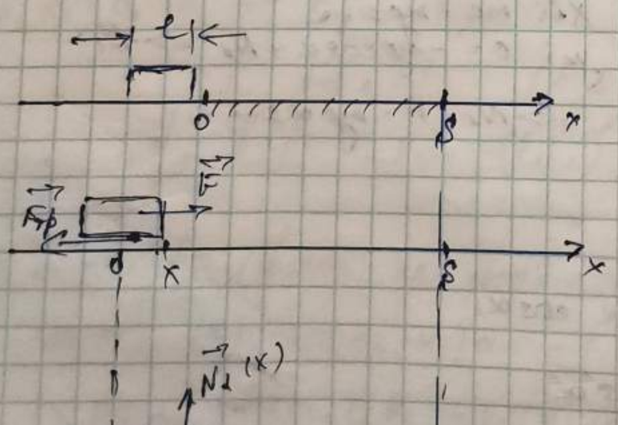
$f'_\alpha = (\frac{1}{2}\sin 2\alpha - k\cos^2\alpha)' = \cos 2\alpha + 2k\cos\alpha\sin\alpha =$

$= \cos(2\alpha) + k\sin(2\alpha) = 0 \Rightarrow \underline{ctg(2\alpha) = -k}$

$f''_\alpha =$

⑥ Брусок массы m и длины l перетаскивают через шероховатую полосу ширины S (S > l). Коэфф. трения между бруском и полосой k, слева и справа от полосы поверхность идеально гладкая. Найти минимальную работу, которую необходимо совершить.

Нужно двигать без ускорения!



По теореме об изменении $W_к$:

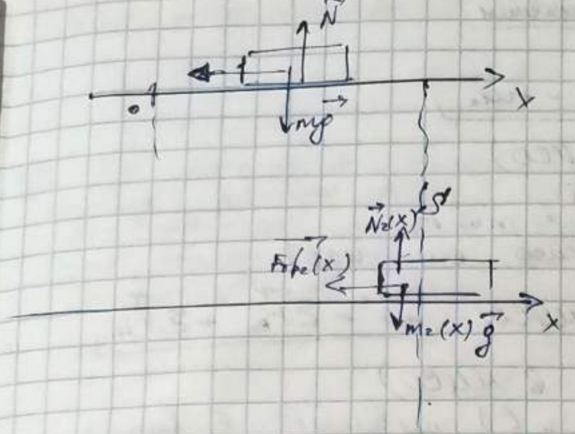
$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_F + A_{тр}$, $v_0 = 0$ по усл.

$\Rightarrow A_F - min$, когда $v = 0$, т.е. $A_F = -A_{тр}$

$\underline{F = F_{тр}}$

1) $\underline{0 \le x \le l}$

$F^{ск}_{тр1}(x) = kN_1(x) = km_1(x)g$



Для целого бруска: $m = \rho l S_0$

Для массы длиной x: $m_1(x) = \rho x S_0$

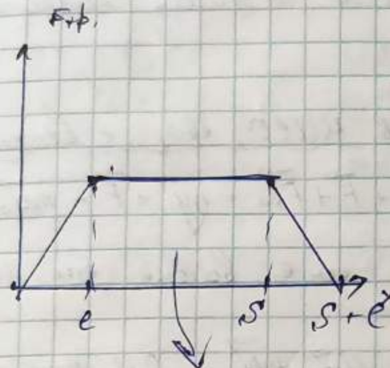
$$m_1(x) = m\frac{x}{l} \Rightarrow \underline{F_{тр1}^{ск}(x) = kmg\frac{x}{l}}$$

а) $l \le x \le S$: $F_{тр}^{ск} = kN = kmg$

б) $S \le x \le S + l$:

$$F_{тр2}^{ск}(x) = kN_2(x) = k\,m_2(x)\,g$$

$$m_2(x) = \rho\,(l + S - x)\,S_0 = m\frac{S + l - x}{l}$$



$$A_F = \int_0^l kmg\frac{x}{l}\,dx + \int_l^S kmg\,dx + \int_S^{S+l} kmg\frac{S+l-x}{l}\,dx =$$

$$= \underline{kmg\cdot S}$$

можно получить A_F из графика.

Неинерциальные системы отсчёта.

Поступательная сила инерции: $\boxed{\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0}$

($\vec{a}_0$ - ускорение НИСО относит. ИСО)

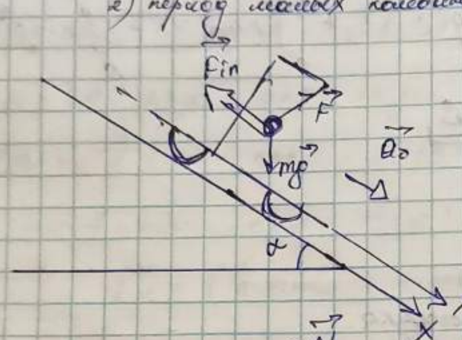
Центробежная сила инерции: $\vec{F}_{in}^{ц.б} = m\omega^2 \vec{r}_\perp$

(ω - угловая ск-ть НИСО отн ИСО)

Аналог 2-го закона Ньютона для НИСО: $\boxed{m\vec{a}' = \sum \vec{F}_{вз} + \sum \vec{F}_{in}}$

($\vec{a}'$ - уск-е м.т. в НИСО)

① Математический маятник (длина нити l) подвешен в вагоне, свободно скатывающемся по наклонной плоскости с углом наклона α.
Найти: 1) положение отвеса
2) период малых колебаний маятника.

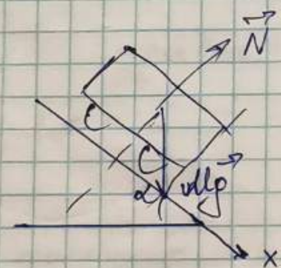


Решаем в НИСО, связ. с вагоном

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{in} = m\vec{g} + \vec{F} - m\vec{a}_0 \quad (1)$$

Находим $\vec{a}_0$ - уск-е вагона отн. ИСО.

$$M\vec{a}_0 = M\vec{g} + \vec{N} \quad (M\text{ - масса вагона})$$



X: $Ma_0 = Mg\sin\alpha \Rightarrow a_0 = g\sin\alpha$ (2)

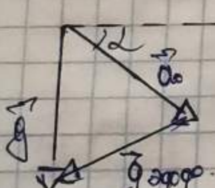
1) Из (1) с учётом (2)

X': $ma'_{x'} = mg\sin\alpha + F_{x'} - ma_0 = F_{x'}$

Отвес в покое $\Rightarrow a'_x = 0 \Rightarrow F_{x'} = 0 \Rightarrow$ отвес перпендикулярен наклонной плоскости

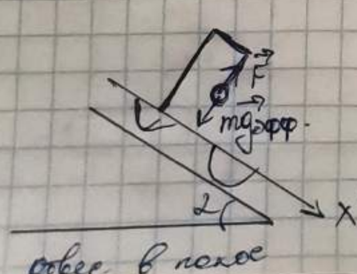
2) При колебаниях ($\vec{a}' \neq 0$): из (1)

$$m\vec{a}' = m(\vec{g} - \vec{a}_0) + \vec{F}$$

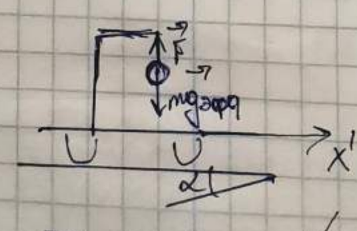


$$\vec{g}_{эфф} = \vec{g} - \vec{a}_0 \Rightarrow g_{эфф}^2 = g^2 + a_0^2 - 2ga_0\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$
$$= g^2 + g^2\sin^2\alpha - 2g^2\sin^2\alpha = g^2\cos^2\alpha$$

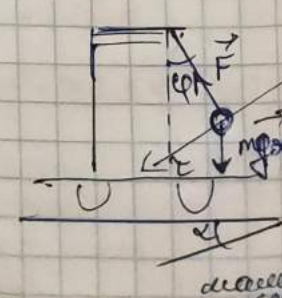
$$g_{эфф} = g\cos\alpha$$



отвес в покое



то же, рис-ок развернут

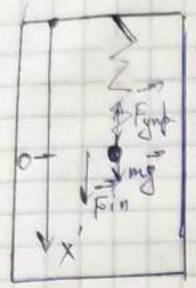


малые колеб. ($\varphi \ll 1$)

Для математического маятника

$$\omega^2 = \frac{g_{эфф}}{l} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{эфф}}}}$$

② Груз массы m висит на невесомой пружине, прикреплённой к потолку кабины лифта. Жёсткость пружины k. В момент $t=0$ кабина начала подниматься с ускорением $\vec{a}_0$. Найти з-н движения груза относительно кабины лифта $x'(t)$, если $x'(0)=0$, $\frac{dx'}{dt}(0) = v_{x'}(0) = 0$



До начала движения $(t<0)$: $mg = F_{упр\,0} = k\Delta l_0$ (1)

$\Rightarrow \Delta l_0 = \frac{mg}{k}$ - нач. деформ.

При $t>0$: $m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{F}_{упр} - m\vec{a}_0$

$(F_{упр})_{x'} = -k(\Delta l_0 + x')$

x': $\frac{m\,d^2x'}{dt^2} = mg - k(\Delta l_0 + x') - (-ma_0)$

С учётом (1): $\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{k}{m}x' + a_0 \Rightarrow \frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{k}{m}x' = a_0$

$\Rightarrow x'(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{a_0}{\omega^2}$ (где $\omega^2 = \frac{k}{m}$)

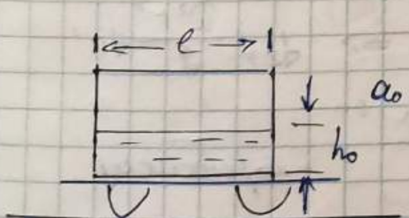
$$\left.\begin{aligned} x'(0) &= A\cos\varphi + \frac{a_0}{\omega^2} = 0 \\ \frac{dx'}{dt}(0) &= -A\omega\sin\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cancel{\begin{cases}\varphi_1 = 0 \\ A_1 = -\frac{a_0}{\omega^2}\end{cases}} \quad \begin{cases}\varphi_2 = \pi \\ A_2 = \frac{a_0}{\omega^2}\end{cases}$$

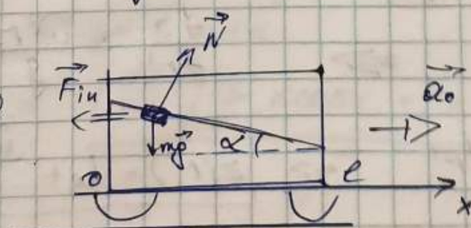
$$x'(t) = \frac{a_0}{\omega^2}(1 - \cos\omega t) =$$

$$= \frac{ma_0}{k}(1 - \cos\omega t)$$

③ Прямоугольный аквариум длины l заполнен водой (плотность ρ) до высоты h_0 и закреплён на тележке. Тележку привели в движение с ускорением $\vec{a}_0$ по горизонтальной поверхности.

Найти: 1) уравнение свободной поверхности воды;
2) распределение давления на дно аквариума;
3) распределение давления на заднюю стенку аквариума





НИСО связана с тележкой, свободная поверхность <u>в покое</u> под углом α к X'

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{in} = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_0$$

$$\left.\begin{aligned} X'&: \ 0 = N\sin\alpha - ma_0 \\ Y'&: \ 0 = -mg + N\cos\alpha \end{aligned}\right| \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_0}{g}$$

1) ур-е свободной поверхности $y'(x') = H - tg\alpha \cdot x' = H - \frac{a_0}{g} x'$

Объём $V = const = h_0 l \cdot b$ (b - ширина аквариума) при $a_0 = 0$

$V = bl \frac{H + (H - \frac{a_0}{g} l)}{2}$ при $a_0 > 0$

$\Rightarrow H = h_0 + \frac{a_0 l}{g\, 2} \Rightarrow y'(x') = h_0 + \frac{a_0}{g}\left(\frac{l}{2} - x'\right)$

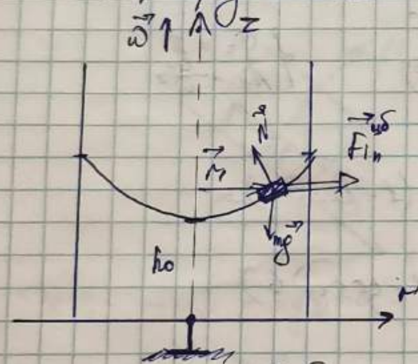
2) $\underbrace{P(y')} = \rho g y'(x') = \rho g\left(h_0 + \frac{a_0}{g}\left(\frac{l}{2} - x'\right)\right) = \underbrace{\rho g h_0 + \rho a_0\left(\frac{l}{2} - x'\right)}$

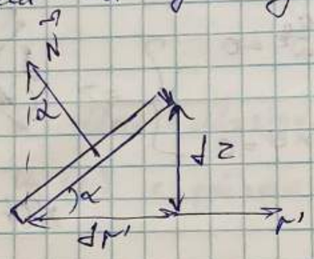
3) Из (1) выразим:

$x'(y') = \frac{l}{2} + \frac{g}{a_0}(h_0 - y')$

$\Rightarrow \underbrace{P(x')} = \rho a_0 x'(y') = \underbrace{\rho a_0 \frac{l}{2} + \rho g (h_0 - y')}$

④ Жидкость плотности ρ находится в цилиндрическом сосуде, равномерно вращающемся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Высота столба жидкости на оси h_0. Найти:
1) формулу свободной поверхности;
2) распределение давления на дно вдоль радиуса.





α - угол наклона малого поплавка к оси r'.

НИСО связана с дном сосуда.

1) $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{in}^{цб}$, $\vec{F}_{in}^{цб} = m\omega^2 \vec{r}_\perp$

r': $0 = -N\sin\alpha + m\omega^2 r_\perp$
z: $0 = -mg + N\cos\alpha$
$\Rightarrow tg\alpha = \frac{\omega^2 r_\perp}{g}$ (1) ($r_\perp = r'$)

Из рисунка: $tg\alpha = \frac{dz}{dr'}$ (2)

Из (1) и (2) $\Rightarrow \frac{dz}{dr'} = \frac{\omega^2 r_\perp}{g} \Rightarrow dz = \frac{\omega^2 r'}{g} dr'$

$\int_{h_0}^{z(r')} dz = \frac{\omega^2}{g} \int_0^{r'} r' dr' \Rightarrow \underbrace{z(r') = h_0 + \frac{\omega^2 r'^2}{2g}}$ - параболоид.

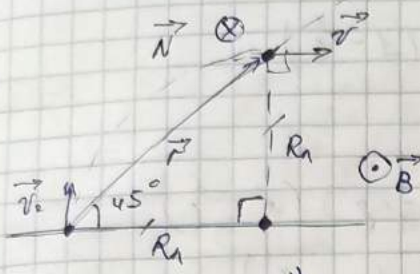
2) $\underbrace{P(r')} = \rho g z(r') = \underbrace{\rho g h_0 + \frac{\rho \omega^2 r'^2}{2}}$

8.12.2020

8.12.2020

(1) 1) $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = qU \Rightarrow v_2^2 = \frac{2qU}{m}$

2) $\frac{mv_2^2}{R_1} = qv_2B \Rightarrow R_1 = \frac{mv_2}{qB}$

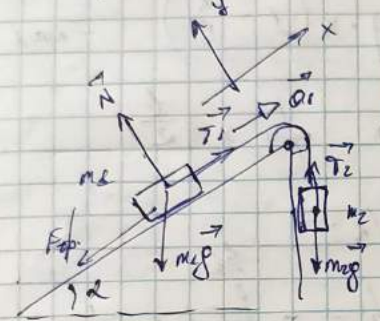


$\vec{N} = m[\vec{r}, \vec{v}]$

$N = mrv \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} mrv$

$= \frac{m^2v_2^2}{qB} = \frac{m^2 \cdot 2qU}{m \cdot qB} = 2m\frac{U}{B}$

(2)



$\downarrow x$

$\downarrow \vec{a_2}$

$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T_1} + \vec{N} + \vec{F_{тр}} = m_1\vec{a_1} \\ m_2\vec{g} + \vec{T_2} = m_2\vec{a_2} \end{cases}$

$x: \ T_1 - F_{тр.} - m_1g\sin\alpha = m_1a_1$

$m_2g - T_2 = m_2a_2$

$y: \ N - m_1g\cos\alpha = 0$

$N = m_1g\cos\alpha \Rightarrow F_{тр.} = kN = km_1g\cos\alpha$

Невесомость нити, идеальность блока: $T_1 = T_2 \equiv T$

Нерастяжимость нити: $a_1 = a_2 \equiv a$

$\begin{cases} T - km_1g\cos\alpha - m_1g\sin\alpha = m_1a \\ m_2g - T = m_2a \quad \rightarrow \quad T = m_2g - m_2a. \end{cases}$

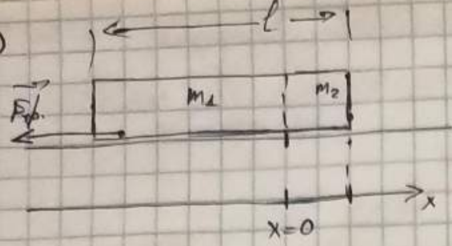
$m_2g - m_2a - km_1g\cos\alpha - m_1g\sin\alpha = m_1a.$

Найдём предельно допустимое значение $\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^*$, при котором движение „только начинается", т.е. при $a=0$

$\rightarrow \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^* = k\cos\alpha + \sin\alpha$

$\Rightarrow \left(\frac{m_2}{m_1}\right) > k\cos\alpha + \sin\alpha.$

③

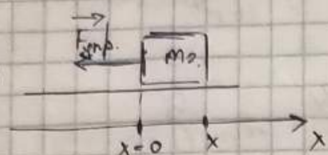


x: $-F_{тр} = ma_x$

$F_{тр} = kN_1 = km_1 g = k(m-m_2)g = k(m - m\frac{x}{l})g = kmg(1-\frac{x}{l})$

$\Rightarrow a_x = -kg(1-\frac{x}{l})$

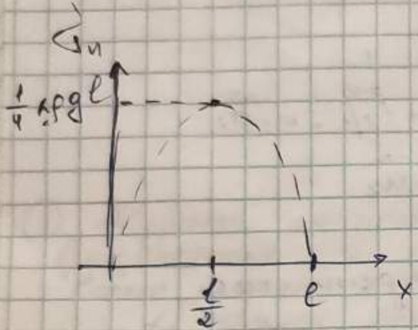
2)



x: $-F_{упр} = m_2 a_x$

$-\sigma_н S = m\frac{x}{l}\cdot(-kg)(1-\frac{x}{l})$

$\Rightarrow \sigma_н = \frac{m}{Sl}\cdot kg\cdot x(1-\frac{x}{l})$ – max.



