02.02.2021.

I. Функции многих переменных

§1. Понятие m-мерного координатного пространства.

Опр. Совокупность m чисел наз-ся упорядоченной, если указано, какое из чисел считается первым, вторым и т.д.

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ - произв. упор. совокупность m чисел.

Опр. Мн-во всевозможных упорядоченных совокупностей m чисел называется m-мерным

§1. Понятие ФНП

1.1. Функциональная зависимость между переменными.

При рассмотр-ии физ-их процессов, изменяющихся во времени, значения физ-их характеристик опр-ся значениями четырёх переменных: трёх координат x, y, z и временем t.

При рассмотрении каких-либо физ-их характер-к тела (например, его плотность ρ или температуры T), приходится учитывать изменение этих характеристик при переходе от одной точки тела к другой. При динамическом процессе (изучение звуковых колебаний) к трём координатам добавляется ещё одна - время t.

В теории ФНП удобно пользоваться геометр-ой терминологией.

Для геометризации представлений о ФНП удобно ввести понятие m-мерного пространства, обобщающее понятие двумерной пл-ти и трёхмерного пространства.

1.2. Понятие m-мерного Евклидова пространства.

Опр.1. Совокупность m чисел называется упорядоченной, если указано, какое из чисел считается первым, какое - вторым и т.д.

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ - упор. совокупность m чисел.

Опр.2. Множество всевозможных упорядоченных совокупностей m чисел называется m-мерным координатным пространством

Обозначение: $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ — коорд. точки M.
точка

$O(0, 0, 0, \dots, 0)$ — начало координат.

Введём понятие расстояния между точками $M_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $M_2(y_1, y_2, \dots, y_m)$ по ф-ле:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_m-y_m)^2} \qquad (I.1)$$

Эта ф-ла известна из курса АГ. $(m=2;\ m=3)$

Опр. 3. Коорд. пространство с введённым по ф-ле (I.1) расстоянием между точками называется m-мерным евклидовым пространством.

Обозначение: $\mathbb{R}^m$

Примеры: $\mathbb{R}^1$ - числовая прямая.
$\mathbb{R}^2$ - евклидова пл-сть
$\mathbb{R}^3$ — трёхмерное евклидово пространство

1.3. Множество точек m-мерного евклидового пространства.

Обозначение: $\{M\}$ - некоторое мн-во точек m-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$

Опр. 1. Пусть $A \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ - некоторое число. Мн-во $\{M : \rho(M, A) \le r\}$ назыв. m-мерным шаром радиуса r с центром в точке A, а $\{M : \rho(M, A) = r\}$ — m-мерной сферой радиуса r.

Опр. 2. Пусть $A(a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ и $d_1, d_2, \dots, d_m$ - некоторые полож. числа.
Мн-во $\{M(x_1 \dots x_m) : |x_1 - a_1| \le d_1, \dots, |x_m - a_m| \le d_m\}$ называется m-мерным параллелепипедом.

Опр. 3. Точка A назыв. внутр. точкой мн-ва $\{M\}$, если $\exists$ ε - окрестность точки A, целиком принадлежащая мн-ву $\{M\}$

Мн-во $\{M : \rho(M, A) < \varepsilon\}$ - ε окрестность точки A.

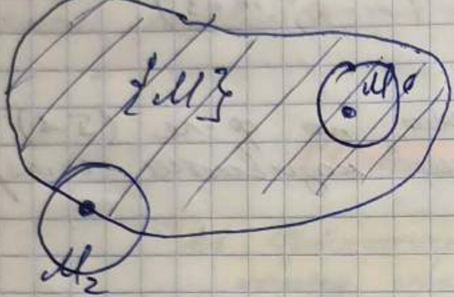
Опр. 4. Мн-во $\{M\}$ называется открытым, если все его точки внутренние.

Мн-во $\{M : \rho(M, A) < r\}$ - открытый m-мерный шар

Опр. 5. Точка A называется граничной точкой мн-ва $\{M\}$, если в $\forall$ ε-окрестности точки A содержатся как точки мн-ва $\{M\}$, так и точки, не принадлежащие этому мн-ву.

M_1 - внутр. точка

M_2 - граничная



Опр. 6. Мн-во $\{M\}$ наз-ся замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

При этом мн-во всех граничных точек называется границей мн-ва $\{M\}$.

Опр. 7. Объединение мн-ва $\{M\}$ и его границы (т.е. добавление к мн-ву $\{M\}$ всех его граничных точек) называется замыканием мн-ва $\{M\}$.

Обозн: $\overline{\{M\}}$

Замкнутое мн-во совп. со своим замыканием.

Опр. 8. Точка A наз-ся предельной точкой мн-ва $\{M\}$, если в $\forall$ ε-окрестности точки A содерж. точки из мн-ва $\{M\}$, отличные от точки A (при этом предельная точка может как принадлежать, так и не принадл. мн-ву $\{M\}$)

Опр. 9. Точка A наз-ся изолированной точкой мн-ва $\{M\}$, если она принадлежит мн-ву $\{M\}$ и $\exists$ ε-окрестность точки A, в которой нет других точек из $\{M\}$, кроме A,

Задача (д/з)
Док-те, что любая внутр. точка мн-ва явл. его предельной точкой, а граничная точка мн-ва может быть его предельной точкой и может быть изолированной (лек 5)

Опр. 10. Мн-во $\{M\}$ наз-ся ограниченным, если все его точки содержатся в некотором шаре.

Опр. 11. Мн-во точек

$L = \{M(x_1, \dots, x_m) : x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \le t \le \beta\}$,

где $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ - не прерывные на сегменте $[\alpha, \beta]$ ф-ии называв. непрерывной кривой в пространстве $\mathbb{R}^m$

Если точки $A(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_m(\alpha))$ и $B(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_m(\beta))$ не совпадают, то они называются концами кривой L.

Говорят также, что кривая L соединяет точки A и B.

Если точки A и B совпадают, то кривая называется замкнутой.

Опр. 12 Мн-во точек.

$\{M(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 = \overset{\circ}{x}_1 + \alpha_1 t, \dots, x_m = \overset{\circ}{x}_m + \alpha_m t,$

$-\infty < t < +\infty\}$, где $\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - некоторые числа называется прямой в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Эта прямая проходит через точку $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$

Опр. 13 Мн-во $\{M\}$ называется связным, если $\forall$ 2 его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат $\{M\}$.

Опр. 14 Любое открытое, связное мн-во, содержащее точки A, называется окрестностью точки A.

1.4. Понятие функции m переменных.

Опр. 1 Пусть $\{M(x_1, x_2, \dots, x_m)\}$ — мн-во точек пространства R^m. Если каждой точке M из мн-ва $\{M\}$ поставлено в соответствие по некоторому закону f ~~[illegible]~~ некоторое число u, то говорят, что на мн-ве $\{M\}$ задана ф-я $u = f(M)$

$$f: \{M\} \subset R^m \to R$$

Опр. 2 Мн-во $\{M\}$ называется областью опр-я ф-ии, координаты $x_1, \dots, x_m$ — независимыми переменными (или аргументами ф-ии)

Опр. 3 Число u, соотв. данной точке M из мн-ва $\{M\}$ называется частным значением функции в точке M.

Опр. 4 Совокупность $\{u\}$ всех частных значений ф-ии $u = f(M)$ называется мн-вом значений ф-ии.

Примеры ф-ий m-переменных:

1) $u = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2}$

Область опр-я $\{M(x_1, x_2, \dots, x_m) : \rho(M, O) \le 1\}$ — m-мерный шар, радиуса 1 с центром в $O(0, 0, \dots, 0)$

Мн-во значений — $[0, 1]$

2) $$u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \dots - \frac{x_m^2}{a_m^2}}}$$

Область опр-я — $\{M(x_1, x_2, \dots, x_m) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_m^2}{a_m^2} \le 1\}$ мн-во внутр. точек m-мерного эллипсоида.

Мн-во значений — $[1, +\infty)$

$m = 3$ **Примеры поверхностей в 3-х мерном пространстве** (Нарисовать картинки)

1) Сфера

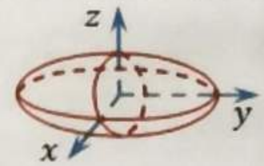
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

2) Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Уравнение эллипсоида

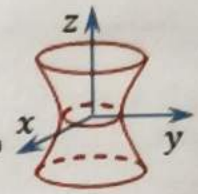


3) Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Уравнение однополостного гиперболоида

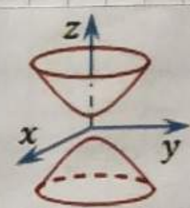


4) Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Уравнение двуполостного гиперболоида

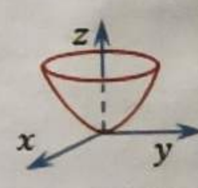


5) Эллиптический параболоид.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Уравнение эллиптического параболоида

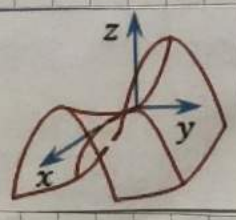


6) Гиперболический параболоид.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Уравнение гиперболического параболоида

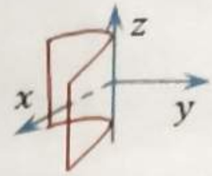


7) Параболический цилиндр.

$y^2 = 2px$

$$y^2 = 2px$$

Уравнение параболического цилиндра

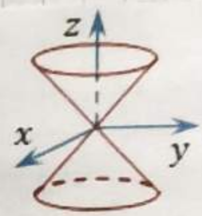


8) Конус.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Уравнение конуса

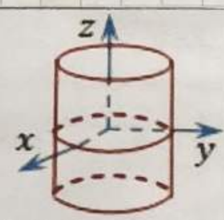


9) Эллиптический цилиндр.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Уравнение эллиптического цилиндра

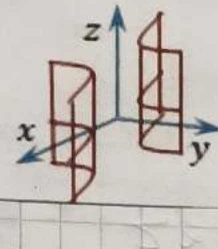


10) Гиперболический цилиндр.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Уравнение гиперболического цилиндра



§2. Сходящиеся последовательности точек в m-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Критерий Коши сходимости последовательности.

Опр. 1. Если каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлена в соответствие точка $M_n \in \mathbb{R}^m$, то говорят, что задана последовательность точек $\{M_n\}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Опр 2. Точка $A \in \mathbb{R}^m$ называется пределом последовательности $\{M_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(M_n, A) = 0$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = A$.

(или $M_n \to A$ при $n \to +\infty$)

Лемма 1.

⌐ Послед-ть точек $\{M_n(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ сходится к точке $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ тогда и только тогда, когда последовательности $\{x_1^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ координат точек M_n сходятся к ~~тов~~ соответствующим координатам $a_1, a_2, \dots, a_m$ точки A.

Док-во:

Утверждение леммы 1 следует из формулы

$$\rho(M_n, A) = \sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (x_m^{(n)} - a_m)^2}$$

~ самост-о

Опр. 3 Последовательность точек $\{M_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N, \ \forall n > N \text{ и } \forall m > N : \rho(M_n, M_m) < \varepsilon$$

Лемма 2

⌐ Для того чтобы последовательность $\{M_n(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы фундаментальными были послед-ти:

$$\{x_1^{(n)}\}, \dots \{x_m^{(n)}\}$$

– без док-ва.

Теорема 1. (Критерий Коши сходимости послед-ти).

Для того, чтобы последовательность $\{M_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Док-во: Пусть $\{M_n(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\}$ – фундаментальная.
Тогда, по лемме 2 $\{x_1^{(n)}\}, \ldots, \{x_m^{(n)}\}$ фундаментальные и, следовательно, они сходятся.

Отсюда следует (по лемме 1), что сходится и посл-ть $\{M_n\}$.

Док-во того, что из сходимости послед-ти $\{M_n\}$ вытекает её фундаментальность проводится аналогично.

Опр. 4
Посл-ть $\{M_n\}$ назыв. ограниченной, если все точки $\{M_n\}$ этой послед-ти находятся внутри или на границе некоторого шара с центром в начале координат.

Опр. 5. (эквивалентное)
$\{M_n\}$ ограничена, если $\exists R > 0$, такое, что $\forall n$: $\rho(M_n, O) \le R$
(O – нач. коор.)

Теорема 2. (Больцано – Вейерштрасса)

Из всякой огр-ой послед-и $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся подпослед-ть

(без док-ва)

§3. Понятие предельного значения ФНП.

Расс-м ф-ю $f(M)$ определённую на мн-во $\{M\}$ m-мерного Евклидова пространства и точку A этого мн-ва (не обязательно принадл. мн-ву $\{M\}$), но обладающую тем св-вом, что в $\forall$ ε-окрестности точки A содержится хотя бы одна точка мн-ва $\{M\}$, отличная от A.

Опр. 1. Число B называется <u>предельным</u> <u>значением</u> ф-ии $u = f(M)$ в точке A (или пределом ф-ии при $M \to A$), если для $\forall$ сходящейся к A последовательности $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ точек мн-ва $\{M\}$, элементы которой отличны от A, (т.е. $M_n \neq A$), соответ. посл-ть ф-ий сходится к B

Опр. 2. (По Коши или на языке „$\varepsilon - \delta$")

– Число b называется пределом ф-ии $u = f(M)$ в точке A, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое что $\forall M \in \{M\}$, удовлетворяющей условию

$$0 < \rho(M, A) < \delta : \underset{\text{выполняется}}{|f(M) - b| < \varepsilon}$$

Мн-во точек $\{M: 0 < \rho(M, A) < \delta\}$ называется <u>проколотой</u> δ-окрестностью точки A.

<u>Обозначения</u>:

$$\lim_{M \to A} f(M) = b \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, \dots, x_m) = b,$$

где $A = A(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$.

Опр. 3 (По Гейне)

Число b называется пределом ф-ии $u = f(M)$ в точке A (при $M \to A$), если $\forall \{M_n\} \to A$ ($\{M_n\} \in \{M\}$, $M_n \neq A$) соответ-ая последовательность $\{f(M_n)\} \to b$

Теорема 1. – Определения 2 и 3 эквивалентны.

Док-во аналогично д-ву в случае ф-ии одной переменной.

<u>Примеры</u>:

① $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \underbrace{(x+y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}}_{u(x,y)} \quad ?$$

$u(x,y)$ не определена на осях координат.

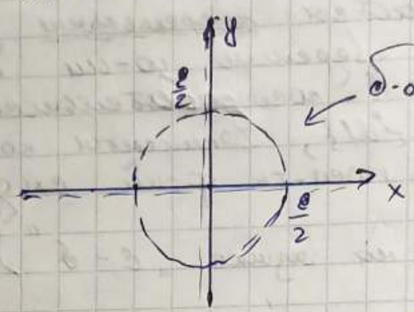
$O(0,0)$ – предельная точка области определения ф-ии $u=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

Покажем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)=0$

Воспользуемся определением Коши: (т.е. $\forall\varepsilon>0$ надо указать такое $\delta(\varepsilon)$, которое подходит по опред. по Коши).

Пусть $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

$0<\rho(M,O)<\delta$



Тогда, в этой δ-окрестности $|x|<\frac{\varepsilon}{2}$; $|y|<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}-\underset{\text{число } b}{0}\right|=$$

$$=|x+y|\,\left|\sin\frac{1}{x}\right|\left|\sin\frac{1}{y}\right|\le|x+y|\le\underset{\frac{\varepsilon}{2}}{|x|}+\underset{\frac{\varepsilon}{2}}{|y|}<\varepsilon$$

② $u(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

Ф-я $u(x,y)$ определена везде, кроме начала координат $x^2+y^2\neq 0$; $(0;0)$ – пред. точка области определения

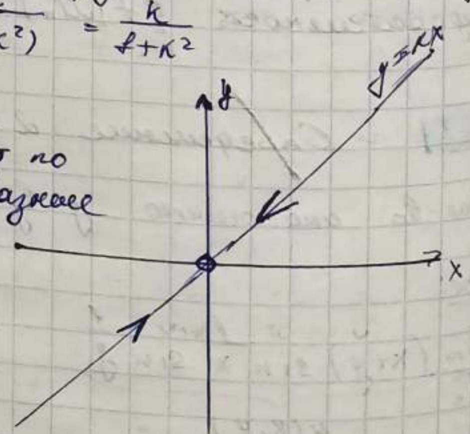
Однако; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ не существует.

Покажем это.

Будем устремлять точку в начало координат по прямой $y=kx$

$$\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} u(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot k}{x^2(1+k^2)}=\frac{k}{1+k^2}$$

Вывод: двигаемся в начало координат по разным прямым и получаем разные пределы → значит предел не существует.



В связи с этим возникает вопрос: а если по разным прямым получается один и тот же предел, следует ли отсюда, что предел будет равен опр-ому числу?

Оказывается, что нет. Покажем это на примере.

③ Рас-м функцию: $u(x,y)=\frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

Пусть (x,y) стремится к началу координат по прямой $y=kx$, $k\neq 0$

Тогда, $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}} u(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+kx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0$

Если точка $(x,y)\to(0,0)$ по оси x или оси y то предел также равен 0

То есть при стремлении (x,y) к $(0,0)$ по любой прямой предел равен 0.

Однако отсюда не следует существования предела!

Устремим (x,y) к $(0,0)$ по параболе $y=kx^2$.

Получим:
$$\lim\limits_{\substack{y=kx^2\\x\to 0}} u(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4+kx^4}=\frac{k}{1+k^2}$$

След-о, $\nexists\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} u(x,y)$

Лемма 1.
~Если $\{M_n\}\to A$ при $n\to\infty$ и все $M_n\in$ замкнутому мн-ву $\{M\}$, то $A\in\{M\}$.

(аналог отрезка на прямой это замкнутое мн-во в R^m)

Док-во: т.к. $\{M_n\}\to A$, то в $\forall$ ε-окр. (M_n сходится к A)

точки A содержатся члены нашей послед-ти $\{M_n\}$ и значит, содержатся точки из мн-ва $\{M\}$, то A либо внутренняя точка $\{M\}$ (и тогда она принадл. мн-ву $\{M\}$), либо граничная точка (тогда она тоже принадлежит $\{M\}$, т.к. мн-во $\{M\}$ замкнутое).

Таким образом, $A\in\{M\}$, ч.т.д.

Оп. 4. Функция $u=f(M)$ назыв. бесконечно малой в точке A (при $M\to A$), если
$$\lim\limits_{M\to A} f(M)=0$$

Пусть $f(M)$ и $g(M)$ - бесконечно малые

$\lim\limits_{M\to A}\frac{f(M)}{g(M)}=0$, то будем говорить, что $f(M)$ является б.м. более высокого порядка $f=o(g)$ при $M\to A$.

Пример: $f(x,y)=x^3+y^3 \to$ б.м. в т. $O(0;0)$

$g(x,y)=x^2+y^2$ ↗

Покажем, что $f=o(g)$ при $M(x,y)\to O(0,0)$

$$\lim_{M\to 0}\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \ominus$$ (удобно перейти к полярным координатам $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi\end{cases}$)

$$\ominus \lim_{r\to 0}\frac{r^3\overbrace{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}^{\le 2}}{r^2}=0,$$

т.е. $f=o(g)$ при $M(x,y)\to O(0,0)$

Теорема 2. Пусть $f(M)$ и $g(M)$ определены на $\{M\}$ и пусть $\lim_{M\to A} f(M)=b$, $\lim_{M\to A} g(M)=c$, тогда,

- $\lim_{M\to A}(f(M)\pm g(M)) = b\pm c$
- $\lim_{M\to A} f(M)\cdot g(M) = b\cdot c$
- $\lim_{M\to A}\frac{f(M)}{g(M)} = \frac{b}{c}$ при $c\neq 0$

(д-во аналогично случаю одной переменной.)

Опр 5. Говорят, что $f(M)$ удовлетворяет в точке M условию Коши, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, такое, что $\forall M_1$ и $M_2 \in$ {проколотой δ-окр. т. A} и принадлежащих области определения ф-ии, выполняется:

$$|f(M_2)-f(M_1)|<\varepsilon$$

(т.е. по мере стягивания δ-окрестности к точке A любые два значения ф-ии всё меньше отличаются друг от друга)

Теорема 3. ~ Для того, чтобы ф-я $f(M)$ имела предел в точке A, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в этой точке условию Коши.

~ без док-ва.

§4. Непрерывность ФНП.

Пусть $u=f(M)$ опр-на на $\{M\}$, точка $A\in\{M\}$ и т. A — пред. точка $\{M\}$.

Опр. 1. Ф-я $u=f(M)$ назыв. <u>непрерывной</u> в точке A, если $\lim\limits_{M\to A} f(M)=f(A)$.

Обозначим $\Delta u = f(M)-f(A)$ — приращение (или ~~разное~~ полное приращение) ф-ии $u=f(M)$ в точке A. Условие непрерывности можно записать так:

$$\lim_{M\to A}\Delta u = \lim_{M\to A}\left(f(M)-f(A)\right)=0 \quad (1)$$

— разностная форма условия непрерывности ф-ии в точке A.

Запишем в координатной форме:

$x_1-a_1=\Delta x_1$

$x_2-a_2=\Delta x_2$,

...

$x_m-a_m=\Delta x_m$.

$$\Delta u = f(x_1,\dots,x_m)-f(a_1,\dots,a_m)=f(a_1+\Delta x_1,\dots,a_m+\Delta x_m)-f(a_1,\dots,a_m).$$

Условие (1) можно записать в виде:

$$\boxed{\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_m\to 0}}\Delta u=0} \quad (1')$$

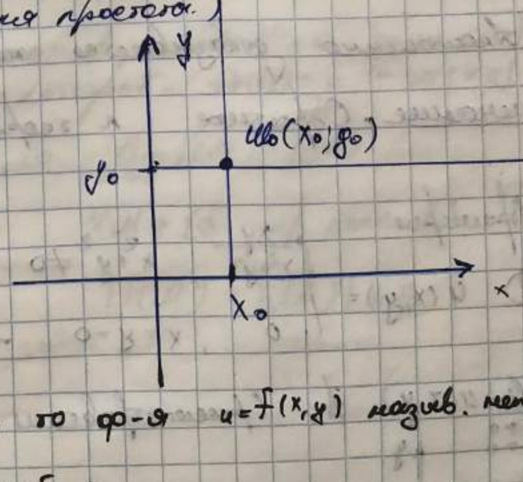
Непрерывность ф-и выраженная условием (1) или (1') называется непрерывностью ф-ии по совокупности переменных.

Непрерывность ф-и по отдельным переменным.

Рас-м ф-ю двух переменных (для простоты).

$u=f(x,y)$

$y=y_0=\text{const}$.



Зафиксируем y, тогда получим ф-ю одной переменной.

$u=f(x,y_0)$

Опр. 2. Если (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$, то ф-я $u=f(x,y)$ назыв. непр.-ой в точке $M_0(x_0,y_0)$ по переменной x.

Аналогично опред. непрерывность по переменной y.

Обозначим $\Delta_x u = f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$ - частное приращение ф-ии $u = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x.

Условие (2) перепишем:

$$\lim_{x \to x_0} \Delta_x u = 0 \quad (2')$$

$$x - x_0 \to \Delta x \to x - x_0 + \Delta x$$

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \to 0 \quad (2'')$$

(2), (2') и (2'') эквивалентны

Теорема 1. (m=2, для упрощения записи).

- Пусть $u = f(x, y)$ опред. в окр. точки $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывна по совокупности переменных в точке M_0.

Тогда $u = f(x, y)$ - непрерывна в т. M_0 по каждой переменной x и y

Док-во:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad \text{(по условию)}$$

x может стремиться к x_0 и y - к y_0 разными способами.

Зафиксируем y, т.е. $y = y_0$

В частности, $\lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0; y_0)$, т.е. $f(x, y)$ непрерывна в точке M_0 по переменной x.

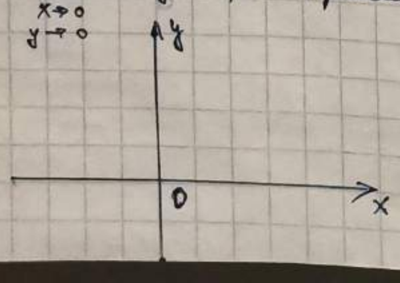
Аналогично доказывается непрерывность по переменной y.

Замечание. Обратное к теореме 1. утверждение неверно.

Примеры:

① $u(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$ - доопределим ф-ю $u(x, y)$ в точке (0,0)

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x, y) \nexists$ (рассматривали раньше)



$y = 0 \quad u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$

$\lim_{x \to 0} u(x, 0) = u(0, 0)$ - непр. в точке 0 по переменной x.

Аналогично доказыв. непрер. по переменной y.

② $u(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

На осях координат ф-я не определена.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x,y) = u(0,0)$$

$u(x,y)$ непр в. О по совокупности переменных

Но $u(x,y)$ не определена на осях координат, поэтому не явл. непр. по отдельности переменным.

Основные теоремы о непрерывных ф-ях.

Теорема 2. Пусть $f(M)$ и $g(M)$ опр-ы на $\{M\}$ и непрер. в т. A, тогда, $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$ $(g(M) \neq 0)$ непрерывны в т. A.

Расс-м ф-ю $u = f(x_1, \dots, x_m)$, а $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$ опр-ая на мн-ве $\{K\} = \{K(t_1, \dots, t_k)$

Теорема 3. Пусть $\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$ непр. в точке $A.(a_1, a_2, \dots a_k)$ и пусть $u = f(x_1, \dots, x_m)$ непр. в точке $B(b_1, \dots, b_m)$, где $b_1 = \varphi_1(A), \dots, b_m = \varphi_m(A)$. Тогда сложная ф-я $u = f(\varphi_1(t_1, \dots t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$ непрерывна в точке A.

Теорема 4. (об устойчивости знака непр. ф-ии)

Если $u = f(M)$ непр. в точке A и $f(A) > 0$ (или < 0), то $\exists\, \delta$-окрестность точки A, в которой $f(M) > 0$ $(f(M) < 0)$

Док-во: т.к. $f(M)$ непр. в точке A, то $\lim_{M \to A} f(M) = f(A)$

$\Rightarrow$ это означает, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall M \in \{\delta$-окр. точки $A\}$:

$$|f(M) - f(A)| < \varepsilon$$

Пусть $f(A) > 0$

$\varepsilon = f(A) \Rightarrow \delta > 0$

в δ-окрестности точки A.

$\underbrace{-\varepsilon < f(M) - f(A)} < \varepsilon$

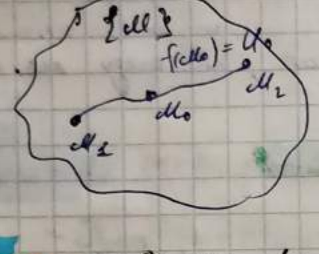
$\Downarrow$

$f(M) > 0$ в δ окр-ти точки A.

Теорема 5. (О прохождении непрерывной ф-ии через любое промежуточное значение)

Пусть $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна на связном мн-ве $\{M\}$, пусть M_1 и M_2 — две любые точки из $\{M\}$, $f(M_1) = u_1$, $f(M_2) = u_2$, и пусть u_0 — любое число из отрезка $[u_1, u_2]$.

Тогда, на любой непрерывной кривой L, соедин. точки M_1 и M_2 и целиком принадлежащей мн-ву $\{M\}$, найдётся такая точка M_0, что $f(M_0) = u_0$



Опр. 3. $u = f(M)$ ограничена на $\{M\}$, если $\exists\, C_1$ и C_2, такие что $\forall M \in \{M\}$: $\underbrace{C_1 \le}_{\text{огр. снизу}} f(M) \underbrace{\le C_2}_{\text{огранич. сверху}}$.

Теорема 6.
(I-ая теорема Вейерштрасса) — Непрерывная на замкнутом ограниченном мн-ве ограничена.

Док-во: Допустим, что $u = f(M)$ непрерывная на замкнутом ограниченном мн-ве, неограничена на $\{M\}$.

Тогда, $\forall n\ \exists M_n \in \{M\} : |f(M_n)| > n$

Расс-м последовательность

$\{f(M_n)\}$ — неограниченная последовательность,
и $\{M_n\}$ ограниченная.

По теореме Больцано-Вейерштрасса: из ограниченной послед-ти можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $\{M_{n_k}\} \to A$ при $n \to \infty$

В силу леммы 1, $A \in \{M\}$.

Т.к. $f(M)$ непрерывная ф-я, то $f(M)$ непрерывна в точке A.

Значит, $\{f(M_{n_k})\} \to f(A)$ при $n \to \infty$

Получили предположение неверно, поэтому $f(M)$ — ограничена.

Опр. 4. Число U наз-ся точной верхней гранью $u=f(M)$ на $\{M\}$, если

1) $\forall M \in \{M\}: f(M) \le U$

2) $\forall \tilde{U} < U \; \exists \tilde{M} \in \{M\}: f(\tilde{M}) > \tilde{U}$

Обозначение: $U = \sup\limits_{\{M\}} f(M)$

Аналогично опр-ся точная нижняя грань.

Теорема 7. (II-ая теорема Вейерштрасса) ~ Непрерывная на замкнутом огр-ом мн-ве ф-я достигает на этом мн-ве своих точных нижней и верхней граней.

~без док-ва.

Опр. 5 Ф-я $u=f(M)$ называется равномерно непрерывной на $\{M\}$, если $\forall \varepsilon>0$

$\exists \delta>0$, такое, что $\forall M_1$ и $M_2 \in \{M\}$.

$\rho(M_1, M_2) < \delta : |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$

Теорема 8. (теорема Кантора) ~ Непрерывная на замкнутом огранич. мн-ве ф-я равномерно непрерывна на этом мн-ве.