Очевидно: $\sigma_н$ – max при $x = \frac{l}{2}$

3) теор. об изм. W_k:

$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{тр} = -\int_0^{l/2} F_{тр}(x)\,dx =$

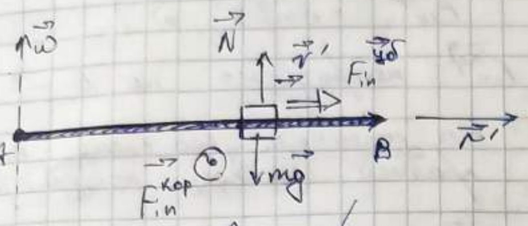
$= -\int_0^{l/2} kmg(1-\frac{x}{l})\,dx = -kmg\left(x - \frac{x^2}{2l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}\right) =$

$= -kmg\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{8}\right) = -\frac{3}{8}kmgl$

$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{3}{4}kgl}$

Продолжение НИСО.

Ир. 1.109



Вид спереди

НИСО связана со стержнем

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{in}^{цб} + \vec{F}_{in}^{кор}$$

$$\vec{F}_{in}^{кор} = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}]$$

1 способ:

$$r': \begin{cases} m a'_{r'} = F_{in}^{цб} = m\omega^2 r' \\ a'_{r'} = \ddot{r}' \end{cases}$$

$$\ddot{r}' - \omega^2 r' = 0$$

$$\left.\begin{aligned} r'(t) &= C_1 \cdot e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \\ v'_{r'}(t) &= C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r'(0) = 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$v'_{r'}(0) = v_0 = (C_1 - C_2)\omega \Rightarrow C_1 = \frac{v_0}{2\omega}$$

$$v'(t) = \frac{v_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right), \quad r'(t) = \frac{v_0}{2\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$$

$$r'^2 \omega^2 = \frac{v_0^2}{4}\left(e^{2\omega t} + e^{-2\omega t} - 2\right)$$

$$- \quad v'^2 = \frac{v_0^2}{4}\left(e^{2\omega t} + e^{-2\omega t} + 2\right)$$

$$r'^2 \omega^2 - v'^2 = -\frac{v_0^2}{4} \cdot 4 \Rightarrow v'^2 = v_0^2 + r'^2 \omega^2$$

2 способ по теор. об изм. $W_к$.

$$\frac{m v'^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = A_{in} = \int_0^{r'} m\omega^2 r' \, dr' = \frac{m\omega^2 r'^2}{2}$$

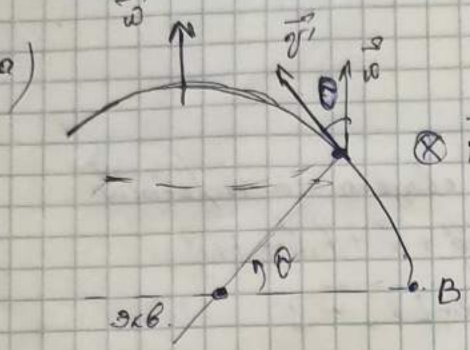
$$\Rightarrow \underline{v'^2 = v_0^2 + \omega^2 r'^2}$$

$$F_{in}^{кор} = 2m v' \omega = \underline{2m\omega \sqrt{v_0^2 + \omega^2 r'^2}}$$

Як 294, 295. Поезд массы m движется со ск-ю v на 60° с.ш. Найти доп-ую силу давления на рельсы, вызванную силой Кориолиса, при движении:

а) по меридиану с Ю на С;
б) по параллели с З на В.

а)



$\otimes\ \vec F_{in}^{кор.}$

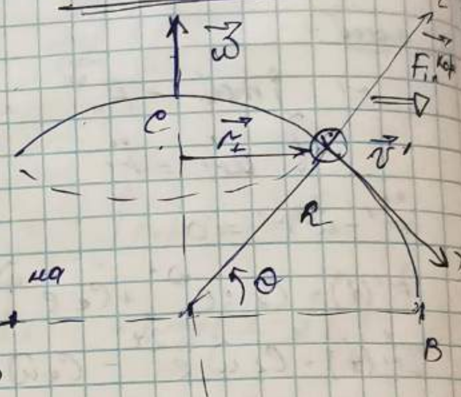
НИСО связана с Землёй

$\vec F_{in}^{кор.} = 2m[\vec v', \vec\omega]$

$F_{in}^{кор.}$ направлена на В =>

=> есть дополнит. давление на правый (по ходу поезда) рельс.

$\boxed{F_{доп} = |\vec F_{in}^{кор.}| = 2mv'\omega\sin\theta}$



По усл. $\vec v' \perp \vec\omega \Rightarrow F_{in}^{кор} = 2mv'\omega$ б)

z (вертикаль на данной широте);
x (на Ю):

$(F_{in}^{кор.})_x = 2mv'\omega\sin\theta$ — доп давление на правый рельс.

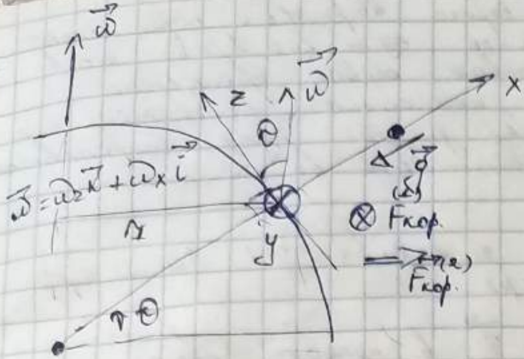
$(F_{in}^{кор})_z = 2mv'\omega\cos\theta$ — приподнимает З над рельсами

* Кроме $\vec F_{in}^{кор.}$ есть и $\vec F_{in}^{цб} = m\omega^2 r_\perp$; $r_\perp = R\cos\theta$,

$\vec F_{in}^{цб} \uparrow\uparrow \vec F_{in}^{кор.}$

Но: $\frac{F_{in}^{кор.}}{F_{in}^{цб}} = \frac{2mv'\omega}{m\omega^2 r_\perp} = \frac{2v'}{\omega R\cos\theta} = \frac{v'T}{\pi R\cos\theta} \ll 1$ — для поезда.

Як 300. Вращение Земли приводит к отклонению свободно пад. тел (без нач. ск-ти) от направления отвеса. В какую сторону направлено это отклонение и чему равна его величина? Провести решение задачи в с.о, связанной с Землёй.



Расс-м отклон-я свободного падения тела с высоты H (на геогр. широте Θ):

$$m\vec a' = m\vec g + \vec F_{in}^{кор} + \vec F_{in}^{цб}$$

$$\vec a' = \vec a_{кор} + \vec g$$

$$\vec a_{кор} = 2[\vec v', \vec\omega]$$

(пренебрегаем $a_{цб}$ по сравнению с g)

$$a_{цб} = \omega^2 r_\perp = \omega^2 R\cos\Theta = 0{,}02\left(\frac{м}{с^2}\right)$$

Основной эффект у нас – падение вдоль OX с ускор. g, при этом известно: $H = \frac{g t_п^2}{2} \to t_п = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

В 1-ом приближении $\vec v' = \vec g t$ => появится $a_{кор.y} = 2gt\omega_z$

$\vec F_{кор}$ => $v'_{y(1)} = g\omega_z t^2$, $y(t) = g\omega_z\frac{t^3}{3} > 0$ – это отклонение на восток.

$$\omega_z = \omega\cos\Theta$$

Во 2-ом приближении есть $v'_y = g\omega_z t^2$ => появится

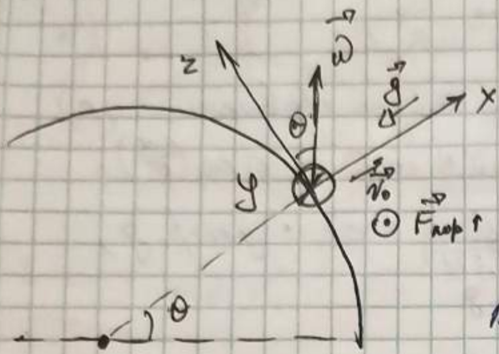
$$a_{кор\,z} = -2g\omega_z\omega_x t^2$$

$$\omega_x = \omega\sin\Theta$$

$$\Rightarrow v'_{z(2)} = -\frac{2}{3}g\omega_z\omega_x t^3 \Rightarrow z_{(2)} = -\frac{2}{3\cdot 4}g\omega_z\omega_x t^4 < 0$$

– это отклонение на юг.

Зад. 303. Из ружья произведён выстрел строго вверх (т.е. параллельно линии отвеса). Начальная ск-ть пули 100 м/с $= v_0$, геогр. широта места $\varphi = 60^\circ$. Учитывая осевое вращение Земли, определить приближённо, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадёт пуля. Сопротивление воздуха движению пули не принимать во внимание.



Стреляем с поверхности Земли вертикально вверх.

Ур-е для $\vec v$ в нулевом приближении

$$\vec v'_{(0)} = \vec g t + \vec v_0$$

$$v'_{x(0)} = v_0 - gt$$

В 1-ом приближении появится

$$a_{кор\,y} = 2(-v_0 + gt)\,\omega_z, \quad \omega_z = \omega\cos\theta$$

$$\Rightarrow v_y'{}_{(1)} = -2v_0\omega_z t + g\omega_z t^2 \Rightarrow y = -v_0\omega_z t^2 + g\omega_z\frac{t^3}{3}$$

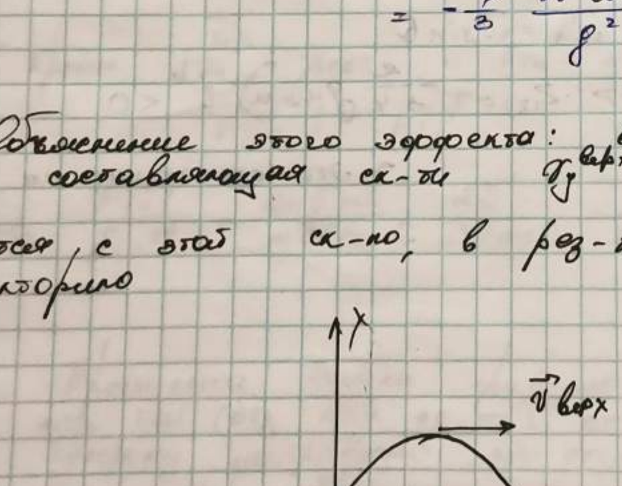
Время движения $t_д$ определяем в нулевом приближении.

$$x(t_д) = v_0 t_д - \frac{g t_д^2}{2} = 0 \Rightarrow t_д = \frac{2v_0}{g}$$

Смещение по y в этот момент: $y = -\frac{4v_0^3\omega_z}{g^2} + \frac{8v_0^3\omega_z}{3g^2} =$

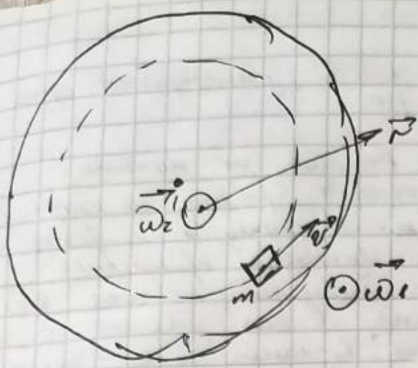
$$= -\frac{4}{3}\frac{v_0^3\omega_z}{g^2} < 0 \quad \sim \text{т.е. на запад.}$$

Объяснение этого эффекта: в момент $t_1 = \frac{t_д}{2} = \frac{v_0}{g}$ у тела есть составляющая ск-ти $v_y^{верх} = \frac{-v_0^2\omega_z}{g}$, и падение начинается с этой ск-ю, в рез-те в плоскости (XY) получим траекторию

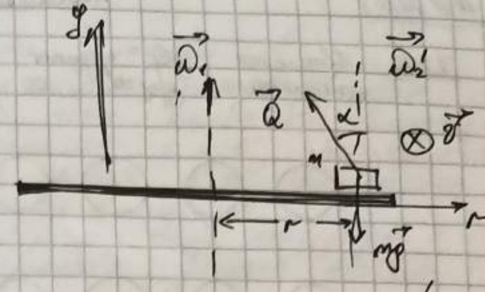


Д/з.1 Горизонт. диск вращается с угл. ск-ю $\vec\omega_1$ вокруг своей оси ($\omega_1 = const.$)

По диску движется тележка массы m с пост. ск-ю $\vec\omega'$ относит. диска по окр. радиуса r. Найти силу, с которой ~~[illegible]~~ тележка действует на диск.



Вид сверху



Вид спереди

Пусть $\vec\omega_1 \uparrow\uparrow \vec\omega_2'$

1) В неподвижной с.о.: т.к. $\vec\omega_1 \uparrow\uparrow \vec\omega_2'$, то $\omega_2 = \omega_1 + \omega_2'$

$m\vec g + \vec Q = m\vec a$ $\qquad \vec F_g = -\vec Q$ (III з-н.)

$$\left.\begin{array}{l} r:\ Q_r = ma_{nr} = -m\omega_2^2 r = -m(\omega_1+\omega_2')^2 r \\ y:\ Q_y - mg = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_g = Q = \sqrt{Q_r^2 + Q_y^2} = m\sqrt{(\omega_1+\omega_2')^4 r^2 + g^2}$$

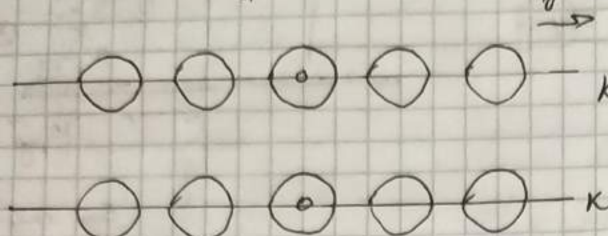
$$tg\,\alpha = \frac{Q_r}{Q_y} = \frac{-(\omega_1+\omega_2')^2 r}{g}.$$

16.12.2020

Кинематика СТО.

1.377. Имеются две группы синх-ных часов K и K', движущихся одна относительно другой со ск-ю $\vec{v}$, как на рис.

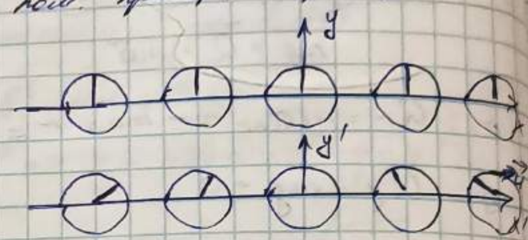
Возьмём за начало отсчёта времени момент, когда часы A' окажутся напротив часов A. Изобразить примерное расположение стрелок всех часов в этот момент с точки зрения K-часов и K'-часов.

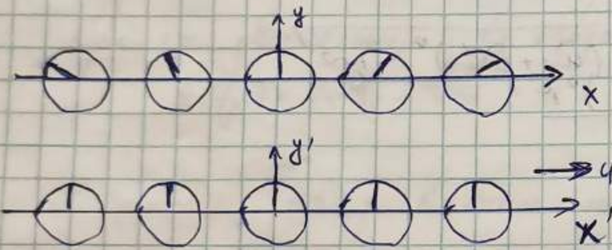


1) Синхронизуем все часы в K (все стрелки установим на 0). Синхронизуем часы A и A', когда они поравняются.

Находим время по часам K' с пом. преобр. Лоренца:

$$\begin{cases} t = \dfrac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow t' = -\frac{ux'}{c^2}$$





$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = 0$$

$$t = \frac{ux}{c^2}$$

2) Синхронизованы все часы в K' (на всех $t' = 0$). Синхронизуем часы A и A', когда они поравняются.

Находим время по часам K с помощью преобразования Лоренца:

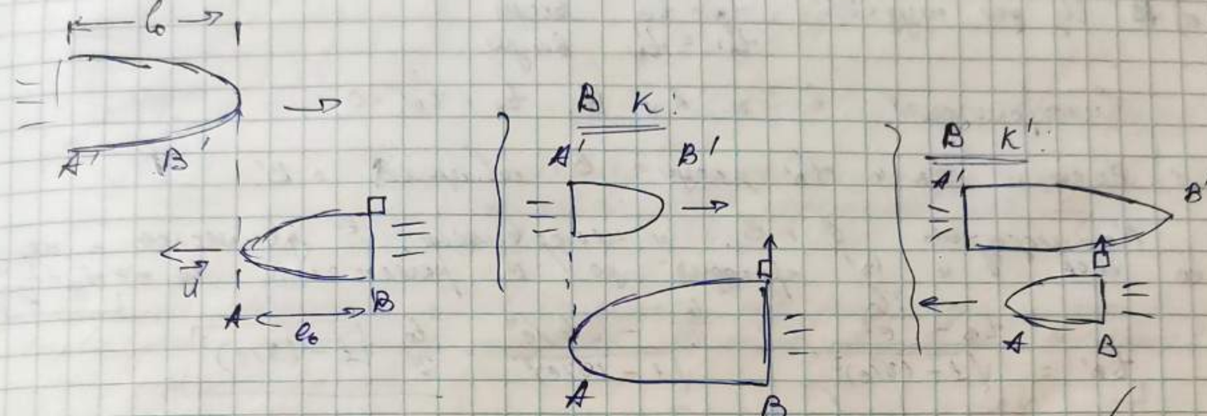
$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - ux/c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \\ t' = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{ux}{c^2}$$

② Парадокс Вобна в космосе

2 ракеты с равными собственными длинами l_0 проходят мимо друг друга с релятивистскими ск-ями на встречных курсах. В ракете AB есть орудие в т. B, ствол направлен перпендикулярно скорости. В момент, когда т. A поравнялась с т. A′ производится выстрел. С точки зрения K - системы ракета A′B′ подвергается лоренцеву сокращению => снаряд пролетит мимо.

С точки зрения K′ - системы лоренцеву сокращению подвергается ракета AB =>

=> снаряд попал в A′B′. Так попал или нет?