~без док-ва.

§5. Частные производные и дифференцируемость ФНП.

Пусть $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – внутр. точка обл. опр-я ф-и $u=f(x_1, \dots, x_m)$.

Зафиксируем все аргументы функции, кроме x_k.

Рас-м частное приращение функции:

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$$

Рас-м

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$$

Опр. 1. Если $\exists \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$, то он называется частной производной ф-ии $u=f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в точке M по переменной x_k (или по аргументу x_k).

Для частной производной используют разные обозначения:

u'_{x_k}, f'_{x_k}, u_{x_k}, $\frac{\partial u}{\partial x_k}$

! Частные производные вычисляются по тем же правилам, что и производная ф-ии одной переменной.

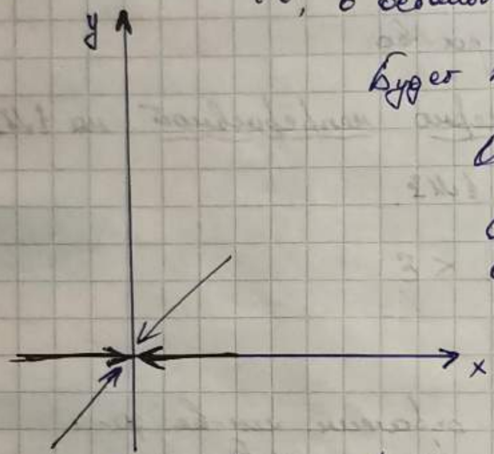
Примеры:

① $u = x^y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = y x^{y-1}$ (зафиксируем y)

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$ (зафиксируем x)

② $u(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{на осях координат.} \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$



Будет ли $u(x,y)$ непр. в начале координат?

Ответ: нет!

Если мы в начало координат идём по осям → то значение ф-ии равно 1, предел равен 1.

Если идём по каким-то другим прямым, то предел равен 0

т.е. предела $\nexists$ и $u(x,y)$ не явл. непрерывной в (.) $O(0,0)$

Здесь есть один уникальный момент: у ф-ии $u(x,y)$ есть частные производные

$\frac{\partial u}{\partial x}$ – это значит, что мы фиксируем y и движемся к $O(0,0)$ к оси x, но на оси Ox ф-я равна константе, т.е.

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0$ во всех точках оси Ox и в том числе в начале координат.

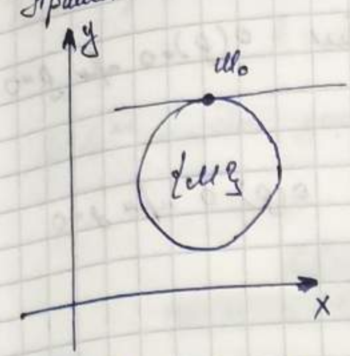
Аналогично, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$

Пример ② – это пример ф-ии, разрывной в т. $O(0,0)$, но тем не менее имеющей в этой точке частные производные.

Для ф-ии одной переменной такая ситуация невозможна.

__Замечание.__ Если $M(x_1, \dots, x_m)$ граничная точка области опр-я ф-ии, то для неё введённое опр-е частной производной может быть непригодно!

Пример:



Для точки M_0 не существует $\Delta_x u$, т.к. сдвигаясь влево или вправо вдоль напр. оси OX мы выходим из области определения $\{M\}$.

Почему для внутренней точки существовало приращение?

У внутренней точки есть ε-окрестность, целиком принадлежащая области определения.

Для граничных точек частные производные вводятся несколько иначе.

Если $\exists \frac{\partial u}{\partial x}(M)$ во внутр. точках области опр-я, то $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) =$

$$= \lim_{M \to M_0} \frac{\partial u}{\partial x}(M)$$

Пусть $M(x_1, \dots, x_m)$ внутр. точка области опр-я $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

Расс-м полное приращение ф-ии в этой точке

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$$

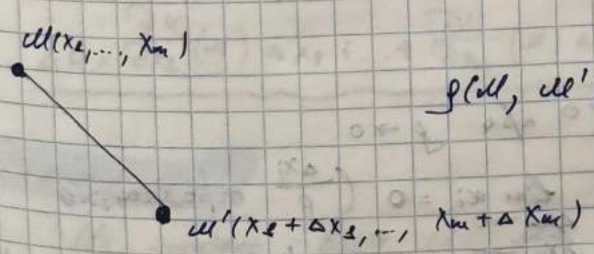
Опр. 2. Ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется дифф-ой в точке $M(x_1, \dots, x_m)$ если её полное приращение в этой точке равно:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (1), \text{ где}$$

$A_1, \dots A_m$ — числа, не зависящие от приращений, а

$\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$, $i = \overline{1, m}$, такие, что

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \to 0}} \alpha_i = 0 \qquad \alpha_i(0, 0, \dots 0) = 0 \quad (*)$$



$$\rho(M, M') = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$$

Утверждение:

Условие дифференцируемости в варе:

(1) эквивалентно условию

$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + o(\rho)$, причём $o(\rho) = 0$ при $\rho = 0$

Док-во: Пусть (1) выполнено, докажем, что $\alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho)$ причём $o(\rho) = 0$ при $\rho = 0$

($o(\rho)$ - „о" малое от ρ)

Обозначим $h = \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m$

Надо док-ть, что $h = o(\rho)$ и $h = 0$ при $\rho = 0$

Если $\rho = 0$, то все $\Delta x_i = 0 \Rightarrow$ все $\alpha_i = 0$ (условие $\bigstar$) $\Rightarrow h = 0$

Надо теперь док-ть, что $h = o(\rho)$

$$\frac{h}{\rho} = \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \ldots + \alpha_m \frac{\Delta x_m}{\rho}$$

Т.к. $\rho \geq |\Delta x_i|$ и все $\alpha_i \to 0$ при $\rho \to 0$

$$\frac{|x_i|}{\rho} \leq 1$$

то $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{h}{\rho} = 0$, т.е. $h = o(\rho)$ при $\rho \to 0$ значит, выполнено условие дифференц. (2)

Докажем в обратную сторону.
Пусть выполнено условие (2).

Обозначим, $h = o(\rho)$.

Если $\rho \neq 0$, то $h = \frac{h}{\rho} \cdot \frac{\rho^2}{\rho} = \frac{h}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_m^2}{\rho} =$

$$= \underbrace{\left(\frac{h}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho}\right)}_{\alpha_1} \cdot \Delta x_1 + \left(\frac{h}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_2}{\rho}\right) \Delta x_2 + \ldots + \underbrace{\left(\frac{h}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_m}{\rho}\right)}_{\alpha_m} \Delta x_m =$$

$= \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m$.

Т.к. $\left|\frac{\Delta x_i}{\rho}\right| \leq 1$ и $\frac{h}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0$

т.е. при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$, то $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_m \to 0}} \alpha_i = 0$ ($\frac{\Delta x_i}{\rho}$ ограничена, $\frac{h}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0$)

Если $\rho = 0$, то есть $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_m = 0$, то положим $\alpha_i = 0$
$i = \overline{1, m}$

Таким образом, мы представили ф-ю h в виде.

$$h = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m \quad \text{и } \alpha_i = 0 \text{ при } \Delta x_i = 0,$$

$i = \overline{1, m}$. Это значит, что условие (2) можно записать в виде (1)

Связь дифференцируемости ф-ии с существованием частных производных.

Теорема 1.1 (необх. условие диф-ти ф-ии)

Если $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ диф-а в точке $M(x_1, \ldots, x_m)$, то

$$\exists \ \frac{\partial u}{\partial x_i}(M) \ \text{ для } \forall i = \overline{1, m}$$

Док-во:

По условию дифференцируемости в виде (1), Δu можно представить:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m$$

при любых приращениях Δx_i, $i = \overline{1, m}$.

Пусть все $\Delta x_i = 0$, кроме Δx_k. Тогда, $\Delta u = \Delta_{x_k} u = A_k \Delta x_k + \alpha_k \Delta x_k$,

где A_k - число, а $\alpha_k \to 0$ при $\Delta x_k \to 0$ (т.к. остальные $\Delta x_i = 0$)

разделим $\Delta_{x_k} u$ на Δx_k.

$$\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = A_k, \text{ т.е. } \exists \ \frac{\partial u}{\partial x_k}(M) = A_k, \text{ ч.т.д.}$$

Таким образом, коэффициенты A_i, $i = \overline{1, m}$ это частные производные.

Условие дифференцируемости ф-ии в точке M можно записать в виде:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M) \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M) \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m \quad (3)$$

Замечание 1.

Из любого вида (1), (2), (3) условия дифференцируемости ф-ии следует, что если ф-я дифференцируема в точке M, то она и непрерывна в этой точке.

Утверждение следует из того, что $\Delta u \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$ (это условие непрерывности в разностной форме).

Замечание 2.

Обратное к теореме 1 утверждение неверно!

Чтобы это док-ть, нужно привести пример ф-ии, которая имеет частные производные по каждому аргументу, но не является дифференцируемой.

Пример.

$$u(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{на осях координат} \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Было показано, что $\exists \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$

Вместе с тем, эта ф-я не является непрерывной в точке O, значит, не является дифференцируемой.

Вывод: Просто существование частных производных не достаточно для того, чтобы ф-я была дифференцируемой.

Как необходимо усилить это условие?
На этот вопрос даёт ответ теорема 2.

Теорема 2. (Достаточное условие дифференцируемости)

~ Если $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет частные производные по всем аргументам в окрестности точки M и эти частные производные непрерывны в точке M, то $u = f(M)$ дифференцируема в точке M.

Замечание. Условия теоремы 2 являются только достаточными, но не необходимыми условиями дифференцируемости ф-ии в точке M.

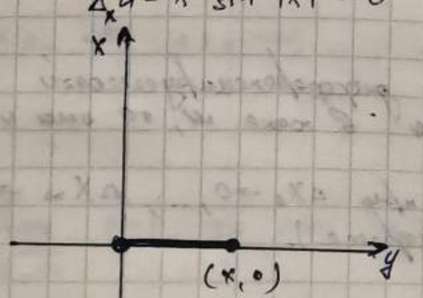
Пример:

$$\underset{\text{непрерывная}}{u(x,y)} = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Составляем частное приращение:

$$\Delta_x u = x^2 \sin\frac{1}{|x|} - 0$$



$$\frac{\Delta_x u}{x} = \underset{\downarrow\, 0}{x}\ \underset{\downarrow\, \text{ограничен.}}{\sin\frac{1}{|x|}} \to 0$$

$\Delta x = x$
(приращение аргумента)

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ не является непрерывной в начале координат. Покажем это.

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

(перейдём к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$)

$$= \lim_{\rho\to0} 2\rho\cos\varphi\sin\frac{1}{\rho} - \cos\frac{1}{\rho}\,\frac{\rho\cos\varphi}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho\to0} 2\rho\cos\varphi\sin\frac{1}{\rho} - \cos\varphi\cos\frac{1}{\rho} = \cos\varphi\lim_{\rho\to0}\left(\underbrace{2\rho\sin\frac{1}{\rho}}_{\to0} - \underbrace{\cos\frac{1}{\rho}}_{\to\infty}\right) \text{ не } \exists$$

x и y входят равноправно, поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}$ также не явл. непрерывной в точке $(0,0)$

Можно ли сказать, что ф-я не является дифференцируемой в начале координат? Нет, нельзя.

Если бы частные производные были непрерывными, то функция была бы дифференцируемой - это достаточное условие. Но это условие может не быть необходимым.

Поскольку частные производные не являются дифференцируемыми в начале координат, тем не менее функция $u(x,y)$ дифференцируема в начале координат.

! Покажем это.

Надо док-ть, что полное приращение $\Delta u = u(x,y) - \overset{0}{u(0,0)} =$
$$= (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{\underset{\text{надо док-ть}}{=}} \overset{=0}{\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)}\,\Delta x + \overset{=0}{\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)}\cdot\overset{=y}{\Delta y} + o(\rho)$$
где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Delta u = \rho^2 \underset{\text{o.ф.}}{\sin\frac{1}{\rho}} = o(\rho)$ при $\rho\to0$, т.е.

$u(x,y)$ дифф-ма в начале координат.

Этот пример показывает, что непрерывность частных производных достаточно для дифференцируемости, но совсем не обязательно, т.е. это условие не является необходимым.

Дифференцируемость сложной функции.

Теорема 3. Пусть
1. $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ дифференцируемы в точке (u_0, v_0)

$\varphi(u_0, v_0) = x_0$
$\psi(u_0, v_0) = y_0$

2. $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Тогда, сложная ф-я $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ дифференцируема в точке (u_0, v_0).

Док-во: Дадим произвольное приращение Δu и Δv аргументам u и v в точке (u_0, v_0)

Функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ получат приращения Δx и Δy, которые в силу условия 1 данной теоремы можно записать в таком виде:

$$\Delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v + \alpha_1 \Delta u + \alpha_2 \Delta v,$$

$$\Delta y = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v + \alpha_1 \Delta u + \beta_1 \Delta v + \beta_2 \Delta u \quad (4),$$ где

$\alpha_i, \beta_i \to 0$ при $(\Delta u \to 0, \Delta v \to 0)$

$\alpha_i = 0, \beta_i = 0$ при $\Delta u = \Delta v = 0$

(мы воспользовались условием дифференцируемости в виде (3))

$\Delta x, \Delta y$ - приращения внутренних функций в сложной функции, т.е. z также получит приращение.

Этим приращениям Δx и Δy соответствует приращение Δz функции $z = f(x, y)$, которое в силу условия 2 теоремы можно записать в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y \quad (5),$$ где

$\gamma_1, \gamma_2 \to 0$ при $(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$ и $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$ при $\Delta x = \Delta y = 0$

(это условие дифф-ти в формуле (3))

Δx и Δy (при $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$) стремятся к нулю и следовательно $\gamma_1, \gamma_2 \to 0$ при $(\Delta u \to 0, \Delta v \to 0)$

и $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$ при $\Delta u = \Delta v = 0$

Подставим (*) в правую часть формулы (5).

Тогда, (6) $\Delta z = A\Delta u + B\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v$, где

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0)$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial \psi}{\partial u}\gamma_2 + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\beta_1.$$

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial x}\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\beta_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\gamma_1 + \frac{\partial \psi}{\partial v}\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\beta_2$$ — ф-ии удовлет.

условиям $\alpha, \beta \to 0$ при $(\Delta u \to 0,\ \Delta v \to 0)$, $\alpha = \beta = 0$ при $\Delta u = \Delta v = 0$

Равенство (6) означает, что ф-я $z = f(\overbrace{\varphi(u,v)}^{x}, \overbrace{\psi(u,v)}^{y})$ дифф-ма в точке (u_0, v_0), ч.т.д.

Если ф-я дифф-ма, то коэффициенты A и B в (6) это частные производные

$$A = \frac{\partial z}{\partial u} \qquad B = \frac{\partial z}{\partial v}$$

Следствие: т.к. $A = \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)$, а $B = \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)$, то получим формулу для производной сложной ф-ии.

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0) \quad (7)$$

или

$$\boxed{\begin{gathered} z = f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \\ \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \end{gathered}} \qquad (7)$$

Пример.

∗ $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ — уравнение в частных производных, в котором требуется найти функцию $z(x,y)$, удовлетворяющую этому уравнению.

Пусть $z=f(t)$ произвольная дифференцируемая ф-я, если $t=x^2+y^2$, то $z(x^2+y^2)$ - решение уравнения ⊛

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x^2+y^2)\cdot 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(x^2+y^2)\cdot 2y$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y\cdot f'(x^2+y^2)\cdot 2x - x\cdot f'(x^2+y^2)\cdot 2y=0$$

Класс решений уравнения в частных производных определяется с точностью до произвольной функции.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений решение уравнения первого порядка определяется с точностью до константы.

Мы рассмотрели как находить частные производные функции z, зависящей от двух переменных x и y.

Аналогично, можно получить формулу для нахождения частных производных ф-ии, зависящей от m переменных.

Общий случай

$z=f(x_1,\dots,x_m)$

$x_i=\varphi_i(t_1,\dots,t_n)$

Аналогично (7')

$$\frac{\partial z}{\partial t_i}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\dots+\frac{\partial z}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_i}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial z}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_i} \quad (8)$$

Дифференциал ф-ии многих переменных.

Для одной переменной:

$$y=f(x)$$

$$\Delta y=\underbrace{f'(x)\Delta x}_{dy}+\underbrace{\alpha\cdot\Delta x}_{o(\Delta x)}$$

$$dy=f'(x)\,dx.$$

Пусть $u=f(x_1,\dots,x_m)$ дифференцируема в точке M.

Тогда, $\Delta u=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(M)\Delta x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(M)\Delta x_m\right)+(\alpha_1\Delta x_1+\dots+\alpha_m\Delta x_m)$

Каждая из сумм $(\ )$ и $(\ )$ $\to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_m \to 0$

При этом, выражение $(\ )$ является линейной функцией аргументов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, а выражение $(\ )$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем линейная функция.

Опр. 3. Дифференциалом (первым дифференциалом) ф-ии $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в точке M называется линейная относительно $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ часть приращения ф-ии в этой точке.

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M)\,\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M)\,\Delta x_m.$$

Дифференциалом независимой переменной x_i назовём её приращение, т.е.

$dx_i = \Delta x_i$. Перепишем du.

$$du = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(M)\,dx_i \quad (9)$$

Пример

$u = x^y \quad (x > 0,\ y \in \mathbb{R})$

$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy = y\cdot x^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy.$

$du\Big|_{(1,1)} = dx \quad ; du\Big|_{(1,0)} = 0$ — это не число, это ф-я равная 0

Для функции одной переменной выполняется св-во инвариантности первого дифференциала: если x — не является независимой переменной, то формула для дифференциала сохраняется, т.е. $dy = f'(x)\,dx$

Лемма (об инвариантности формы первого дифференциала)

~ Выражение (9) остаётся верным и в том случае, когда аргументы ф-ии $x_1, \dots, x_m$ являются не независимыми переменными, а дифференцируемыми функциями каких-то независимых переменных.

Док-во:

Пусть $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируемая ф-я, $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$.

Тогда, $u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$ — сложная ф-я дифференцируемая по теореме 3 независимых переменных $t_1, \dots, t_k$.

$$du = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u}{\partial t_i}\,dt_i = \underset{\text{формулу (8)}}{\text{применим}} \ \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\Big)\,dt_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} dt_i \right)}_{dx_j} =$$

изменили порядок суммирования

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j$$ — это в точности формула (9)

Таким образом, формула (9) имеет место и в этом случае

→ лемма доказана.

! Инвариантной остаётся только форма дифференциала, а содержание этой формулы иное.

Когда переменные независимые, то $dx_j = \Delta x_j$; а в случае зависимых переменных $dx_j \neq \Delta x_j$

Правила дифференцирования

Пусть u и v дифференцируемые ф-ии переменных $x_1, \dots, x_m$

1. $d(cu) = c\,du$
2. $d(u+v) = du + dv$
3. $d(uv) = v\,du + u\,dv$
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ $(v \neq 0)$

Докажем формулу 4:

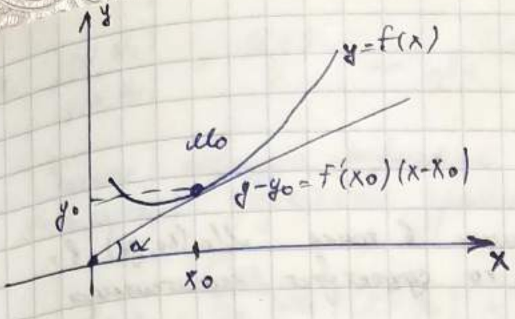
В силу леммы: $dW = d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\partial W}{\partial u} du + \frac{\partial W}{\partial v} dv = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv =$

$$= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

§6. Геометрический смысл дифференцируемости функции.

6.1. Касательная плоскость

Вспомним для функции одной переменной:



$M_0(x_0, y_0)$ (1)

$y_0 = f(x_0)$

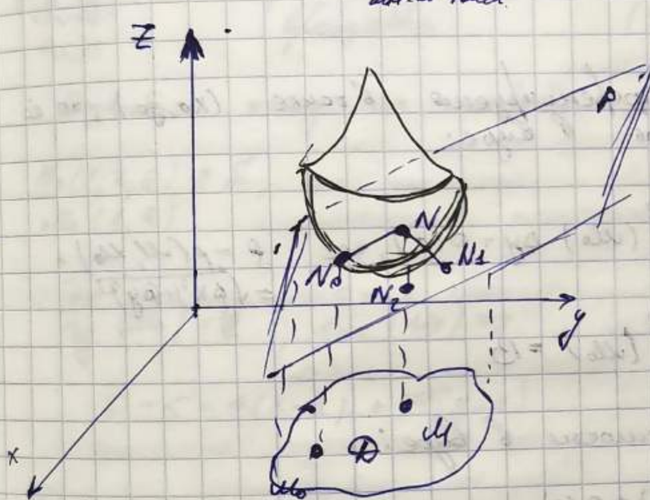
Если $f(x)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, то в точке M_0 можно провести касательную и угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$ $(k = tg\,\alpha = f'(x_0))$

Рассм-м теперь ф-цию $z=f(x,y)$ двух переменных. Её графиком в трёхмерном пространстве будет поверхность. И если ф-я $z(x,y)$ дифференцируема в точке M_0, то в этой точке существует касательная плоскость.

Итак: $z=f(x,y)$, $(x,y) \in D$. Графиком функции $z=f(x,y)$ будет поверхность S, где

$$S = \{N(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$$

мн-во точек



$N_0(x_0, y_0, z_0) \in S$

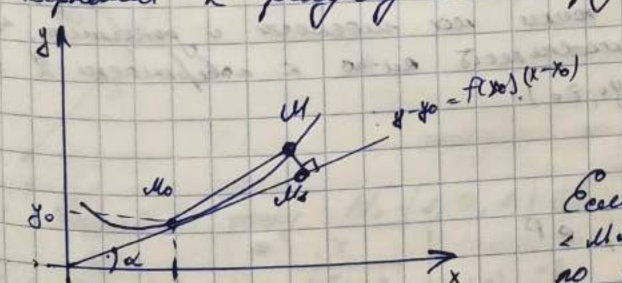
$z_0 = f(x_0, y_0)$

N_2 — точка пересечения NM с пл-ю P.

Проведём через точку N_0 плоскость P. Какую плоскость мы назовём касательной пл-ю?

Возьмём на поверхности ещё одну точку $N(x,y,z) \in P$, $z=f(x,y)$ и спроектируем её на плоскость xoy. Проведём два отрезка NN_0 и $NN_1 \perp P$ $(N_1 \in P)$.

Вернёмся к рисунку (1) и проделаем похожую процедуру.



$M_0(x_0, y_0)$

$y_0 = f(x_0)$

- $MM_1 \perp$ прямой
- Соединим точки M_0 и M

Если прямая является касательной, то $\angle MM_0M_1 \to 0$ при стремлении точки M по графику к точке M_0.

Секущая MM_0 при этом будет поворачиваться и в пределе совпадёт с касательной.

Опр. 1. Пл-ть P, проходящая через точку N_0 поверхности S называется касательной плоскостью к поверхности в этой точке, если при $N \to N_0$ $(N \in S)$ $\rho(N, N_1)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем расстояние $\rho(N, N_0)$, т.е. $\rho(N, N_1) = o(\rho(N, N_0))$

т.е. $\lim\limits_{\substack{N\to N_0\\(N\in S)}} \dfrac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} = 0$

Теорема 1. ~Если ф-я $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ в т. $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, то существует касательная плоскость к поверхности S.

Можно было бы рассмотреть многомерный случай, но для наглядности используем трехмерное пространство и соответственно функцию $z=f(x, y)$

Док-во: Введем обозначения:

$$\Delta z = z - z_0 = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$
$$\Delta x = x - x_0$$
$$\Delta y = y - y_0$$

Т.к. по условию $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то ее приращение Δz можно представить в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\,\Delta y + o(\rho), \text{ где } \rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Обозначим: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0) = A$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0) = B$

Перепишем условие дифференцируемости в виде:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho)$$

значение аппликаты точки на поверхности S

Расс-м плоскость P: $Z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$, где

Z - аппликата точки на плоскости и докажем, что она является касательной пл-ю к поверхности S в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Надо проверить 2 условия:

1) пл-ть проходит через точку $N_0(x_0, y_0, z_0) \in P$

2) $\lim\limits_{\substack{N\to N_0\\(N\in S)}} \dfrac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} = 0$

$N_2 = NM \cap P$

Тогда, $\rho(N N_1) \le \rho(N N_2)$ (перпендикуляр $\le$ наклонной)

$\rho(N, N_2) = |z - Z| = o(\rho)$

$\rho(N, N_0) \ge \rho(M_1, M_0) = \rho$

$$\frac{\rho(N,N_1)}{\rho(N,N_0)} = \frac{o(\rho)}{\rho} \to \text{ при } \rho \to 0 \quad (\text{при } N \to N_0)$$

Таким образом, уравнение касательной к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $N_0(x_0,y_0,z_0)$ задаётся уравнением:

$$\boxed{Z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)(X - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)(y - y_0)}$$

Вектор $\vec{n} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0), \frac{\partial z}{\partial y}(M_0), \underset{\text{коэффициент перед } z}{-1}\right\}$ — вектор нормали к поверхности S в точке $N_0(x_0,y_0,z_0)$

Примеры:

① $z = \underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)}$ — параболоид вращения $\quad (x,y)\in \mathbb{R}$

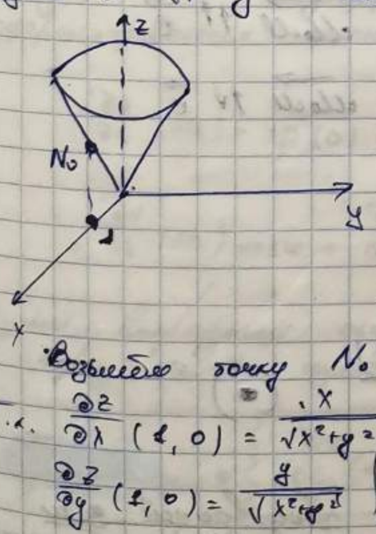
Возьмём точку на параболоиде

$N_0(1,2,5)\in S$;
$M_0(1,2)$

$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 4$; $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 2$

$$Z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2)$$

② Пусть $S = \sqrt{x^2+y^2}$ — коническая поверхность.



В точке $(0,0)$ ф-я не дифференцируема и в точке $O(0,0,0)$ касательная пл-ть к поверхности S не существует

Возьмём точку $N_0(1,0;1)\in S$

Т.к. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{(1;0)} = 1$,

$\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{(1,0)} = 0$, то уравнение касательной пл-ти к поверхности имеет вид:

$$Z - 1 = x - 1 \quad \text{или} \quad Z = x$$

Эта плоскость содержит образующую конической поверхности.

6.2. Производная по направлению. Градиент.

Если ф-я дифференцируема, то скорость её изменения по любому направлению можно выразить через ск-ти по осям координат.

Например, частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ ф-ции $u=u(x,y,z)$ характеризует ск-ть изменения ф-ции по направлению оси Ox.

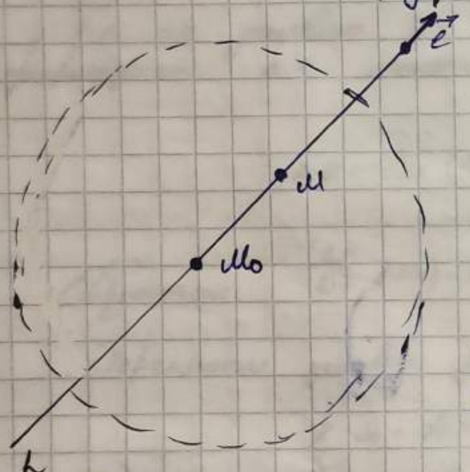
Скорость изменения ф-ции по произвольному направлению характеризуется производной по направлению.

Пусть $u=f(x,y,z)$ определена в окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^2$.

Расс-м окрестность точки M_0 (это шар с центром в этой точке.)

↓

любое открытое связное мн-во, содержащее эту точку



$|\vec e| = 1$

Проведем через точку M_0 какую-нибудь прямую L и выберем на ней одно из двух возможных направлений.

Будем характеризовать его единичным вектором

Возьмём другую точку $M \in L$.

Через M_0M будем обозначать величину направленного отрезка $\overrightarrow{M_0M}$, т.е.

$$M_0M = \begin{cases} |\overrightarrow{M_0M}|, & \text{если } \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \vec e \\ -|\overrightarrow{M_0M}|, & \text{если } \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \vec e \end{cases}$$

Расс-м отношение:

$$\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}$$

и его предел

$$\lim_{\substack{M\to M_0\\(M\in L)}} \frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M} \quad (\bullet)$$

Опр 2. Если $\exists$ предел $\bullet$, то он называется производной ф-ции $u=f(M)$ в точке M_0 по направлению $\vec e$ и обозначается

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) \quad \text{или} \quad u'_{\vec e}(M_0)$$

здесь без стрелки

Установим связь между производной по направлению и частными производными ф-ции в данной точке M_0.

Определ. производной по направлению не требовало привязки к какой-либо системе координат. Но для установления связи нам необходимо ввести систему координат.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z) \in L$, $\vec{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

направляющие косинусы: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

$M_0M = t$ (обозначим)

Если мы движемся по прямой, то $t \in (-\infty; +\infty)$.

Напишем параметрическое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases} \qquad t = 0 \Leftrightarrow M_0(x_0, y_0, z_0)$$

На прямой L ф-я равна: $u = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$ — сложная ф-я одного аргумента t.