2 события {A = A′ и выстрел из т. B} могут быть одновременными только в одной с.о.! Из усл. => они одновременны в K

K: Пусть $t_A = t_{B'}' = 0$ - синхр. часы, когда $B' = A$

Когда $B = B'$: $t_B = \frac{l_0}{u}$ (т. B′ движ. к B и проходит l_0)

Когда $A' = A$: $t_A = \frac{l}{u} = \frac{l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{u}$

Но $t_A = t_B$ => выстрел в этот момент: $\boxed{t_B = \frac{l_0\sqrt{1-u^2/c^2}}{u}}$

Перейдём в K′: Пусть $t_{B'}' = t_A = 0$ - синхр, когда $A = B'$

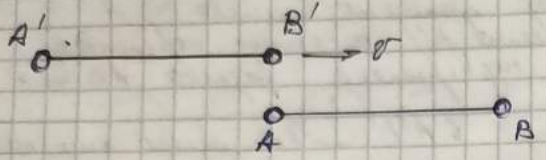
Когда $A = A'$, $t_{A'}' = \frac{l_0}{u}$ (A движ. к A′, проходит l_0)

В этот момент $t_A = \frac{t_{A'}' + \frac{(-u)l_0}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{l_0}{u}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$

Но $t_{A'}' = t_{B'}'$, а $t_B \neq t_A$! Из Пр. 1.377 знаем:

t_B опережает t_A на $\frac{ul_0}{c^2}$ -> выстрел был раньше.

Ир. 1.376.



Определить: а) пок-я часов B и B' в момент, когда они окажутся напротив друг друга.

Длина l_0

б) то же для часов A и A'

а) Из усл. следует: $t_A = t_B$ всегда

$t'_{A'} = t'_{B'}$ всегда

Синхронизация в т. A и B': $t_A = t'_{B'} = 0$

1) Находим t_B и $t'_{B'}$, когда B совпадает с B'.

Наблюдатель в т. B и неподвижен, B' движется к нему со скор. v и B' проходит до B расстояние l_0 => $\boxed{t_B = \frac{l_0}{v}}$

$$t'_{B'} = \frac{t_B - \frac{v l_0}{c^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\frac{l_0}{v} - v l_0/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{l_0}{v}\sqrt{1-(v/c)^2}$$

2) Находим t_A и $t'_{A'}$, когда A совпадает с A'.

1 способ: Наблюдатель в т. A'. Когда $A = A'$, наблюдатель сместится на l_0 (собственная длина в K') =>

$$\Rightarrow \boxed{t'_{A'} = \frac{l_0}{v}}$$

Точка A движется к наблюдателю со ск-ю $v_{Ax} = -v$ =>

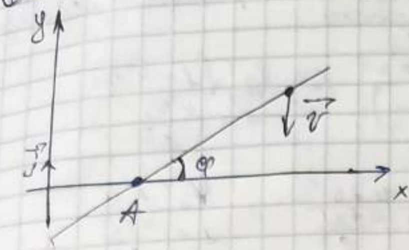
$$\Rightarrow t_A = \frac{t'_{A'} + \frac{(-v) l_0}{c^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{l_0/v - v l_0/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{l_0}{v}\sqrt{1-(v/c)^2}$$

2 способ: Наблюдатель в т. A и неподвижен. Точка A' движется к A и проходит путь $l \neq l_0$ (с точки зрения набл-ля)

$l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}$ (сокр. длины движ. тела)

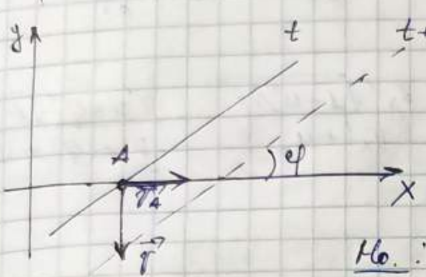
$$\Rightarrow t_A = \frac{l}{v} = \frac{l_0}{v}\sqrt{1-(v/c)^2}$$

④ Движение "быстрее света" (парадокс ножниц)



Очень длинный прямой стержень движется с $\vec{v} = const$, $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{j}$. Стержень составляет угол φ с осью X.

Найти ск-ть т. A (точка пересеч.-я стержня и оси X).



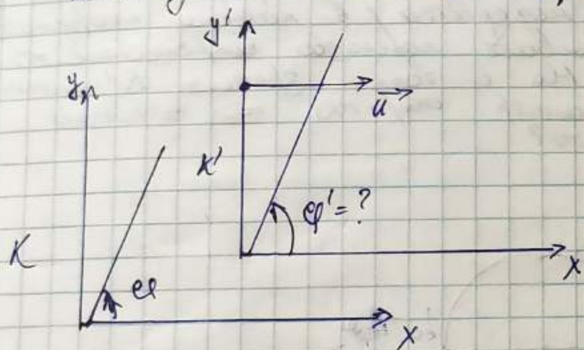
Из рис: $tg\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{v\,dt}{v_A\,dt}$ =>

=> $v_A = \frac{v}{tg\varphi}$.

=> $\exists \varphi$ (и $tg\varphi$.), для которых $v_A > c$!

Но.: никакая информация при этом не передается -> парадокса нет.

⑤ Стержень покоится в K-системе под углом φ к оси X. Какой угол составляет стержень с осью X' в K' системе?



Очевидно $tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$,

$tg\varphi' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$, и $\Delta y' = \Delta y$

-> пересчитываем только Δx:

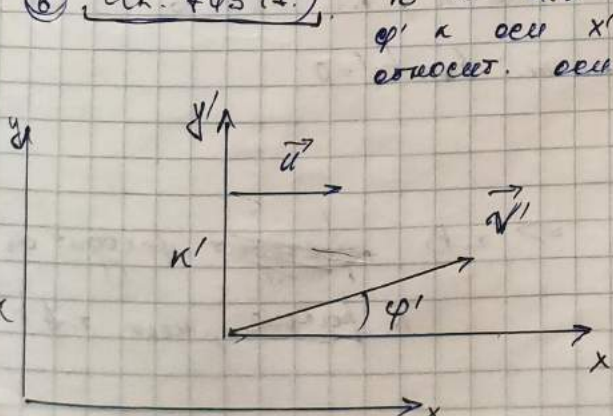
$x_1 = \frac{x_1' + ut_1'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$, $x_2 = \frac{x_2' + ut_2'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

Для нахождения $\Delta x'$ необх. засекать x_1', x_2' одновременно с т.зр. K', т.е. необх. $t_1' = t_2'$

$$=> \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{tg\varphi' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\Delta y}{\Delta x\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1-u^2/c^2}} > tg\varphi}$$

⑥ Ил. 443 (1.) В K' м.т. движется со скор. $\vec{V}'$ под углом φ' к оси X'. Под каким углом она движется относит. оси X с.о. K?



Очевидно: $tg\varphi' = \frac{V_y'}{V_x'}$,

$tg\varphi = \frac{V_y}{V_x}$

при этом $V_y' = \frac{dy'}{dt'}$, $V_y = \frac{dy}{dt}$

$V_x' = \frac{dx'}{dt}$, $V_x = \frac{dx}{dt}$

Пользоваться формулой из задачи 5 нельзя (!), т.к. частица попадает в разные точки в разные моменты времени! Поэтому отдельно пересчитаем компоненты скорости:

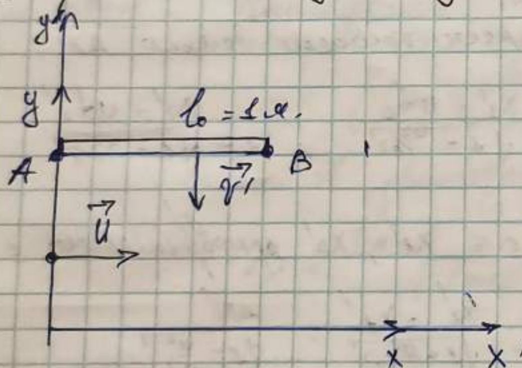
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt' + \frac{u\,dx'}{c^2}} = \frac{dy'\sqrt{1-u^2/c^2}}{dt'\left(1+\frac{u\,dx'}{c^2 dt'}\right)} = \frac{v_y'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+\frac{u v_x'}{c^2}}$$

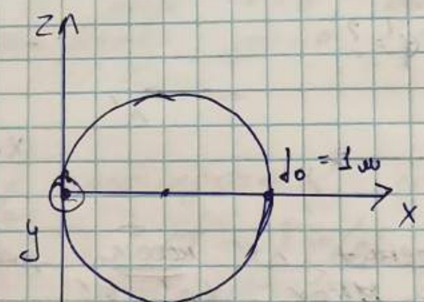
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + u\,dt'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\frac{dt' + \frac{u\,dx'}{c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}} = \frac{dx' + u\,dt'}{dt' + \frac{u\,dx'}{c^2}} = \frac{v_x' + u}{1+\frac{u v_x'}{c^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_y'\sqrt{1-u^2/c^2}}{\left(1+\frac{u v_x'}{c^2}\right)\cdot\frac{v_x'+u}{1+\frac{u v_x'}{c^2}}} = \frac{v_y'\sqrt{1-u^2/c^2}}{v_x'+u} = \frac{v'\sin\varphi'\sqrt{1-u^2/c^2}}{v'\cos\varphi'+u}$$

④ Парадокс метрового стержня.

Стержень AB ориентирован параллельно оси X' K'-системы и движется в K' системе со ск-по $\vec{v}'$ вдоль оси y'. K' система движется со ск-по $\vec{u}$ относит. K-системы. На плоскости XZ K-системы имеется круглое отверстие диаметром, равным длине стержня, край отверстия находится в начале координат. Стержень относительно K испытывает лоренцево сокращение => => свободно пройдёт в отверстие. Но с точки зрения K'-системы лоренцево сокращение испытывает диаметр отверстия => стержень застрянет. Что будет в действительности?





Разгадка парадокса в несовпадении времени в K и K'.
Считаем $x_A' = 0$ всё время.

Событие A – $\{y_A' = 0,\ t_A' = 0\}$ – попадание т. A на ось X' =>

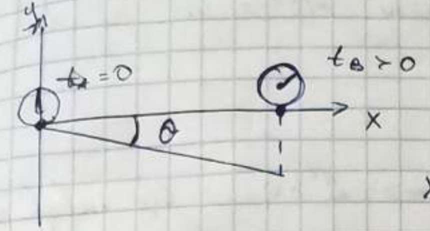
=> $t_B' = 0$ – попадание всего стержня на X', т.е. $x_B' = l_0$

В этот момент синхронизуем часы: $t_A = t_A' = 0$

1) найдём t_B, когда $t_A = 0$:

$$t_B = \frac{t_B' + \frac{u x_B'}{c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{l_0 u}{c^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} > 0$$ => т. B ~~пересекает~~ проходит ось X раньше, чем т. A!

Значит стержень наклонен к оси x!



2) $tg\,\Theta = \frac{y_B}{x_B}$, при этом x_B надо знать в тот же момент, что x_A!

$$x'_B = \frac{x_B - u t_A}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{x_B}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B = x'_B\sqrt{1 - u^2/c^2} = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$y_B = v \cdot t_B$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{\frac{dt' + u\,dx'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}} = \frac{dy'\sqrt{1 - u^2/c^2}}{dt'\left(1 + u\underbrace{\frac{dx'}{dt' c^2}}_{=0}\right)} = v'\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$tg\,\Theta = \frac{v'\sqrt{1 - u^2/c^2}\cdot l_0 u}{c^2\sqrt{1 - u^2/c^2}\cdot l_0\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{u v'}{c^2\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

21.12.2020

Пр. 1.348 В двух точках K-системы отсчёта произошли события, разделённые

По усл. события причинно связаны $\Rightarrow S^2>0$. Из инвариантности интервала:

$$S^2=(c\cdot\Delta t)^2-(\Delta l)^2=(c\Delta t')^2-(\Delta l')^2>0$$

$$\Rightarrow c|\Delta t|>|\Delta l| \Rightarrow c>\frac{|\Delta l|}{|\Delta t|}=v$$

$$c>\frac{|\Delta l'|}{|\Delta t'|}=v'$$

Подберём K-систему, в которой события одноместны:

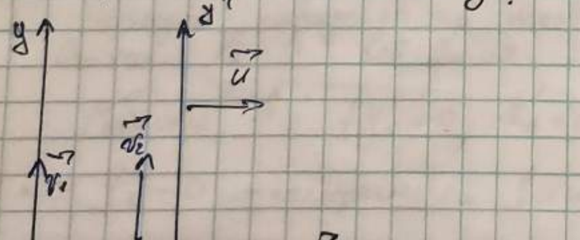
$$\Delta x=\frac{\Delta x'+u\cdot\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=0 \Rightarrow u_x=-\frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

При таком u_x: $\Delta t=\dfrac{\Delta t'+\frac{u\Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\dfrac{\Delta t'-\frac{u}{c^2}\cdot u\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=$

$$=\frac{\Delta t'\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\Delta t'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}>0 \text{ по усл.}$$

$\Rightarrow \underline{\Delta t'>0}$, т.к. $\left(\frac{u^2}{c^2}\right)<1$

② В K-системе 2 спринтера стартуют на расст-ии $\Delta x=d$ с оси X и бегут вдоль Y. Старт даётся около каждого из спринтеров в различные моменты: даётся преимущество слабому. Разница стартов в K $\Delta t\equiv\tau$. Для какого τ найдётся K', в которой $\tau'=0$? Явл. ли события стартов причинно связ.?



1) В K:

$$S^2=(c\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2=$$

По усл: $\Delta x=d$, $\Delta t=\tau$, $\Delta z=0$, $\Delta y=0$

$\Rightarrow S^2=(c\tau)^2-d^2$ — интервал между событиями (стартами.

В K' $S'^2=(c\tau')^2-(d')^2$

Лоренцево сокр. длины: $d'=d\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$

$$\Rightarrow (c\tau)^2-d^2=(c\tau')^2-d^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)$$

$\tau' = 0 \Rightarrow (c\tau)^2 = \frac{l^2 u^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{u l}{c^2}}$

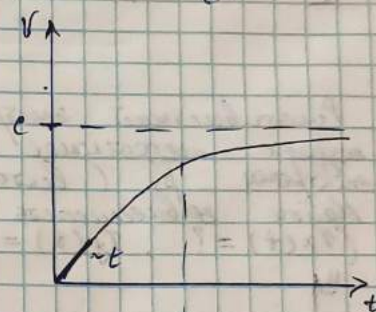
г) События стали одновременными => причинно не связаны.

1.402. Частица массы m_0 в момент $t=0$ начинает двигаться под действием постоянной силы F. Найти ск-ть частицы и пройдённый ею путь в зависимости от времени t.

(Р) $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \vec{p} = \vec{F} t$ (т.к. $v_0 = 0$ по усл $\to \vec{p}_0 = 0$)

Ось X вдоль $\vec{F}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} p = Ft \\ p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \Rightarrow \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = Ft$

1) Выразим v: $\underline{v = \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2 + \left(\frac{Ft}{c}\right)^2}}}$



$\frac{Ft}{c} \ll m_0 \Rightarrow v(t) \simeq \frac{Ft}{m_0} \sim t$

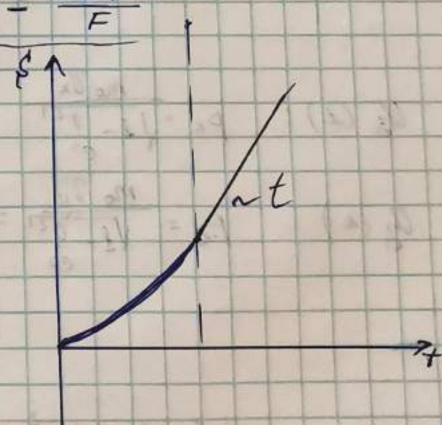
$\frac{Ft}{c} \gg m_0 \Rightarrow v(t) \simeq \frac{Ft}{\sqrt{\left(\frac{Ft}{c}\right)^2}} \simeq c$

$\int dx = \int \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2 + \left(\frac{Ft}{c}\right)^2}} dt$

$\cancel{S = \int_0^t \frac{Ft\,dt}{\sqrt{m_0^2 + \left(\frac{Ft}{c}\right)^2}}}$

$S(t) = \int_0^t v(t')\,dt' = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{Fc\, d(t'^2)}{\sqrt{(m_0 c)^2 + (Ft')^2}} = \frac{Fc}{2F^2} \cdot 2\sqrt{(m_0 c)^2 + (Ft')^2}\Big|_0^t =$

$= \underline{\sqrt{\left(\frac{m_0 c^2}{F}\right)^2 + (ct)^2} - \frac{m_0 c^2}{F}}$



④ Найти ск-ть частицы, если её импульс равен p, кин. энергия W_k.

По опр.:
$$\begin{cases} p = mv = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & (1) \\ W_k = W - W_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) & (2) \end{cases}$$

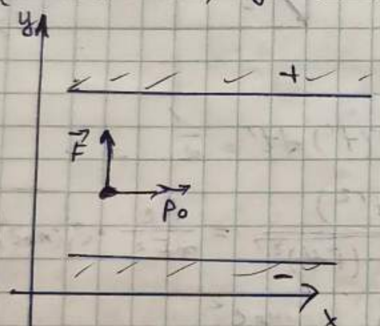
Делим (2) на (1)

$$\frac{W_k}{p} = \frac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \Rightarrow \frac{W_k v}{pc^2} = 1 - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{v^2 W_k^2}{p^2c^4} - \frac{2vW_k}{pc^2} \Rightarrow v\left(1 + \frac{W_k^2}{p^2c^2}\right) = \frac{2W_k}{p}$$

$$v = \frac{2W_k}{p\left(1+\frac{W_k^2}{p^2c^2}\right)} = \frac{2W_k}{p + \frac{W_k^2}{pc^2}} = \boxed{\frac{2W_k p}{p^2 + \frac{W_k^2}{c^2}}}$$

⑤ Релятивистский электрон влетает в плоский конденсатор, в котором создано постоянное эл. поле с напр. $\vec{E}$. Начальный импульс электрона p_0 (вектор $\vec{p}_0$ напр. параллельно обкладкам). Найти зависимость проекций ск-ти электрона от времени ($v_x(t) = ?$, $v_y(t) = ?$)



2-й закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q\vec{E}$$

$$x:\ \frac{dp_x}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{p_x(t) = p_0} \text{ по ур. } (1)$$

$$y:\ \frac{dp_y}{dt} = -qE = |q|E \Rightarrow \underline{p_y(t) = |q|Et} \quad (2)$$

Из (1): $p_x = \dfrac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = p_0 \Rightarrow \dfrac{m_0^2 v_x^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = p_0^2$

Из (2): $p_y = \dfrac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = |q|Et \Rightarrow \dfrac{m_0^2 v_y^2}{1+\frac{v^2}{c^2}} = (qEt)^2$

+

$$\frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = p_0^2 + (qEt)^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{p_0^2 + (qEt)^2}{m_0^2 + \frac{p_0^2 + (qEt)^2}{c^2}} = \frac{(p_0^2 + (qEt)^2)c^2}{m_0^2c^2 + p_0^2 + (qEt)^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{p_0^2 + (qEt)^2}{m_0^2c^2 + p_0^2 + (qEt)^2} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2c^2}{m_0^2c^2 + p_0^2 + (qEt)^2}$$

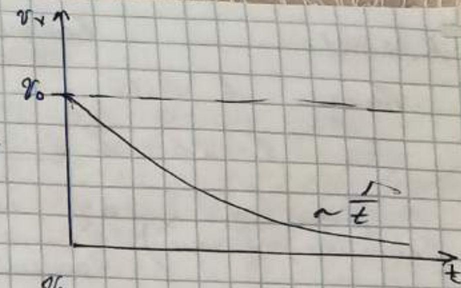
$v_x = p_0\sqrt{\ldots}$

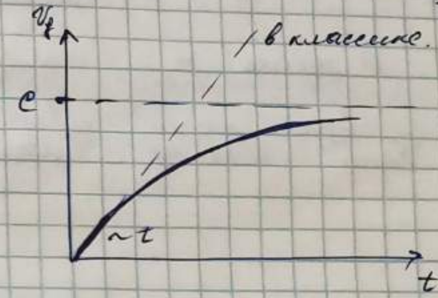
$v_y = |q|E\ldots$

Д/З:

$$v_x = \frac{p_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_0} = \frac{p_0 c}{\sqrt{m_0^2c^2+p_0^2+(qEt)^2}}$$

$$v_y = \frac{|q|Et\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_0} = \frac{|q|Etc}{\sqrt{m_0^2c^2+p_0^2+(qEt)^2}}$$





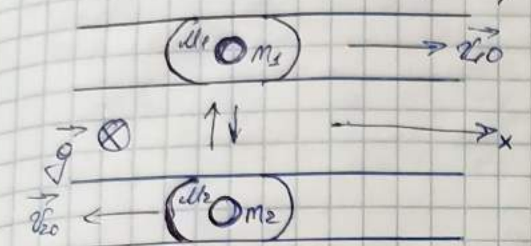
Д/З: Ир. 1.380, 3.392
+ в конспекте.