$u = \varphi(t)$ (обозначим)

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ (M \in L)}} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{\underbrace{t - 0}_{\text{приращение аргумента}}} = \varphi'(0) \quad (\text{если этот } \lim \exists)$$

Пусть $u = f(M)$ дифференцируема в точке M_0, тогда по правилу дифференцирования сложной ф-ии, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) = \varphi'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cdot \overbrace{\frac{dx}{dt}(0)}^{\cos\alpha} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}(0)}_{\cos\beta} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \underbrace{\frac{dz}{dt}(0)}_{\cos\gamma} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma, \text{ т.е.}$$

мы выразили скорость изменения функции по направлению $\vec{e}$ через ск-ть изменения ф-ии по осям координат.

Формула

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma}$$

имеет простой физический смысл: — она показывает, что если функция $u = f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то в этой точке ск-ть изменения функции по заданному направлению $\vec{e}$ является линейной комбинацией скоростей изменения этой функции по направлениям координатных осей (т.е. линейной комбинацией частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$), причём коэффициентами этой линейной комбинации выступают координаты $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ единичного вектора $\vec{e}$ задающего направление;

Эти коэффициенты являются весовыми множителями, показывающими какую долю вносит каждая производная в производную по направлению $\vec{e}$.

В частности, если $\vec{e} = \{\overset{\cos \text{ к осям}}{1, 0, 0}\}$, т.е. направление $\vec{e}$ совпадает с направлением оси Ox, то из формулы • получаем

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$$

Опр. 3 Градиентом дифференцируемой функции $u = f(M) = f(x,y,z)$ в точке M_0 называется вектор

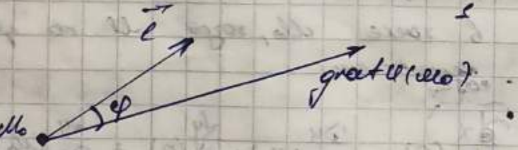
$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\,\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cdot\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cdot\vec{k},$$ где

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы осей координат.

Правую часть формулы • можно записать в виде скалярного произведения векторов $\operatorname{grad} u(M_0)$ и $\vec{e}$:

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) = \left(\operatorname{grad} u(M_0),\ \vec{e}\right),$$ откуда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) = |\operatorname{grad} u| \cdot \underset{1}{\underset{\shortparallel}{|\vec{e}|}} \cdot \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi = \text{Пр}_{\vec{e}} \operatorname{grad} u(M_0)$$



где φ – угол между векторами $\operatorname{grad} u(M_0)$ и $\vec{e}$

Максимальное значение $\frac{\partial u}{\partial e}(M_0)$ равно $|\operatorname{grad} u(M_0)|$, т.е.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial e}(M_0)\right)_{max} = |\operatorname{grad} u(M_0)| \text{ при } \varphi = 0$$

Таким образом, вектор $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 показывает направление наибольшего роста функции $u = f(M)$ в этой точке, а $|\operatorname{grad} u(M_0)|$ ск-ть роста функции $u = f(M)$ в точке M_0 в этом направлении.

Отсюда следует, что вектор $\operatorname{grad} u$ однозначно определяется самой функцией, не зависит от выбора системы координат.

Геометрический смысл градиента.

Поверхность S, определяемая уравнением $f(x,y,z) = C = const$, называется поверхностью уровня функции $u = f(x,y,z)$.

Можно док-ть, что вектор $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 поверхности уровня S коллинеарен вектору нормали к поверхности S в этой точке.

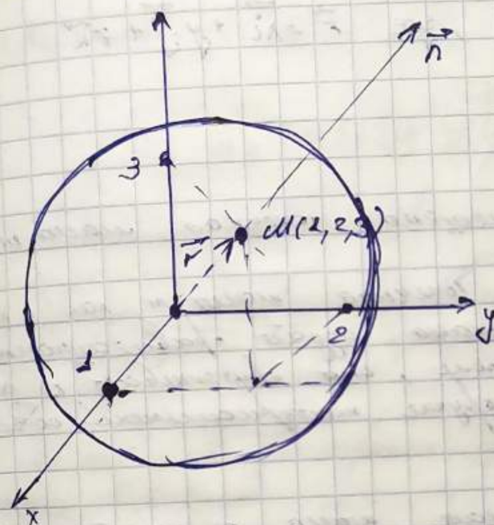
Покажем это на примере.

① $u=x^2+y^2+z^2$

$S: x^2+y^2+z^2=C>0$ – поверхностью уровня данной функции является сфера радиуса $\sqrt{C}$.

Пусть, например, $C=14$, тогда $M_0(1,2,3)\in S$.

В точке M $\operatorname{grad} u=\{2,4,6\}$.



Убедимся в том, что $\operatorname{grad} u(M)\parallel\vec{n}$, где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности S в точке M.

Вектор $\vec{r}=\{1,2,3\}$,

$\operatorname{grad} u(M)=2\vec{r}$, то $\operatorname{grad} u(M)\parallel\vec{r}$,

поэтому $\operatorname{grad} u(M)\parallel\vec{n}$

Физические примеры.

Электростатическое поле (т.е. поле неподвижных зарядов) можно описать с помощью скалярной ф-ции. $u(M)$ – потенциал электрического поля.

Поверхности уровня $u(M)=C$ – эквипотенциальные поверхности.

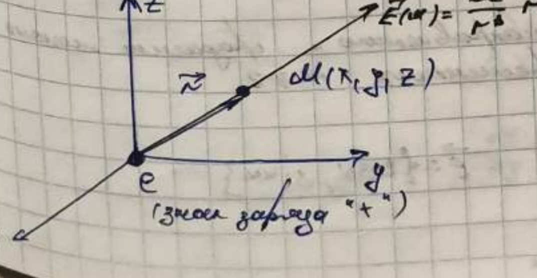
Напряжённость электрического поля

$$\vec{E}=-\operatorname{grad} u(M)$$

Если в каждой точке пространства задан вектор, то говорят, что задано векторное поле.

Пример 1.

Пусть электростатическое поле создаётся точечным зарядом e, помещённым в начале координат.



Возьмём точку $M(x,y,z)$.

Какой потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом?

$$u(M)=k\frac{e}{r}$$

$\vec E(M) = -\text{grad}\, u(M) = -\text{grad}\, k\frac{e}{r} = -ke\,\text{grad}\frac{1}{r} =$

$\qquad\qquad\qquad\qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

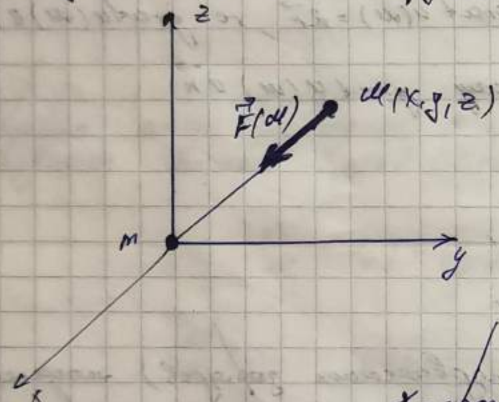
$= -ke\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec i + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec j + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec k\right) =$

$= -ke\left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec i + \frac{y}{r}\vec j + \frac{z}{r}\vec k\right) =$

$= \frac{ke}{r^2}\left(\frac{x}{r}\vec i + \frac{y}{r}\vec j + \frac{z}{r}\vec k\right) = \frac{ke}{r^3}\cdot\vec r$, где $\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$

Пример 2.

Пусть в начале координат помещена точечная масса m.



Точечная масса m как и любая масса создаёт гравитационное поле, она притягивает к себе другие материальные объекты.

Точечная масса m создаёт гравитационное поле, которое описывается Ньютоновским потенциалом $u(M) = \gamma\frac{m}{r}$,

γ - гравитационная постоянная.

Сила $\vec F(M)$, с которой масса m притягивает единичную массу, помещенную в точку $M(x,y,z)$, выражается формулой

$\vec F(M) = \text{grad}\, u(M) = -\frac{\gamma m}{r^3}\cdot\vec r$, где

$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (аналогично с примером 1.)

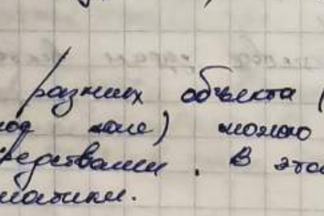
Вывод: 2 совершенно разных объекта (электростатическое поле и гравитационное поле) можно описать одинаковыми математическими формулами. В этом и заключена универсальность математики.

Производная по напр-ю и градиент были введены для ф-ии трёх переменных.

Аналогично, понятие производной по направлению и градиента можно ввести для ф-ии любого числа переменных $m \geq 2$.

Пусть $m = 2$.

$u = F(x, y)$
$\quad M$



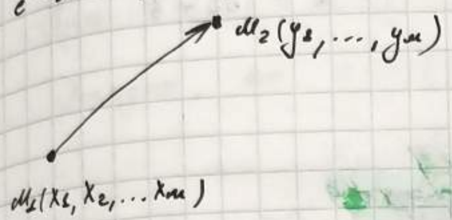
$\vec e = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0 \sin\alpha) = (\operatorname{grad} u(M_0), \vec{e})$$

Разберём случаем для m-мерного пространства

$u = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$

$\vec{e} = \{\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_m\}$



$\overrightarrow{M_1M_2} = \{y_1 - x_1, \ldots, y_m - x_m\}$

$$\operatorname{grad} u(M) = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M) = (\operatorname{grad}(M), \vec{e}) \ominus$$

Что понимают в m-мерном случае под скалярным произведением?

В трёхмерном пространстве и на плоскости сначала можно определить скалярное произведение как произведение длин векторов на косинус угла между ними.

На пл-ти и в трёхмерном пространстве понятно, что такое угол между векторами.

А что такое угол между векторами в m-мерном пространстве?

Тут всё наоборот. Сначала вводится скалярное произведение как сумма произведений соотв. координат, а затем уже опр-ся, что такое угол между векторами.

$$\ominus \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(M)\cos\alpha_i$$

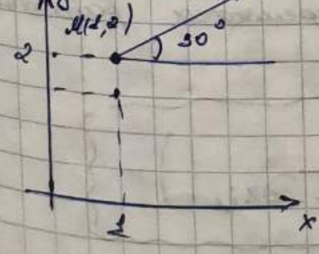
$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i \ ; \quad \cos\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_m^2}$$

Пример.

$u = x^2 + y^3$

Найти $\frac{\partial u}{\partial e}(M)$, если $M(1,2)$, и вектор $\vec{e}$ составляет угол в $30°$ с осью OX.



$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = 2x\big|_{(1,2)} = 2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = 3y^2\big|_{(1,2)} = 12$$

$grad\, u(M) = 2\cdot\vec{i} + 12\vec{j}$

$\vec{l} = \{\cos 30^\circ;\ \sin 30^\circ\}$, то
$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = (grad\, u(M), \vec{l}) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 12\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3} + 6$$

§7. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

7.1. Частные производные высших порядков.

Пусть ф-ия $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет частную производную $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в некоторой окрестности точки M. Тогда, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ является функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$, определённой в окрестности точки M, т.е. у $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ также может быть частные производные по любому аргументу x_k, $k = \overline{1, m}$

Опр. 1. ~ Если ф-ия $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ имеет в точке M частную производную по переменной x_k, т.е. существует $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ в точке M, то она называется второй частной производной. (или частной производной второго порядка) ф-ии u по переменным $x_i, \dots, x_k$ в точке M.

Для второй частной производной используются различные обозначения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}(M);\quad u^{(2)}_{x_i x_k}(M);\quad u''_{x_i x_k}(M);$$

$$f''_{x_i x_k}(M),\quad f_{x_i x_k}(M).$$

Если $k = i$, то вторая частная производная обозначается $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

Если $k \neq i$, то частная производная второго порядка называется смешанной частной производной второго порядка.

Частные производные более высокого порядка вводятся по индукции:

n-ая частная производная (или частная производная n-го порядка) ф-ии $u = f(x_1, \dots, x_m)$ по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ в точке M определяется равенством (формулой):

$$\boxed{\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}\right)}$$

Если не все номера $i_1, \dots, i_n$ равны друг другу, то частная производная называется смешанной частной производной n-го порядка.

Пример 1.

Пусть $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$

Показать, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u'_t = u''_{xx} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2\sqrt{t^3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \frac{x^2}{4t^2} = \frac{1}{4t^2\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} (-2t + x^2) =$$

$$= \frac{1}{4t^2\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} (x^2 - 2t).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{2x}{4t}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{x}{2t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{2t\sqrt{t}} \left(e^{-\frac{x^2}{4t}} + e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{2x}{4t}\right) \cdot x\right) = \frac{1}{4t^2\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} (-2t + x^2) =$$

$$= \frac{1}{4t^2\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} (x^2 - 2t)$$

Уравнение теплопроводности играет важную роль в матем-ой физике. Оно описывает процесс распространения тепла в одномерном стержне, ф-я $u(x,t)$ – это температура в точке стержня с коорд. x в момент времени t.

Эта функция называется фундаментальным решением ур-я теплопроводности. Она описывает изменение температуры в разных точках x бесконечного тонкого стержня, когда до начального момента времени $t=0$ температура во всех точках стержня равнялась нулю, а в момент $t=0$ стержню сообщено некоторое кол-во тепла в точке $x=0$.

Пример. 2.

$u = x^y$. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y x^{y-1} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y x^{y-1}\right) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^y \ln x\right) = y \cdot x^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$$

Обратим внимание, что в этом примере $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

Возникает вопрос: всегда ли выполняется это равенство.

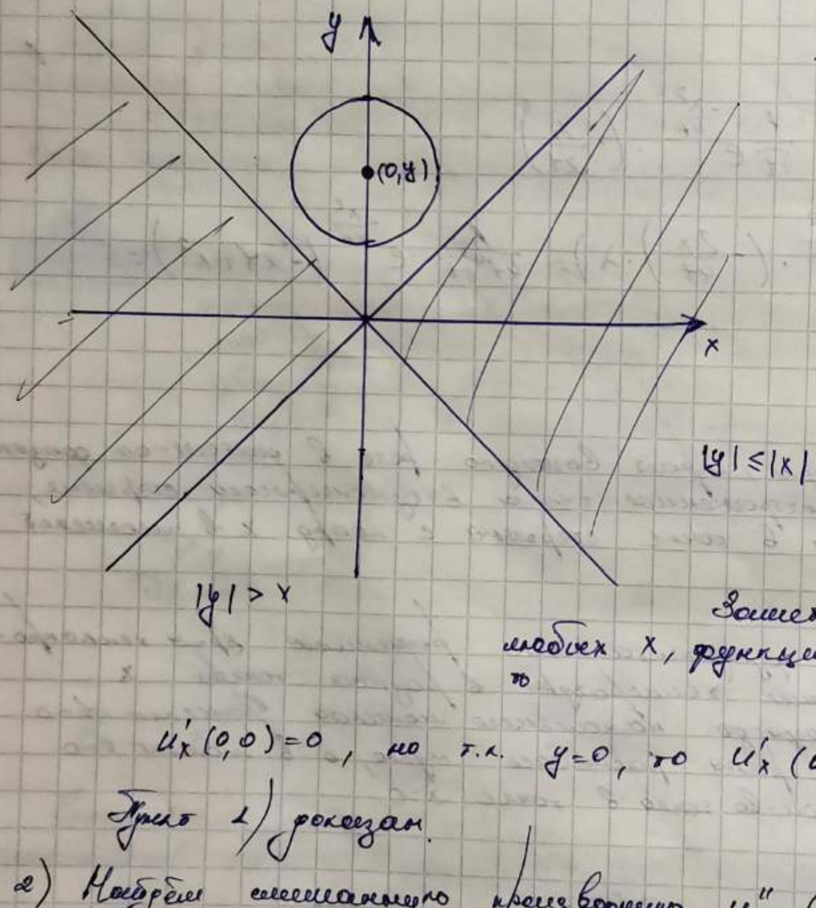
Оказывается, что не всегда.

Расс-м пример 3, демонстрирующий, что вторые смешанные производные могут быть и не равными.

<u>Пример 3.</u>

$$u(x,y) = \begin{cases} xy, & |y| \le |x| \\ -xy, & |y| > |x| \end{cases}$$

Найдём $u''_{xy}(0,0)$ и $u''_{yx}(0,0)$ и покажем, что они не совпадают



I. Найдём $u''_{xy}(0,0)$

1) Покажем, что

$u'_x(0,y) = -y$
$\forall y \in \mathbb{R}$

а) $y \ne 0$ в достаточно малой окрестности точки $(0,y)$
$u(x,y) = -xy$,

$u'_x(0,y) = -y$

б) $y = 0$

Заметим, что если $y=0$, то для любых x, функция $u(x,y) = 0$ и $u(x,0) = 0 = const$, то

$u'_x(0,0) = 0$, но т.к. $y = 0$, то $u'_x(0,0) = -y$.

Пункт 1) доказан.

2) Найдём смешанную производную $u''_{xy}(0,0)$.

Т.к. мы показали, что $u'_x(0,y) = -y$, то $u''_{xy}(0,y) = -1$. В частности $u''_{xy}(0,0) = -1$.

II. Найдём $u''_{yx}(0,0)$.

1) Заметим, что если $y=0$, то $u(x,y) = xy$ (нер-во $|y| > |x|$ при $y=0$ не имеет реш

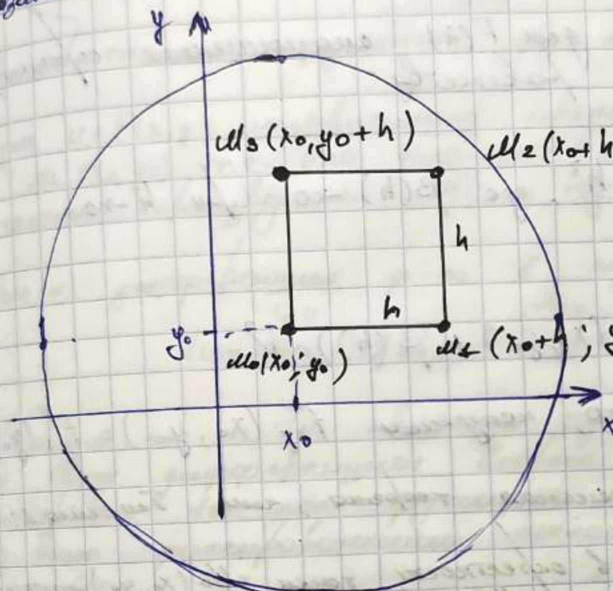
$u'_y = x$
$u''_{yx} = 1$, т.е.

$u''_{xy} \ne u''_{yx}$

Теорема 1. (о равенстве смешанных производных)
Если в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ функция $u=f(x,y)$ имеет смешанные частные производные f''_{xy} и f''_{yx}, и если эти смешанные производные непрерывны в точке M_0, то они в этой точке РАВНЫ:

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$$

Доказательство:



Рассм-м квадрат $M_0M_1M_2M_3$ со сторонами, параллельными осям координат и равными h, причём возьмём h столь малым, чтобы квадрат целиком лежал в указанной окрестности точки M_0.

Введём две вспомогательные функции:

$F(h)$ и $\varphi(x)$

$$F(h)=\big(f(M_2)-f(M_1)\big)-\big(f(M_3)-f(M_0)\big)=f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-$$
$$-\big(f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)\big)$$

$$\varphi(x)=f(x,y_0+h)-f(x,y_0)$$

точки на верхней стороне квадрата; точки на нижней стороне квадрата

Тогда, $F(h)=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$

Применим формулу конечных приращений Лагранжа:

$$F(h)=\varphi'(x_0+\theta_1 h)\cdot h=\underbrace{\big(f'_x(x_0+\theta_1 h,y_0+h)-f'_x(x_0+\theta_1 h,y_0)\big)}_{\text{к этой разности второй раз применим формулу Лагранжа теперь по переменной } y}\cdot h =$$

θ_1 - нек. число, $0<\theta_1<1$

$$= f''_{xy}(x_0+\theta_1 h,\ y_0+\theta_2 h)\cdot h^2, \text{ где } 0<\theta_2<1$$

Т.к. по условию f''_{xy} непрерывна в точке $M_0(x_0,y_0)$, то $f(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 h)$ можно представить в виде

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1 h,\ y_0+\theta_2 h)=f''_{xy}(x_0,y_0)+\alpha(h), \text{ где } \alpha(h)\to 0 \text{ при } h\to 0$$

Таким образом,

① $F(h) = [f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha(h)] \cdot h^2$

Введём ещё одну функцию:

$\psi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$.

Тогда, $F(h) = \psi(y_0+h) - \psi(y_0)$.

Преобразуем это выражение для $F(h)$ аналогичным образом, как и выражение •, приходим к равенству:

② $F(h) = [f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta(h)] \cdot h^2$, где $\beta(h) \to 0$ при $h \to 0$

① = ②

$(f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha(h)) \cancel{h^2} = (f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta(h)) \cdot \cancel{h^2}$

Перейдём к пределу при $h \to 0$, получим $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(y_0, x_0)$

Замечание: Имеет место более сильная теорема, чем Теорема 1:

~ Если $u = f(x, y)$ имеет в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ частные производные f'_x, f'_y и f''_{xy}, причём непрерывна в т. M_0, то в точке M_0 существует f''_{yx} и справедливо равенство

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Опр. 2. ~ Ф-я $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ называется дважды дифф-ой в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, если она дифф-а в некоторой окрестности точки M_0 и все её частные производные 1-го порядка дифф-ы в самой точке M_0

Понятие n-кратной дифференцируемости вводится по индукции. Пусть уже введено понятие (n-1)-кратной дифф-ти ф-ии $u = f(x_1, \dots, x_m)$.

Будем говорить, что эта функция n раз дифференцируема в точке M_0, если она (n-1) раз дифф-а в некоторой окрестности точки M_0.

Сформулируем ещё 2 теоремы о равенстве смешанных производных.

Теорема 2. ~ Если ф-я $u = f(x, y)$ дважды дифф-ма в точке M_0, то $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

— без док-ва

Теорема 3. – Если ф-я $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ n раз дифф-ма в точке M_0, то все её смешанные частные производные в точке M_0, до n-го порядка включительно не зависят от порядка дифф-ия.

7.2. Дифференциалы высших порядков.

Рас-м сначала функцию двух переменных.

Пусть $u = f(x, y)$ независимых переменных x и y дважды дифф-ма в точке $M_0(x_0, y_0)$, т.е. она дифф-ма в некоторой окрестности точки M_0 и её частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ дифф-м в точке M_0.

Рас-м дифференциал ф-ии в окрестности точки M_0:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\,dy \qquad (1)$$

Отметим, что du является функцией четырёх переменных x, y, dx, dy. Чтобы ввести дифференциал второго порядка функции $u = f(x, y)$, будем рассматривать du как функцию только x и y, т.е. как, если бы dx и dy были фиксированными числами (постоянными множителями).

Т.к. $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ дифф-м в точке M_0, то du является дифференцируемой функцией переменных x и y в точке M_0.

Опр. – Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) функции $u = f(x, y)$ в точке M_0 называется дифференциал от первого дифференциала du при следующих условиях:

1) du рассматривается как функция только от x и y.

2) При вычислении дифференциалов от $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ приращения Δx и Δy независимых переменных x и y берутся такими же как в выражении (1) для du, т.е. равными dx и dy.

Итак, $d^2u = d(du)$ при условиях 1 и 2

Из (1) и правил дифф-я получим:

$$d^2u = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]dx + \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dy =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right]dx + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right]dy =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2 \qquad (2)$$

Отметим, что производные 2-го порядка в равенстве (2) берутся в точке M_0, и равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ следует теорема 2.

Пример 4.

$u = x^y$, $M_0(1, 0)$. Найти $d^2u\big|_{M_0}$

$u'_x = y x^{y-1}$; $u'_y = x^y \ln x$

$u''_{xx} = y(y-1) x^{y-2}$

$u''_{xy} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$

$u''_{yy} = \ln x \cdot x^y \cdot \ln x = x^y \ln^2 x$

По формуле (2) получаем,

$$d^2u\big|_{M_0} = u''_{xx}(M_0)\,dx^2 + 2u''_{xy}(M_0)\,dx\,dy + u''_{yy}(M_0)\,dy^2 =$$

$$= 0 \cdot dx^2 + 2\,dx\,dy + 0 \cdot dy^2 = 2dx\,dy.$$

Заметим, что выражение (2) похоже на квадрат двучлена. Его действительно можно записать как квадрат двучлена, но не обычного, а символического (ОПЕРАТОРНОГО).

Назовём ОПЕРАТОРОМ правило, посредством которого каждой функции из заданного мн-ва ф-ий ставится в соответствие некоторая функция из (вообще говоря) другого мн-ва (т.е. одна ф-я преобр. в другую функцию).

Например, операцию нахождения частной производной функции $u(x, y)$ по аргументу x можно рассматривать как действие оператора $\frac{\partial}{\partial x}$, который преобразует функцию $u(x, y)$ в $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, т.е. $\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Аналогично определяется оператор $\frac{\partial}{\partial y}$ частной производной по y.

Оператор $d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ назовём оператором дифференциала.

При действии этого оператора на функцию $u(x, y)$ получается дифференциал функции

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Произведение операторов определим так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \; ; \; \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \; ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}, \quad \text{где } k, l \in \mathbb{N}$$

Определим n-ю степень оператора как n-ю степень двучлена $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$.

Тогда, $$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(dy)^2.$$

т.е. второй дифференциал функции $u(x,y)$ можно теперь записать в виде:
$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u(x,y)$$

Дифференциал n-го порядка вводится по индукции.

Если функция $u(x,y)$ n раз дифф-ма в точке M_0 (т.е. $(n-1)$ раз дифф-ма в некоторой окрестности точки M_0 и все её частные производные $(n-1)$-го порядка дифф-мы в точке M_0), то дифф-ом $d^n u$ n-го порядка ф-ии $u(x,y)$ в точке M_0 назовём дифф-ал в точке M_0 от дифф-а $(n-1)$-го порядка при тех же двух условиях, как при определении дифференциала второго порядка (предполагается с заменой во втором условии частных производных первого порядка на частные производные $(n-1)$-го порядка):
$$d^n u = d(d^{n-1}u) \qquad (n = 2, 3, \ldots) \quad (3)$$

По индукции нетрудно док-ть операторную формулу:
$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u. \quad (4)$$

В случае ф-ии m независимых переменных

$u = f(x_1, \ldots, x_m)$ дифф-л n-го порядка вводится по индукции (ф-ла (3)), оператор дифф-ала имеет вид:
$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m$$ и справедлива ф-ла
$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u \quad (5)$$

В частности,
$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 u = \sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}dx_i\,dx_j \quad (6)$$

Если аргументы x и y ф-ии $u(x,y)$ не являются независимыми переменными, а являются дифференцируемыми функциями каких-то независимых переменных $t_1, \ldots, t_k$, то формула (4) изменится.

То же самое относится к ф-ии $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ и формуле (5).

Действительно, в силу инвариантности формы первого дифф-ала

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

где dx и dy являются функциями $t_1, \dots, t_k, dt_1, \dots dt_k$, а $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ функциями $t_1, \dots, t_k$.

При вычислении d^2u как дифференциала от первого дифф-ала, рассматриваем du как функцию $t_1, \dots, t_k$, т.е учитываем зависимость от $t_1, \dots, t_k$ всех входящих в du слагаемых и сомножителей.

$$d^2u = d\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) =$$

$$= \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] dx + \frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dy + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 u\right] + \left\{\frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y\right\}$$

Видим, что по сравнению со случаем, когда x и y независимые переменные, выражение для d^2u содержит дополнительные слагаемые (в фигурных скобках).

Вывод: Форма второго дифф-ала не инвариантна, когда x и y не являются независимыми.

То же самое относится к дифференциалам более высокого порядка.

Исключение — случай, представленный в замечании.

Замечание:

Если x и y - линейные функции $t_1, \dots, t_k$, то есть

$x = \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_k t_k + \alpha_{k+1}$

$y = \beta_1 t_1 + \dots + \beta_k t_k + \beta_{k+1}$, где α_i, β_i - числа, то

$dx = \alpha_1 dt_1 + \dots + \alpha_n dt_k$ не зависит от $t_1, \dots, t_k$ и поэтому

$d(dx) = 0$.

Аналогично, $d^2y = 0$ и следовательно,

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 u,$$ т.е. формула (4) при

$n = 2$ остаётся в силе.

То же самое будет выполнено и для $n > 2$.

Также, если $x_1, \dots, x_m$ - линейные ф-ии $t_1, \dots, t_k$, т.е.

$$x_i = \alpha_{i1} t_1 + \dots + \alpha_{ik} t_k + \alpha_{i,k+1} \quad i = \overline{1, m} \quad (*),$$

то формула (5) остаётся в силе, где dx_i - дифф-ные ф-ий (7)

§8. Формула Тейлора.

Вспомним как выглядит формула Тейлора для функции одной переменной. Для $u = F(t)$ имеет место теорема:

Если $u = F(t)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в окрестности точки t_0, то $\forall t$ в этой окрестности справедливо равенство

$$F(t) = F(t_0) + \frac{1}{1!}F'(t_0)(t-t_0) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{n+1}}_{\text{остаточный член в форме Лагранжа}}.$$

Перепишем эту формулу по-другому (через дифференциалы)

$$t - t_0 = \Delta t = dt$$

Вспомним, что

$$F^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k = F^{(k)}(t_0)(dt)^k = d^kF\Big|_{t=t_0}$$

Обозначим, $F(t) - F(t_0) = \Delta u$ и запишем формулу Тейлора в виде:

$$\Delta u = dF\Big|_{t=t_0} + \ldots + \frac{1}{n!}d^nF\Big|_{t=t_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F\Big|_{t=t_0+\theta\Delta t} \quad (1)$$

Формула (1) - это формула Тейлора для функции одной переменной, но записанная в специальном виде через дифференциалы функции.

Для функции многих переменных имеет место аналогичная формула

Теорема 1. ~ Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в ε-окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, то для $\forall$ точки $M(x_1^0+\Delta x_1, \ldots, x_m^0+\Delta x_m)$ из этой ε-окрестности можно представить приращение функции $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ в виде:

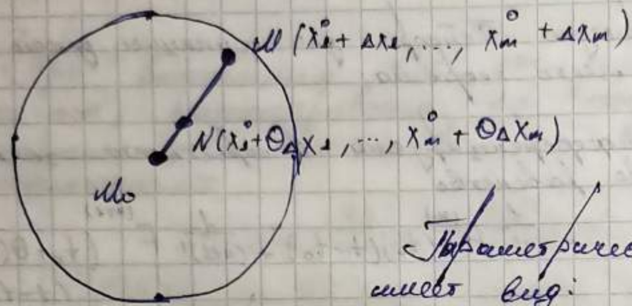
$$\Delta u = du\Big|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u\Big|_{M_0} + \ldots + \frac{1}{n!}d^nu\Big|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u\Big|_N \quad (2)$$

(N - некоторая точка, леж. на отрезке M_0M), где дифференциалы вычисляются по формуле (5) из §7:

$$d^ku = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k u$$

Формула (2) называется формулой Тейлора для $u=f(M)$ с центром разложения в точке M_0.

Док-во: Зафиксируем точку $M(x_1^0+\Delta x_1,\dots,x_m^0+\Delta x_m)$ из указанной ε-окрестности точки M_0.



(мы рисуем круг, но в m-мерном пространстве это будет m-мерный шар.)

Параметрическое уравнение отрезка M_0M имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + \Delta x_1 t \\ \dots \\ x_m = x_m^0 + \Delta x_m t \end{cases} \qquad 0\le t\le 1 \qquad (3)$$

При $t=0 \Leftrightarrow M_0$

$t=1 \Leftrightarrow M$.

На отрезке M_0M:

$$\underbrace{u = f(x_1^0+\Delta x_1 t,\dots, x_m^0+\Delta x_m t)}_{\text{Сложная функция, но одного аргумента } t, \text{ т.к. точка } M_0 \text{ фиксирована, } \Delta x_1,\dots,\Delta x_m \text{ фиксированы}} \overset{\text{обозначим}}{=} F(t)$$

$F(t)$ $(n+1)$ раз дифференцируема на $0\le t\le 1$

Заметим, что $\Delta u = f(M) - f(M_0) = F(1) - F(0)$ (4)

Применим к разности $F(1)-F(0)$ формулу (1)

В формуле (1) положим: $t_0=0$; $t=1$, $dt=\Delta t = 1-0 = 1$.

Получим, $F(1)-F(0) = dF\big|_{t=0} + \dots + \frac{1}{n!}d^nF\big|_{t=0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F\big|_{t=\theta}$ (5)

Заметим, что $x_1,\dots,x_m$ – линейные функции переменной t (ур-е (3)), то дифференциалы можно вычислить по ф-ле (7) §7.

$$d^kF\big|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^k u\Big|_{M_0}, \quad k=\overline{1,n}, \text{ где}$$

$dx_1,\dots,dx_m$ – дифф-лы функций (3), тогда

$$dx_1 = dt\cdot\Delta x_1 = \Delta x_1;\ \dots;\ dx_m = dt\cdot\Delta x_m = \Delta x_m$$

Итак,

$$d^k F\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k u\Big|_{M_0} = d^k u\Big|_{M_0}, \quad k = \overline{1, n} \qquad (6)$$

и аналогично,

$$d^{n+1} F\Big|_{t=\theta} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^{n+1} u\Big|_{N(x_1^0+\theta\Delta x_1, \ldots, x_m^0+\theta\Delta x_m)} \quad (7)$$

т.к. $0<\theta<1$, то точка N лежит на отрезке M_0M.

Подставляя формулы (6) и (7) в правую часть формулы (5), и учитывая (4), приходим к формуле (2)

– проверить сам-о

– теорема доказана.

Следствия.

① При $n=0$ из (2) получаем,

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) = du\Big|_N = \frac{\partial u}{\partial x_1}(N)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_2}(N)\Delta x_m$$

– ф-ла Лагранжа конечных приращений для ФНП

② Если раскрыть выражение для дифференциала в формуле (2), то получим формулу Тейлора через производные.

$$du\Big|_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\underbrace{\Delta x_1}_{x_1 - x_1^0} + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)\underbrace{\Delta x_m}_{x_m - x_m^0}$$

$M(x_1, \ldots, x_m)$

$$d^2 u\Big|_{M_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^2 f\Big|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\Delta x_i \Delta x_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)(x_1 - x_1^0)(x_j - x_j^0) \quad \text{и т.д.}$$

Получим,

$$f(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1^0, \ldots, x_m^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)(x_1 - x_1^0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)(x_m - x_m^0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_0)\cdot(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(M_0)(x_m - x_m^0)^2\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\ldots \frac{\partial^n f}{\partial x_m^n}(M_0)(x_m - x_m^0)^n\right) + R_{n+1} = P_n(x_1, \ldots, x_m) + R_{n+1}, \text{ где}$$

$P_n(x_1, \ldots, x_m)$ – многочлен степени $\leq n$, а

$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f\Big|_N$ – остаточный член.

Многочлен $P_n(x_1, \ldots, x_m)$ обладает тем св-вом, что все его

многочлен Тейлора

частные производные до n-го порядка включительно в точке M_0 равны соответствующим частным производным функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в точке M_0.

Пример:

$u = x^y$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$

$M_0(1;0)$; Найти многочлен Тейлора 2-го порядка, т.е. $P_2(x, y)$.

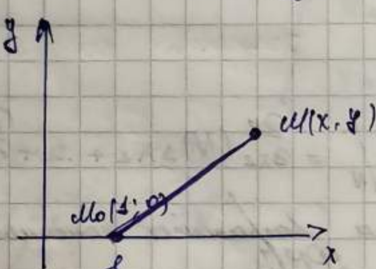
$$P_2(x,y) = f(M_0) + du\Big|_{M_0} + \frac{1}{2} d^2u\Big|_{M_0}$$

(ранее мы вычисляли для этой функции производные)

$du\Big|_{M_0} = 0$ $\quad d^2u\Big|_{M_0} = 2dx\,dy = 2y(x-1)$

$dx = \Delta x = x - 1.$

$dy = \Delta y = y$



$f(M_0) = 1.$

Из формулы Тейлора следует:

$$P_2(x,y) = 1 + (x-1)y = 1 - y + xy.$$

• $x^y = 1 - y + xy + R_3$ — остаточный член

Если R_3 отбросить, то можно приближенно вычислить x^y.

Например, $(1,1)^{1,2} \approx 1 - 1,2 + 1,1 \cdot 1,2 = -0,2 + 1,32 = 1,12$

Вернёмся к формуле Тейлора.

Замечание 1.

Можно док-ть, что

$R_{n+1} = o(\rho^n)$, где

$$\rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$$

это выражение называется формой Пеано остаточного члена.

В рассмотренном примере • можно представить так:

$$x^y = 1 - y + xy + o(\rho^2) = 1 - y + xy + o\left((x-1)^2 + y^2\right)$$

Замечание 2.

Формулу Тейлора можно записать в виде:

$$f(x_1, \dots, x_m) = P_n(x_1, \dots, x_m) + o(\rho^n)$$

Если вспомнить материал 1-го семестра, то для того, чтобы написать разложение функции с остаточным членом в форме Пеано, от функции необходимо требовать меньше условий, чем при записи разложения с остаточным членом в форме Лагранжа.

Можно док-ть, что формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано справедлива при меньших требованиях к функции, чем в теореме 1 §8.

В частности, для $n=2$ имеет следующая теорема.

Теорема 2. ~ Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, то для приращения ф-ии справедливо равенство:

$$\boxed{\Delta u = du\Big|_{M_0} + \frac{1}{2} d^2u\Big|_{M_0} + o(\rho^2)}$$

~ без док-ва.

§9. Локальный экстремум.

Прилагательное „локальный" говорит о том, что мы будем искать экстремум функции многих переменных не на всей области опр-я, а в некоторой окрестности.

Пусть функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0 \in R^m$.

Опр. 1. Говорят, что функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 локальный максимум (минимум), если $\exists$ такая ε-окрестность точки M_0, в которой $f(M) < f(M_0)$ $(f(M) > f(M_0))$ при $M \neq M_0$

Теорема 1. (необходимое условие экстремума)

~ Если в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ имеет локальный экстремум и если в точке M_0 существует частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, то $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$.

Док-во: Зафиксируем все аргументы функции, кроме x_k, положив $x_i = x_i^0$ $(i \neq k)$.

Рассмотрим функцию одной переменной $f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0)$. Обозначим её $\varphi(x_k)$.

Функция $\varphi(x_k)$ имеет локальный экстремум в точке $x_k = x_k^0$ и имеет производную в точке x_k^0: $\varphi'(x_k^0) = \frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)$

По теореме о необходимом условии экстремума для функции одной переменной:

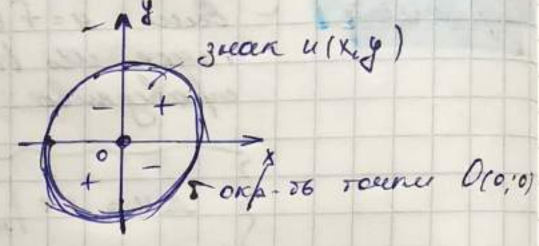
$$\varphi'(\overset{\circ}{x}_k)=0, \text{ т.е. } \frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)=0, \text{ ч.т.д.}$$

Следствие: Если функция $u=f(M)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум и дифференцируема в точке M_0, то

$$du\Big|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\,dx_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)\,dx_m=0$$

Замечание: Условие $du\big|_{M_0}=0$ является только необходимым, но не достаточным условием локального экстремума в точке M_0 дифференцируемой функции.

Покажем это на примере:



Пример 1. $u=xy$; $\frac{\partial u}{\partial x}=y$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=0$; $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0$

Однако, в точке $O(0,0)$ у функции $u=xy$ экстремума нет, т.к. в любой окрестности точки $O(0,0)$ ф-я принимает как положительные, так и отрицательные значения, т.е. как значения, большие, чем $u(0,0)=0$, так и значения меньшие, чем $u(0,0)$.

Точку M_0, в которой $du=0$, будем называть точкой возможного экстремума дифференцируемой ф-ии $u(M)$.

Чтобы установить имеет ли функция в такой точке M_0 экстремум или нет, нужны достаточные условия экстремума.

Некоторые сведения о квадратичных формах.

Функция $Q(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{1m}x_1x_m+a_{21}x_2x_1+$
$+\ldots+a_{mm}x_m^2$,

где a_{ij} – числа, $a_{ij}=a_{ji}$, называется квадратичной формой от переменных $x_1,\ldots,x_m$.

Квадратичная форма называется положительно опр-ой (отрицательно опр-ой) если $Q(x_1,\ldots,x_m)\geq 0$ (≤ 0) $\forall(x_1,\ldots,x_m)$, причём $Q=0$ только в начале координат, т.е. при $x_1=\ldots=x_m$

Пример 2. $Q(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2$ – положительно определённая квадратичная форма.

Положительно и отрицательно определённые квадратичные формы называются знакоопределёнными.

Квадратичная форма называется квазизнакоопределённой, если она принимает значения либо только неотрицательные, либо только неположительные, но при этом обращается в нуль не только в начале координат.

Пример 3: $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2$ -

квазиположительно определённая квадратичная форма, т.к. она принимает только неотрицательные значения, но обращается в нуль не только в начале координат, например, $Q(2,1) = 0$.

Квадратичная форма называется знакопеременной, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Пример 4: $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1 \cdot x_2 - x_2^2$ - знакопеременная квадратичная форма:

$$Q(1,0) = 2 > 0$$
$$Q(0,1) = -1 < 0$$

Матрица
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$
- называется матрицей квадратичной формы $Q = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$

A - симметричная, т.к. $a_{ij} = a_{ji}$.

Выделим у матрицы A угловые миноры

$\delta_1 = a_{11}$,

$\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots,$

$\delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \quad \delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a \end{vmatrix}$

Критерий Сильвестра знакоопределённости квадратичной формы.

Для того чтобы квадратичная форма $Q = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$ была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все её угловые миноры были положительными, т.е.

$$\delta_1 > 0, \ \delta_2 > 0, \ \dots, \ \delta_m > 0$$

Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались следующим образом:

$\delta_1 < 0,\ \delta_2 > 0,\ \delta_3 < 0,\ \delta_4 > 0, \ldots$

Достаточные условия экстремума.

Для функции одной переменной $y=f(x)$ достаточным условием максимума (минимума) в точке x_0 является условие: $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$). Это же условие можно записать через дифференциалы функции в точке x_0:

$$dy|_{x_0} = f'(x_0)\cdot\Delta x = 0$$

$$d^2y|_{x_0} = f''(x_0)(\Delta x)^2 < 0 \ (>0) \quad \forall \Delta x \neq 0.$$

Аналогичное достаточное условие имеет место и для функции многих переменных:

$u=f(x_1,\ldots,x_m)$ первый и второй дифф-лы в точке M_0 имеют вид:

$$du|_{M_0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)\,\Delta x.$$

$$d^2u|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\,\Delta x_i \cdot \Delta x_j$$ - (формула (6) из §4)

Отметим, что $d^2u|_{M_0}$ - квадратичная форма от переменных $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$.

Теорема 2. - Пусть выполнены условия:

1) $u=f(x_1,\ldots,x_m)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0)$

2) $dU|_{M_0}=0$

3) $d^2U|_{M_0}$ - положительно (отрицательно) определённая квадратичная форма от переменных $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m$.

Тогда функция $u=f(M)$ имеет в точке M_0 локальный минимум (максимум).

Доказательство: Пусть $M(x_1^0+\Delta x_1,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)$ - произвольная точка из окрестности точки M_0,

$$\Delta u = f(M) - f(M_0)$$

По теореме 2 (§8) Δu можно представить в виде:

$$\Delta u = du|_{M_0} + \frac{1}{2}d^2u|_{M_0} + o(\rho^2),$$

$$\rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_m^2}$$

Т.к. $du|_{M_0}=0$, то

$$\Delta u = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)}_{\text{обозначим } a_{ij}\text{, т.к. частные производные в точке это числа.}}\Delta x_i\cdot\Delta x_j + o(\rho^2) = \frac{1}{2}\rho^2\Big(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\,\underbrace{\frac{\Delta x_i}{\rho}}_{h_i}\,\frac{\Delta x_j}{\rho}+\underbrace{\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}}_{\substack{\alpha(\rho)\to 0 \\ \text{при } \rho\to 0}}\Big)=$$

обозначим так.

$$=\frac{1}{2}\rho^2\Big(\underbrace{\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}h_ih_j}_{} + \alpha(\rho)\Big) = \frac{1}{2}\rho^2\big(Q+\alpha(\rho)\big)$$

квадратичная форма от аргументов $h_1,\dots,h_m$, т.е. $Q(h_1,\dots,h_m)$

Квадратичная форма может быть положительно определённой или отрицательно определённой.

Рассм-м случай, когда

$d^2u|_{M_0}$ – положительно определённая квадратичная форма.

Тогда надо док-ть, что $\exists\,\delta$-окрестность точки M_0, где $\Delta u>0$ (при $M\neq M_0$)

Согласно условию 3) данной теоремы

$Q=\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}h_ih_j$ – положительно определённая квадратичная форма, а

$$h_1^2+h_2^2+\dots+h_m^2=\left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)^2+\dots+\left(\frac{\Delta x_m}{\rho}\right)^2=\frac{\rho^2}{\rho^2}=1 \quad (1)$$

В пространстве R^m точек с координатами $(h_1,\dots,h_m)$ уравнение (1) – уравнение сферы радиуса 1 с центром в начале координат.

Сфера – это ограниченное замкнутое множество.

Функция Q – непрерывная функция (т.к. это многочлен второй степени) то по второй теореме Вейерштрасса функция Q достигает на сфере (1) своей точной нижней грани, т.е. имеет на этой сфере минимальное значение. Обозначим его m, т.е. $m=\min Q$ (1)

– т.к. Q - положит. опред. квадр. форма

Тогда, $Q(h_1,\dots,h_m)\geq m>0$ на сфере (сфера не проходит через начало координат).

Возьмём $\delta>0$ столь малым, чтобы $|\alpha(\rho)|<m$ при $0<\rho<\alpha$

И следовательно, при $0<\rho<\alpha$, т.е. при $\rho(M_0,M)<\alpha$, $(M\neq M_0)$

$$\Delta u=\frac{1}{2}\rho^2\big(Q+\alpha(\rho)\big)\geq\frac{1}{2}\rho^2\big(m+\alpha(\rho)\big)>0$$

т.к. взяли такое α, что сумма в скобках будет положительной.

Получили: ! $\Delta u>0$ в δ-окрестности точки M_0, ч.т.д.

Теорема 3. - Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1, а вместо усл. 3) выполнено условие 3':

$d^2u|_{M_0}$ - знакопеременная квадратичная форма. Тогда, в точке M_0 экстремума нет. (без док-ва)

Замечание: Если выполнены условия 1) и 2) теоремы 1 и если $d^2u|_{M_0}$ квазизнако-определённая квадратичная форма, то экстремум в точке M_0 может быть, а может и не быть, нужны дополнительные исследования.

Пример 5:

$$u = x^y \ (x>0)$$

$$\begin{cases} u'_x = y x^{y-1} = 0 \\ u'_y = x^y \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \ (x^{y-1} \neq 0)$$

$$x = 1.$$

$M_0(1;0)$

$d^2u|_{M_0} = 2\Delta x \Delta y$ (этот дифф. вычисляли ранее)

$\downarrow$

знакопеременная квадратичная форма,

по теореме 2 экстремума у функции $u = x^y$ нет.

Пример 6:

$$u = x^2 + 2xy + 2y^2 + xz + z^3 - 4z$$

$$\begin{cases} u'_x = 2x + 2y + z = 0 \\ u'_y = 2x + 4y = 0 \\ u'_z = x + 3z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{y}{2} \quad x = -z.$$

$$-z + 3z^2 - 4 = 0 \Rightarrow z_1 = -1; \ z_2 = \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$M_1(1; -\frac{1}{2}; 1)$ $M_2(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})$

Далее необходимо вычислить второй дифференциал, представляющий собой квадратичную форму, знакоопределённость которой опр-ся по критерию Сильвестра.

Вычислим частные производные:

$u''_{xx} = 2$ $u''_{xy} = 2$ $u''_{xz} = 1$

$u''_{yx} = 2$ $u''_{yy} = 4$ $u''_{yz} = 0$

$u''_{zx} = 1$ $u''_{zy} = 0$, $u''_{zz} = 6z$.

Составим матрицу квадратичной формы d^2u:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$ Вычислим её угловые миноры:

$\delta_1 = 2 > 0$

$\delta_2 = 24 - 22 = 4 > 0$

$\delta_3 = 24z - 4$.

$M_1(1; -\frac{1}{2}; -1)$: $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 < 0$

Убедимся, что $d^2u|_{M_1}$ - знакоперем. квадратичная форма.

Пусть $\Delta x = \Delta y = 0$, $\Delta z = 1$.

$$d^2u|_{M_1} = 2\Delta x + 4\Delta x\Delta y + 2\Delta x\Delta z + 4(\Delta y)^2 + 0\cdot\Delta y\cdot\Delta z + 2\Delta x\Delta z + 0\cdot\Delta y\Delta z + 6z\cdot(\Delta z)^2 =$$

$$= -6 < 0$$

Пусть теперь $\Delta x = 1$, $\Delta y = \Delta z = 0$

$$d^2u|_{M_1} = 2(\Delta x)^2 = 2 > 0$$

Для одного выбора $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ получаем, что $d^2u|_{M_1} > 0$, а для другого — $d^2u|_{M_1} < 0$.

По теореме 3 - экстремума нет, т.к. $d^2u|_{M_1}$ - знакопеременная квадратичная форма

$M_2(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})$

вычислим угловые миноры:

$\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 = 28 > 0$

По критерию Сильвестра $d^2u|_{M_2}$ - положительно опр-ая квадратичная форма, поэтому по теореме 2.

Функция $u(x, y, z)$ имеет локальный минимум в точке M_2.

Случай двух переменных.

$u = f(x, y)$

$$d^2u|_{M_0} = \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0)}_{a_{11}}(\Delta x)^2 + 2\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(M_0)}_{a_{12}}\cdot\Delta x\,\Delta y + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0)}_{a_{22}}(\Delta y)^2$$

обозначения

$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \delta_1 = a_{11}$; $\delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$

равны

- Если $du|_{M_0} = 0$, а $a_{11} > 0$ и $\delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то в M_0 – min
- Если $du|_{M_0} = 0$, а $a_{11} < 0$, $\delta_2 > 0$ (знаки чередуются), то M_0 – max.
- Если $du|_{M_0} = 0$, а $\delta_2 < 0$, то экстремума нет.

§10. Неявные функции.

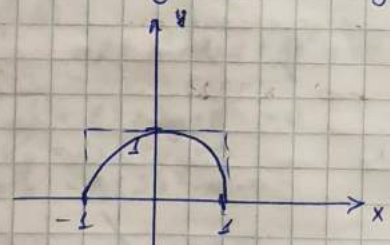
10.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением.

Расс-м уравнение с двумя переменными x и y: $F(x,y) = 0$ (1)

Пусть $\forall x \in X$: $y = f(x)$ решение ур-я (1).

Это решение $y = f(x)$ называется неявной функцией определяемой ур-ем (1)

Пример 1: Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$, рассматриваемое в квадрате $\{(x,y): -1 \le x \le 1,\ y \ge 0\}$ как уравнение относительно y, имеет решение $y = \sqrt{1 - x^2}$ и тем самым определяет ф-ю $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, но при этом правило f изначально задано не в явном виде



в Q: $\underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{F(x,y)} = 0$ (2)

$\forall x \in [-1; 1]$: $y = \sqrt{1 - x^2}$ (3)

Ф-я (3) – неявная ф-я, опр-ая ур-ем (2)

Пример 2: $\underbrace{2y + \sin y - x}_{F(x,y)} = 0$

Далее будет показано, что $\forall x \in X$: $y = f(x)$, но в отличие от примера 1 в явном виде функцию $y = f(x)$ найти не получится.

Т.е. надо различать: существование неявной функции, опр-ой уравнением и возможность найти её в явном виде.

И в примере 1 и в примере 2 неявная ф-я существует, но в примере 1 её можно найти в явном виде, а в примере 2 нельзя.

! Обратный пример!

У Луны есть обратная сторона. Её существование не вызывает сомнения. Но мы её не видим!

Какие вопросы с неявными ф-ями нас будут интересовать?

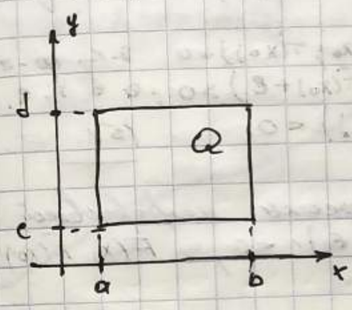
① При каких условиях уравнение (1) определяет какую-то неявную функцию, т.е. имеет решение относительно y для каждого x из некоторого мн-ва X?

② Если (1) определяет какую-то функцию $y=f(x)$, то как исследовать св-ва этой функции: непрерывность, дифференцируемость?

<u>Теорема 1.</u> Пусть выполнены 3 условия:

1) $F(x,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $Q=\{(x,y): a<x<b,\ c\le y\le d\}$.

2) $\forall x \in (a,b):\ F(x,c)\cdot F(x,d)<0$



Что такое $F(x,c)$ -?

x меняется от a до b, а y - фиксировано и равное, т.е. мы находимся на нижней стороне прямоугольника Q

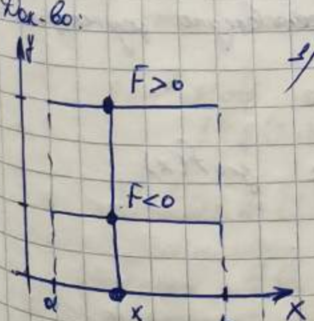
$F(x,c)\cdot F(x,d)<0$ означает, что на верхней и нижней сторонах функция имеет разные знаки.

3) $\forall x \in (a,b)$ $F(x,y)$ строго монотонная ф-я аргумента y, пробегающего отрезок $[c,d]$

$\Rightarrow$ тогда 1) в прямоугольнике Q ур-е $F(x,y)=0$ (1) имеет единственное решение y. (обозначим его $y=f(x)$, $f(x)\in[c,d]$), т.е в прямоуг-ке Q ур-е (1) определяет неявную ф-ю $y=f(x)$.

2) $y=f(x)$ непрерывна на (a,b).

Док-во:



1) Расс-м случай, когда $F(x,y)-0$ - возрастающая ф-я аргумента y при каждом x.

Зафиксируем любое $x\in(a,b)$. Рассмотрим $F(x,y)$ при этом x, $c\le y\le d$.

В силу предположения $F(x,c)<0$, $F(x,d)>0$, а т.к $F(x,y)$ непрерывна (т.е. непрерывна по совокупности переменных, а значит будет непрерывна по каждой переменной (теорема))

Значит, $\exists y\in(c,d):\ F(x,y)=0$

Т.к. функция строго монотонна, то такая точка, где $F(x,y)=0$ будет единственная.

Мы доказали, что $\forall x \in (a,b)$ $\exists$ реш. ур-я (1)

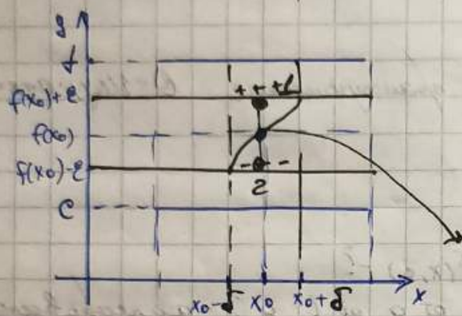
2) Докажем, что $y=f(x)$ непрерывна на (a,b), т.е. непрерывна в каждой точке (a,b).

Пусть x_0 — произвольная точка из (a,b).

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0,\ |x-x_0|<\delta : |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (4) опр-е непр-сти

Возьмём $\varepsilon>0$ достаточно малым, чтобы были выполнены неравенства

$f(x_0)-\varepsilon>c;\ f(x_0)+\varepsilon<d$.



Рас-м $F(x_0,y)$.

$F(x_0,f(x_0))=0$ (т.к. $y=f(x)$ — решение)

Вертикальный отрезок на прямой (где $x=x_0$)

в этой точке $F(x_0;f(x_0))=0$ т.к. ф-я возрастающая, то в т. $F(x_0,f(x_0)+\varepsilon)>0$, а в т. $F(x_0,f(x_0)-\varepsilon)<0$ (5)

Из неравенств (5) в силу устойчивости знака непрерывной функции следует, что $\exists\,\delta>0$, такое, что $F(x,f(x_0)-\varepsilon)<0$, $F(x,f(x_0)+\varepsilon)>0$ из неравенств следует, что

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon \text{ при } |x-x_0|<\delta, \text{ т.е.}$$

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta$, значит выполнено условие (4), это и значит, что ф-я (1) непрерывна, ч.т.д.

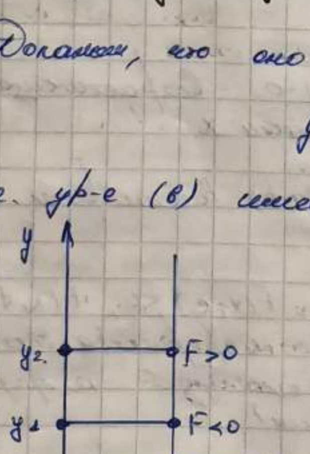
Пример 2. (продолжение).

(в) $F(x,y)=2y+\sin y-x=0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Докажем, что оно определяет единственную неявную функцию вида

$$y=f(x),\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Т.е. ур-е (в) имеет единственное решение $y=f(x)$



x — фиксируем.
Рас-м $F(x,y)$

Пусть $y=y_1=\frac{x}{2}-1$.

$F(x,y_1)=2y_1+\sin y_1-x=2(\frac{x}{2}-1)+\sin y_1-x=$

$=x-2+\sin y_1-x=\sin y_1-2<0$

Теперь возьмём $y=y_2=\frac{x}{2}+1$.

$\Rightarrow F(x,y_2)=2y_2+\sin y_2-x=\sin y_2+2>0$

т.к. $F(x,y)$ непрерывная ф-я как сумма непрерывных ф-ий, то значит $\exists y \in (y_1; y_2)$: $F(x,y) = 0$. Обозначим $y = f(x)$.

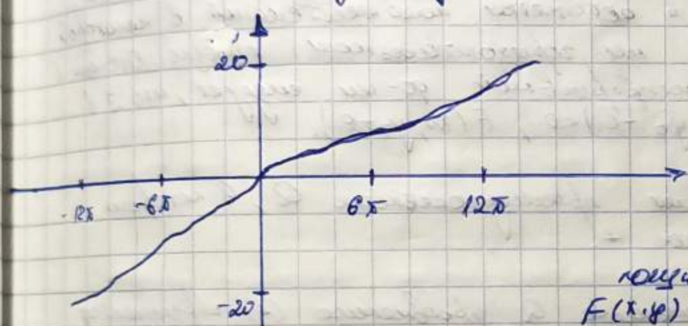
Такое y, для любого x единственное:

т.к. $F'_y = 2 + \cos y > 0 \Rightarrow F(x,y)$ - возрастающая функция аргумента y для любого фиксированного x.