02.02.2021.

Импульс. Закон сохранения импульса.

① По параллельным рельсам катятся без трения две одинаковые тележки ($M_1 = M_2 = M$) со ск-ями $v_{10} = v_{20} \equiv v_0$ навстречу друг другу. Два человека ($m_1 = m_2 = m$) перепрыгивают (меняются местами) из одной тележки в другую со ск-ями, перпендикулярными рельсам. Найти новые ск-ти тележек.

вид сверху



Обосновать почему можно исп. закон. (3 случай)

Система "

Есть $m\vec{g}$, когда прыгают => ЗСИ справедлив только в проекции на X (!)

1) СМТ "M_1, M_2, m_1, m_2":

$$(M_1+m_1)v_{10} - (M_2+m_2)v_{20} = (M_1+m_2)v_{1x} + (M_2+m_1)v_{2x}$$

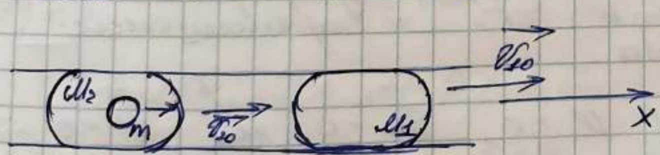
$$\Rightarrow v_{1x} = -v_{2x}$$

2) СМТ "M_1, m_2"

$$M_1 v_{10} - m_2 v_{20} = (M_1+m_2)v_{1x}.$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{1x} = \frac{(M_1 - m_2)v_0}{M_1+m_2}}$$

② По рельсам друг за другом катятся без трения 2 тележки ($M_1 = M_2 = M$) с одинаковыми ск-ями $v_{10} = v_{20} \equiv v_0$. Человек массой m перепрыгивает со ск-ю "u" относит. своей тележки из задней тележки в переднюю. Найти новые ск-ти тележек.



Есть $m\vec{g}$ при прыжке => ЗСИ справедлив в проекции на X.

Работаем относит. рельсов (ИСО)

$\Rightarrow \vec{v}_{чел} = \vec{u} + \vec{v}_2$ — по принципу Галилея.
$\vec{v}_2 \neq \vec{v}_{20}$ — ск-ть изм., когда человек прыгает.

1) СМТ "M_2, m" в моменты когда m ещё в тележке и когда только выпрыгнул:

$$(M_2+m)v_{20} = M_2 v_{2x} + m(u + v_{2x}) \Rightarrow \underbrace{v_{2x} = v_0 - \frac{mu}{M+m}}_{\text{ск-ть тележки после прыжка}}$$

$$Mv_0 + mv_0 = Mv_{2x} + mu + mv_{2x}$$

$$v_{2x} = \frac{(M+m)v_0 - mu}{(M+m)} \longrightarrow$$

2) СМБ "M_1, m" в моменты, когда m идё в прыжке и когда попал в M_1:

$$M_1 V_{10} + m(U + V_{ex}) = (M_1 + m) V_{1x}$$

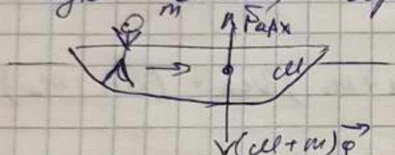
$$U + V_{ex} = U + V_0 - \frac{mU}{M+m} = V_0 + \frac{MU}{M+m}$$

$$MV_0 + m\left(V_0 + \frac{MU}{M+m}\right) = (M+m) V_{1x}$$

$$\frac{MV_0 + mV_0 + \frac{mMU}{M+m}}{M+m} = V_{1x}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{1x} = V_0 + \frac{m \cdot M \cdot U}{(M+m)^2}}$$

3 а) Лодка массы M с находящимся в ней человеком массы m неподвижно стоит на спокойной воде. Человек пошёл по лодке со ск-ю $\vec{U}$ отн. лодки. Найти ск-ти человека и лодки относит. берега. Сопр. воды не учитывать.



СМБ "M, m", СО связана с берегом

$(M+m)\vec{g} + \vec{F}_{арх} = 0 \Rightarrow$ ЗСИ справедлив в векторной форме

По принципу Галилея

$$\vec{V}_ч = \vec{U} + \vec{V}_л$$

$M\vec{V}_л + m\vec{V}_ч = 0$ (т.к. по усл. $\vec{V}_0 = 0$) $\Rightarrow \vec{V}_л = -\vec{U}\frac{m}{M+m}$

$M\vec{V}_л + m(\vec{U} + \vec{V}_л)$

$$\Rightarrow \vec{V}_ч = \vec{U} - \frac{\vec{U} m}{M+m} = \vec{U}\frac{M}{M+m}$$

б) Перемещение человека относительно лодки равно $\vec{l}$. Найти перемещение лодки $\vec{r}_л$ и перемещение человека $\vec{r}_ч$ отн. берега.

Из п. а) $\Rightarrow \vec{V}_л = 0$ при $\vec{U} = 0$, $\vec{V}_ч = 0$ при $\vec{U} = 0 \Rightarrow$

время движения человека и лодки одинаково

По опр.:

$$\vec{l} = \int_0^{t_{дв}} \vec{U}\, dt$$

$$\vec{r}_л = \int_0^{t_{дв}} \vec{V}_л\, dt, \quad \vec{r}_ч = \int_0^{t_{дв}} \vec{V}_ч\, dt$$

~~=> из п. а) => $\vec{v}_л = 0$ при $\vec{u} = 0$, $\vec{v}_ч = 0$ при $\vec{u} = 0$~~

~~=> время движения человека и лодки одинаково~~

=> из п. а):

$$\underbrace{\vec{r}_л = -\vec{\ell}\,\frac{m}{M+m}} \qquad \underbrace{\vec{r}_ч = \vec{\ell}\,\frac{M}{M+m}}$$

б) Ускорение человека отн. лодки равно $\vec{a}'$. Найти ускорения $\vec{a}_л$ и $\vec{a}_ч$ отн. берега, найти горизонтальную сост. силы, с которой человек действует на лодку.

По опр.: $\vec{a}' = \frac{d\vec{u}}{dt}$

$\vec{a}_л = \frac{d\vec{v}_л}{dt}$, $\vec{a}_ч = \frac{d\vec{v}_ч}{dt}$

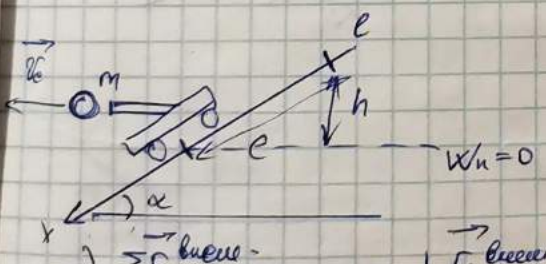
=> из п. а): $\underbrace{\vec{a}_л = -\vec{a}'\,\frac{m}{M+m}}$ $\qquad \vec{a}_ч = \vec{a}'\,\frac{M}{m+M}$

По 2-му з-ну Ньютона:

$$\vec{F} = M\vec{a}_л = -\vec{a}'\,\frac{Mm}{M+m}$$

④ Пушка массы M соскальз. без трения с наклонной плоск-ти, сост. угол α с горизонтом, когда пушка прошла путь l, производится выстрел снарядом массы m в горизонт. напр-ии.

Найти ск-ть снаряда, если пушка после выстрела остановилась.



1) Трения нет => справедлив З.С.Э.

$$(M+m)gh = (M+m)\frac{v_n^2}{2}$$

$v_n = \sqrt{2gh}$ к моменту выстрела,

$h = l \cdot \sin\alpha$

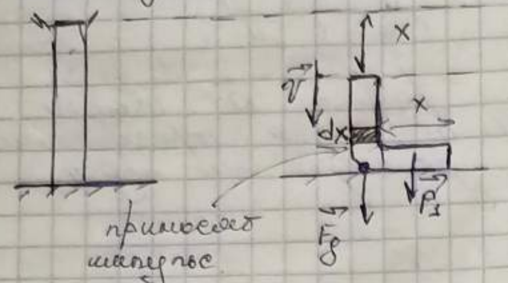
2) $\sum \vec{F}_i^{внеш} \neq 0$, но $|F_c^{внеш}| < \infty$, $\Delta t \to 0$ => справедлив ЗСИ

$$X:\ (M+m)v_n = M \cdot 0 + m v_c \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow v_c = \frac{M+m}{m\cos\alpha}\cdot v_n$$

$$\Rightarrow \underbrace{v_c = \frac{M+m}{m}\cdot\frac{\sqrt{2gl\sin\alpha}}{\cos\alpha}}$$

⑤ Однородный канат висит вертикально, его нижний конец касается горизонтального стола. Верхний конец каната освобождают.

Док-ть: в любой момент падения каната сила его давления на стол в 3 раза больше веса части, уже лежащей на столе.



1) P_1 - вес части, лежащей на столе.

Длина части на столе – x => масса части на столе $m_1 = \rho S x$

$m_1 g = N_1$ (2-й закон.)

$N_1 = P_1$ (3-й закон.)

=> $P_1 = \rho S x g$

2) $F_g = N_\Sigma$ (3-й закон), где $N_\Sigma = N_1 + N_{доп}$,

$$N_{доп} = \frac{dp}{dt} \quad (2\text{-й закон})$$

$$dp = v\,dm = v \rho S\,dx = v \rho S \cdot v \cdot dt = \rho S v^2 dt$$

$$\cancel{=> N_{доп} = \frac{\rho S v^2 dt}{dt} = \rho S v^2}$$

(часть dm приносит на стол импульс dp.)

3) Часть dm падает свободно => справедлив ЗСЭ.

Верхний край опустился на x => $dm \cdot g \cdot x = \frac{dm \cdot v^2}{2}$

$$-> v^2 = 2gx$$

Тогда $\frac{dp}{dt} = \rho S v^2 = 2\rho S g x$

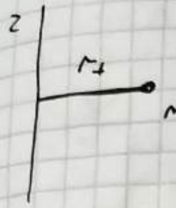
=> $N_\Sigma = N_1 + N_{доп} = \underline{F_g} = \rho S g x + 2\rho S g x = 3\rho S g x = 3\underline{P_1}$

~ что и треб. док-ть

9.02.2022.

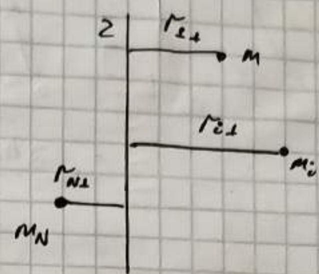
Вычисление моментов инерции

① Для одной м.т. по опр.:



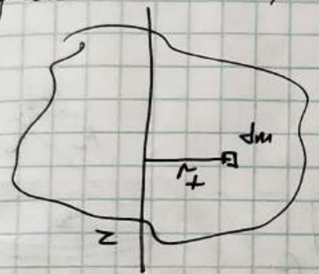
$\boxed{J = m r_\perp^2}$

② Для смт по св-ву аддитивности J:



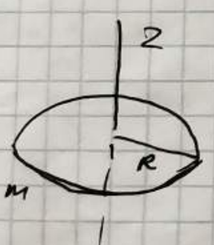
$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2$$

③ Твёрдое тело (ТТ) можно рассматривать как предельный случай смт при $N \to \infty$, тогда необх. разбить ТТ на участки dm (малая масса m), тогда $\Sigma \to \int$:

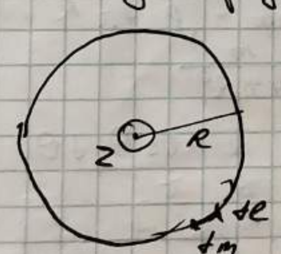


$$J = \int_{(m)} r_\perp^2 \, dm = \int_{(V)} r_\perp^2 \rho \, dV$$

№1. Найти момент инерции тонкого кольца массой m и радиуса R относительно оси симметрии, перпенд. плоск-ти кольца. Кольцо считать однородным.



Вид сверху



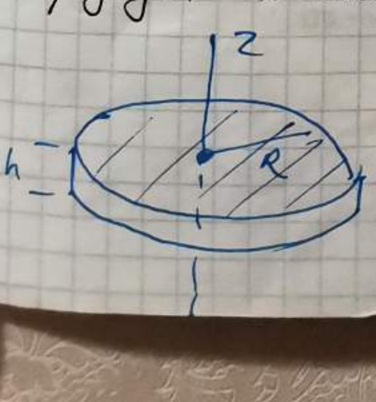
Разобьём кольцо на беск. малые участки длины dl и массы dm

(очевидно: $dm = \rho \, dl \cdot S_{сеч}$)

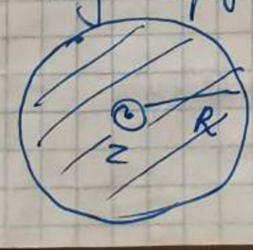
$$dJ = dm \cdot r_\perp^2 = dm \, R^2$$

$$\Rightarrow J = \int_{(m)} dm \cdot R^2 = \underline{mR^2}$$

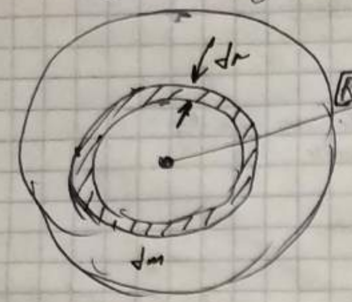
№2. Найти момент инерции однородного диска массы m и радиуса R относительно оси, перпендикулярной плоскости диска.



Вид сверху



Разбиение диска: выгоднее всего на кольца

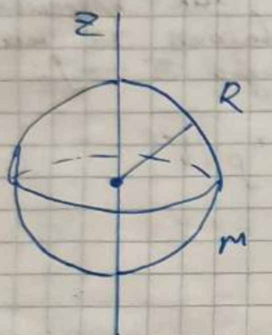


$$J=\int_{(J)} dJ, \quad dJ = dm\cdot r_\perp^2 \quad (\text{сл } J \text{ кольца})$$

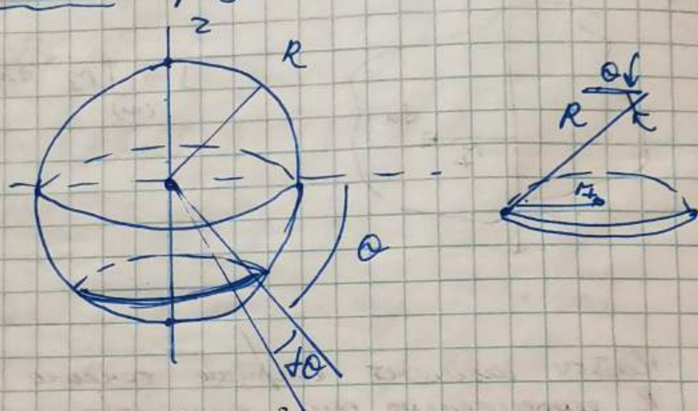
$$dm=\rho dV=\rho\cdot h\cdot 2\pi r_\perp dr_\perp, \quad r_\perp = r \in [0;R]$$

$$J=\int_0^R \rho h\cdot 2\pi r_\perp\cdot r_\perp^2 dr_\perp = \rho h\cdot 2\pi \frac{R^4}{4} = \rho\pi h R^2\cdot\frac{R^2}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

№3. Найти момент инерции сферы массы m и радиуса R отн. оси, совп. с диаметром.



1 способ – разбиение на кольца:



$$dJ = dm\cdot r_\perp^2, \quad r_\perp = R\cos\theta$$

ρ – поверхностная пл-ть:

$$m=\rho\cdot S_{сф.} = \rho\cdot 4\pi R^2$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{m}{4\pi R^2}$$

$$dm = \rho\cdot dS = \frac{m}{4\pi R^2}\cdot 2\pi r_\perp\cdot R\cdot d\theta = \frac{m}{2}\cos\theta\, d\theta$$

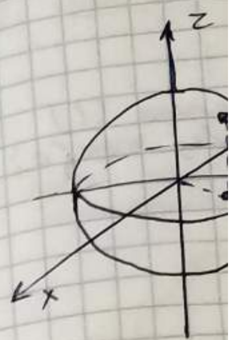
$$\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{m}{2}\cos\theta\cdot R^2\cdot\cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mR^2\cos^3\theta\, d\theta = \frac{2}{3}mR^2$$

2 способ – разбиение на мт. на поверхности:

$$J_x=J_y=J_z=J$$

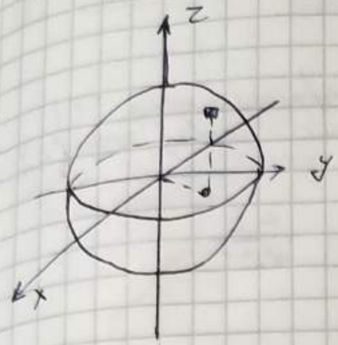
$$J_z=\int_{(m)} dm\cdot r_\perp^{(z)2} = \int_{(m)} dm(x^2+y^2)$$



④ Найти
радиуса
1 способ
2 способ

⑤ а) Най
m и
через

б) $S_{об}$



$$+ J_x = \int_{(m)}^{m} dm \cdot r_\perp^{(x)2} = \int_{(m)} dm\,(y^2+z^2)$$

$$J_y = \int_{(m)} dm \cdot r_\perp^{(y)2} = \int_{(m)} dm\,(x^2+z^2)$$

$$3J = 2\int_{(m)} dm\,(x^2+y^2+z^2) = 2mR^2 \Rightarrow J = \frac{2}{3}mR^2$$

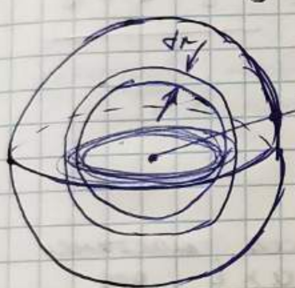
④ Найти момент инерции однородного шара массы m и радиуса R относительно оси, совп. с диаметром.

1 способ – разбиение на бесконечно тонкие диски (самост.)

2 способ – разбиение на сферические слои:

$$J = \int dJ, \quad dJ = \frac{2}{3}\,dm\, r_\perp^2, \quad r_\perp \in [0, R]$$

$$dm = \rho \cdot dV = \rho S_{сф} \cdot dr_\perp = \rho \cdot 4\pi r_\perp^2\, dr_\perp, \quad \rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

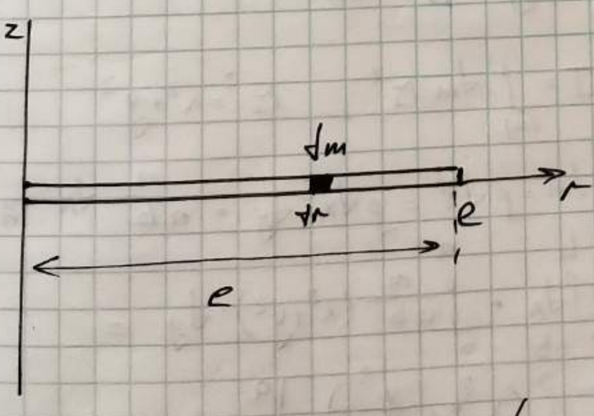


$$dJ = \frac{2}{3} \cdot 4\pi\rho\, r_\perp^4\, dr_\perp$$

$$J = \int_0^R \frac{8}{3}\pi\rho\, r_\perp^4\, dr_\perp = \frac{8}{3}\pi \cdot \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5}mR^2$$

⑤ а) Найти момент инерции однородного тонкого стержня массы m и длины l относительно оси, перпенд. стержню и прохд. через его конец.

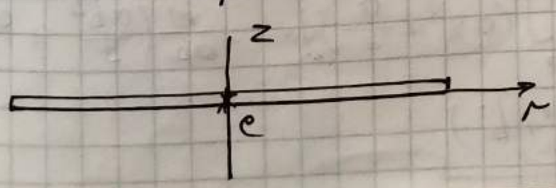
$$dm = \rho\, dV = \rho S\, dr, \quad r_\perp = r; \quad \rho = \frac{m}{Sl}$$



$$J = \int_0^l \rho S r^2\, dr = \frac{\rho S r^3}{3}\Big|_0^l = \frac{\rho S l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

б) Тот же стержень, ось проходит через центр стержня

1 способ: $J = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho S r^2\, dr = \frac{ml^2}{12}$



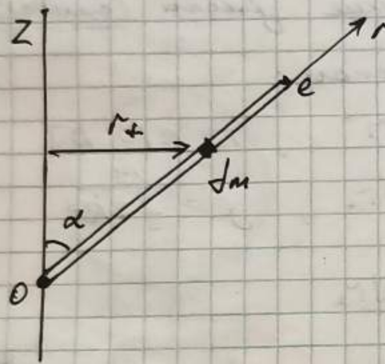
2 способ: по теореме Гюйгенса - Штейнера.

$$\left\{ \boxed{J = J_c + m d^2} \right\}$$

J, J_c - моменты инерции отн. двух параллельных (!) осей, одна из которых проходит через ц.м (С); d - расст-е между осями

Здесь $d = \frac{l}{2} \Rightarrow J_c = \frac{ml^2}{3} - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12}$

6) Найти момент инерции однородного тонкого стержня массы m и длины l относительно оси, проходящей через его конец. Стержень расположен под углом α к оси.



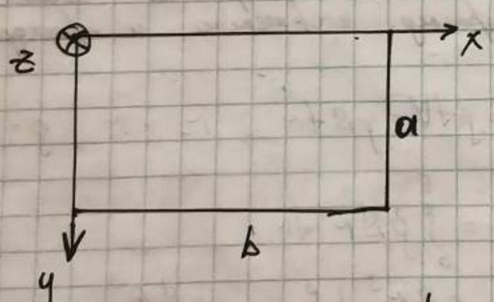
$$J = \int_{(m)} dm\, r_\perp^2$$

$$dm = \rho S\, dr \ ; \ \rho = \frac{m}{lS}$$

$$J = \int_0^l \rho S \cdot r^2 \sin^2\alpha\, dr = \frac{ml^2}{3} \sin^2\alpha$$

$$r_\perp = r \sin\alpha$$

7) Найти момент инерции однородной тонкой пластинки массы m; пластинка прямоугольная $a \times b$, ось проходит через одну из вершин прямоуг. перпенд. его плоскости:

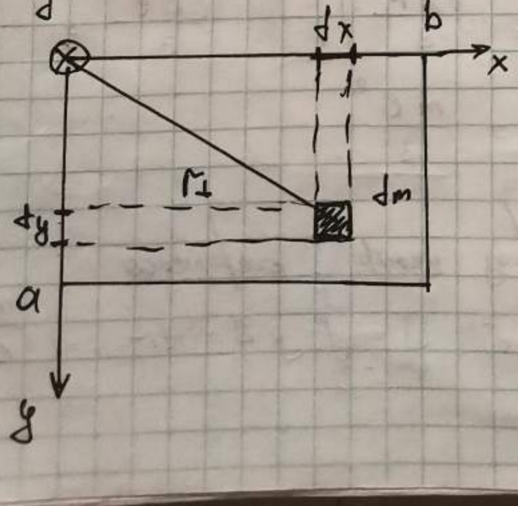


Поверхностная плотность:

$$\rho = \frac{m}{S} = \frac{m}{ab}$$

$$J = \int_{(m)} dm\, r_\perp^2, \quad r_\perp^2 = x^2 + y^2$$

$$dm = \rho\, dS = \rho\, dx \cdot dy = \frac{m}{ab}\, dx \cdot dy$$



$$J = \int_0^b dx \cdot \int_0^a \frac{m}{ab}(x^2 + y^2)\, dy =$$

$$= \frac{m}{ab} \int_0^b \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a dx =$$

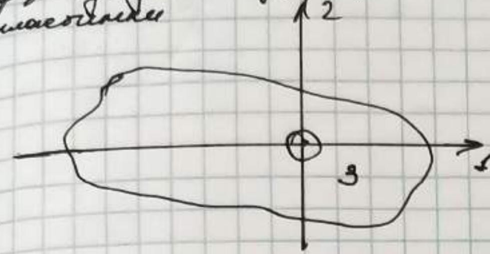
$$= \frac{m}{ab} \int_0^b \left(a x^2 + \frac{a^3}{3}\right) dx = \frac{m}{ab}\left(\frac{ab^3}{3} + \frac{a^3 b}{3}\right) =$$

$$= \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$$

⑧ Док-ть: для тонкой пластинки произвольной формы

$$J_1 + J_2 = J_3$$

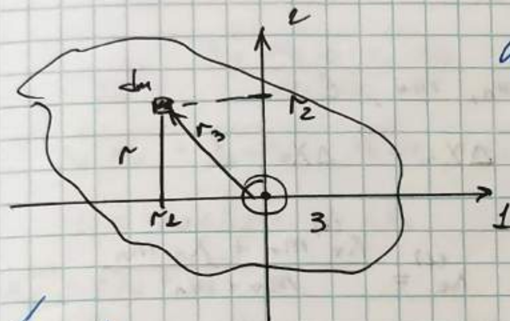
где 1, 2, 3 — три взаимно перпенд. оси, проходящие через одну точку, причём оси 1, 2 лежат в пл-ти пластинки



$$dJ_1 = dm \cdot r_1^2$$
$$dJ_2 = dm \cdot r_2^2$$

$$dJ_3 = dm\, r_3^2 \quad (1)$$

$$dJ_1 + dJ_2 = dm(r_1^2 + r_2^2) = dm\, r_3^2 \quad (2)$$



Из (1) и (2)

$$\boxed{J_3 = J_1 + J_2}$$

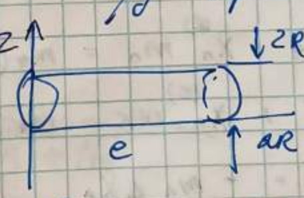
ч.т.о. и треб. док-ть

Пример: найти момент инерции однородного диска массы m, радиуса R отн. оси, совп. с диаметром.

$$J_1 = J_2; \quad J_3 = \frac{mR^2}{2} \quad \text{(см. зад. 2.)}$$

$$\Rightarrow J_1 = J_2 = \frac{J_3}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

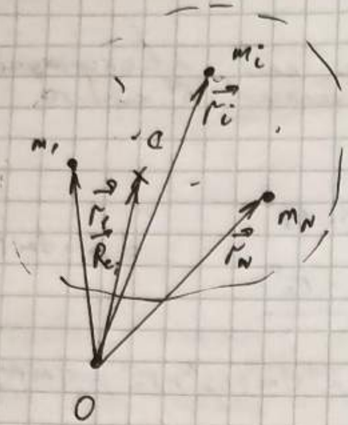
Д/з: Ир. 1.257 (б), 1.260



Найти момент инерции отн. OZ

10.02.2021.

Центр масс. Теорема о движении центра масс.

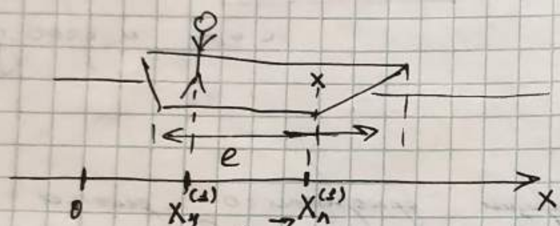


$$\vec{R_c} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}}{m_c}$$

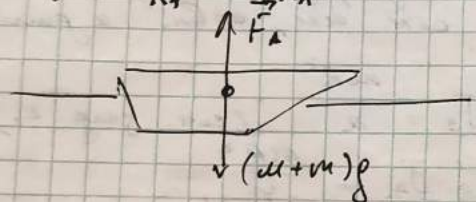
$$m_c \vec{a_c} = \vec{F}^{внеш}$$

① $m_л,\ m_ч,\ \ell$

$\Delta X_л = ?\quad \Delta X_ч = ?$



$$X_c^{(1)} = \frac{X_ч^{(1)} m_ч + X_л^{(1)} m_л}{m_ч + m_л}$$



$\Rightarrow \vec{F}^{внеш} = 0 \quad \Rightarrow \vec{a_c} = 0$

$\Rightarrow \vec{V_c} = 0 \quad \Rightarrow X_c = const$

$$X_c^{(2)} = X_c^{(1)} = \frac{m_ч X_ч^{(2)} + X_л^{(2)} m_л}{m_ч + m_л} = \frac{m_ч (X_ч^{(1)} + \Delta X_ч) + m_л (X_л^{(1)} + \Delta X_л)}{m_ч + m_л}$$

$\rightarrow X_ч^{(1)} m_ч + X_л^{(1)} m_л = m_ч (X_ч^{(1)} + \Delta X_ч) + m_л (X_л^{(1)} + \Delta X_л)$

$\cancel{X_ч^{(1)} m_ч} + \cancel{X_л^{(1)} m_л} = \cancel{m_ч X_ч^{(1)}} + m_ч \Delta X_ч + \cancel{m_л X_л^{(1)}} + m_л \Delta X_л$

$m_ч \Delta X_ч = - m_л \Delta X_л$

$\Delta X_ч = - \frac{m_л \cdot \Delta X_л}{m_ч}$

$0 = m_л \Delta X_л + m_ч \Delta X_ч$

$\Delta X_ч = \ell + \Delta X_л$ ~ проекция Галилея.

$0 = m_л \Delta X_л + m_ч (\ell + \Delta X_л)$

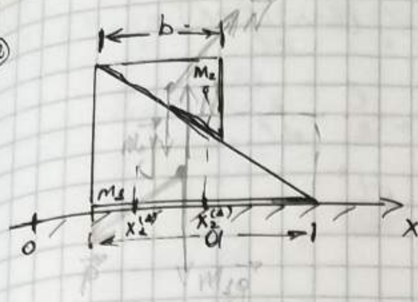
$0 = m_л \Delta X_л + m_ч \ell + \Delta X_л \cdot m_ч$

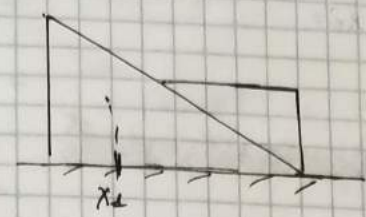
$$\Delta X_л = - \frac{m_ч \ell}{m_л + m_ч}$$

$$\Rightarrow \Delta X_ч = \ell - \frac{m_ч \ell}{m_л + m_ч} =$$

$$= \ell \left(\frac{m_л + m_ч - m_ч}{m_л + m_ч} \right) = \frac{m_л \ell}{m_л + m_ч}$$

②





$\Delta x_1 = ?$
$\Delta x_2 = ?$

$$x_c^{(1)} = \frac{x_1^{(1)} m_1 + x_2^{(1)} m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{F}^{внеш} = 0 \quad , \quad \vec{a}_c = 0 \;\Rightarrow\; \vec{V}_c - const = 0$$

$$x_c = const.$$

$$x_c^{(2)} = \frac{x_1^{(2)} m_1 + x_2^{(2)} m_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_1^{(2)} m_1 + x_2^{(2)} m_2 = x_1^{(1)} m_1 + x_2^{(1)} m_2$$

$$0 = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2$$

Сместится на $(a-b.)$

$$x_1^{(2)} = \Delta x_1 + x_1^{(1)}$$

Принцип отн. движения:

$$x_2^{(2)} = \Delta x_2 + x_2^{(1)} = \Delta x_1 + (a-b) + x_2^{(1)} \qquad \Delta x_2 = \Delta x_1 + (a-b)$$

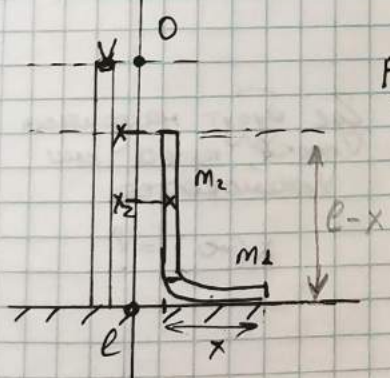
$$0 = m_1 \Delta x_1 + m_2 (\Delta x_1 + a - b)$$

$$\Delta x_1 = -\frac{m_2 (a-b)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (b-a)}{m_1 + m_2}.$$

$\cancel{\Delta x_2 = a - b}$

$$\Delta x_2 = + \frac{m_1 (a-b)}{m_1 + m_2}$$

③



$$F_g \overset{?}{=} 3P_1$$

$$m_c \vec{a}_c = m_c \vec{g} + \vec{N}_\Sigma$$

$$\vec{N}_\Sigma = -\vec{F}_g.$$

$$x: \quad m_c a_c = m_c g - N_\Sigma$$

$$N_\Sigma = m_c (g - a_c)$$

$$x_c = \frac{m_1 \ell + m_2 \left(x + \frac{\ell - x}{2}\right)}{m_1 + m_2}$$

$$m_2 = m - m_1 = \frac{m(\ell - x)}{\ell} \;\overset{"-"}{\Leftarrow}\; \left| \begin{array}{l} m_1 + m_2 = m = \rho S \ell \\ m_1 = \rho S x \end{array} \right| \;\overset{":"}{\Rightarrow}\; m_1 = \frac{m}{\ell} x$$

$$x_c = x + \frac{(l-x)(l+x)}{2l} = x + \frac{l}{2} - \frac{x^2}{2l}$$

$$x = \frac{gt^2}{2}$$

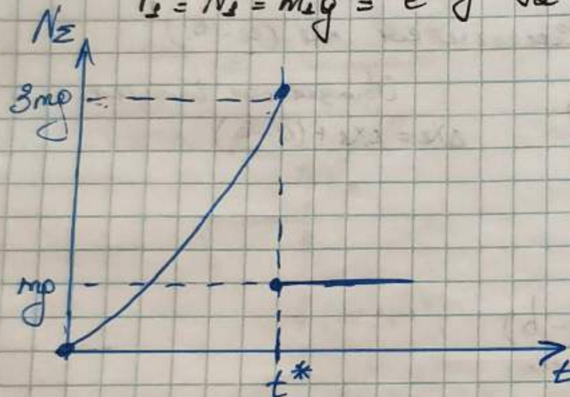
$$x_c = \frac{gt^2}{2} + \frac{l}{2} - \frac{g^2t^4}{8l}$$

$$v_c = \frac{dx_c}{dt} = gt - \frac{g^2}{2l}t^3$$

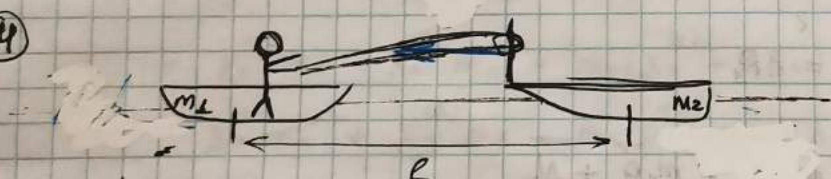
$$a_c = g - \frac{3}{2}\frac{g^2}{l}t^2$$

$$\Rightarrow N_\Sigma = m_c \cdot \frac{3g^2t^2}{2l} = 3 \cdot m\frac{g^2t^2}{2l} = \underline{\underline{3P_1}}$$, что и треб. док-ть.

$$P_1 = N_1 = m_1 g = \frac{m}{l}\cdot g \cdot \frac{gt^2}{2} = \frac{mg^2t^2}{2l}$$



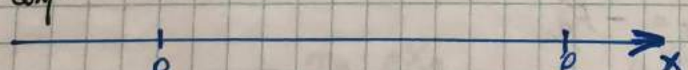
(4)



Где будут находиться лодки, когда они остановятся.