$F(x,y)$ монотонная, то она только один раз может обратиться в 0 и, следовательно, уравнение (6) определяет единственную неявную ф-ю вида $y = f(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Мы в явном виде не можем найти функцию $y = f(x)$.

Однако мы можем „увидеть" эту функцию, построив график ф-ии $x = 2y + \sin y$



Существенным условием в теореме 1 было условие строгой монотонности функции $F(x,y)$ по переменной y.

Достаточным условием, обеспечивающим строгую монотонность функции $F(x,y)$ по переменной y является знакопостоянство частной производной $F'_y(x,y)$.

Это условие также будет использовано в теореме 2.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1) функция $F(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ (обозначим эту окрестность через ω)

2) в этой окрестности ω существует частная производная $\exists F'_y(x,y)$, непрерывная в точке M_0.

3) $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ Тогда, $\exists Q = \{(x,y): |x - x_0| < d, |y - y_0| \leq c\}$ целиком содержащийся в окрестности ω точки M_0, в котором ур-е $F(x,y) = 0$ опр-ет единственную неявную ф-ю вида $y = f(x)$, и эта ф-я непрерывна при $|x - x_0| < d$.

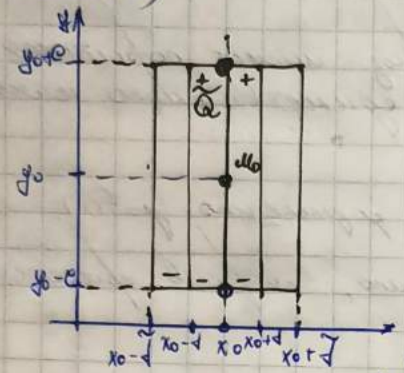
Док-во:

Т.к. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ (усл. 3) то для определённости пусть $F'_y(x_0, y_0) > 0$, то в силу непрерывности $F'_y(x,y)$ в точке M_0 (условие 2) и устойчивости знака непрерывной функции, найдётся прямоугольник

$$\tilde{Q} = \{(x,y): |x - x_0| < \tilde{d}, |y - y_0| \leq c, \tilde{d} > 0, c > 0\}$$

целиком содержится в окрестности D точки M_0, в котором $F'_y(x,y)>0$ и, следовательно, функция $F(x,y)$ является возрастающей функцией y на сегменте $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$ для любого $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, т.е. выполнено условие 3) теоремы 1.

(функция $F(x,y)$ строго монотонная функция y в этом прямоугольнике)



Расс-м $F(x_0,y)$ при $y_0-\varepsilon \le y \le y_0+\varepsilon$ (т.е. расс-м ф-ю на вертикальном отрезке)

На вертик. отрезке ф-я $F(x,y)$ возрастающая ф-я y, а в точке M_0 она равна нулю, т.е. $F(x_0,y_0)=0$, то $F(x_0,y_0-\varepsilon)<0$ и $F(x_0,y_0+\varepsilon)>0$

Т.к. $F(x,y)$ непрерывна, то она останется отрицательной в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0-\varepsilon)$, и останется положительной в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0+\varepsilon)$ на горизонтальном отрезке. Отсюда в силу устойчивости знака непрерывной ф-ии следует, что $\exists\, \gamma$ $(0<\gamma\le\delta)$, такое, что $F(x_0,y_0-\varepsilon)<0$, $F(x_0,y_0+\varepsilon)$.

Таким образом, мы построили прямоугольник Q, в котором выполнены все условия теоремы 1.

По теореме 1 в прямоугольнике Q уравнение (1) определяет единственную неявную функцию вида $y=f(x)$, которая непрерывна при $|x-x_0|<\gamma$, ч.т.д.

А что может быть, если $F'_y(x_0,y_0)=0$?

Если выполнены все условия теоремы 2, кроме условия $F'_y(x_0,y_0)\ne 0$, то заключение теоремы 2 становится неверным.

Пример 3: Расс-м уравнение $x^2+y^2-1=0$, $F(x,y)=x^2+y^2-1$ в окрестности точки $M_0(1;0)$.

$F(1,0)=0$; $F'_y=2y\big|_{(1;0)}=0$, т.е. условие $F'_y(1,0)\ne 0$ нарушено.

При этом, в окрестности точки M_0 заключение теоремы не выполнено: при $x>1$ ур-е $x^2+y^2-1=0$ не имеет решений относительно y, т.е. не определяет неявной ф-ции вида $y=f(x)$, а при $x<1$ имеет два непрерывных решения $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$, т.е. не выполнено утверждение о единственности неявной функции.

Пример 4:

Расс-м другой пример. Пусть $F(x,y)=x^3-y^3$, $M_0(0,0)$,

$x^3-y^3=0$; $F'_y(x,y)=-3y^2$; $F'_y(0,0)=0$.

В окрестности точки $M_0(0,0)$ уравнение $F(x,y)=0$ определяет единственную неявную функцию вида $y=f(x)$, а именно ф-ю $y=2$.

Тем не менее, $F'_y(0,0)=0$!

Теорема 3. ~Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть ф-я $F(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда неявная ф-я, определяемая ур-ем. $F(x,y)=0$ дифф-ма в точке x_0, и её производная в этой точке, выражается формулой:

$$\boxed{f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}}$$

Док-во: Зададим в точке M_0 приращение Δx и Δy аргументам x и y функции $F(x,y)$ так, чтобы $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in Q$, где Q - прямоугольник, фигурирующий в теореме 2.

Функция $F(x,y)$ получит приращение, которое в силу дифференцируемости функции в точке можно записать в виде

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - F(x_0,y_0) = F'_x(x_0,y_0)\Delta x + F'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y \quad (7)$$

где $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$ при $(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$

Возьмём в качестве Δy приращение неявной функции $y=f(x)$ в точке x_0, т.е.

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - y_0$$

Тогда, $\Delta F = \underbrace{F(x_0+\Delta x, \overset{=f(x_0+\Delta x)}{y_0+\Delta y})}_{F(x,f(x))=0} - \underset{=0}{F(x_0,y_0)} = 0$ (т.к. $y=f(x)$ корень ур-я $F(x,y)=0$)

Из ур-я (7) получаем:

$$F'_x(x_0,y_0)\Delta x + F'_y(x_0,y_0)\left(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right) + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\left(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right) = 0 \quad \Big| :\Delta x$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0,y_0)+\alpha_1}{F'_y(x_0,y_0)+\alpha_2} \quad (8)$$

В силу непрерывности неявной ф-ии $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ $\Rightarrow \alpha_1 \to 0$ и $\alpha_2 \to 0$

В равенстве (8) перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$

В итоге получим,

$$\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}_{f'(x_0)} = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} \quad (9)$$

ч.т.д.

Пример 2 (продолжение)

$2y + \sin y - x = 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

По формуле (9) для произвольной точки

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}, \text{ где } y = f(x) \qquad (9')$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2+\cos y}\Big|_{y=f(x)} = \frac{1}{2+\cos f(x)}$$

Пусть $x = 2\pi$, $f(2\pi) = \pi$

$$f'(2\pi) = \frac{1}{2+\cos\pi} = 1.$$

$f''(2\pi)$ - ?

$$f''(x) = \underbrace{-\frac{1}{(2+\cos f(x))^2}\cdot(-\sin f(x))\cdot f'(x)}_{\left(\frac{1}{2+\cos f(x)}\right)'} = +\frac{\sin f(x)}{(2+\cos f(x))^3}$$

$$f''(2\pi) = \frac{\sin f(2\pi)}{(2+\cos f(2\pi))^3} = \frac{\sin\pi}{(2+\cos\pi)^3} = 0 \quad \ldots$$

и далее можно найти производные более высокого порядка функции $f(x)$.

Для произвольно заданных $x, y(x)$ можно найти только приближенные значения.

Рас-м более общее уравнение:

$$F(x_1, x_2, \ldots, y) = 0 \qquad (10)$$

Решение этого уравнения (11) $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется неявной функцией, определяемой уравнением (10).

Теорема 4. Пусть:

1) $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ определена и дифференцируема в окрестности ω точки $M_0(x_1^0, x_2, \ldots, x_n^0, y)$

2) $F'_y(x_1, \ldots, x_n, y)$ непрерывна в точке M_0.

3) $F(M_0) = 0$, $F'_y(M_0) \neq 0$,

Тогда, $\exists$ параллелепипед $Q = \{(x_1, \ldots, x_n, y) : |x_i - x_j^0| < d_i,\ j = \overline{1,n}$, $|y - y_0| \leq c$, $d_i > 0$, $c > 0\} \subset \omega$,

в котором уравнение (10) определяет единственную неявную функцию вида (11); эта функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема и её частные производные выражаются формулами:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{-F'_{x_i}(x_1,\dots,x_n,y)}{F'_y(x_1,\dots,x_n,y)}\Bigg|_{y=f(x_1,\dots,x_n)}$$

– без док-ва.

§12. О неявных функциях определяемых системой уравнений.

Очень часто при описании физических, химических, биологических (явлений) возникает система нелинейных уравнений. В связи с этим возникает вопрос: есть ли у этой системы решение? Можно ли найти неявную функцию, являющуюся решением этой системы.

Рас-м систему уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \dots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases} \quad (1)$$

Решение этой системы относительно $y_1,\dots,y_m$

$y_1=f_1(x_1,\dots,x_n),\ \dots,\ y_m=f_m(x_1,\dots,x_n)$ (2) называется системой неявных функций, определяемых уравнением (1).

При исследовании системы (1) важную роль играет определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \dots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

Этот определитель имеет специальное название - определитель Якоби или якобиан функций $F_1,\dots,F_m$ по $y_1,\dots,y_m$.

Для якобиана принято следующее обозначение:

$$\Delta = \frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}$$

(читается: $D(F_1,\dots,F_m)$ по $D(y_1,\dots,y_m)$)

Теорема 1. - Пусть выполнены след. условия:

1) $F_1,\dots,F_m$ определены и диффер. в окрестности ω точки $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$.

2) Все частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $(i,j=\overline{1,m})$ непрерывны в точке M_0
(это условие необходимо, для того чтобы знаменатель формулы из теоремы 4 не обр. в 0 - здесь исп. св-во устойчивости знака непрерывной функции в окрестности точки M_0)

3) $F_1(M_0)=0, \ldots, F_m(M_0)=0$,

$$\Delta|_{M_0} \neq 0$$

Тогда, $\exists$ параллелепипед ($n+m$ мерного)
$Q = \{(x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_m) : |x_i - x_i^0| < \delta_i,\ i=\overline{1,n},\ |y_j - y_j^0| < e_j,$
$j=\overline{1,m},\ \delta_i > 0,\ e_j > 0\} \subset \omega$,

в котором система (1) определяет единственную систему неявн. функций вида (2), причём эти неявные функции дифф-мы

(без док-ва)

Пример 1.

$$\begin{cases} \underbrace{x^2+y^2+z^2-3}_{F_1(x,y,z)}=0 & \sim \text{ур-е сферы с центром } (0,0),\ R=\sqrt{3} \\ & \underline{(3)} \\ \underbrace{x+y+z-1}_{F_2(x,y,z)}=0 & \sim \text{ур-е плоскости} \end{cases}$$

Будем рассматривать эту систему относительно y и z в окрестности точки $M_0(1,1,-1)$.

Проверим выполнимость условий теоремы 1.
Очевидно, что F_1 и F_2 дифф-ы в окрестности точки M_0 (как многочлены)

$F'_{1y} = 2y \quad F'_{1z} = 2z$ — непр-ы в окрестности точки M_0.
$F'_{2y} = 1,\ F'_{2z} = 1$

$F_1(M_0)=0,\ F_2(M_0)=0$

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} \overset{1}{2y} & \overset{-1}{2z} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$ — выполнены все условия теоремы 1.

Следовательно, в некоторой окрестности точки M_0, система ур-ий (2), определяет единственную пару функций вида

$$y=f_1(x),\quad z=f_2(x)$$

Получим формулы для производных этих функций.

Подставим эти функции в систему уравнений (3).

$$\begin{cases} x^2+f_1^2(x)+f_2^2(x)-3=0 \\ x+f_1(x)+f_2(x)-1=0 \end{cases} \quad \forall x \in \text{окрестности } x=1.$$

Продифф-ем:

$$\begin{cases} 2x+2f_1(x)\cdot f_1'(x)+2f_2(x)\, f_2'(x)=0 \\ 1+f_1'(x)+f_2'(x)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x)\cdot f_1'(x) + f_2(x)\, f_2'(x) = -x \\ f_1'(x) + f_2'(x) = -1 \end{cases}$$ – система линейных ур-ий относительно $f_1'(x),\ f_2'(x)$

По формулам Крамера получаем:

$$f_1'(x) = \frac{f_2(x) - x}{f_1(x) - f_2(x)}$$

$$f_2'(x) = \frac{x - f_1(x)}{f_1(x) - f_2(x)}$$

Чтобы найти $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ надо сначала найти $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Если $x=1$ (т.к. точка $M_0(1, 1; -1)$ удовлетворяет системе), то $f_1(1)=1$, $f_2(1)=-1$.

$$f_1'(1) = -1, \quad f_2'(1) = 0$$

Как найти производные более высоких порядков?

$$f_1''(x) = \left(\frac{f_2(x) - x}{f_1(x) - f_2(x)}\right)' \Rightarrow f_1''(1) \quad \text{(подсчитать сам-но!) Отв.: } f_1''(1) = 1$$

+ Доп задание (по желанию)

§12. Зависимость функций.

12.1. Понятие зависимости функций.

В курсе линейной алгебры вводится понятие линейной зависимости элементов линейного пространства (среди линейных пространств есть функциональные пространства.).

В частности в пространстве $C[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, линейная зависимость функций.

$y_1(x), y_2(x), \dots y_m(x)$ означает, что хотя бы одна из этих функций является линейной комбинацией остальных:

$$y_k(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_{k-1} y_{k-1}(x) + \dots + C_m y_m(x), \text{ где}$$

C_i – некоторые числа.

Введём более общее понятие зависимости функций.

Начнём с примера:

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad a \le x \le b.$$

Эти функции не являются линейно зависимыми на $[a,b]$.

Если бы они были зависимыми, то

$y_1(x) = C_1 y_2(x)$, $\forall x \in [a,b]$

$y_2(x) = C_2 y_1(x)$, $\forall x \in [a,b]$, т.е.

$x = c_1 x^2$, $\forall x \in [a,b]$
$x^2 = c_2 x$, $\forall x \in [a,b]$ — эти равенства ни при каких числах c_1 и c_2 не выполняются для всех $x \in [a,b]$.

Однако между данными функциями $\exists$ зависимость.

$y_2(x) = y_1^2(x)$ $\forall x \in [a,b]$, но эта зависимость нелинейная.

Перейдём к общему понятию зависимости функций, которое мы введём для дифференцируемых функций.

Пусть $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$ — (1) определены и дифференцируемы в области $D \subset \mathbb{R}^n$

Опр. 1. Функция $y_k = f_k(x_1, \dots, x_n)$ называется зависимой в области D от остальных функций системы (1), если для всех точек области D эту функцию можно представить в виде:

(2) $y_k = \Phi(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)$, где $\Phi(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)$ — дифференцируемая функция своих аргументов.

Равенство (2) надо понимать так: если мы вместо $y_1, \dots, y_m$ подставим функции (1), то получим тождество, справедливое для всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из области D,

$$f_k(x) \equiv \Phi(f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), \dots, f_m(x))$$

В данном определении существенно то, что функция Φ зависит только от $y_1, \dots, y_m$ (кроме y_k) и не зависит от $x_1, \dots, x_n$.

Опр. 2. Функции (1) называются зависимыми в области D, если одна из них (всё равно какая) зависит от остальных функций. В противном случае функции называются независимыми.

Пример 1.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_3 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 \end{cases}$$

Эти функции зависимы в любой области $D \subset \mathbb{R}^4$, поскольку для любой точки (x_1, x_2, x_3, x_4) выполняется равенство

$$y_3 = \underbrace{\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)}_{\Phi(x_1, x_2)}$$

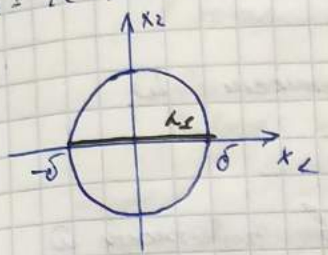
Пример 2.

Докажем, что функции $y_1 = x_1 + x_2$ и $y_2 = x_1 x_2$ являются линейно независимыми в любой окрестности точки $M_0(0;0)$

От противного

Пусть y_1 и y_2 линейно зависимые, тогда или $y_1 = \Phi_1(y_2)$, или $y_2 = \Phi_2(y_1)$

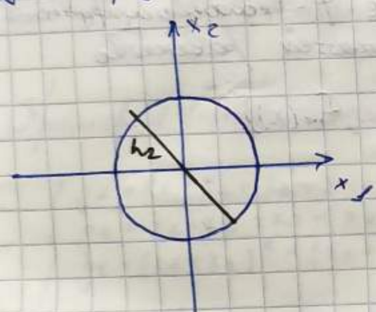
Допустим, что $y_1 = \Phi_1(y_2)$. Возьмём окрестность точки $M_0(0;0)$. Рассмотрим в этой окрестности отрезок L_1, лежащий на оси OX_1, т.е. $L_1 = \{(x_1, x_2): x_2 = 0, x_1 \in [-\delta; \delta]\}$



На L_1: $y_1 = x_1$, $y_2 = 0$ (3) $\Rightarrow x_1 = \Phi_1(0) = const$ (т.к. $y_1 = \Phi_1(y_2)$)

Получили, что на отрезке L_1, $x_1 = const$, но это не так, т.к. на этом отрезке координата x_1 не является постоянной, а изменяется от $-\delta$ до δ. Противоречие, значит y_1 не может быть функцией от y_2.

Пусть теперь (4) $y_2 = \Phi_2(y_1)$, т.е. $x_1 x_2 = \Phi_2(x_1 + x_2)$, тогда мы рассмотрим другой отрезок L_2 (биссектриса II и IV координатных углов)



L_2: $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$, $y_2 = -x_1^2$ и следовательно, $-x_1^2 = \Phi_2(0) = const$, но это не так, т.к. на этом отрезке координата x_1 изменяется.

<u>Вывод:</u> данные функции независимы в любой окрестности точки $M_0(0;0)$.

<u>12.2</u>. Достаточное условие независимости функций.

$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$ (1) $(n \geq m)$

$\downarrow$

число аргументов больше числа функций.

Введём матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

, функциональная матрица $m \times n$.

Выберем какие-нибудь m столбцов со строками матрицы A; рождают минор m-го порядка — это якобиан

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})} \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть:

1) функции (1) определены и дифференцируемы в окрестности ω точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$

2) какой-нибудь якобиан вида (5)

$$\left.\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})}\right|_{M_0} \neq 0$$

Тогда, функции (1) независимы в окрестности ω.

Док-во (от противного):

Предположим, что функции (1) зависимы в окрестности ω.

Тогда, одна из них, например, $y_k = F_k(x_1, \dots, x_n)$ зависит в ω от остальных функций, т. е.

$y_k = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)$, где Φ - дифференцируемая функция, т.е. для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in \omega$ выполняется равенство

$$F_k(x) = \Phi(F_1(x), \dots, F_{k-1}(x), F_{k+1}(x), \dots, F_m(x))$$

Пусть для определенности якобиан

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \neq 0 \text{ в точке } M_0$$

По правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k-1}}\cdot\frac{\partial F_{k-1}}{x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k+1}}\cdot\frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial F_m}{\partial x_m}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_m} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k-1}}\cdot\frac{\partial F_{k-1}}{\partial x_m} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k+1}}\cdot\frac{\partial F_{k+1}}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial F_m}{\partial x_m}$$

Эти равенства показывают, что k-я строка якобиана $\frac{D(F_1, \dots F_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}$ является линейной комбинацией остальных строк с коэффициентами $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial \Phi}{\partial y_{k+1}}, \dots \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}$ (св-во определителя).

Следовательно, этот якобиан равен нулю во всех точках окрестности ω, в том числе и в точке M_0.

Но это противоречит условию теоремы, и значит функции (1) независимы в ω, ч.т.д.

Следствие: Если функции (1) в некоторой области, то все миноры m-го порядка матрицы A тождественно равны нулю.

Теорема 2. (общая теорема о зависимости и независимости ф-ий)

~Пусть:

1) функции $f_1, \dots, f_m$ дифференц. в окрестности ω точки $M_0(x_1^0, \dots x_n^0)$

2) Все $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ непрерывны в точке M_0.

3) имеется минор r-го порядка матрицы A, отличный от нуля в точке M_0.

4) все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы A тождественно равны нулю в окрестности ω точки M_0.

Тогда:

1) r функций, представленных в указанном в условии 3 миноре r-го порядка, независимых в ω;

2) каждая из остальных $(m-r)$ функций зависит от указанных в предыдущем пункте r функций в некоторой окрестности ω_1 точки M_0 $(\omega_1 < \omega)$ (~без док-ва)

Пример 1. (продолжение).

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_3 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 \end{cases}$$

Составим для этих ф-ий матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} & \frac{\partial y_3}{\partial x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2(x_1+x_3) & 2(x_2+x_4) & 2(x_1+x_3) & 2(x_2+x_4) \end{pmatrix}$$

Минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, образованный пересечением первых двух строк и первых двух столбцов матрицы A, отличен от нуля в любой точке, т.к.

$$M_2 = -2 \neq 0$$

Все миноры третьего порядка в матрице A тождественно равны нулю.

Например:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2(x_1+x_3) & 2(x_2+x_4) & 2(x_1+x_3) \end{vmatrix} = 0$$

одинаковые столбцы.

=> По теореме 2 получаем, что y_1 и y_2 независимы в любой области, а функция y_3 зависит от y_1 и y_2.

§13. Условный экстремум.

Мы познакомились с понятием „локальный экстремум" - его обычно называют безусловный экстремум.

Задача об условном экстремуме функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - это задача нахождения точек локального экстремума данной функции при условии что её аргумент $x_1, x_2, \dots, x_n$ не являются независимыми переменными, а связаны между собой некоторыми равенствами (условиями связи).

Пример 1.
Найти экстремум $\underbrace{u = x+y}_{f(x,y)}$, при условии $\underbrace{xy-1}_{F(x,y)}=0$

У функции $u = x+y$ безусловного экстремума нет (почему?)

Выразим из условия связи $y = \frac{1}{x}$. Подставим в формулу для ф-ции

$\underbrace{u = x + \frac{1}{x}}_{g(x)}$; $u' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

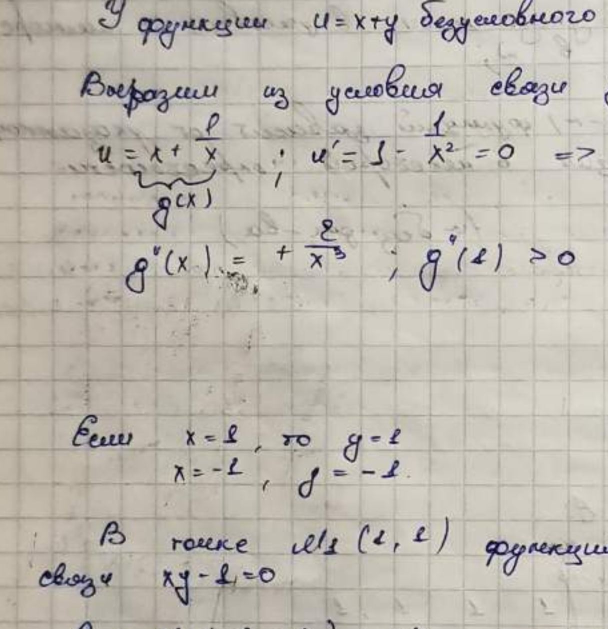
$g''(x) = +\frac{2}{x^3}$; $g''(1) > 0$; $g''(-1) < 0$, значит в точке

$x = 1$ $g(x)$ имеет минимум
$x = -1$ $g(x)$ —//— максимум.

Если $x = 1$, то $y = 1$
$x = -1$, $y = -1$.

В точке $M_1(1, 1)$ функция $u = x+y$ имеет минимум при условии связи $xy - 1 = 0$

В т. $M_2(-1, -1)$ —//— максимум.



Линиями уровня ф-ии $u = x+y$. (т.е. линиями на плоскости xOy, на которых функция имеет постоянное значение), являются прямые $x + y = C$ (const), а условия связи является ур-ем гиперболы.

На этом рисунке изображены линии уровня для нескольких значений C.

Если мы рассматриваем значение ф-ии на ветви гиперболы, лежащей в I-м квадранте, то в окрестности точки M_1 у функции значение больше двух \.

Наглядно видно, что значение функции в точке M_1 наименьшее по отношению к другим точкам гиперболы, находящейся в первом квадранте.

Аналогично получается, что в точке $M_2(-1,-1)$ функция $u = x+y$ имеет наибольшее значение по отношению к другим точкам гиперболы из окрестности точки M_2.

Общая постановка задачи об условном экстремуме.

Рас-м функцию $u = f(x_1, ..., x_n) = f(M)$ (1)

при условии, что её аргументы связаны между собой m соотношениями (условиями связи), $m < n$.

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1,...,x_n)=0 \\ \dots \\ F_m(x_1,...,x_n)=0 \end{array}\right\} \text{ - условия связи } \quad (2)$$

Пусть координаты точки $M_0(x_1^0, ..., x_n^0)$ удовлетворяют условиям (2).

<u>Опр. 1.</u> ~ Говорят, что функция (1) имеет в точке M_0 условный <u>максимум (минимум)</u> при условиях связи (2), если существует окрестность точки M_0 такая, что для любой точки $M(x_1,...,x_n)$ $(M \neq M_0)$ этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям (2) выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$ $(f(M) > f(M_0))$

Иначе говоря условный минимум (максимум) - это наименьшее (наибольшее) значение функции в точке M_0 по отношению не ко всем точкам из некоторой окрестности точки M_0, а только к тем из них, которые связаны между собой условиями связи.

Два метода решения задач об условном экстремуме.

<u>Первый</u>: Сведение к задаче о безусловном экстремуме.

Пусть для системы (2) в окрестности ω точки $M_0(x_1^0, ..., x_n^0)$ выполнены условия теоремы 1 (§11) о неявных функциях:

1) функции $F_1(x_1,...,x_n), ..., F_m(x_1,...,x_n)$ диффер-мы. в окрестности ω точки M_0;

2) $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ $(i,j = \overline{1,m})$ непрерывны в точке M_0; (3)

3) $F_1(M_0) = 0, ..., F_m(M_0) = 0$, $\left.\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(x_1,...,x_m)}\right|_{M_0} \neq 0$

~ тогда в некотором параллелепипеде Q, содержащемся в ω, система уравнений (2) имеет единственное решение относительно $x_1, ..., x_m$:

$$x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, ..., x_n), \ ..., \ x_m = \varphi_m(x_{m+1}, ..., x_n) \quad (4)$$

причём $\varphi_1, ..., \varphi_m$ - дифференцируемые функции и справедливы равенства:

$$\varphi_1(x^0_{m+1}, \dots, x^0_n) = x^0_1, \dots, \varphi_m(x^0_{m+1}, \dots, x^0_n) = x^0_m$$

В указанном параллелепипеде Q условия связи (2) эквивалентны соотношениям (4), в которых $x_{m+1}, \dots, x_n$ можно рассматривать как независимые переменные, а $x_1, \dots, x_m$ являются функциями этих независимых переменных.

Если удаётся найти функции (4) в явном виде, то, подставляя их вместо $x_1, \dots, x_m$ в формулу (1), получаем:

$$u = f(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) =$$

$$= g(x_{m+1}, \dots, x_n) = g(M') \quad (5),$$ где обозначили

$$M' = M'(x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Ф-ия $g(x_{m+1}, \dots, x_n)$ является функцией $n-m$ независимых переменных $x_{m+1}, \dots, x_n$. Если эта функция имеет безусловный экстремум в точке $M_0'(x^0_{m+1}, \dots, x^0_n)$, то функция $f(M)$ имеет в точке $M_0(x^0_1, \dots, x^0_n)$ условный экстремум при условиях связи (2) (или что тоже самое, при условиях связи (4))

Таким образом, задача об условном экстремуме функции $f(M)$ при условиях связи (2) сводится в параллелепипеде Q к задаче о безусловном экстремуме ф-ии $g(M')$. Именно такой подход был использован в примере 1 этого параграфа.

Как известно, представить неявные ф-ии в явном виде удаётся не всегда, и если их не удаётся найти, но они существуют (т.е. условия (3) выполнены), то оказывается, что есть метод, позволяющий (не зная явных выражений для неявных ф-ий) находить точки условного экстремума. Этот метод называется методом Лагранжа.

Второй: Метод Лагранжа.

В этом методе не будут использоваться явные выражения для неявных ф-ий (4), хотя по-прежнему будем считать, что условия (3) выполнены и поэтому, в параллелепипеде Q с центром в точке $M_0(x^0_1, \dots, x^0_n)$ уравнения (2) опр-ют единственную совокупность неявных функций вида (4.)