$F_{сопр.} = \alpha V$

$X(\infty) = ?$



$$x_c^{(1)} = \frac{x_1^{(1)} m_1 + x_2^{(1)} m_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_c^{(2)} = \frac{m_1 x_1^{(2)} + m_2 x_2^{(2)}}{m_1 + m_2} =$$

$$m_c \vec{a}_c = \vec{F}^{внеш} =$$

$$(m_1+m_2)\vec{a}_c = \underbrace{(m_1+m_2)\vec{g} + \vec{F}_{арх}}_{=0} + \vec{F}_{сопр.1} + \vec{F}_{сопр.2}$$

$Ox: \ (m_1+m_2)\,a_{cx} = -\alpha\,(V_{1x}+V_{2x}) \quad \Big| \int\limits_0^{\infty} \dots dt$

$V_{1x} = \dfrac{dx_1}{dt}$

$V_{2x} = \dfrac{dx_2}{dt}$

$a_{cx} = \dfrac{dV_c}{dt} =$

$V_c(0) = V_c(\infty) = 0$

$0 = -\alpha\left(x_1\Big|_{x_1(0)}^{x(\infty)} + x_2\Big|_{x_2(0)}^{x(\infty)}\right) =$

$= -\alpha\,(x(\infty) - 0 + x(\infty) - \ell)$

$\Rightarrow x(\infty) = \dfrac{\ell}{2}$

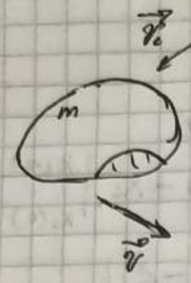
Ответ: $\underline{x(\infty) = \dfrac{\ell}{2}}$

Д/З: Решить по теореме о ц.м. и по опр-ю ц.м.

Ир. 1.119; Як. 237, 238.

17.02.2021.

Динамика тел переменной массы.



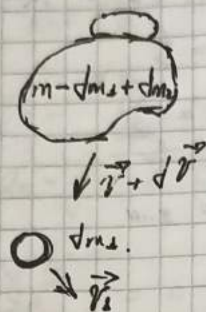
$t = t_0$

$$\vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{u}_2$$

$$\vec{v}_1 = (\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u}_1$$

$$\frac{d\vec{p}_0}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}$$

$t = t_0 + dt$



$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}} + \vec{F}^{\text{реакт}}$$

$$\vec{F}^{\text{реакт}} = -\frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2$$

$$d\vec{p}_0 = \vec{p}_0(t_0 + dt) - \vec{p}_0(t_0)$$

$$\frac{m\,d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}} - \frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2$$

① $\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$

$\vec{u}_1 = \text{const}$

$\vec{v}(t=0) = 0$

$m(t=0) = m_0$

$v(m) = ?$

$\vec{u}_2 = 0$

$$\frac{m_0\,d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{F}^{\text{внеш}}}_{=0} - \frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \underbrace{\frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2}_{=0}$$

$$\cancel{\frac{m_0\,d\vec{v}}{dt}} \qquad \frac{m\,d\vec{v}}{dt} = -$$

$\cancel{m_0\ m_1}$. $m = m_0 - m_1$. $\cancel{m_1 = m - m_0}$

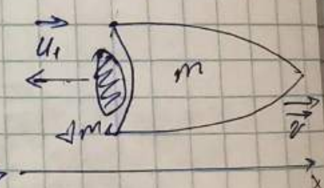
$$\cancel{\frac{m\,d\vec{v}}{dt} = -\frac{d(m - m_0)}{dt}\vec{u}_1}$$

$$\cancel{m\,d\vec{v} = -d(m - m_0)\,\vec{u}_1}$$

$$\cancel{m\,dv_x = -d(m - m_0)u_1}$$

$$\cancel{\int_0^{v_x(t)} dv_x = u_1\int_{m_0}^{m}\frac{d(m - m_0)}{m}}$$

$$\cancel{v_x(t) = u_1(}$$



$$\frac{m\,d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 = +\frac{dm}{dt}\vec{u}_1$$

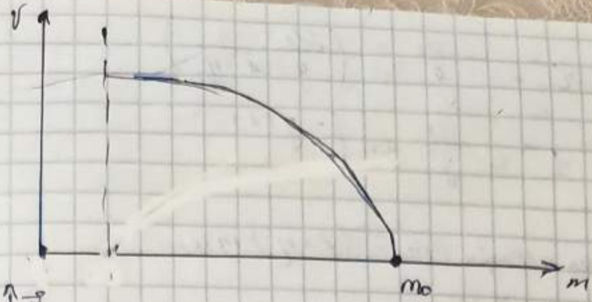
$dm_1 = -dm$, очевидно

$$Ox:\quad m\,dv_x = -dm\,u_1$$

$$\int_0^{v(m)} dv_x = -\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}\,u_1$$

$$v(m) = u_1\cdot\int_m^{m_0}\frac{dm}{m}\ ;\quad v(m) = u_1\left(\ln m\,\Big|_m^{m_0}\right) =$$

$$= u_1\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$



②

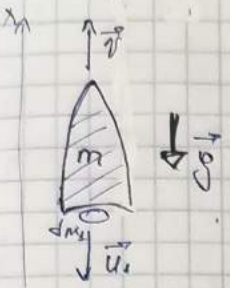
$m(t=0)=m_0$

$\vec{U}_1=const$

$\vec{v}(t=0)=0$

$\vec{g}=const$

$v(m,t)-?$



$$\frac{m\,d\vec{v}}{dt}=m\vec{g}-\frac{dm_1}{dt}\vec{U}_1$$

$$Ox:\quad \frac{m\,dv_x}{dt}=-mg+\frac{dm_1}{dt}U_1.$$

$$dm_1=-dm$$

$$\frac{m\,dv_x}{dt}=-mg-\frac{dm}{dt}U_1 \quad /:m \quad /\cdot dt$$

$$\int_0^{v_x(t,m)} dv_x=-\int_0^t g\,dt-U_1\int_{m_0}^{m(t)}\frac{dm}{m}$$

$$v(t,m)=-gt+U_1\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$$

$$v(t,m)=U_1\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)-gt$$

$\mu(t)-?$ $\xrightarrow{\text{если}}$ $v=0$

$$0=U_1\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)-gt$$

~~$m(t)\neq\mu(t)$~~

$m=\mu(t)$

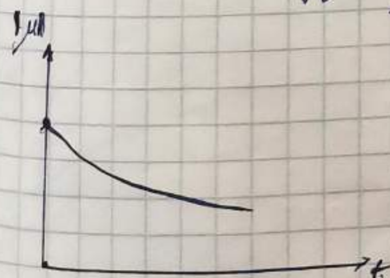
$$gt=U_1\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$$

$$gt=U_1\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$$

$$m(t)=m_0\,e^{-\frac{gt}{U_1}}$$

$$\mu=\frac{dm}{dt}=-\frac{dm_1}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt}=\mu=-\frac{g}{U_1}m_0\cdot e^{-\frac{gt}{U_1}}=-\frac{dm_1}{dt}$$



$$m_0=m_{корп.}+\eta m_{корп.}=m_{корп.}(1+\eta)\rightarrow m_{корп.}=\frac{m_0}{1+\eta}$$

$$\mu(t^*)=m_{т.}=\eta m_{корп.}$$

$$\eta m_{корп.}=-\frac{g}{U_1}m_0\cdot e^{-\frac{gt}{U_1}}$$

$$\frac{\eta m_0}{1+\eta}=-\frac{g}{U_1}\cdot m_0\cdot e^{-\frac{gt}{U_1}}\;;\quad -\frac{U_1\eta}{(1+\eta)g}=e^{-\frac{gt}{U_1}}$$

$m_т(t^*=0)=\eta m_{корп.}$

$t^*-?$

$$\Rightarrow -\frac{gt}{U_1}=\ln\left(-\frac{U_1\eta}{(1+\eta)g}\right)$$

$$\cancel{t^* = -\frac{u_1}{g} \ln\left(-\frac{u_1}{g} \frac{\eta}{1+\eta}\right)}$$

$$\cancel{t^* = \frac{u_0}{g} \ln\left(-g(1+\right.}$$

$$m_0 = m_{корп} + m_т = (1+\eta)\, m_{корп}$$

$$m(t^*) = m_{корп}$$

$$\ln(1+\eta) = \frac{g t^*}{u_1}$$

$$t^* = \frac{u_1}{g} \ln(1+\eta)$$

③

$m(t=0) = m_0$

$\vec{F}^{внеш} = 0$

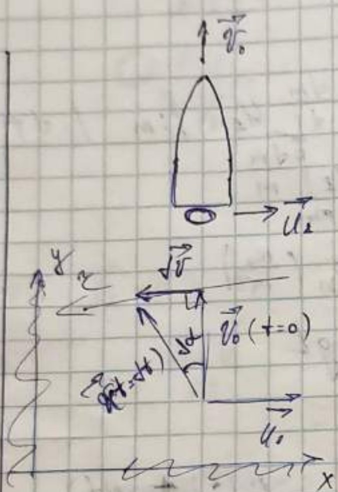
$v_0 = const$

$u_1 = const$

$\vec{u}_1 \perp \vec{v}_0$

$m(\alpha)$ после поворота.

$\alpha = ?$



$$\frac{m\, d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm_1}{dt} \vec{u}_1$$

$$dm_1 > 0 \Rightarrow d\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{u}_1$$

$$d\alpha \ll 1.$$

$$ox: \; \frac{m\, dv_x}{dt} = -\frac{dm_1}{dt} u_1.$$

$$\frac{m\, dv_x}{dt} = -\frac{dm}{dt} u_1.$$

$$tg(d\alpha) = \frac{dv}{v_0};$$

$$dv_x = v(t) \cdot d\alpha, \text{ т.к. } d\alpha \ll 1.$$

$$\underline{dv = v_0\, d\alpha} = v_0\, tg(d\alpha)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

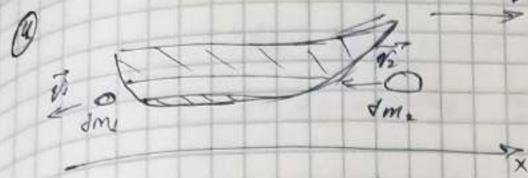
$$\underline{\vec{a} \parallel d\vec{v} \parallel \vec{u}_1 \perp \vec{v}_0}$$

$$m v_0\, d\alpha = -dm\, u_1.$$

$$\int_0^{\alpha(m)} d\alpha = -\frac{u_1}{v_0} \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}$$

$$\alpha(m) = \frac{u_1}{v_0} \ln\frac{m_0}{m}$$

④



$\vec{u}_1$ - относит. ск-ть воды

μ - ежесекундно выбрасывается m

$dm_1 = dm_2$

$v = ?$

$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{u}_1$; $\vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{u}_2$

$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}$; $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}$

$$Ox: \frac{m\,d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{внеш} - \frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2$$

$$Ox: \frac{m\,dv}{dt} = \frac{dm_1}{dt}u_1 - \frac{dm_2}{dt}u_2 \quad ; \quad dm_1 = dm_2$$

$$\frac{m\,d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2$$

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} = \mu$$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{v}$$
$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2 = -\vec{v}$$

$$\frac{m\,d\vec{v}}{dt} = -\mu\vec{u}_1 + \mu(-\vec{v})$$

$$\frac{m\,d\vec{v}}{dt} = \mu(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \quad ; \quad \frac{m\,d\vec{v}}{dt} = -\mu(\vec{v} + \vec{u}_1)$$

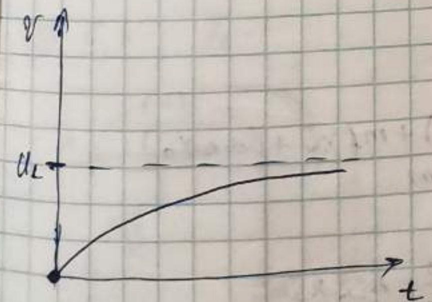
$$\frac{m\,dv}{dt} = -\mu(v - u_1)$$

$$\int_0^{v(t)} \frac{m\,dv}{v - u_1} = \int_0^t -\mu\,dt$$

$$m \ln(v - u_1)\Big|_0^{v(t)} = -\mu t$$

$$m\left(\ln(v(t) - u_1) - \ln(-u_1)\right) = -\mu t$$

$$\ln\frac{v(t) - u_1}{-u_1} = -\frac{\mu t}{m}$$



$$v(t) = -u_1 e^{-\frac{\mu t}{m}} + u_1 = u_1\left(1 - e^{-\frac{\mu t}{m}}\right)$$

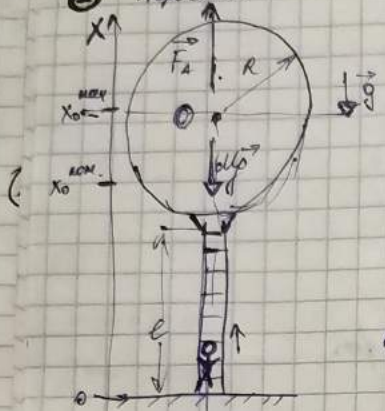
Д/з: Ир. 1.136, 1.137. Як. 247.

24.02.2021. Работа и энергия в СМТ.

$$\Delta W_{мех} = A^{внеш} + A^{внутр}$$

$$W_{мех} = W_к + W_п$$

① Аэростат.



M, R, m

$A_ч = ?$

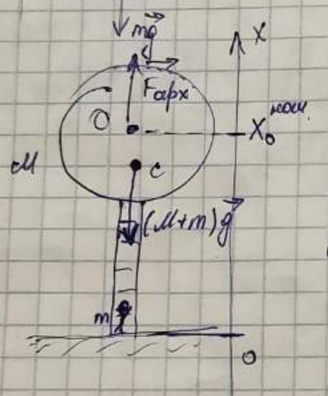
$$\Delta W_{мех} = A^{внеш} + A^{внутр} = \cancel{A_ч + (A^{F_A} + A^{Mg})}$$

$\cancel{Mg(l+R)}$

$$\Delta W_{мех} = A_{ч\ внутр} + A_{тяж} + A_{F_A}$$

Всю силу тяжести в центр масс

$$W_{к.\ нач} = W_{к.\ кон} = 0$$



$$A_ч = -A_{арх} - A_{тяж}$$

Расс-м движение центра масс.

$$(M+m)\vec{g} + \vec{F}_{арх} = (M+m)\vec{a}_c = 0$$

$$\Downarrow$$

$x_c = const \Rightarrow A_{тяж} = 0$, т.к. $\Delta x_c = 0$

$\Delta x_0 = ?$

$$\cancel{x_c^{(1)} = \frac{M(x_0^{нач} + \Delta x_0) + m(\cdot \Delta x_ч)}{M+m} = \frac{M x_0^{нач}}{M+m} = const}$$

$$\cancel{M(x_0^{нач} + \Delta x_0) + m(\underbrace{\Delta x_ч}_{=l}) = M x_0^{нач}}$$

$$\cancel{M(l+R) + M\Delta x_0 + ml = M(l+R)}$$

$$\cancel{\Delta x_0 = -\frac{ml}{M}}$$

$$x_c^{нач} = \frac{M(l+R) + m \cdot x_ч}{M+m} \quad ; \quad x_c^{кон} = \frac{M(l+R+\Delta x_0) + m(x_ч + l + \Delta x_0)}{M+m}$$

$$M(l+R) + m x_ч = M(l+R) + M\Delta x_0 + m x_ч + ml + m\Delta x_0$$

$$\Delta x_0 = \frac{-ml}{M+m}$$

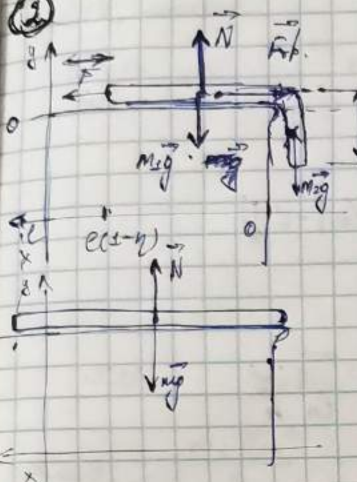
$A_F = -A_{\text{тр}x}$.

$A_{\text{тр}x} = F_{\text{тр}x\,x}\cdot\Delta x_0 = (M+m)g\cdot\frac{(-ml)}{M+m} = -mgl$

$\Rightarrow A_F = -A_{\text{тр}} = mgl$.

Ответ: $A_F = mgl$

(2)



m, η, l, k; A_{min} - ?

$\Delta W_{\text{мех}} = A^{\text{внеш}} + A^{\text{внутр}} = A^F + A^{F\text{тр}}$

$\Delta W_{\text{мех}} = A^{F\text{тр}} + A^F$

$\underbrace{W_к^{\text{кон}}}_{=0} + \underbrace{W_п^{\text{кон}}}_{=0} - \underbrace{W_к^{\text{нач}}}_{=0} - W_п^{\text{нач}} = A_F + A_{\text{тр}}$

$W_п^{\text{нач}} = -m^{\text{нач}} g \frac{\eta l}{2} = -\frac{\eta^2 mgl}{2}$

$m = \rho\cdot l$

$m^{\text{нач}} = \rho\cdot\eta l$

$m^{\text{нач}} = m\eta$

$F_{\text{тр}} = kN(x) = km(x)g = k\cdot\frac{m}{l}\cdot xg$

$A_{F\text{тр}} = \int F_{\text{тр}.x}\,dx = -\int_{l(1-\eta)}^{l}\frac{kmg}{l}\cdot x\,dx =$

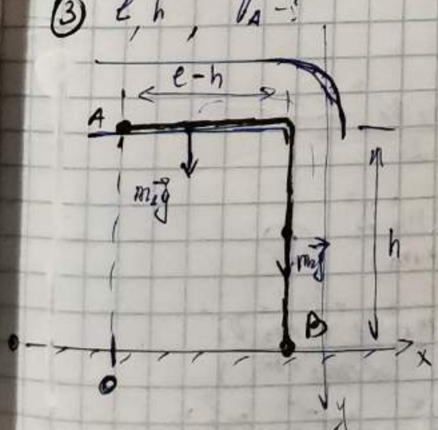
$= -\frac{kmgx^2}{2l}\Big|_{l(1-\eta)}^{l} = -\frac{kmgl^2}{2l} + \frac{kmgl^2(1-\eta)^2}{2l} =$

$= \frac{kmgl(1-\eta)^2}{2} - \frac{kmgl}{2} = \frac{kmgl}{2}((1-\eta)^2-1)$

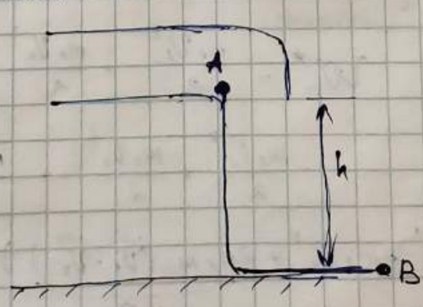
$A^F_{min} = \frac{\eta^2 mgl}{2} - \frac{kmgl}{2}((1-\eta)^2-1) = \frac{\eta^2 mgl}{2} + \frac{kmgl}{2}(2\eta-\eta^2) =$

$= \frac{mgl\eta}{2}(\eta + k(2-\eta))$

(3) l, h, v_A - ?



$\Delta W_{\text{мех}} = A^{\text{внеш}} + A^{\text{внутр}}$



Теорема об изменении кин. энергии: $dW_k = dA_{mg}$

$$dA_{mg} = m_{верт} \cdot g \cdot dy = \frac{mh}{l} g\, dy$$

$m = \rho l$

$m_{верх} = \frac{mh}{l}$

$$dW_k = m\frac{l-y}{l} d\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

— часть, что движется

$$\frac{m(l-y)}{l} d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{mh}{l} g\, dy$$

$$(l-y)\, d\left(\frac{v^2}{2}\right) = hg\, dy$$

$$\int_0^{v_A} d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \int_0^{l-h} \frac{hg\, dy}{l-y}$$

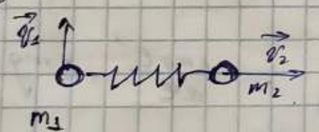
$$\frac{v_A^2}{2} = hg\left(\ln|l-h-l| - \ln|-l|\right)$$

$$\cancel{\frac{v_A^2}{2} = -hg \ln\frac{h}{l}}$$

$$\frac{v_A^2}{2} = -hg \ln(l-y)\Big|_0^{l-h} = gh \ln\frac{l}{h}$$

$$v_A = \sqrt{2gh \ln\frac{l}{h}}$$

(4) $\vec{g}$ ⊗



$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

$W^*_{мех} = ?$

(относительно системы, связ. с центром масс)

$$\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$\Delta W_{мех} = A^{внеш} + A^{внутр}$$

$$W^{нач}_{мех} = W_k^{нач} = const = W_{мех}$$

По теореме Кёнига:

$$W_k = W_k^* + \frac{m_c v_c^2}{2}$$

$$W_k^* = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_c v_c^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{2(m_1+m_2)} =$$

$$\frac{m_c v_c^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)(m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + \underbrace{2m_1 m_2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)}_{=0})}{2(m_1+m_2)^2} = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{2(m_1+m_2)}$$

$$= \frac{\cancel{m_1^2 v_1^2} + m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + \cancel{m_2^2 v_2^2} - \cancel{m_1^2 v_1^2} - \cancel{m_2^2 v_2^2}}{2(m_1+m_2)} =$$

Д/з: Up. 1.

25.02.2021.

(1) m_1, m_2, АУУ, лобов

$\frac{\Delta W_{1k}}{W_{1k0}} =$

ЗСИ:

ЗСМЭ:

ox:

$$= \frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2)}{2(m_1 + m_2)}$$

Д/з: Ир. 1.147; 1.173; 1.177; 1.178

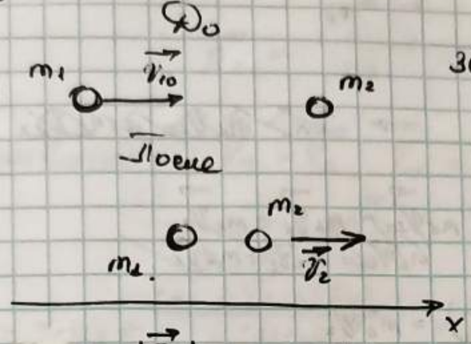
25.02.2021.

Соударения в СИБ.

① $m_1, m_2, v_{20} = 0$

АУУ, лобовое

$\frac{\Delta W_{1к}}{W_{1к0}} = ?$



ЗСИ: $m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

$|\vec{F}| < \infty, \Delta t \to 0$

ЗСИ: $m_1\vec{v}_{10} = m_2\vec{v}_2 + m_1\vec{v}_1$

ЗСИЭ: $\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2}$

$$\frac{\Delta W_{1к}}{W_{1к0}} = \frac{v_1^2 - v_{10}^2}{v_{10}^2} = \left(\frac{v_1}{v_{10}}\right)^2 - 1 = ?$$

ox: $m_1 v_{10} = m_2 v_2 + m_1 v_{1x} \to v_2$

$$\begin{cases} m_1(v_{10} - v_{1x}) = m_2 v_2 \\ m_1(v_{10}^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2 \end{cases} \qquad \frac{v_{10}^2 - v_1^2}{v_{10} - v_{1x}} = v_2$$

$$v_2 = v_{10} + v_{1x}$$

$m_1(v_{10} - v_{1x}) = m_2(v_{10} + v_{1x})$

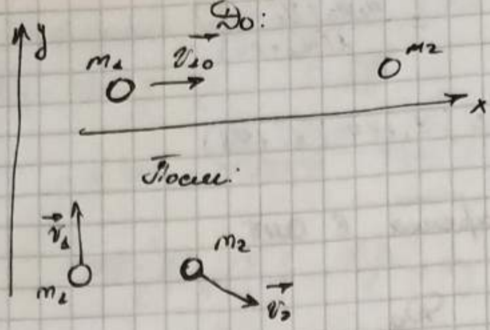
$m_1 v_{10} - m_1 v_{1x} = m_2 v_{10} + m_2 v_{1x} \to v_{1x} = \frac{v_{10}(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$

$$\frac{\Delta W_{1к}}{W_{1к0}} = \left(\frac{v_{10}(m_1 - m_2)}{v_{10}(m_1 + m_2)}\right)^2 - 1 = \frac{m_1^2 - 2m_1 m_2 + m_2^2 - m_1^2 - 2m_1 m_2 - m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} =$$

$$= -\frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

② $m_1,\ m_2,\ v_{20} = 0$
АУУ, $\vec v_1 \perp \vec v_{10}$

$\frac{\Delta W_{1k}}{W_{k10}} = ?$



$|\vec F| < \infty$; $\Delta t \to 0$

ЗСИ: $m_1 \vec v_{10} = m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2 \to$ ox: $\cancel{m_1 v_{10} = m_2 v_{2x}}$

ЗСЭ: $m_1 v_{10}^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$

$m_1(\vec v_{10} - \vec v_1) = m_2 \vec v_2 \quad |^2$ $\cancel{m_1\vec v_{10} = m_1\vec v_1 + m_2\vec v_2}$ $\cancel{m_1 v_{10} = m_2 v_2 + m_1 v_1}$

$m_1(v_{10}^2 - 2(\vec v_{10};\vec v_1) + v_1^2) = m_2^2 v_2^2$

$m_1 v_{10}^2 + m_1 v_1^2 = m_2 v_{10}^2 - m_2 v_1^2$

$m_1 v_1^2$

$m_1^2(v_{10}^2 + v_1^2) = m_2^2 v_2^2$

$-\Big($ $m_1(v_{10}^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2 \quad |\cdot m_2$

$m_1 m_2 (v_{10}^2 - v_1^2) = m_2^2 v_2^2$

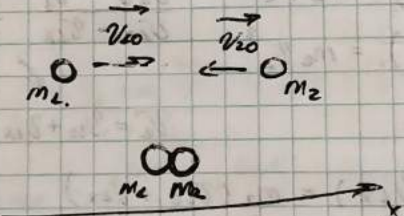
$m_1^{\cancel{2}}(v_{10}^2 + v_1^2) = \cancel{m_1} m_2 (v_{10}^2 - v_1^2)$

$m_1 v_{10}^2 + m_1 v_1^2 = m_2 v_{10}^2 - m_2 v_1^2 \to v_1^2 = \frac{v_{10}^2 (m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}$

$\frac{\Delta W_{1k.}}{W_{k10}} = \left(\frac{v_1^2}{v_{10}^2}\right) - 1 = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} - 1 = \frac{-2m_1}{m_1 + m_2}$

③ m_1, m_2, $\vec v_{10}, \vec v_{20}$ $(\vec v_{10} \parallel \vec v_{20})$

$(W_п)_{max} - ?$



$W_{п\,max}$ – когда в момент удара их ск-ти сравняются

ЗСИ: $m_1 \vec v_{10} + m_2 \vec v_{20} = (m_1 + m_2)\vec v$

$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + (W_п)_{max} \quad |\cdot 2$

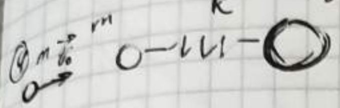
$m_1^2 v_{10}^2 + 2 m_1 m_2 (\vec v_{10}; \vec v_{20}) + m_2^2 v_{20}^2 = (m_1 + m_2)^2 v^2$

$v^2 = \frac{m_1^2 v_{10}^2 + 2 m_1 m_2 (\vec v_{10} \cdot \vec v_{20}) + m_2^2 v_{20}^2}{(m_1 + m_2)^2}$

$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} - \frac{m_1^2 v_{20}^2 + 2 m_1 m_2 (\vec v_{10}; \vec v_{20}) + m_2^2 v_{20}^2}{2(m_1 + m_2)} = (W_п)_{max}$

$\frac{\cancel{m_1^2 v_{10}^2} + m_1 m_2 v_{10}^2 + m_1 m_2 v_{20}^2 + \cancel{m_2^2 v_{20}^2} - \cancel{m_1^2 v_{10}^2} - 2 m_1 m_2 (\vec v_{10}; \vec v_{20}) - \cancel{m_2^2 v_{20}^2}}{2(m_1 + m_2)} = W_п$

$$\Rightarrow (W_n)_{max} = \frac{m_1 m_2 \left(v_{10}^2 - 2(\vec{v}_{10}; \vec{v}_{20}) + v_{20}^2\right)}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} (\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20})^2$$

4) 

АЧЧ, $W_{кс}$ - ?

$$W_{кс} = \frac{m_c v_c^2}{2} = ?$$

1)

$$\vec{R}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m_c} \rightarrow \vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m_c}$$

После столкновения: $\vec{v}_m = \vec{v}_0$, $\vec{v}_M = \vec{0}$

$$\vec{v}_c = \frac{m\vec{v}_0}{m+M}$$

$$\Rightarrow W_{кс} = \frac{(m+M)\cdot m^2 v_0^2}{2(m+M)^2} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m+M)}$$

2) $W_{мех}^{внутр.} = ?$

$$\frac{m v_0^2}{2} = W_{мех}^{внутр.} + W_{кс}$$

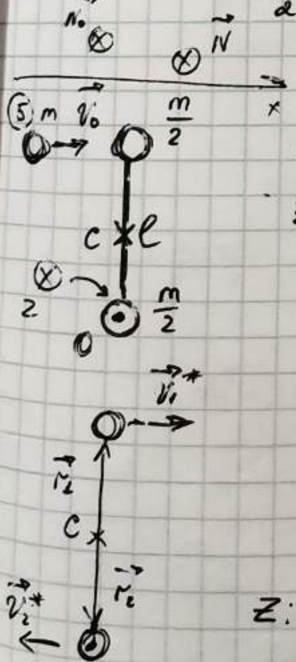
$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m+M)} + W_{мех.}^{внутр.} \text{ - теорема Кёнига}$$

$$W_{мех}^{внутр.} = \frac{m v_0^2}{2} - \frac{m^2 v_0^2}{2(m+M)} = \frac{m^2 v_0^2 + mM v_0^2 - m^2 v_0^2}{2(m+M)} = \frac{mM v_0^2}{2(m+M)}$$

3) $A = ?$ - амплитуда.

$$W_{мех}^{внутр.} = \frac{mM v_0^2}{2(m+M)} = (W_n)_{max}.$$

$$\frac{mM v_0^2}{2(m+M)} = \frac{kA^2}{2} \rightarrow A = v_0 \sqrt{\frac{mM}{(m+M)k}}$$

5) 

АЧЧ, $\vec{N}_c^* = ?$

$$\vec{N}_c^* = \frac{m}{2}[\vec{r}_1; \vec{v}_1^*] + \frac{m}{2}[\vec{r}_2; \vec{v}_2^*]$$

~~ЗСИ: $m\vec{v}_0 = \frac{m}{2}\vec{v}_c$~~

~~$\vec{v}_c = \frac{\frac{m}{2}\vec{v}_1 + \frac{m}{2} 0}{m}$~~

$$\left.\begin{aligned} &\text{ЗСИ: } m\vec{v}_0 = \frac{m}{2}\vec{v}_1 + \frac{m}{2}\vec{v}_2 + m\vec{v} \\ &\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m}{2}\cdot\frac{v_1^2}{2} + \frac{m}{2}\cdot\frac{v_2^2}{2} + \frac{m v^2}{2} \\ &\text{Закон сохр. момента импульса,} \\ &z:\ m v_0 l = \frac{m}{2} v_1 l + 0 + m v l \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow v_2 = 0$$

$\cancel{m\vec{v}_0 = \frac{m}{2}\vec{v}_1}$

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}_1}{2} + \frac{\vec{v}_2}{2}\cdot 0 + \vec{v}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}_1}{2} + \vec{v}$$

$$v_0^2 = \frac{v_1^2}{2} + v^2$$

ox: $$\left.\begin{aligned} v_0 &= \frac{v_1}{2} + v \\ v_0^2 &= \frac{v_1^2}{4} + v_1 v + v^2 \end{aligned}\right\} -$$

$$0 = \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_1^2}{4} - v_1 v \quad / : v_1 \quad / \cdot 4$$

$$0 = 2v_1 - v_1 - 4v \to v_1 = 4v$$

$$v_0 = 2v + v \to v = \frac{v_0}{3} \to v_1 = \frac{4}{3} v_0$$

$$\vec{v}_c = \frac{\frac{m}{2}\vec{v}_1 + 0}{m} = \frac{2}{3}\vec{v}_0$$

Преобр. Галилея:

$$\vec{v}_{1,2} = \vec{v}^*_{1,2} + \vec{v}_c$$

$$\vec{v}_2^* = -\vec{v}_c = -\frac{2}{3}\vec{v}_0$$

$$\vec{v}_1^* = \frac{2}{3}\vec{v}_0$$

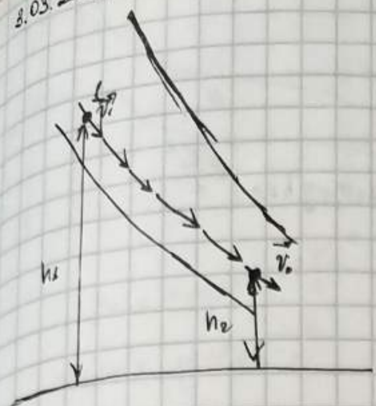
$$\vec{N}_c^* = m[\vec{r}_1, \vec{v}_1^*] = m\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}v_0 = \frac{m l v_0}{3}$$

Д/з: 1.182, 1.185

+ Тоже самое, что и в прошлой, только удар неупругий

3.03.2021.

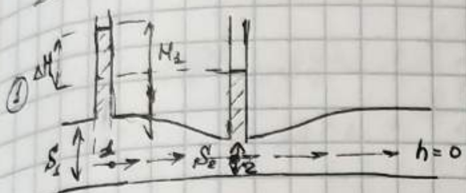
Уравнение Бернулли.



Только вдоль одной линии тока:

$$\underset{\text{внеш. давл}}{p_1} + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$



$$S_1 > S_2 \Rightarrow v_1 < v_2$$

$$\to \quad h_1 = h_2 = 0$$

$\rho, S_1, S_2, \Delta H$

$$p_1 = p_{атм} + \rho g H_1$$

$$p_2 = p_{атм} + \rho g H_2$$

$Q_V = \frac{dV}{dt}$ - объёмный расход. = ?

$Q_m = \frac{dm}{dt}$ - массовый расход. $= \rho \frac{dV}{dt}$

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{S_1 v_1 dt}{dt} = S_1 v_1$$

$$\cancel{p_{атм}} + \rho g H_1 + \cancel{\rho g h_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = \cancel{p_{атм}} + \rho g H_2 + \cancel{\rho g h_2} + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$\rho g \Delta H + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2} \quad \Big| : \rho$$

$$g \Delta H + \frac{v_1^2}{2} = \frac{v_2^2}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$2g \Delta H + v_1^2 = v_2^2$$

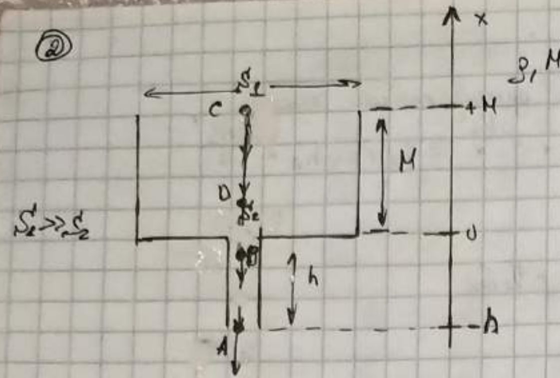
$$v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2} \longrightarrow 2g\Delta H + v_1^2 = \frac{v_1^2 S_1^2}{S_2^2}$$

$$2g\Delta H = v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta H}{\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}}$$

$$Q = S_1 \cdot \sqrt{\frac{2g\Delta H}{\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}} = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta H}{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}$$

②



$\rho, H, h, S_1, S_2, p_{атм}$

Найти: $p(x)$

Ур-е Бернулли:

$$p_1+\rho g h_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\rho g h_2+\frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

1) $-h \le x < 0$

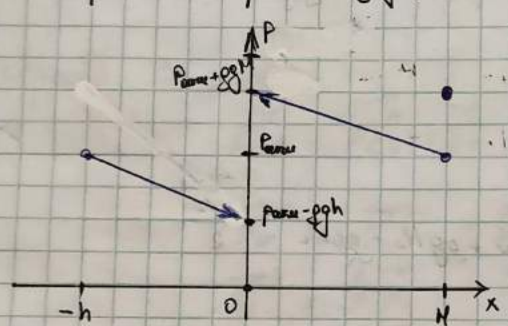
$S_A = S_B \Rightarrow v_A = v_B$

$p_A = p_{атм}$ $\qquad p_B(x)-?$

$h_A = -h$ $\qquad h_B = x$

$$p_{атм} - \rho g h + \cancel{\frac{\rho v_A^2}{2}} = p_B(x) + \cancel{\frac{\rho v_B^2}{2}} + \rho g x$$

$$p_B(x) = p_{атм} - \rho g (h+x) = p_{атм} - \rho g h - \rho g x$$



$S_C = S_D \Rightarrow v_C = v_D$

2) $0 < x \le H$

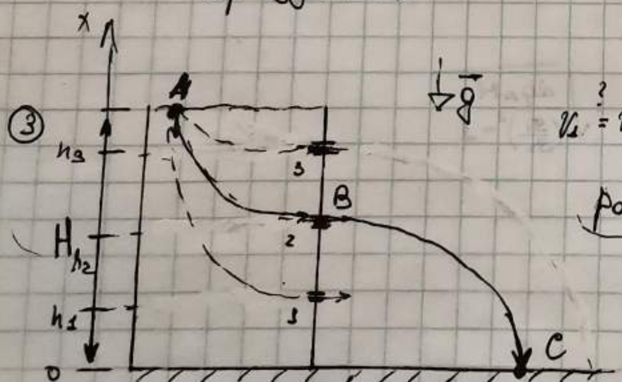
$S_C = S_D \Rightarrow v_C = v_D$

$p_C = p_{атм}$ +

$$p_{атм} + \rho g H = p_D(x) + \rho g x \Rightarrow p_D(x) = p_{атм} + \rho g H - \rho g x$$

$$\Delta p = \rho g (H+h)$$

③



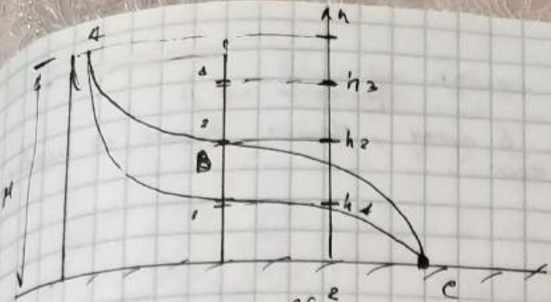
$v_1 \overset{?}{=} v_2 \overset{?}{=} v_3$

$$\underbrace{p_{атм} + \rho g H + \frac{\rho v_A^2}{2}}_{A} = \underbrace{p_{атм} + \frac{\rho v_B^2}{2} + \rho g h_B}_{B}$$

$$\cancel{p_{атм}} + \frac{\rho v_B^2}{2} + \rho g h_B = \cancel{p_{атм}} + \frac{\rho v_C^2}{2} + 0$$

$$\Rightarrow \frac{\rho v_C^2}{2} = \frac{\rho v_A^2}{2} + \rho g H$$

ч доказ-ли



$H - h_3 = h_1$.