Введём, так называемую, функцию Лагранжа:

$$L(M) = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + \dots + \lambda_m F_m(M),$$ где

$f(M)$ - функция (1), $F_1(M), \dots, F_m(M)$ - функции из (2), а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ - пока неизвестные числа (множители Лагранжа)

Заметим, что в точках:

$M(\varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n),x_{m+1},\dots,x_n)$,

удовлетворяющих условиям связи (2), выполняются равенства

$L(M) = f(M) = g(M')$, где $M' = M'(x_{m+1},\dots,x_n)$; $g(M')$ — функция из (5)

Итак,

$$y(x_{m+1},\dots,x_n) = L(\varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n),x_{m+1},\dots,x_n) \quad (6)$$

Выведем при условиях (3) НЕОБХОДИМОЕ (по Лагранжу) условие условного экстремума функции $f(M)$ в точке M_0 при условиях связи (2).

Пусть функция $f(M)$ (а значит и функция $L(M)$) дифф-ма в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1,\dots,\overset{\circ}{x}_n)$ и пусть $f(M)$ (и $L(M)$) имеет в точке M_0 условный экстремум при условии связи (2). Тогда ф-я $g(M')$ имеет безусловный экстремум в точке

$$M_0'(\overset{\circ}{x}_{m+1},\dots,\overset{\circ}{x}_n), \text{ поэтому}$$

$$dg|_{M_0'} = 0$$

Это равенство в силу (6) можно переписать в виде

$$dg|_{M_0'} = \frac{\partial L}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_m}(M_0)dx_m + \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(M_0)dx_{m+1} +$$

$$+\dots+\frac{\partial L}{\partial x_n}(M_0)dx_n = 0 \quad (7)$$

где $dx_{m+1},\dots,dx_n$ — диф-лы независимых переменных $x_{m+1},\dots,x_n$, и $dx_1,\dots,dx_m$ — дифф-лы функций (4) в точке M_0 ($dx_i = d\varphi_i|_{M_0}$, $i=\overline{1,m}$)

Докажем, что числа $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ можно выбрать так, что будут выполнены равенства

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(M_0)=0,\ \dots,\ \frac{\partial L}{\partial x_m}(M_0)=0 \quad (8)$$

Напишем равенство (8) в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(M_0)+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_1}(M_0)=0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_m}(M_0)+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_m}(M_0)=0 \end{cases}$$

Написанные равенства представляют собой систему m линейных уравнений относительно $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, и определитель этой системы является транспонированным по отношению к якобиану $\left.\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(x_1,\dots,x_m)}\right|_{M_0}$, отличному от нуля в силу (3)

Если определитель системы $\neq 0$, то система имеет ед. решение. Следовательно, из этой системы однозначно определяются $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

В силу (8) равенство (*) принимает вид:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(M_0)\,dx_{m+1}+\ldots+\frac{\partial L}{\partial x_n}(M_0)\,dx_n=0 \qquad (9),$$

а т.к. $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ – дифф-лы независимых переменных, то из (9) следуют равенства:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(M_0)=0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(M_0)=0 \qquad (10)$$

В самом деле, если положить в (9) $dx_{m+1}\neq 0$, $dx_{m+2}=\ldots=dx_n=0$ (такой выбор возможен, т.к. $x_{m+1}, \ldots, x_n$ независимые переменные, то получим $\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(M_0)=0$ и аналогичным образом получаются равенства в (10))

Проведённые рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему, связанную с равенствами (8) и (10).

Теорема 1. (необходимое по Лагранжу условие условного экстремума)

Если $f(M)$ дифф-ма в точке M_0 и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи (2), и если выполнены условия (8), то существует ф-я Лагранжа:

$L = f + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m F_m$, которая удовлетворяет в точке M_0 условиям (8) и (10), т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(M_0)=0, \quad \forall\, i=\overline{1,n} \qquad (11)$$

Алгоритм отыскания точек условного экстремума:

① Составляем ф-ю Лагранжа:

$L = f(x_1,\ldots,x_n) + \lambda_1 F_1(x_1,\ldots,x_n) + \ldots + \lambda_m F_m(x_1,\ldots,x_n)$ и рассмотр. систему ур-ий, используя равенства (2) и (11):

$$\underbrace{F_1=0, \ldots, F_m=0}_{m \text{ урав-ий}}, \quad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_1}=0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n}=0}_{n \text{ ур-ий}} \qquad (12)$$

(12) - система $(m+n)$ ур-ий относительно $m+n$ неизвестных $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть (12) имеет решение $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, x_1^0, \ldots, x_n^0$, тогда для ф-ии Лагранжа $L = f+\lambda_1^0 F_1+\ldots+\lambda_m^0 F_m$ выполнены равенства (11) в точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$

$\frac{\partial h}{\partial x_i}(M_0)=0, \ \forall i=\overline{1,n}$, т.е. в силу теоремы 1.

– это означает, что точка M_0 является точкой возможного условного экстремума ф-ии $f(M)$ при условии связи (2).

Чтобы опр-ть имеет ли ф-я (1) в точке M_0 условный экстремум, воспользуемся тем, что вопрос об условном экстремуме ф-ии $f(M)$ в точке M_0 эквивалентен вопросу о безусловном экстремуме ф-ии $g(M')$ в точке $M_0'(x^0_{m+1}, \dots, x^0_n)$

В свою очередь, чтобы установить, имеет ли ф-я $g(M')$ безусловный экстремум в точке M_0', нужно рассмотреть второй диф-л ф-ии $g(M')$ в точке M_0'

$$d^2 g|_{M_0'} = Q(dx_{m+1}, \dots, dx_n)$$

квадратичная форма

Если квадратичная форма Q знакоопр-ая, то ф-я $g(M')$ имеет в точке M_0' экстремум, а значит ф-я $f(M)$ имеет в точке M_0 условный экстремум при условии связи (2).

Если же эта квадратичная форма знакопеременная, то условного экстремума ф-ии $f(M)$ в точке M_0 нет.

Это и есть ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ наличия или отсутствия условного экстремума ф-ии $f(M)$ в точке M_0 при условии связи (2).

Вычисление квадратичной формы $Q(dx_{m+1}, \dots, dx_n)$

Как вычислить квадратичную форму $Q(dx_{m+1}, \dots, dx_n)$, т.е. как найти её коэф-ты, если нам не известны явные выражения ф-ий (4), хотя сами функции существуют в силу условий (3).

Из (6) следует, что первый дифференциал функции $g(M')$ можно записать в виде:

$$dg|_{M'} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right) h|_{M(\varphi_1, \dots, \varphi_m, x_{m+1}, \dots x_n)},$$ здесь

$dx_{m+1}, \dots, dx_n$ – диф-лы независимых переменных, а $dx_1, \dots, dx_m$ – диф-лы функций (4) в точке $M'(x_{m+1}, \dots, x_n)$:

$$dx_i = d\varphi_i|_{M'}, \quad i=\overline{1,m} \quad (13)$$

В точке $M_0'(x^0_{m+1}, \dots, x^0_n)$ второй дифф-л $d^2 g|_{M_0'}$ имеет вид:

$$d^2 g\big|_{M_0'} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 h\big|_{M_0} + \underline{\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(M_0)\,d^2x_1+\ldots+\frac{\partial h}{\partial x_m}(M_0)\,d^2x_m\right)}$$

В силу (11) каждое слагаемое в подчёркнутой скобке $(\underline{\ \ })$ равно нулю, значит

$$d^2 g\big|_{M_0'} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 h\big|_{M_0} \quad (14),$$ где

$dx_i,\ i=\overline{1,m}$ выражаются формулой (13) при $M'=M_0'$

Таким образом, для нахождения $d^2g|_{M_0'}$ (т.е. для вычисления квадратичной формы) нужно вычислить второй дифф-л ф-ии Лагранжа $h(M)$ в точке M_0, причём, так как если бы все аргументы $x_1,\ldots,x_n$ были независимыми переменными, а затем заменить $dx_1,\ldots,dx_m$ дифференциалами неявных функций (4) в точке M_0'.

В свою очередь, чтобы найти дифф-лы $d\varphi_1,\ldots,d\varphi_m$ функций (4) в точке M_0', не используя явных выражений для этих функций (у нас их просто нет!) поступают следующим образом:

- В ф-ю (2) вместо $x_1,\ldots,x_m$ подставим функции (4). Тогда получим тождества относительно $x_{m+1},\ldots,x_n$:

$$F_1(\varphi_1,\ldots,\varphi_m,x_{m+1},\ldots,x_n)=0,\ \ldots,\ F_m(\varphi_1,\ldots,\varphi_m,x_{m+1},\ldots,x_n)=0$$

- Продифференцируем эти тождества в точке M_0' и, используя инвариантность формы первого дифф-ла, приходим к равенствам

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(M_0)\,d\varphi_1\big|_{M_0'}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial x_m}(M_0)\,d\varphi_m\big|_{M_0'}+\frac{\partial F_1}{\partial x_{m+1}}(M_0)\,dx_{m+1}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial x_n}(M_0)\,dx_n \\ \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(M_0)\,d\varphi_1\big|_{M_0'}+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial x_m}(M_0)\,d\varphi_m\big|_{M_0'}+\frac{\partial F_m}{\partial x_{m+1}}(M_0)\,dx_{m+1}+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial x_n}(M_0)\,dx_n \end{cases} \quad (15)$$

Эти равенства представляют собой систему m линейных ур-ий относительно дифф-лов $d\varphi_1|_{M_0'},\ldots,d\varphi_m|_{M_0'}$, причём определитель системы равен якобиану $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(x_1,\ldots,x_m)}\Big|_{M_0}$, отличному от нуля в силу (3).

Следовательно, из этой системы однозначно находятся искомые дифф-лы $d\varphi_i|_{M_0'}$ $(i=\overline{1,m})$ как ф-ии от $dx_{m+1},\ldots,dx_n$.

- Подставим выражения для $d\varphi_i|_{M_0'}$ вместо dx_i $(i=\overline{1,m})$ в формулу (14), получим искомую квадратичную форму.

$$d^2g\big|_{M_0'} = Q(dx_{m+1},\ldots,dx_n) \quad (16)$$

Пример 1. (продолжение, 2 способ)

Найти экстремумы ф-ии $x+y$ при условии связи $xy-1=0$

Запишем ф-ю Лагранжа:

$$L = x+y+\lambda(xy-1)$$

Составим систему (12), которая в данном примере:

$$\begin{cases} F_1 = xy-1=0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 1+\lambda y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1+\lambda x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1.$$

Система имеет два решения:

$$(1, 1, -1) \text{ и } (-1, -1, 1)$$

Таким образом, имеем две точки возможного условного экстремума:

$M_1(1;1)$, при этом $L = x+y-(xy-1)$

$M_2(-1,-1)$, при этом $L = x+y+(xy-1)$.

Далее, вычислим второй дифф-л ф-ии Лагранжа причём так, как будто x и y были независимыми переменными.

Для M_1 получаем: $dL = dx+dy-y\,dx-x\,dy$.

$$d^2L = -2dx\,dy.$$

Выразим теперь dy через dx, используя условие связи $F_1 = xy-1=0$.

Система ур-ий (15) в данном примере состоит из одного уравнения:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(M_1)\,dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}(M_1)\,dy = 0, \text{ т.е.}$$

$$dx+dy=0, \text{ откуда } dy = -dx$$

Подставляя это выражение для dy в равенство $d^2L = -2dx\,dy$, находим квадратичную форму Q из (18).

$$d^2y\,|_{x=1} = Q(dx) = 2(dx^2) > 0 \quad (\text{т.к. } dx \neq 0)$$

$Q(dx)$ - положительно опр-ая квадратичная форма, то в точке $M_1(1;1)$ ф-я $u=x+y$ имеет условный минимум $u(M_1)=2$ при условии связи $xy-1=0$.

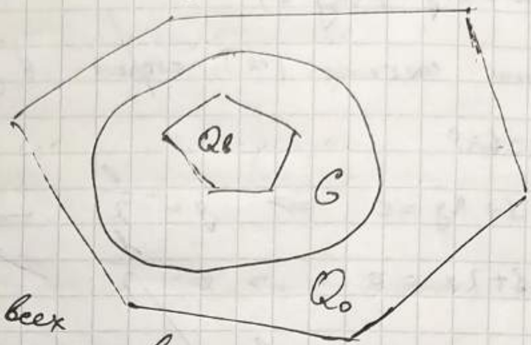
Аналогично доказывается, что в точке $M_2(-1;-1)$ ф-я $u=x+y$ имеет условный максимум $Q(M_2)=-2$ при условии связи $xy-1=0$.

II. Кратные интегралы.

§1. Площадь плоской фигуры.

Рас-м ограниченную плоскую фигуру G. Многоугольник $Q_в$ будем называть вписанным в фигуру G, а многоугольник $Q_о$ описанным около фигуры G, если

$Q_в \subset G \subset Q_о$



Через $P_в$ и $P_о$ обозначим площади впис. и опис. многоуг.

Очевидно, что $P_в \le P_о$.

Пусть $\{P_в\}$ – мн-во площадей всех вписанных в фигуру G многоугольников.

Оно ограничено сверху (площадью любого опис. многоугольника) и, следовательно, существует $\sup\{P_в\}$, который обозначим $\underline{P}$

Если в фигуру G нельзя вписать ни одного многоугольника, то полож. $\underline{P} = 0$.

Аналогично мн-во $\{P_о\}$ площадей всевозможных описанных многоугольников ограничено снизу (например, числом нуль) и, следовательно, существует $\inf\{P_о\}$, который обозначим $\overline{P}$.

Числа $\underline{P}$ и $\overline{P}$ называются нижней и верхней площадью фигуры G.

Отметим, что $\underline{P} > \overline{P}$

Док-во (от противного)

Значит, что $\exists P_в$ и $P_о$:

$P_о < P_в$ (что невозможно)
(см. рис. 1)

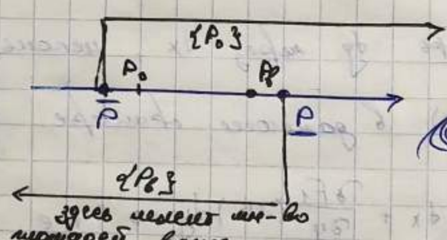


Рис. 1

Таким образом, $\forall Q_в$ и $Q_о$: $P_в \le \underline{P} \le \overline{P} \le P_о$ (1)

Опр. 1. Плоская фигура G называется квадрируемой, если $\underline{P} = \overline{P}$.
При этом число $P = \underline{P} = \overline{P}$ называется площадью фигуры G (по Жордану).

Примеры:

① Всякий многоугольник является квадрируемой фигурой в смысле опр. 1. и его площадь по Жордану равна площади, введённой в элементарной геометрии.

② Пример неквадрируемой фигуры:

$G = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x,y$ - рацион. числа $\}$

Т.к. $\underline{P}=0$, $\overline{P}=1$ и $\underline{P} \ne \overline{P}$, поэтому фигура G не квадрируемая.

Теорема 1. (необходимое и достаточное условие квадрируемости фигуры)

– Для того, чтобы G была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Q_в$ и $Q_о$, для которых $P_о - P_в < \varepsilon$

Док-во:

Необходимость. → Пусть G - квадрируемая фигура, т.е. $\underline{P} = \overline{P} = P$.

Согласно опр-ю точных граней числового мн-ва:
$\forall \varepsilon > 0$ найдутся такие вписанный и описанный многоугольники, площади которых удовлетворяют неравенствам

$$\underline{P} - P_в < \frac{\varepsilon}{2}, \quad P_о - \overline{P} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Складывая эти неравенства, получаем

$P_о - P_в < \varepsilon$ и тем самым, необходимость доказана.

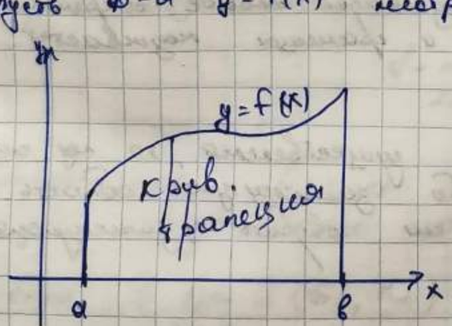
Достаточность: Пусть $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Q_в$ и $Q_о$: $P_о - P_в < \varepsilon$.

Из (1) следует, что $0 \le \overline{P} - \underline{P} < \varepsilon$ => в силу произвольности ε следует, что

$$\overline{P} - \underline{P} = 0, \text{ т.е. } \overline{P} = \underline{P}$$

Теперь докажем квадрируемость криволинейной трапеции.

Пусть ф-я $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a, b]$

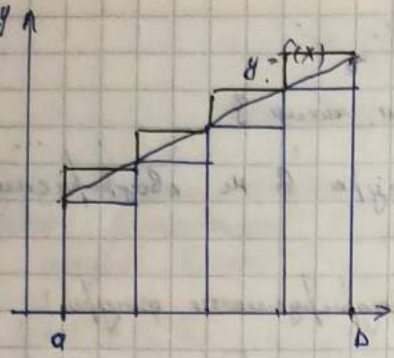


– Фигура, огр. графиком $y = f(x)$, отрезками $x = a$ и $x = b$ оси x и $y = f(x) \in [a, b]$ называется крив. трапецией.

Теорема 2. – Криволинейная трапеция квадрируема и её площадь P выражается формулой:

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Док-во:



Т.к. ф-я $y = f(x)$ непр. на $[a, b]$, то она интегрируема на этом сегменте.

Поэтому, $\forall \varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение отрезка $[a, b]$, для которого

$\delta - s < \varepsilon$, где δ и s - верхняя и нижняя суммы этого разбиения.

Пусть δ - площадь описанного около криволинейной трапеции ступенчатого многоугольника ($S = P_0$), а s - площадь вписанного ступенчатого многоугольника ($s = P_в$.)

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ существуют такие впис. и опис. многоугольники для которых $P_0 - P_в < \varepsilon$.

Следовательно, по теореме 1 криволинейная трапеция квадрируемая.

Пусть её площадь равна P. Тогда, для любых 4 - $Q_в$ и Q_0 выполняются неравенства $P_в \le P \le P_0$, в частности, $s \le P \le \delta$.

Перейдём в этих неравенствах к пределу при $\Delta \to 0$ (макс. длина частичного сегмента разбиения отрезка $[a, b]$),

т.к. $\lim\limits_{\Delta \to 0} s = \lim\limits_{\Delta \to 0} \delta = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (лемма Дарбу),

то $P = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ ч.т.д.

§2. Двойные интегралы.

Областью (открытой областью) обычно называют любое открытое связное мн-во в $\mathbb{R}^n$. Объединение области и границы называется замкнутой областью.

В дальнейшем, если замкнутость не существенна, то под словом область будем понимать либо открытую, либо замкнутую область. Если же замкнутость существенна, то будем говорить „замкнутая область".

Введём понятие диаметра мн-ва.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$
ограниченное мн-во точек.

Рассм-м при $n=2$.

Пусть M_1 и M_2 - две произвольные точки из G

Числовое мн-во $\{\rho(M_1, M_2)\}$ ограничено сверху и, следовательно, имеет точную верхнюю грань.

Число $d = \sup\limits_{\substack{M_1 \in G \\ M_2 \in G}} \{\rho(M_1, M_2)\}$ называется ДИАМЕТРОМ МН-ВА G.

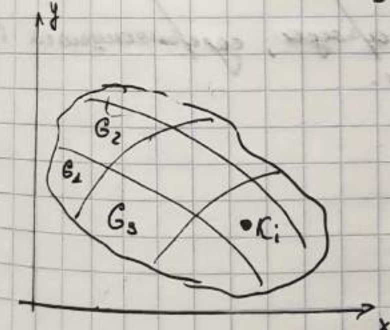
Примеры диаметров:

- диаметр прямоугольника — диагональ 
- диаметр эллипса равен его большей оси 

Пусть G - квадрируемая фигура (а значит и ограниченная) на плоскости xOy и пусть в области G опр-на огранич. ф-я $z = f(x,y) = f(K)$, где $K = (x,y)$

Разобьём область G на n квадрируемых частей G_i : $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$, так, что любые 2 части G_i и G_j не имеют общих внутр. точек; в каждой части G_i возьмём произвольным образом точку $K_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму:

$$I = (G_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(K_i) P(G_i), \text{ где } P(G_i) - \text{площадь } G_i$$



Число $I(G_i, K_i)$ называется ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММОЙ ф-ии $f(x,y)$, соответствующей данному разбиению области G и данному выбору промежуточных точек K_i.

Введём обозначение: d_i - диаметр G_i

$$d = \max_{1 \le i \le n} d_i$$

Определение предела интегральных сумм при $d \to 0$ вводится так же, как для определённого интеграла.

Если $\exists \lim\limits_{d \to 0} I(G_i, K_i) = I$, то число I называется ДВОЙНЫМ ИНТЕГРАЛОМ от ф-ии $f(x,y)$ по области G и обозначается так:

$$I = \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \quad \left(\text{иногда так } \int\limits_G f(K)\,dS\right)$$

2.1. Геометрический смысл двойного интеграла.

Если $f(x,y)$, $(x,y) \in G$ – непрерывная неотрицательная функция, $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ – объём тела, изображённого на рис. 2.

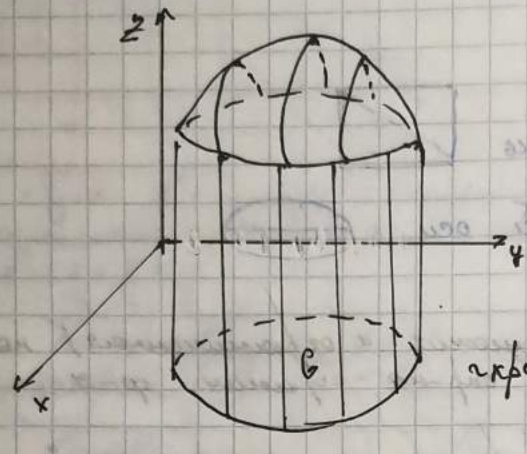


рис. 2.

Если $f(x,y)=1$, то любая интегральная сумма такой функции равна

$$\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot P(G_i) = P(G) \text{ – площадь области}$$

G и поэтому $\iint\limits_G dx\,dy = P(G)$

криволинейный цилиндр

Многие физические величины выражаются через двойные интегралы.

Например, если $\rho(x,y)$ – плотность эл-го заряда в области G, то

$\iint\limits_G \rho(x,y)\,dx\,dy$ – величина заряда, содержащегося в этой области.

Для двойных интегралов можно развить такую же теорию, как для определённых интегралов.

Для произвольного разбиения $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ введём верхнюю и нижнюю суммы Дарбу ф-ии $f(x,y)$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i P(G_i), \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i P(G_i), \text{ где}$$

$$M_i = \sup_{G_i} f(x,y), \quad m_i = \inf_{G_i} f(x,y),$$

$P(G_i)$ – площадь G_i.

Суммы Дарбу обладают такими же св-вами, как и в случае определённого интеграла, в частности существуют

$$\underline{I} = \sup\{s\}, \quad \overline{I} = \inf\{S\}$$

нижний и верхний интегралы Дарбу.

S – верхняя сумма Дарбу, s – нижняя сумма Дарбу.

Можно показать, что $\underline{I} \le \overline{I}$, $\lim_{d \to 0} s = \underline{I}$, $\lim_{d \to 0} S = \overline{I}$, где

$d = \max_{1 \le i \le n} d_i$, d_i – диаметр G_i (лемма Дарбу)

Сформулируем несколько теорем.

Теорема 1. (Необходимое и достаточное условие интегрируемости ф-ии)

~ Для того чтобы, ограниченная в квадрируемой области G ф-я была интегрируемой в этой области необходимо и достаточно, чтобы

$$\underline{I} = \overline{I}.$$

При этом, $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \underline{I} = \overline{I}$ ~ без док-ва

Теорема 2.

~ Для того чтобы ограниченная в квадрируемой области G функция $f(x,y)$ была интегрируемой в этой области, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовало разбиение области G, у которого $S - s < \varepsilon$

~ без док-ва

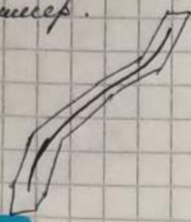
Теорема 3.

~ Если ф-я $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой квадрируемой, то она интегрируема в этой области.

~ без док-ва

Опр. 1. Говорят, что мн-во G — множество площади нуль, если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное число многоугольников, имеющих суммарную площадь, меньшую ε и содержащих все точки мн-ва G.

Пример.



Кривую можно ограничить многоугольником, имеющим площадь, меньшую, чем ε.

Теорема 4. Для того чтобы ограниченная в замкнутой квадрируемой области ф-я была интегрируема в этой области достаточно, чтобы мн-во её точек разрыва было множеством площади нуль

— без док-ва

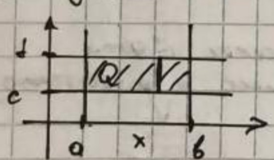
Теоремы 1-4 доказываются по аналогии с док-вом теорем для определённого интеграла.

! Двойные интегралы обладают такими же свойствами, что и определённые интегралы.

§3. Вычисление двойных интегралов с помощью повторного интегрирования.

2 случая:

1 случай: Пусть $F(x,y)$ определена в
$Q = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$



Теорема 5. Пусть: ① $\forall x \in [a,b]\ \exists \int_c^d f(x,y)\,dy = I(x)$

② $\exists \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$.

Тогда, $\exists \int_a^b I(x)\,dx$ (он называется повторным) и записывается так:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy, \text{ т.е.}$$

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b dx \underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{I_x} = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy, \text{ т.е.}$$

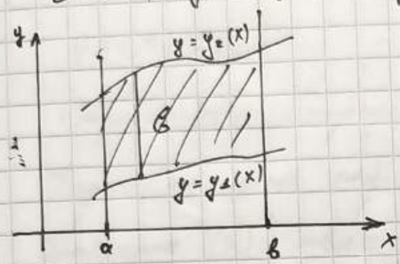
двойной интеграл равен повторному.

Замечание! Поменяв в условиях теоремы 5 местами x и y, получим равенство:

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

2 случай:

$$G = \{(x,y): y_1(x) \le y \le y_2(x),\ a \le x \le b\}$$



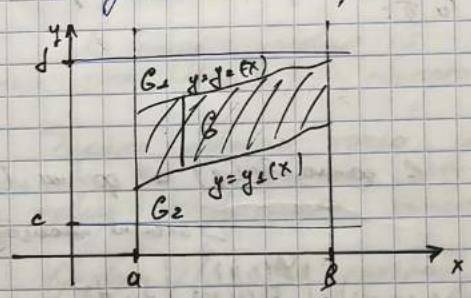
Теорема 6 Пусть: ① $\forall x \in [a,b]\ \exists \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = I(x)$

② $\exists \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$,

Тогда, $\exists \int_a^b dx \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy}_{I(x)} = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy.$

Доказательство:

Для д-ва этой теоремы сделаем следующее:



проведём $y=c$ не выше $y=y_1(x)$, а $y=d$ не ниже $y=y_2(x)$, т.е.

$$c \le y_1(x) \le y_2(x) \le d$$

$$Q = \{(x,y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

но $f(x,y)$ не определена ниже $y=y_1(x)$ и выше $y=y_2(x)$.

Доопределим функцию $f(x,y)$ так:

Пусть $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in G \\ 0, & (x,y) \notin G \end{cases}$

Для функции $F(x,y)$ в прямоугольнике Q выполнены все условия теоремы 5 и, следовательно, справедлива формула

$$\iint_Q F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)\,dy.$$

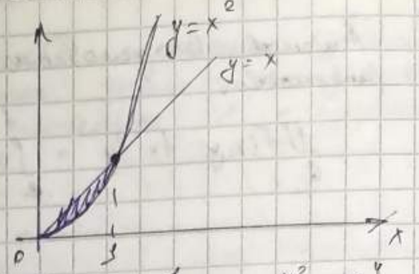
Эта формула с учётом того, что $F(x,y)$ равна 0 вне области G переходит в формулу

$$\boxed{\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.}$$

Пример:

$G = \{(x,y) : 0 \le x \le 1;\ x^2 \le y \le x\}$.

$f(x,y) = xy$.



$$\iint_G xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy\,dy = \int_0^1 x\,dx \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{x} = \int_0^1 x\,dx\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3 - x^5)\,dx = \frac{1}{24}.$$

Вычислить в другом порядке:

$I =$.

§4. Замена переменных в двойном интеграле.

Вспомним определённый интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$ — ф-ла замены переменной в определённом интеграле.

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy \quad (*)$$ Перейдём от переменных (x,y) в интеграле $*$ к новым переменным u и v:

$$x = \varphi(u,v),\quad y = \psi(u,v) \qquad \underline{(1)} \qquad (u,v) \in g.$$

При некоторых условиях на область G ф-ю $f(x,y)$ и ф-ии (1) имеет место формула:

— элемент площади.

(2) $$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_g f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv$$

— коэф. растяжения.

— формула замены переменной в двойном интеграле.

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$$ — якобиан функций (1) по u и v.

Пусть (1) удовлетворяют условиям:

I. Если (u,v) пробегают область g, то точка $(x,y) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ пробегает область G, причём различным точкам (u,v) из области g соотв-т различные точки (x,y) из области G.

В таком случае говорят, что функции (1) взаимно однозначное отображение области g на область G. Область g является прообразом G, а G - образом области g при отображении (1).

II. Функции $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка.

III. Якобиан $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0$

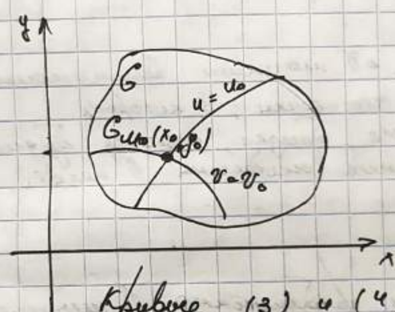
$\forall (u,v) \in g$.

Зафиксируем переменную u, положив $u = u_0 = const$.

Тогда, из ур-ий (1) получим $x = \varphi(u_0, v)$, $y = \psi(u_0, v)$.

Уравнения (3) являются параметрическими уравнениями кривой лежащей в области G (роль параметра играет v).

Аналогично, положив $v = v_0 = const$, получим параметрическое уравнение другой кривой, лежащей в области G.



$$x = \varphi(u, v_0)$$
$$y = \psi(u, v_0) \qquad (4)$$

u - параметр.

Кривые (3) и (4) пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$

В силу условия I точка $M_0(x_0, y_0)$ соответствует только одной точке (u_0, v_0) из области g.

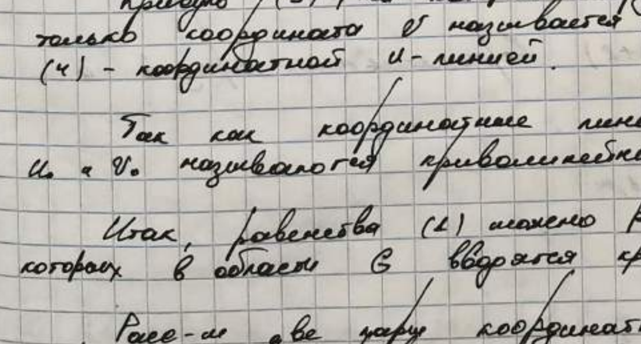
Таким образом, точка M_0 однозначно определяется парой чисел (u_0, v_0) и, значит, эту пару чисел можно рассматривать как новые координаты точки M_0.

Кривую (3), на которой координата u постоянна, а меняется только координата v называется координатной v-линией, а кривая (4) - координатной u-линией.

Так как координатные линии, вообще говоря, кривые, то числа u_0 и v_0 называются криволинейными координатами точки M_0.

Итак, равенства (1) можно рассматривать как формулы, посредством которых в области G вводятся криволинейные координаты точек.

Рас-м две пары координатных линий в области G. Они ограничивают криволинейный четырёхугольник Q.



Вычислим приближённо площадь четырёхугольника Q, заменив его параллелограммом, построенным на векторах $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$

$$\vec{e_1} = \{ \varphi(u+\Delta u, v) - \varphi(u,v);\ \psi(u+\Delta u, v) - \psi(u,v) \} \ominus$$

аргумент v не меняется, применим формулу конечных приращений Лагранжа

$$\ominus \{ \varphi'_u \cdot \Delta u;\ \psi'_u \Delta u \}.$$

Аналогично,

$\vec{e_2} = \{ \varphi'_v \cdot \Delta v;\ \psi'_v \cdot \Delta v \}$, где производные $\varphi'_u, \psi'_u, \varphi'_v, \psi'_v$ берутся в некоторых промежуточных точках.

Рассм-м такой четырёхугольник, у которого $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$

площадь четыр.

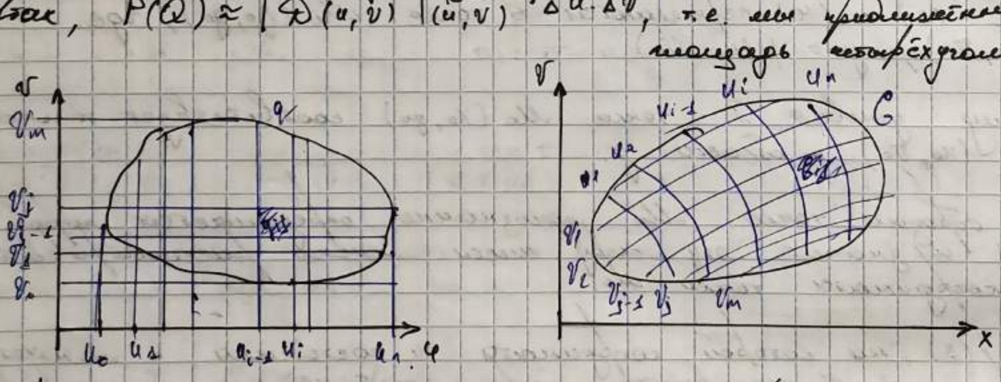
$$P(Q) \approx |[\vec{e_1}; \vec{e_2}]| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi'_u \Delta u & \psi'_u \Delta u & 0 \\ \varphi'_v \Delta v & \psi'_v \Delta v & 0 \end{vmatrix} \right| = \left| -\vec{k} \left(\varphi'_u \Delta u\, \psi'_v \Delta v - \varphi'_v \Delta v \cdot \psi'_u \Delta u \right) \right| =$$

$$= \Big| \underbrace{(\varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \cdot \psi'_u)}_{''} \Delta u \Delta v \Big|$$

$$\approx \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \Big|_{(\tilde{u}, \tilde{v})}$$

мы считаем $\Delta u, \Delta v$ малыми величинами и предполагаем, что точки, в которых берутся производные, близки, поэтому будем рассм-ть значение якобиана в некот. точке $(\tilde{u}, \tilde{v})$

Итак, $P(Q) \approx \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right|_{(\tilde{u}, \tilde{v})} \cdot \Delta u \cdot \Delta v$, т.е. мы приближённо вычислили площадь четырёхугольника.



Проведём на плоскости (u,v) $(n+1)$ вертикальных отрезков и $(m+1)$ горизонтальных отрезков.

— объединение

$$g = \bigcup_{i,j} g_{ij}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}$$

$$G = \bigcup_{i,j} G_{ij}$$

Когда мы будем измельчать разбиение, части, примыкающие к границе, не являющиеся прямоугольниками, будут становиться сколь угодно маленькими.

Сложность в доказательстве формулы (2) состоит в том, что нужно аккуратно расписать области, примыкающие к границе.
Но мы ограничимся нестрогими рассуждениями.

Каждая область g_{ij} переходит в G_{ij}.

Для площади G_{ij} можем применить только что выведенную формулу:

$$P(G_{ij}) \approx \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right|_{(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j)} \Delta u_i \Delta v_j$$

$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1} \ ; \quad \Delta v_j = v_j - v_{j-1}.$$

Составим интегральную сумму I для функции $f(x,y)$ для полученного разбиения области G.

$$I(G_{ij}, K_{ij}) \ominus$$

(5) $K_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$, $x_{ij} = \varphi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)$, $y_{ij} = \psi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)$

$$\ominus \sum_{i,j} F(K_{ij}) \cdot P(G_{ij}) \approx \sum_{i,j} F(\varphi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j), \psi(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)) \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right|_{(\tilde{u}_i; \tilde{v}_i)} \Delta u_i \cdot \Delta v_j$$

Сумма, стоящая в правой части равенства (5) является интегральной суммой для ф-ии $F(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right|$, соответствующей разбиению области G на частичные области g_{ij}.

($\Delta u_i \cdot \Delta v_j$ - площадь прямоугольника).

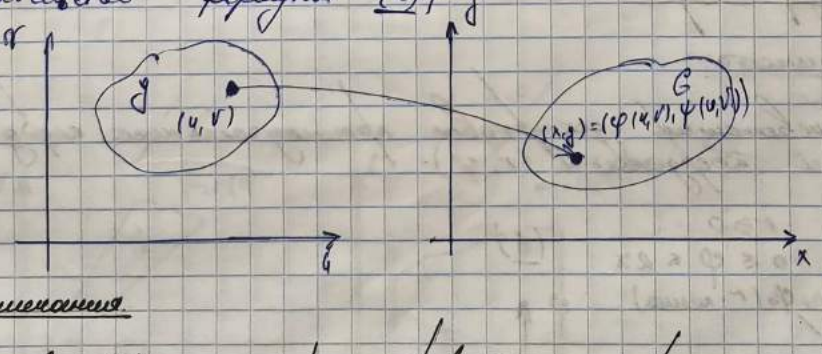
Пусть $f(x,y)$ непрерывная и пусть g и G замкнутые области. Перейдём в (5) к пределу при $d_g \to 0$ ($d = \max d_{ij}$, d_{ij} - диаметр g_{ij}), при этом размеры каждой соответствующей области G_{ij} тоже стремятся к нулю (т.е. $d_G \to 0$)

По определению двойного интеграла, предел левой части рав-ва (5) равен

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy, \text{ а предел правой части}$$

$$\iint_g F(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\,dv,$$

что и доказывает формулу (2). (Это нестрогое качественное доказательство формулы (2))



Замечания.

① Равенства (1) можно рассматривать как формулы, задающие отображение области g на плоскости (u,v) на область G на плоскости (x,y).

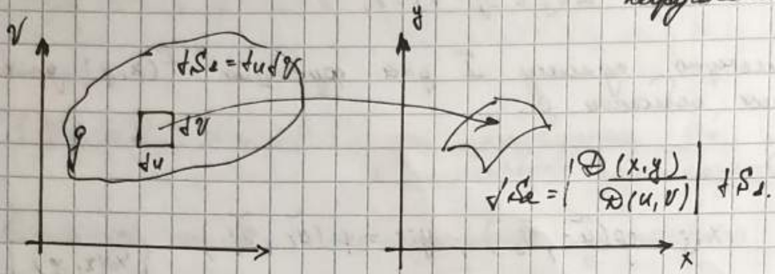
Область g - прообраз области G, область G - образ области g при отображении (1)

② При $f(x,y) = 1$ из формулы (2) следует:

$$\iint_G dx\,dy = P(G) = \iint_g \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv$$ — формула площади области в криволинейных координатах.

Произведение $dx\,dy$ можно назвать элементом площади в декартовых прямоугольных координатах, а

$$dS = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv$$ — элемент площади в криволинейных координатах.



Геометрический смысл якобиана.

$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$ — модуль якобиана — коэффициент растяжения площади при отображении (1)

③ Если условия I или III нарушаются на мн-ве точек площади нуль (например в конечном числе точек или кривых), то формула (2) остается в силе.

④ Если область g — прямоугольник, а φ и ψ — линейные функции u и v:

$\varphi = a_{11} u + a_{12} v + b_1$,

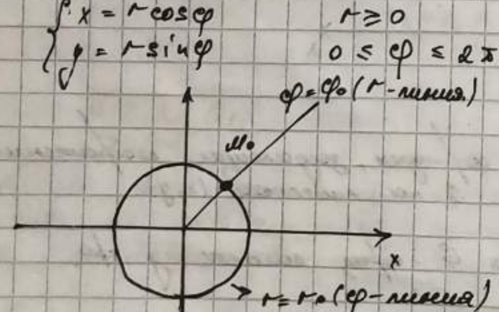
$\psi = a_{21} u + a_{22} v + b_2$, то проведённый вывод формулы (2) становится строгим (т.е. все приближённые рав-ва становятся точными)

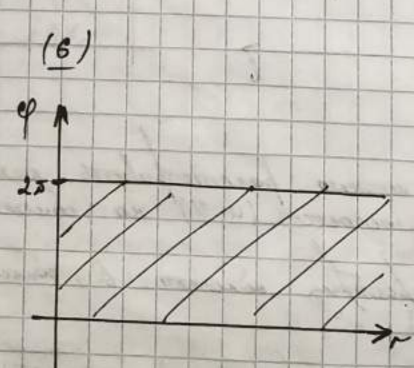
Примеры.

① Полярные координаты.

Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x, y) и полярные координаты (r, φ):

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \qquad (6)$$





Пара чисел (r_0, φ_0) - полярные координаты точки M_0.

С другой стороны, равенства (6) задают отображение заштрихованной полуплоскости на плоскости (r, φ) на всю плоскость (x, y).

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

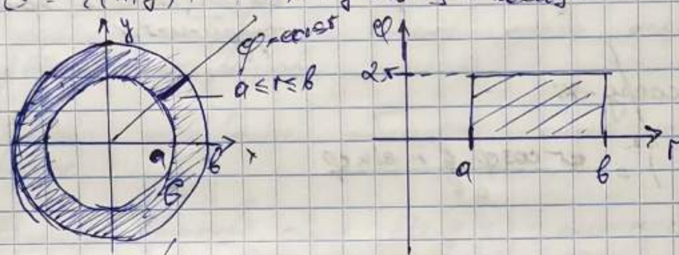
Якобиан равен нулю на отрезке $[r=0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi]$ - мн-во точек площади нуль, поэтому формулу (2) можно применять.

$dS = r\,dr\,d\varphi$ - элемент площади в полярных координатах

② Вычислить

$I = \iint_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где

$G = \{(x,y):\ a^2 \le x^2+y^2 \le b^2\}$ - кольцо



Замена переменных: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$(r, \varphi) \in g = \{(r,\varphi):\ a \le r \le b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ - прямоугольник.

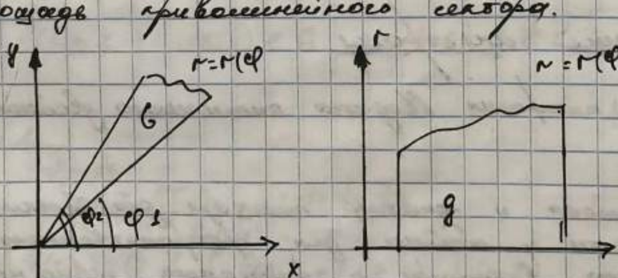
$I = \iint_g (r^2\cos^2\varphi + 2r^2\sin^2\varphi)\, r\,dr\,d\varphi = \int_a^b r^3\,dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos2\varphi}{2} + 2 \cdot \frac{1-\cos2\varphi}{2} \right) d\varphi =$ опечатка

$= \frac{1}{2} \int_a^b r^3\,dr \int_0^{2\pi} (1 + \cos2\varphi + 2 - 2\cos2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_a^b \int_0^{2\pi} (3 - \cos2\varphi)\,d\varphi =$

$= \frac{1}{8}(b^4 - a^4) \cdot \left(3\varphi - \frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{8}(b^4-a^4)(6\pi - 0 - (0-0)) =$

$= \frac{6\pi(b^4-a^4)}{8} = \frac{3\pi(b^4-a^4)}{4}$

③ Площадь криволинейного сектора.



Область G на плоскости (x, y) - криволинейный сектор. Её прообраз на плоскости (r, φ) - криволинейная трапеция g.

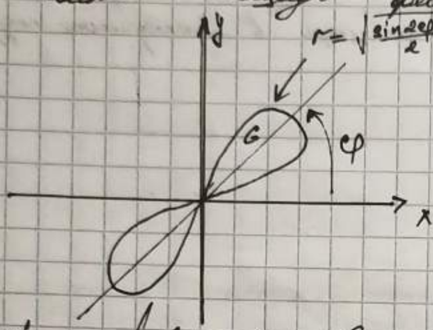
$$P(G) = \iint_G dx\,dy =$$

(сделали замену переменных $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$)

$$= \iint_g r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r\,dr = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^{r(\varphi)} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

~ вывод формулы площади криволинейного сектора с помощью двойного интеграла.

④ Найти площадь фигуры, ограниченной кривой:



$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{ab} \quad (a>0,\ b>0)$$

Замена переменных:

$x = a r\cos\varphi$
$y = b r\sin\varphi$ — обобщенные полярные координаты.

Ур-е кривой в новых коорд-х:

$$\left(\frac{a^2r^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2\varphi}{b^2}\right)^2 = \frac{ar\cos\varphi\, br\sin\varphi}{ab}$$

$$r=\sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & b\sin\varphi \\ -ar\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi = abr$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\right| = abr$$

$$P(G) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}} abr\,dr = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}} =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{1}{2}ab\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}ab(-1-1) = \frac{ab}{2}$$

§6. Тройные интегралы.

Тройные (а также n-кратные) интегралы вводятся аналогично двойным интегралам.

Аналогично понятию квадрируемости и понятию площади для плоских фигур, вводятся понятия кубируемости и объёма для пространственных фигур (на основе рассмотрения вписанных в фигуру и описанных около неё многогранников, для которых понятие объёма считаем известным из школьного курса геометрии)

Пусть в кубируемой области $G \subset \mathbb{R}^3$ задана ограниченная функция $u=f(x,y,z)=f(K)$, $K(x,y,z)$.

Разобьём область G на n кубируемых частей без общих внутр. точек у любых двух частей: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$, в каждой части G_i возьмём произвольным образом точку $K_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ и составим интегральную сумму

$$I(G_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \underbrace{V(G_i)}_{\text{объём } G_i}$$

Введём обозначения: d_i – диаметр G_i, $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$

Опр. 1.
$\lim\limits_{d \to 0} I(G_i, K_i)$ (если он $\exists$) наз-ся тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области G и обозначается

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{или} \quad \int_G f(K)\,dV$$

Для тройных интегралов имеют место теоремы, аналогичные теоремам 1-4 для двойных интегралов.

Тройные интегралы обладают теми же св-вами, как и двойные интегралы.

Физический пример: если $\rho(x,y,z)$ – плотность материального тела T в точке (x,y,z), то

$$\iiint_T \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = m \text{ – масса тела } T$$

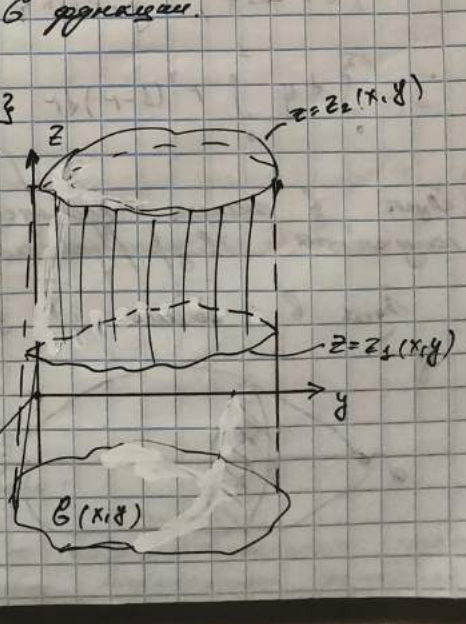
5.1. Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования.

Тройной интеграл можно свести к вычислению сначала двойного, а потом определённого или наоборот.

1) Пусть G - квадрируемая область на плоскости (x,y)

$z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$ – непрерывные в области G функции.

$$T = \{(x,y,z) : (x,y) \in G,\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$$



Теорема 1.

Пусть:

1) $\exists \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

2) $\forall (x,y) \in G \ \exists \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz = I(x,y)$

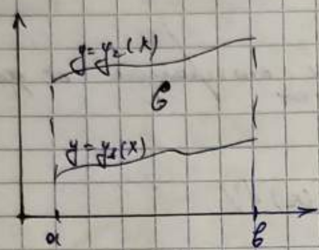
Тогда, $\exists \iint\limits_G I(x,y)\,dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ и

выполняется равенство:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_G dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Доказывается аналогично теореме 5

Следствие: Если для двойного интеграла $\iint_G I(x,y)\,dx\,dy$ выполнено условие теоремы 5', то его можно представить в виде повторного интеграла.



$$\iint_G I(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x,y)\,dy =$$

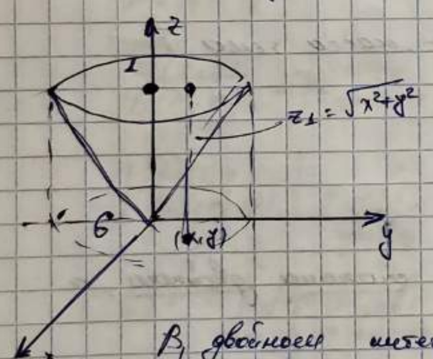
$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится в этом случае к трёхкратному вычислению опр-ых интегралов.

Пример 1.

Область T огр. поверхностями:

$S_1: z^2 = x^2+y^2$; $S_2: z = 1$. Вычислить $\iiint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$



$$I = \iint_G dx\,dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} (x^2+y^2)\,dz = \iint_G dx\,dy\,(x^2+y^2)\cdot z \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} =$$

$$= \iint_G (x^2+y^2)\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy.$$

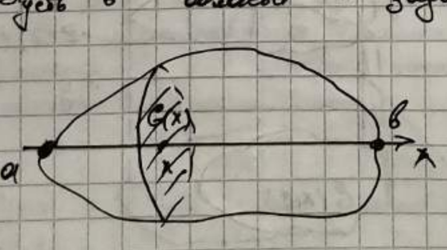
В двойном интеграле по области G перейдём к полярным координатам:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2(1-r)\,dr = \frac{\pi}{10}$$

а) Пусть в сечении кубируемой области T плоскостью $x = \mathrm{const}$ получается квадрируемая фигура $G(x)$, $a \le x \le b$.

Пусть в области T задана функция $F(x,y,z)$



Теорема 2. Пусть:

1) $\exists \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

2) $\forall x \in [a,b] \quad \exists \iint\limits_{G(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz$.

Тогда, $\exists \int\limits_a^b I(x)\,dx$ (он называется повторным и записывается в виде $\int\limits_a^b dx \iint\limits_{G(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz$) и выполняется равенство

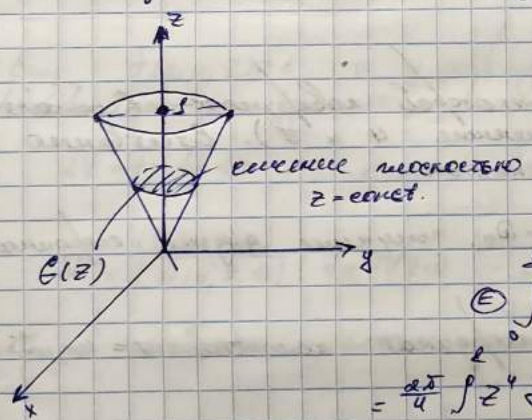
$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{G(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz,$$ т.е. тройной интеграл равен повторному.

Следствие: Если $f(x,y,z)=1$, то по данной формуле получаем:

$$\iiint\limits_T dx\,dy\,dz = \underbrace{V(T)}_{\text{объём тела}} = \int\limits_a^b dx \underbrace{\iint\limits_{G(x)} dy\,dz}_{P(x)} = \int\limits_a^b P(x)\,dx,$$ где $P(x)$ — площадь фигуры $G(x)$

Пример 2. (тот же интеграл, что в примере 1)

$$I = \iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dz \iint\limits_{G(z)} (x^2+y^2)\,dx\,dy \ominus$$



Во внутреннем интеграле перейдём к полярным координатам:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi; \quad 0 \le r \le z, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\ominus \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^z r^2 \cdot r\,dr = \int\limits_0^1 dz \cdot 2\pi \cdot \frac{z^4}{4}\Big|_0^z =$$

$$= \frac{2\pi}{4}\int\limits_0^1 z^4\,dz = \frac{\pi}{10}.$$

5.2. Замена переменных в тройном интеграле

Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Перейдём от переменных (x,y,z) к новым переменным (u,v,w) с помощью формул:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u,v,w) \\ y &= \psi(u,v,w) \\ z &= \chi(u,v,w) \end{aligned} \qquad (u,v,w) \in g \quad (1)$$

Пусть выполнены условия:

I. Если точка (u,v,w) пробегает область g, то соответствующая точка $(x,y,z) = (\varphi,\psi,\chi)$ пробегает область T, причём различным точкам

$(u, v, \omega) \in g$ соответ-ют различные точки $(x, y, z) \in \Gamma$ (другими словами, каждая точка (x, y, z) из области Γ соответствует только одной точке (u, v, ω) из области g)

II. Функции φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные первого порядка в области g.

III. $\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, \omega)} \neq 0 \quad \forall (u, v, \omega) \in g.$

Из условия I следует, что задание тройки чисел (u, v, ω) однозначно определяет точку $M(x, y, z) = M(\varphi, \psi, \chi)$ из области Γ.

Поэтому <u>тройку</u> чисел <u>(u, v, ω)</u> можно назвать новыми <u>криволинейными</u> <u>координатами</u> точки M.

Зафиксируем значение координаты u, положив $u = u_0 = const$.

Из уравнения (1) получим:

$$x = \varphi(u_0, v, \omega)$$
$$y = \psi(u_0, v, \omega)$$
$$z = \chi(u_0, v, \omega)$$

Эти ур-я являются параметрическими некоторой поверхности в области Γ (в качестве параметров выступают переменные u и v). Естественно назвать эту поверхность координатной поверхностью.

Аналогично, положив $v = v_0$ или $\omega = \omega_0$, получим другие координатные поверхности.

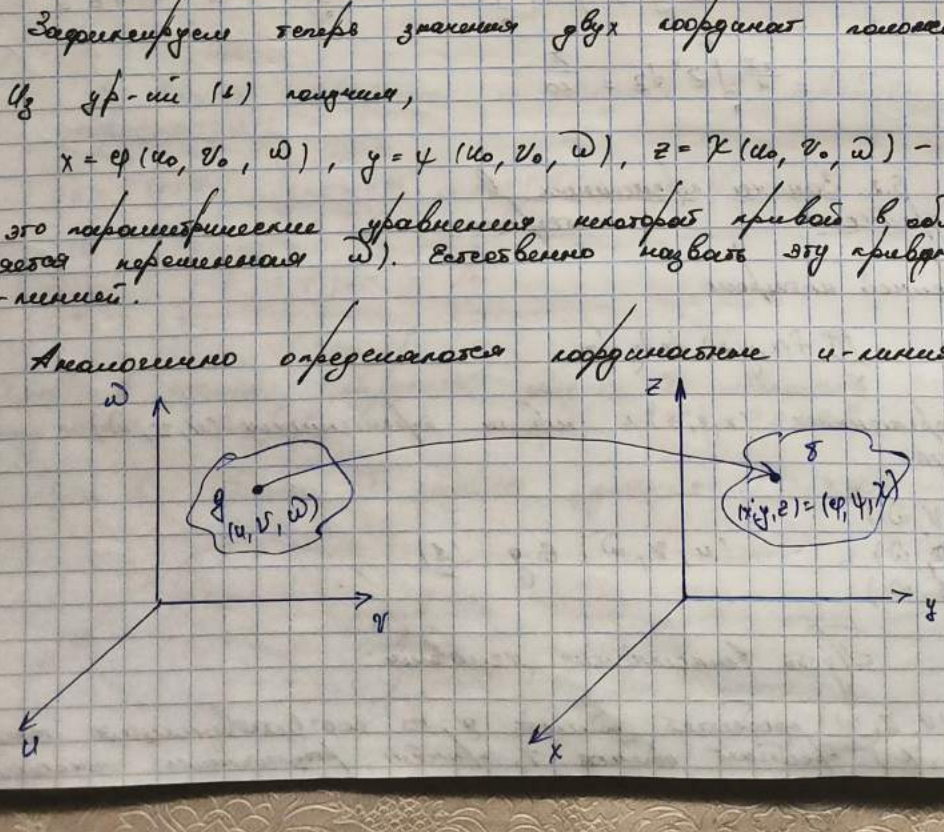
Зафиксируем теперь значения двух координат положив $u = u_0$, $v = v_0$.

Из ур-ий (1) получим,

$x = \varphi(u_0, v_0, \omega)$, $y = \psi(u_0, v_0, \omega)$, $z = \chi(u_0, v_0, \omega)$ –

это параметрические уравнения некоторой кривой в области Γ (параметром является переменная ω). Естественно назвать эту кривую координатной ω-линией.

Аналогично определяются координатные u-линия и v-линия.



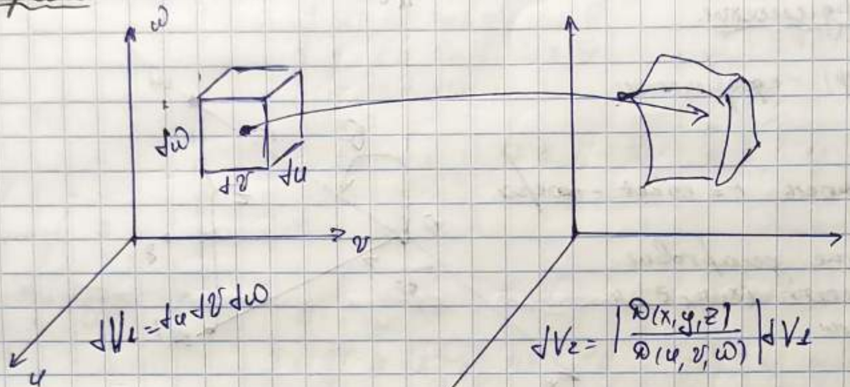
Формулы (1) можно рассматривать как отображение области g в пространстве переменных (u, v, w) на область T в пространстве переменных (x, y, z).

Пусть g и T замкнутые кубируемые области, а функция $F(x,y,z)$ ограничена в области T и непрерывна всюду в этой области, за исключением, быть может, мн-ва точек объема нуль.

Тогда справедлива формула:

$$(2) \quad \iiint_T F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_g F(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)) \cdot \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

Формула (2) называется формулой замены переменных в тройном интеграле.



Если $F(x,y,z)=1$, то у формулы (2) получаем выражение объема тела в криволинейных координатах.

$dV = dx\,dy\,dz$ — элемент объема в прямоугольных координатах.

$dV = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$ — элемент объема в криволинейных координатах.

Модуль якобиана — коэф-т растяжения объема при отображении (1).

Замечание: Понятие мн-ва точек объема нуль в пространстве вводится аналогично понятию мн-ва точек площади нуль на плоскости. Формула (2) остается в силе, если условия I или III нарушаются

5.3. Примеры наиболее важных криволинейных координат.

(1) Цилиндрические координаты

Тройка чисел (r, φ, z) называется цилиндрическими координатами точки M

Координатная поверхность $r = const$ — цилиндрическая поверхность.