$l_1 \overset{?}{=} l_3$

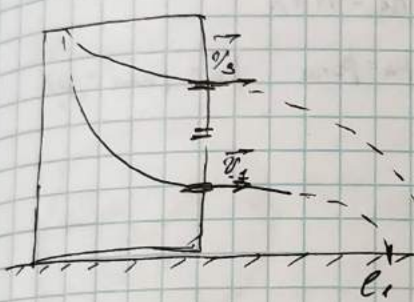
$h_3 = H - h_1$

$$p_{атм} + \rho g H + \frac{\rho v_A^2}{2} = p_{атм} + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}$$

$$p_{атм} + \rho g H + \frac{\rho v_A^2}{2} = p_{атм} + \rho g h_3 + \frac{\rho v_3^2}{2}$$

$$\cancel{\rho g H} \quad \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g h_3 + \frac{\rho v_3^2}{2}$$

$$\rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g (H - h_3) + \frac{\rho v_3^2}{2}$$



Пусть $S_{ст} >> S_{дырки}$

$\Downarrow$

$v_A << v_{1,3}$

$$v_1 = \sqrt{2g(H - h_1)}$$

$$v_3 = \sqrt{2g(H - h_3)}$$

$$h_1 = \frac{g t_{1,3}^2}{2} \to t_{1,3} = \sqrt{\frac{2h_{1,3}}{g}}$$

$$l_1 = \sqrt{2g\underbrace{(H - h_1)}_{h_3} \cdot \frac{2h_1}{g}} \quad \Rightarrow \quad l_1 = l_3 = l$$

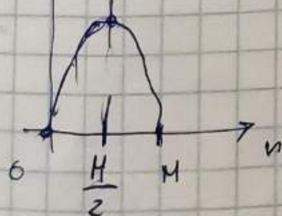
$$l_3 = \sqrt{2g\underbrace{(H - h_3)}_{h_1} \cdot \frac{2h_3}{g}} =$$

$$l = 2\sqrt{(H - h)\cdot h}$$

$$(H - h)h$$

l-max $\Rightarrow l^2$ - max.

$$l^2 = 4(H - h)\cdot h$$

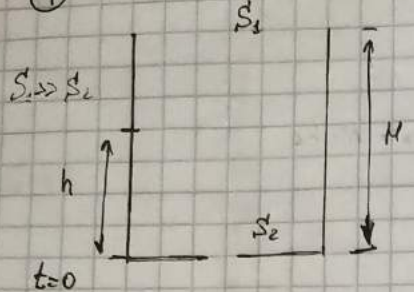


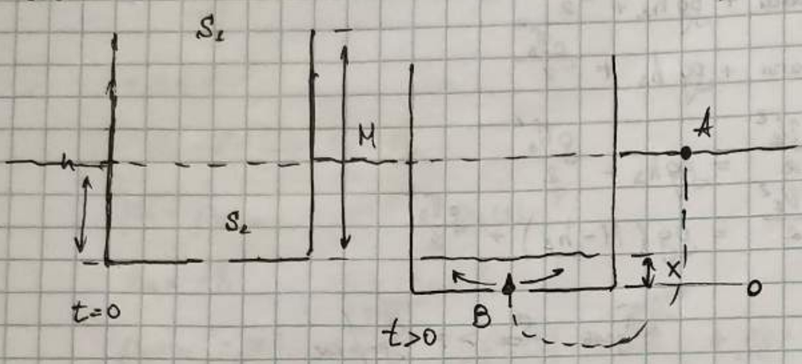
$\Rightarrow l$ max при $\frac{H}{2}$

4

Сначала пустой. Пренебр. на p

Чер. Попал в лужу, найти время, за которое стакан утонет.





$v_A = 0$ $\quad v_B$

$h_B = 0$

$h_A = H + x$

$p_A = p_{атм}$ $\quad p_B = p_{атм} + \rho g x$

$$p_{атм} + \rho g (H + x) = p_{атм} + \rho g x + \frac{\rho v_B^2}{2}$$

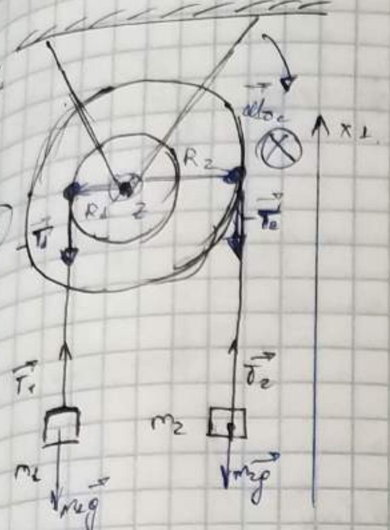
$$v_B = \sqrt{2gH} = const.$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{H-h}{v_B} = \frac{H-h}{\sqrt{2gH}}$$

Д/з: Обязательно рисовать линии тока: Ир. 1.339, 1.348. Як. 860.

10.05.2021.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.



$\gamma_z = ?$ $T_1 = ?$ $T_2 = ?$

$I,\ m_1,\ m_2$

Условие нерастяжимости нити:

$\Delta x_1 = R_1\varphi$ $\qquad \frac{d^2}{dt^2}$

$\Delta x_2 = -R_2\varphi$

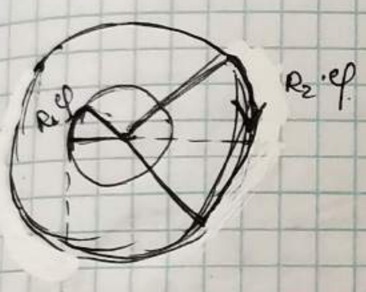
$a_{1x} = R_1\gamma_z$ (1)

$a_{2x} = -R_2\gamma_z$ (2)

II з-н Ньютона: $m_1 a_{1x} = T_1 - m_1 g$ (3)

$m_2 a_{2x} = T_2 - m_2 g$ (4)

Повернулось на угол φ:



Ур-е вращ. движения:

$$I\vec{\gamma} = \vec{M}_{-T_1} + \vec{M}_{-T_2}$$

$$oz:\ I\gamma_z = -R_1\cdot|-\vec{T_1}| + R_2\cdot|-\vec{T_2}|$$

$$\begin{cases} I\gamma_z = R_2T_2 - R_1T_1 \\ m_1a_{1x} = T_1 - m_1g \\ m_2a_{2x} = T_2 - m_2g \\ a_{1x} = R_1\gamma_z \\ a_{2x} = -R_2\gamma_z \end{cases}$$

$m_1R_1\gamma_z = T_1 - m_1g \quad \rightarrow \quad T_1 = m_1R_1\gamma_z + m_1g$

$-m_2R_2\gamma_z = T_2 - m_2g \quad \rightarrow \quad T_2 = m_2g - m_2R_2\gamma_z$

$I\gamma_z = R_2T_2 - R_1T_1$

$$I\gamma_z = R_2(m_2g - m_2R_2\gamma_z) - R_1(m_1R_1\gamma_z + m_1g)$$

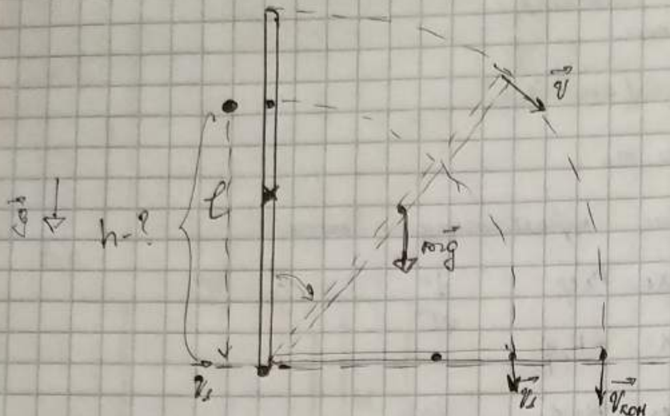
$$I\gamma_z = m_2R_2g - m_2R_2^2\gamma_z - R_1^2m_1\gamma_z - m_1R_1g$$

$$\gamma_z(I + m_2R_2^2 + m_1R_1^2) = g(m_2R_2 - m_1R_1)$$

$$\gamma_z = \frac{g(m_2R_2 - m_1R_1)}{I + m_2R_2^2 + m_1R_1^2}$$

366.

$V_{кон} = ?$



$\ddot{\varphi} = k\sin\varphi$, - не решается

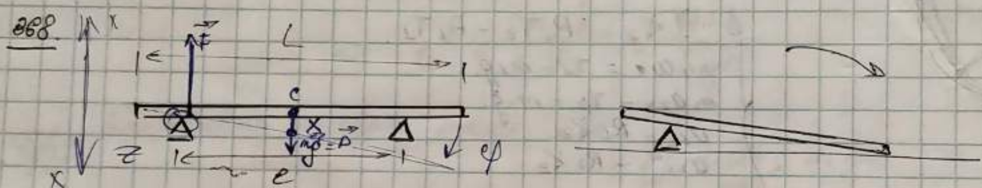
Закон сохранения энергии.

~~$mg\frac{l}{2} = \frac{mV_{кон}^2}{2}$~~ ~~$V_{кон} = \sqrt{gl}$~~

$$0 + mg\frac{l}{2} = \frac{\left(\frac{ml^2}{3}\right)\cdot\left(\frac{V_{кон}}{l}\right)^2}{2} = \frac{mV_{кон}^2}{6}$$

$$V_{кон} = \sqrt{3gl}$$

368.



Ландовцев.
Ландовцев.

P; F - ? (и если $l = L$)

Теорема о движении центра масс: $m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{F}$

Уравнение моментов относительно опоры.

$$I_z \varepsilon_z = mg\frac{l}{2} = P\frac{l}{2}$$

$$x_c = \frac{l}{2}\cdot\varphi$$

$$a_{cx} = \frac{l}{2}\varepsilon_z$$

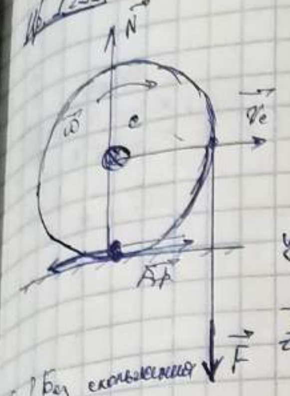
ox: $ma_{cx} = -F + mg = mg - F$

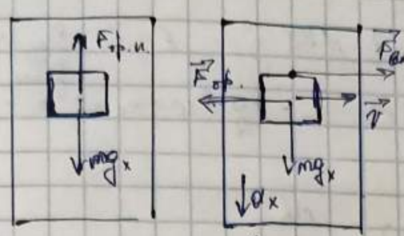
Д/З: 367, 322, 1.275, 1.274, 1.272

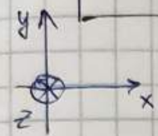
Д/З: Ир. 1.292 (Як 333), Як. 374, 385; Ир. 1.298

Плоское движение твердого тела.

№ 1291.







F=? Без скольжения

$v_B = 0$

$\vec{v}_B = [\vec{\omega}, \vec{r}_B] + \vec{v}_c = 0$

$[\vec{\omega}, \vec{r}_B] = -\vec{v}_c$; $\omega r = v_c$

Теорема о движении ц.м.:

x: $ma_x = F_{тр.x} \to mr\gamma_z = F_{тр.x} \to \gamma_z = \frac{F_{тр.x}}{mr}$

y: $0 = -mg + N - F$

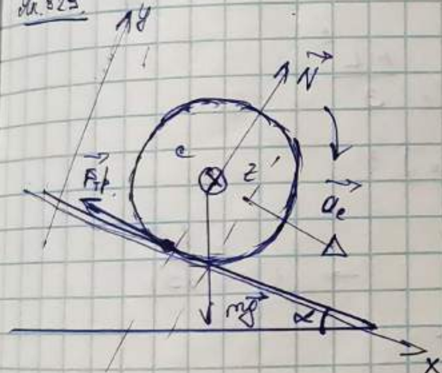
z: $I_z \gamma_z = -F_{тр.x} r + Fr \to I_z \frac{F_{тр.x}}{mr} = -F_{тр.x} r + Fr$

$\omega r = v_c \; \Big| \frac{d}{dt} \to \gamma_z r = a_x$

$|F_{тр.x}| \le \mu N = (mg + F)\mu$; $F_{тр.x} \left(\frac{I_z}{mr^2} + 1\right) = F$; $F_{тр.x} = \frac{F}{\left(\frac{I_z}{mr^2} + 1\right)} > 0$

$\le \mu(mg + F)$

№ 829.



$m\vec{a}_c = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр}$

x: $ma_{cx} = F_{тр.x} + mg\sin\alpha$

y: $0 = N - mg\cos\alpha$; $N = mg\cos\alpha$.

$I\vec{\gamma} = [\vec{r}, \vec{F}_{тр.}]$

z: $I_z \gamma_z = rF_{тр.} \to I\gamma = r\mu N$

μ=? Без скольжения.

$\gamma = \frac{\dot{\vec{v}}_c}{r} = \frac{-\mu N + mg\sin\alpha}{mr}$; $I \cdot \frac{mg\sin\alpha - \mu N}{mr} = Nr\mu$;

$I = \frac{mr^2}{2}$

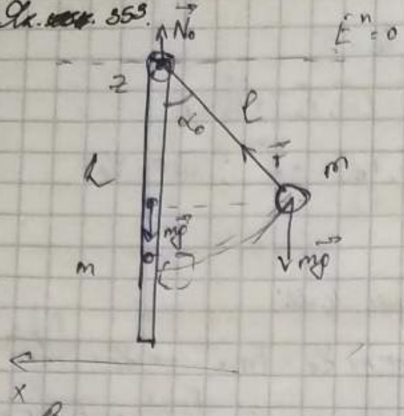
$\frac{mg\sin\alpha - \mu N}{2} = N\mu$;

$mg\sin\alpha = 3\mu N$; $\mu = \frac{mg\sin\alpha}{3N} = \frac{mg\sin\alpha}{3mg\cos\alpha} = \frac{1}{3}tg\alpha$; $\mu = \frac{1}{3}tg\alpha$

17.03.21.

Соударения твердых тел.

Зад. 353.



Урав. АУУ ; $l = ?$ $V_\omega' = 0$

ЗСЭ: $-mgl\cos\alpha_0 + 0 = -mgl + \frac{mV^2}{2} = -mgl + \frac{mV_\omega'^2}{2} + W_{пот} + \frac{I_z\omega_z^2}{2}$

Д/З: 402, 40

$I_z = \frac{mL^2}{3}$

$\frac{d\vec N}{dt} = \vec M$

В момент до и после удара, запишем закон сохранения момента импульса (ЗСМИ)

$mVl + 0 = m\underset{0}{V_{\omega x}'}\,l + I_z\omega_z$

$V^2 = 2gl(1-\cos\alpha_0)$; $\omega_z = \frac{mVl}{I_z}$

$\cos\alpha_0 = \frac{L-l}{l}$

$-mgl\cos\alpha_0 = -mgl + \frac{m^2V^2l^2}{2I_z}$

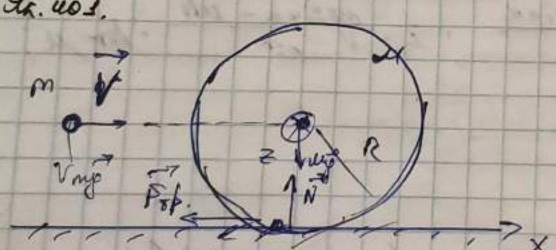
$-g\cos\alpha_0 = g + \frac{mV^2l}{2I_z}$; $I_z = \frac{mL^2}{3}$

$g(1-\cos\alpha_0) = \frac{m\,2gl^2(1-\cos\alpha_0)\,3}{2mL^2}$

$3l^2 = L^2 \rightarrow l^2 = \frac{L^2}{3} \rightarrow l = \frac{L}{\sqrt3}$

Ответ: $l = \frac{L}{\sqrt3}$

Зад. 401.



$V = ?$ (шара) — после того как его движение перейдёт в чистое качение

$V = \omega_z R$ — без проскальзывания. пренебрегаем.

ЗСИ: $m\vec V = (m+M)\vec V_1$

$I_z\gamma_z = \vec F_{тр}$

$Ma_x = -F_{тр}$

$V(t) = V_1 + a_x t$