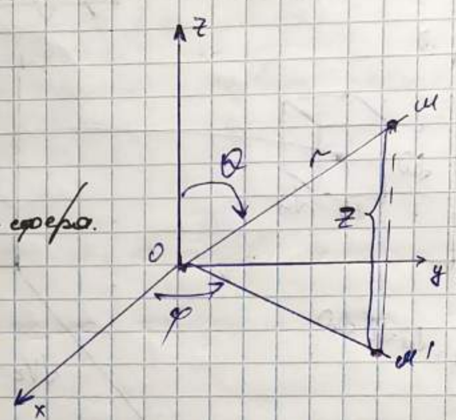
Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x,y,z) и цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad (r \ge 0,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ -\infty < z < +\infty)$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$$

$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$ - элемент объёма в цилиндрических координатах.

② Сферические координаты.



Тройка чисел (r, θ, φ) - сферические координаты точки M.

Координатная поверхность $r = const$ - сфера.

Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x, y, z) и сферические координаты

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta . \end{cases} \qquad (r \ge 0,\ \ 0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi)$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \text{по 3-му столбцу} =$$

$$= r^2\sin\theta\left(-\sin\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3} + \cos\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} (-1)^{2+3}\right) =$$

$$= r^2\sin\theta\left(-\sin\varphi\left(-\sin^2\theta\sin\varphi - \cos^2\theta\sin\varphi\right) + \cos\varphi\left(\sin^2\theta\cos\varphi + \cos^2\theta\cos\varphi\right)\right) =$$

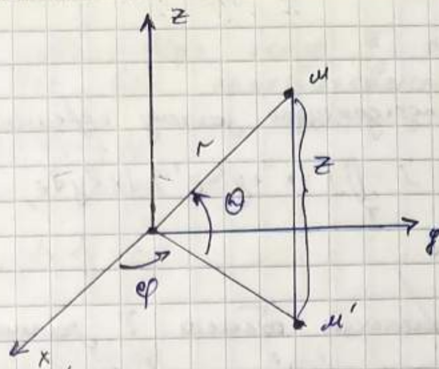
$$= r^2\sin\theta\left(-\sin\varphi(-\sin\varphi) + \cos\varphi\cdot\cos\varphi\right) = r^2\sin\theta$$

т.е. $$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$$

$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$ - элемент объёма в сферических координатах.

Замечание 1. Существует другой способ определения угла θ в сферич. коорд.: θ - угол отклонения радиус-вектора точки M от плоскости xOy. В этом случае θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а якобиан равен $I = \rho^2\cos\theta$ (вычисл. самост.)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$



Замечание 2. Если область T ограничена эллипсоидом, то вводят обобщённые сферические координаты.

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\cos\theta \\ y = br\sin\varphi\cos\theta \\ z = cr\sin\theta \end{cases} \qquad I = abcr^2\cos\theta$$

$$0 \le r \le 1;\quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],\quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Пример 9.

Переходя к цилиндр. коорд., вычислить интеграл

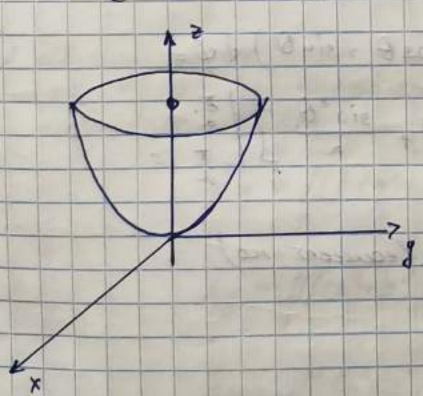
$$I = \iiint_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$ где T огранич. поверхностями:

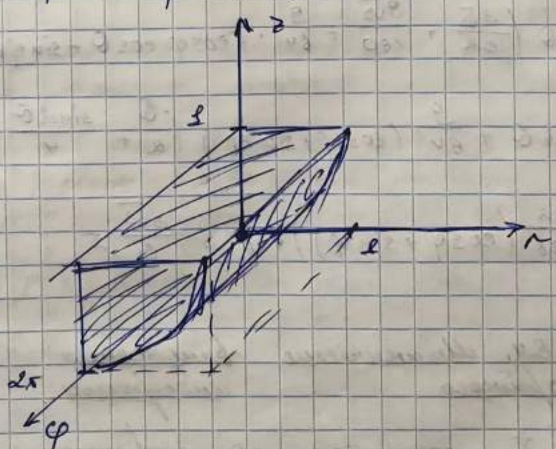
$S_1 - x^2+y^2=z$ – параболоид.

$S_2 = 1$.

Область T с помощью формул перехода отображается на область g пространства (r, φ, z)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad S_1: r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = z\ ;\ r^2 = z$$





$$I = \iiint_g z\cdot r\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\,dr \int_{r^2}^1 z\,dz = 2\pi\cdot\int_0^1 r^2\,dr\,\frac{z^2}{2}\Big|_{r^2}^1 =$$

$$= \frac{2\pi}{2}\int_0^1 r^2\,dr\,(1-r^4) = \pi\int_0^1 (r^2-r^6)\,dr = \pi\cdot\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^7}{7}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right) = \frac{4\pi}{21}.$$

Пример 4.

Выбрать подходящую замену переменных, вычислить интеграл

$I=\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, где T ограничена поверхностью $x^2+y^2+z^2=x+y+z$.

Уравнение границы области T запишем в виде:

$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$ – сфера радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2}$ с центром в точке $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

Сделаем замену переменных, используя сферические координаты:

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}=r\cos\varphi\cos\theta \\ y-\frac{1}{2}=r\sin\varphi\cos\theta \\ z-\frac{1}{2}=r\sin\theta \end{cases} \quad (*)$$

где $0\le\varphi\le 2\pi$; $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le r\le\frac{\sqrt{3}}{2}$, Якобиан $I=r^2\cos\theta$

Область T отображается с помощью формул перехода (*) в параллелепипед, поэтому

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\left(\tfrac{1}{2}+r\cos\varphi\cos\theta\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}+r\sin\varphi\cos\theta\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}+r\sin\theta\right)^2\right)r^2\cos\theta\,dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\left(\tfrac{3}{4}+r^2+r\cos\varphi\cos\theta+r\sin\varphi\cos\theta+r\sin\theta\right)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(\frac{3}{4}\frac{r^3}{3}+\frac{r^5}{5}+\frac{r^4}{4}\cos\varphi\cos\theta+\frac{r^4}{4}\sin\varphi\cos\theta+\frac{r^4}{4}\sin\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(\frac{3\sqrt{3}}{32}+\frac{9\sqrt{3}}{160}+\frac{9}{64}\cdot(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\cos\theta+\sin\theta)\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left[\frac{3\sqrt{3}}{20}\sin\theta+\frac{9}{64}(\cos\varphi+\sin\varphi)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)+\frac{\sin^2\theta}{2}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3\sqrt{3}}{20}+\frac{9\pi}{128}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)d\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi$$ (самост-но)

5.4. Механические приложения тройного интеграла.

① Объём V тела T находится по формуле:

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz.$$

② Масса тела T с объёмной плотностью $\rho(x,y,z)$ вычисляется по формуле:

$$m=\iiint \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

③ Статические моменты M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тела T относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz соответственно равны:

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_T y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_T x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

④ Координаты центра тяжести тела T с массой m опр-ся по формулам:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} \quad \text{или} \quad x_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho x\,dx\,dy\,dz$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{m} \qquad y_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho y\,dx\,dy\,dz$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} \qquad z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho z\,dx\,dy\,dz$$

⑤ Моменты инерции I_x, I_y, I_z относительно координатных плоскостей:

$$I_{xy} = \iiint\limits_T z^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_T y^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_T x^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

⑥ Моменты инерции I_x, I_y, I_z относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и полярный момент инерции I_0 относительно начала координат равны:

$$I_x = \iiint\limits_T (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_y = \iiint\limits_T (x^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_0 = \iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Для однородного тела $\rho(x,y,z) = const.$

Теория рядов.

§1. Числовые ряды. Основные понятия.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (1) – бесконечная последовательность чисел.

Опр. 1. Выражение (2) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется числовым рядом, а элементы последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – членами ряда.

Для обозначения ряда (2) применяют следующую запись:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n – общий член ряда.

Само по себе выражение (2) никакого определённого смысла не имеет, т.к. действие сложения определено только для конечного числа слагаемых.

Этот смысл выражению (2) предстоит приписать. Очевидно, это следует сделать так, чтобы „бесконечная сумма" (2), с одной стороны, была бы „похожа" на обычные суммы, а с другой – описывала бы на языке математического анализа реальные процессы.

Опр. 2. Сумма n первых членов ряда (2)

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называется n-й частичной суммой ряда:

$S_1 = a_1.$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3.$
$\ldots$
$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$

бесконечная последоват. $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

Опр. 3. Ряд (2) называется сходящимся, если последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ его частичных сумм имеет предел, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Значение S этого предела называется суммой ряда.

Опр. 4. Ряд (2) называется расходящимся, если последовательность частичных сумм предела не имеет.

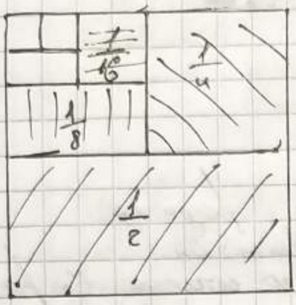
В этом случае сумма ряда или не $\exists$, или равна ∞.

Пример: Для ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \left(\frac{b_1}{1-q}(1-q^n) \text{ - геом. прогрессия}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится и его сумма равна 1.

Геометрическая иллюстрация:

1 

1

Площадь квадрата со стороной 1 равна 1. С другой стороны площадь квадрата можно попробовать вычислить следующим образом:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\ldots=1.$$

Геометрическая прогрессия (обобщение):

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^n + \ldots = b_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

$$S_n = b_1(1+q+\ldots+q^n) = \frac{b_1}{1-q}(1-q^n), \quad q \neq 1.$$

или

$$S_n = b_1(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ раз}}) = b_1 \cdot n, \quad q = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = b_1 \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} b_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-q^n}{1-q}, \; q^n \to 0, \text{ при } |q|<1 & = \dfrac{b_1}{1-q} \\ b_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-q^n}{1-q}, \; q^n \to \infty \text{ при } |q|>1 & = \infty \\ b_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-q^n}{1-q} \text{ не } \exists \text{ при } q=-1. & \\ b_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \text{ при } q = 1. & \end{cases}$$

Таким образом,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ – сходится при $|q|<1$.
расходится при $|q|\geq 1$.

Пример 2. Для ряда (арифм. прогрессия)

$$1+2+3+\ldots+n+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

$$S_n = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ расходится.

Пример 3. Для ряда

$$1-1+1-1+\ldots \quad S_{2k}=0, \text{ а } S_{2k+1}=1.$$

Последовательность $S_1=1$, $S_2=0$, $S_3=1$, $S_4=0, \ldots$, ограниченная, но предела не имеет.

Этот ряд расходится. Его называют колеблющимся.

0 и 1 в этом ряде встречается в последовательности частичных сумм бесконечное число раз, однако ни одно из этих чисел не является пределом этой последовательности и не может считаться суммой ряда.

1.2. Критерий Коши сходимости числового ряда.

Пусть дан ряд (2).

Опр. 5 Ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ называется n-м остатком ряда (2)

$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} + a_{n+m+1} + \dots = S_{n+m} - S_n$

Очевидно, что m-я частичная сумма n-го остатка r_n ряда равна разности $S_{n+m} - S_n$ частичных сумм ряда $S_{n+m} = S_n + (S_{n+m} - S_n)$

Переходя к пределу по m при $m \to \infty$, получаем:

$$\lim_{m\to\infty} S_{n+m} = S_n + \overbrace{\lim_{m\to\infty} (S_{n+m} - S_n)}^{= r_n} \qquad (3)$$

Предел слева - это сумма S исходного ряда, а предел справа - сумма r_n его n-го остатка.

Из существования предела в левой части равенства следует существование предела в правой части и наоборот.

Поэтому, если сходится один из остатков ряда, то сходится и сам ряд.

Также, из сходимости ряда следует сходимость каждого его остатка.

Из формулы (3) видно, что частичная сумма сходящегося ряда отличается от его суммы на величину суммы остатка. Поэтому, чем меньше сумма остатка ряда, тем точнее описывает соответствующая частичная сумма ряда сумму всего ряда.

Теорема 1. - Если ряд (2) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

Доказательство:

$S = S_n + r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Перейдём в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$.

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} S}_{= S} = \overbrace{\lim_{n\to\infty} S_n}^{= S (\text{для сходящ. ряда})} + \lim_{n\to\infty} r_n$$

поэтому

$$S = S + \lim_{n\to\infty} r_n \quad и \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

Теорема 2. (Критерий Коши сходимости числового ряда). – необх. и дост. условия

~ Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существовал номер $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n, m \in \mathbb{N}$ и всех $n > N(\varepsilon)$ имело место равенство:

$$|S_{n+m} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon$$

Утверждение теоремы равносильно критерию Коши сходимости последовательности S_n частичных сумм ряда, что согласно определению 3, и есть сходимость самого ряда.

Пример 4. Док-ть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Воспользуемся критерием Коши:

$$|S_{n+m} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+m-1)(n+m)} =$$

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)} + \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{n+m-(n+m-1)}{(n+m-1)(n+m)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n+m-1}} - \frac{1}{n+m} = \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{1}{n+m}}_{>0} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$, $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ $[x]$ - целая часть числа x - наиб. целое, не превосх. x.

Таким образом,

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \left(\exists N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right)\left(\forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon),\ \forall m \in \mathbb{N}\right): \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^2}\right| < \varepsilon$$

и следовательно, по критерию Коши ряд сходится.

Теорема 3. (Критерий Коши расходимости ряда.)

~ Для расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно $\varepsilon > 0$ с условием, что для $\forall N(\varepsilon) \geq 1$ найдутся натуральные $n > N(\varepsilon)$ и m, для которых справедливо неравенство:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| \geq \varepsilon.$$

Пример 5. Док-ть расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$|S_{n+m} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+m} =$$

т.к. $m \in \mathbb{N}$, то пусть $m = n$.

$m=n$

$\textcircled{=} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

(заменим каждое слагаемое меньшим числом $\frac{1}{2n}$)

Получаем, что $|S_{n+m} - S_n| \geq \frac{1}{2}$

Если положить $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и при $\forall N(\varepsilon) \geq 1$ в качестве n и m взять числа $m = n = N(\varepsilon)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется гармоническим рядом.

(гармонический ряд расходится)

Замечание 1.

Имеется тесная связь между теорией сходимости рядов и последовательностей.

Было установлено, что всякий ряд порождает последовательность частичных сумм, которая определяет его сходимость.

Имеет место и обратный результат: всякую последовательность можно рассматривать как последовательность частичных сумм некоторого ряда.

Действительно, если $\{b_n\}$ некоторая последовательность, то с ней можно связать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, полагая,

$a_1 = b_1$
$a_2 = b_2 - b_1$
$\ldots$
$a_{n+1} = b_{n+1} - b_n$
при $n \geq 1$.

1.3. Необходимое условие сходимости ряда.

~ Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Доказательство:

$a_n = S_n - S_{n-1}$.

т.к. ряд сходится $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0$

Другими словами, если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 6.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, но $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Замечание 2.

! Если общий член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 7.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^n}$ расходится, т.к.

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$

Пример 8.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ расходится, т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$

1.4. Свойства числовых рядов.

① Дистрибутивный закон для рядов:

Пусть (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – некоторый числовой ряд, а c – произвольное число отличное от нуля.

Тогда, ряд (3) $c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \ldots + c \cdot a_n + \ldots$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (2).

Если ряд (2) сходится и его сумма равна S, то сумма ряда (2) равна cS

Док-во:

Если послед-ть частных сумм ряда (2) есть $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, то очевидно будет $cS_1, cS_2, \ldots, cS_n, \ldots$ последовательность частичных сумм ряда (3).

Т.к. (4) $c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} cS_n$, то из существования предела слева (котор. означает сходимость ряда (2) при $c \neq 0$), следует сходимость ряда (3) и рав-во (4.)

Наоборот, из сущ-ия предела справа следует сущ-ие предела слева и р-во (4.)

② Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - два сходящихся ряда с суммами S' и S''.

Тогда, ряд (5) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ также сходится и его сумма равна $S'+S''$.

Док-во:

Для частичных сумм Z_n ряда (5) получаем:

$$Z_n = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)$$

Справа в скобках стоят частичные суммы S_n' и S_n''

При $n\to\infty$ получаем:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty}(S_n'+S_n'') = \lim_{n\to\infty} S_n' + \lim_{n\to\infty} S_n'' = S'+S'',$$ т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n+b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Доказанная теорема означает, что сходящиеся ряды можно почленно складывать и при этом складываются их суммы.

③ Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два сходящихся ряда с суммами S' и S'', а a и b — произвольные числа, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\cdot a_n + b b_n$ (6) сходится и его сумма равна $aS' + bS''$

Док-во:

Если $a=0$ или $b=0$, то теорема док-на (св-во ①)

Пусть теперь $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Тогда, по св-ву ① сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\cdot a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b\cdot b_n$, а по св-ву ② сходится ряд (6), причём его сумма равна $aS' + bS''$

Следствие 1. (теорема о вычитании рядов.)

— Если сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и имеют суммы S' и S'', то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ и его сумма равна $S' - S''$

Док-во следует из ③ при $a=1$, $b=-1$.

Следствие 2.

— Сумма или разность сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

Следствие 3.

— Разность двух расходящихся рядов может быть как сходящимся так и расходящимся рядом.

④ Если из ряда выбросить конечное число его членов, то его сходимость не нарушится; если исходный ряд сходящийся, то сумма полученного ряда будет меньше суммы первоначального ряда на сумму выброшенных членов ряда.

! Таким образом, для установления сходимости (или расходимости) ряда не обязательно учитывать всех его членов.

Достаточно ограничиться членами ряда, начиная с некоторого номера n. Для ряда важно поведение его членов при $n \to \infty$

§2. Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов достаточно рассмотреть ряды с положительными, точнее с неотрицательными членами (в целях общности, мы допускаем существование членов ряда, равных нулю).

Действительно, ряды с отрицательными, точнее с неположительными членами отличаются от соответствующих рядов с неотрицательными членами множителем (-1), и вследствие этого, такие ряды ведут себя одинаково относительно сходимости.

Теорема 1. – Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0 \ \forall n \in N)$ необходимо и достаточно, чтобы частичные суммы ряда были ограничены.

Док-во: Необходимость.

Т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in R$, значит $\{S_n\}$ - ограничена.

Ограниченность частичных сумм ряда является необходимым условием сходимости любого ряда и в частности, и ряда с неотрицательными членами.

Достаточность.

Т.к. $a_n \geq 0$, то $\{S_n\}$ является неубывающей, т.е. $S_n \leq S_{n+1}$ при $\forall n \in N$.

Т.к. $\{S_n\}$ ограничена, то по теореме о монотонных ограниченных последовательностях, она сходится, т.е. сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами

– Пусть даны 2 ряда с неотрицательными членами (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Если $\forall n \in N$, $n > n_0$ выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство:

Обозначим через S_n' и S_n'' соответственно частичные суммы рядов (1) и (2).

Т.к. ряд (2) сходится, то его частичные суммы ограничены, т.е. $\forall n \in N$ $S_n'' < M$, где M - некоторое число.

Но $S_n' \leq S_n''$, поэтому частичные суммы ряда (1) тоже ограничены, поэтому ряд (1) сходится.

Если же ряд (1) расходится, то ряд (2) тоже расходится, т.к. допустив сходимость ряда (2), мы получим по только что доказанному утверждению сходимость ряда (1), а это противоречит условию. ч.т.д.

Пример 1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ расходится, т.к.

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \text{ а ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится}$$

Пример 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ сходится, т.к.

$$\sin\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ сходится

Пример 3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n}$ расходится, т.к.

$$\frac{1}{n} \le \frac{2+(-1)^n}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится.}$$

Пример 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ сходится, т.к.

$$\frac{1}{n\cdot 2^n} \le \frac{1}{2^n}, \text{ а } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ сходится}$$

Предельный признак сравнения

~ Пусть (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - два ряда с положительными членами.
Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ $(0<k<+\infty)$, то ряды ведут себя одинаково относительно сходимости, т.е. сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.

Т.к. $k>0$, то $\exists$ положительные числа k_1 и k_2 такие, что

$$k_1 < k < k_2.$$

Тогда, по определению предела последовательности $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство:

$$k_1 \le \frac{a_n}{b_n} \le k_2 \quad | \; b_n > 0$$

$$k b_n \le a_n \le b_n k_2$$

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k_2 b_n$, и следовательно, если учесть правое неравенство, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (по признаку сравнения.)

Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k_1 b_n$ расходится, и если учесть левое неравенство, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 6. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{n}{2}}$ исследовать на сходимость.

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^2-\frac{n}{2}}}{\frac{1}{n^2}} = 1 > 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{n}{2}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ведут себя одинаково.

Т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{n}{2}}$ сходится

Признак сравнения (в форме эквивалентных бесконечно малых или кратко эквивалентный признак сравнения)

Пусть (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Если $a_n \sim b_n$ при $n\to\infty$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство (самостоятельно, используя предельный признак сравнения.)

Пример 8. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ при $n\to\infty$, т.к.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\overbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}^{\to 0}\right)}{\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}} = 1.$ $(\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ при $\alpha\to 0)$

а т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится.

Пример 9.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ исследовать на сходимость.

$1-\cos\frac{1}{n} \sim \dfrac{\frac{1}{n^2}}{2}$, а т.к. $\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^2}$ сходится, то

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ сходится

Таблица эквивалентных беск. малых.
(при $\alpha\to 0$)

$\sin\alpha \sim \alpha$	$e^{\alpha}-1\sim\alpha$
$tg\,\alpha \sim \alpha$	$a^{\alpha}-1 \sim \frac{\alpha}{\ln a}$
$1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$	$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$
$\arcsin\alpha \sim \alpha$	$\log_a(1+\alpha)\sim\alpha\ln a.$
$arctg\,\alpha \sim \alpha$	$\sqrt[n]{1+\alpha}-1 \sim \frac{\alpha}{n}$

Интегральный признак сходимости Коши.

~ Пусть ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ и $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ (члены ряда не возрастают) и пусть $f(x)$ — функция, определённая для всех $x \geq 1$ непрерывная, не возрастает, и $f(n) = a_n$, т.е. $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, …, $f(n) = a_n$, …?

Тогда, для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

(без док-ва.

Пример 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ назыв. обобщ.-гармоническим рядом.

$p \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ исслед-ть на сходимость.

$f(x) = \frac{1}{x^p}$

При $x \geq 1$ $f(x) = \frac{1}{x^p} > 0$

$f'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}} \leq 0$ при $p \geq 0$, т.е. $f(x)$ при $p \geq 0$ не возрастает.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \begin{cases} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty & (p = 1) \\ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{\infty} \ominus \end{cases}$$

$$\ominus \begin{cases} \infty, \text{ если } p < 1 \\ \frac{1}{1-p} \text{ если } p > 1. \end{cases}$$

Таким образом, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Важно!

При использовании признаков сравнения исходный ряд $\sum_{n=1} a_n$ сопоставляется с одним из, так называемых эталонных рядов, сходимость или расходимость установлена.

> Геометрический ряд:
> $$\sum_{n=1}^{\infty} q^n : \begin{cases} |q| < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится} \\ |q| \geq 1 \Rightarrow \text{ряд расходится.} \end{cases}$$
>
> Обобщённый гармонический ряд:
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} : \begin{cases} p > 1 \Rightarrow \text{ряд сходится} \\ p \leq 1 \Rightarrow \text{ряд расходится.} \end{cases}$$

Пример 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+7}{(n^2+3)^2}$ исследовать на сходимость.

Сравним исходный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Используя предельный признак сравнения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(4n+7)}{(n^2+3)^2}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p(4n+7)}{(n^2+3)^2} = 4 \text{ число при } p=3.$$

(т.к. степень числителя и степень знаменателя при $p=3$ станут одинаковыми и при $n\to\infty$ данный предел будет равен отношению коэффициентов, стоящих при старших степенях, т.е. при n^4).

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится, значит $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+7}{(n^2+3)^2}$ сходится.

Замечание.

Достоинство интегрального признака сходимости Коши состоит в исключительно высокой его чувствительности. Этот признак чётко проводит различие между сходящимися и расходящимися рядами, даже если члены одного из них незначительно отличаются от членов другого.

Пример 10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ исследовать на сходимость.

• $\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{n}$ при $\forall \alpha > 0$

Действительно, применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\alpha n^{\alpha-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha n^\alpha} = 0 \quad \text{при } \alpha > 0.$$

Значит, начиная с некоторого номера n_0, $\forall n > n_0$: $\ln n < n^\alpha$,

Откуда следует левая часть неравенства •

Правое неравенство • очевидно

Однако, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ сходится при $\alpha > 0$

Что же касается ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, то его члены занимают промежуточное положение, и простыми сравнениями решить вопрос о его сходимости нельзя.

Воспользуемся интегральным признаком сходимости Коши.

Пусть $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ - монотонно убыв. ф-я при $x \geq 2$.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x \ln x)^2}(\ln x + 1) < 0$$

Интеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| \Big|_2^{\infty} = \infty.$

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ расходится значит ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится.

Радикальный признак сходимости ряда.

~ Если $\exists$ такое число $q<1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \le q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство:

Условие $\sqrt[n]{a_n} \le q$ при $q<1$ означает, что все члены ряда, кроме конечного их числа, не превосходят членов ряда сходящейся геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, и следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (по признаку сравнения).

Если $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, то $a_n \ge 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$ т.е. не выполнено необходимое условие сходимости ряда, поэтому ряд расходится.

Следствие (радикальный признак Коши в предельной форме).

~ Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ ряд расходится, при $q=1$ вопрос о сходимости ряда открыт и требуется доп. исследование.

Док-во:

Пусть $0<q<1$. $\to$ Тогда, для всех n, кроме конечного числа выполняется неравенство $a_n < q^n$ и следовательно, по признаку Коши, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $q>1$, то начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} > 1$ или $a^n > 1$, следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

При $q=1$ покажем, что ряд может как сходиться, так и расходиться.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} = 1.$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

Таким образом, при $q=1$ для установления сходимости или расходимости ряда нужны дополнительные исследования.

Пример 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$ сходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \frac{2}{3} < 1$$

Пример 12.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n}=1.$$

Вопрос открыт.

Воспользуемся необходимым условием сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq0,$$ поэтому $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ расходится.

Признак Даламбера.

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными членами, начиная с некоторого номера n_0 (т.е. $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0$), отношение $(n+1)$-го члена ряда к предыдущему $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не будет превосходить некоторого числа $q<1$, т.е. если

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1,$$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

Если же для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, начиная с некоторого номера n_0, отнош. $(n+1)$-го члена к предыдущему $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ будет не меньше 1, т.е. если $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

Док-во:

1. Сходимость.

Пусть $\forall n\geq n_0$ выполняется условие $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1$, то

$$a_{n+1}\leq q a_n$$
$$a_{n+2}\leq q a_{n+1}=q^2a_n$$
$$a_{n+3}\leq q^3a_n$$
$$\ldots$$

Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ вытекает из сходимости ряда геометрической прогрессии $a_n\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ со знаменателем $q<1$.

2. Расходимость.

Если $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq1$, то

$$a_{n+1}\geq a_n\geq a_{n-1}\geq\ldots\geq a_{n_0}>0$$

Тем самым, не выполнено необходимое условие сходимости ряда ($a_n\to0$ при $n\to\infty$), значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

Следствие (признак Даламбера в предельной форме)

– Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ (>1), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится)

– док-во сам-но.

Замечание 1.

Условие $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$ нельзя заменить условием $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Для гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ это условие выполнено $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, но ряд расходится.

Замечание 2:

Признак Даламбера в предельной форме не работает, когда

$$(*)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

В качестве примера рас-м ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, для которых ук-ое условие $(*)$ выполнено, но

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Пример 13.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{2^n}$$

Попробуем установить сходимость/расходимость ряда по признаку Даламбера.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1} + 2}{(-1)^n + 2} \cdot \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{если } k = 2t,\ t \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}, & \text{если } k = 2t+1,\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

полученные соотношения показывают, что признак Даламбера не работает.

Однако, по радикальному признаку Коши в предельной форме получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(-1)^n + 2}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left((-1)^n + 2\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$ – ряд сходится.

$$\left((-1)^n + 2\right)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 3^{\frac{1}{n}} & n \text{ – чётное} \\ 1^{\frac{1}{n}} & n \text{ – нечётное.} \end{cases}$$

При $n \to \infty$ $\quad 3^{\frac{1}{n}} \to 1$

$\qquad\qquad\qquad 1^{\frac{1}{n}} \to 1.$

Пример 14.

Рассм-м ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots$

В этом ряде:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n}, & \text{если } n \text{ чётное} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{если } n \text{ нечётное} \end{cases}$$

Здесь очевидно, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{при чётном } n \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{при нечётном } n. \end{cases}$

Отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ то больше 1, то меньше, поэтому признак Даламбера здесь не применим.

Вместе с тем, признак Коши даёт следующее:

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}, & \text{если } n \text{ чётное} \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}, & \text{если } n \text{ нечётное} \end{cases}$$

и тем самым указывает на сходимость ряда.

Последние 2 примера показывают, что всё-таки признак Коши даёт ответ на вопрос о сходимости в тех случаях, когда признак Даламбера не работает.

Пример 15.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left((n+1)!\right)^2 \cdot (2n)!}{(2(n+1))! \cdot (n!)^2} = \frac{(n+1)^2 \cancel{(n!)^2} \cdot \cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)(2n+2)\cancel{(n!)^2}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

По признаку Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} < 1$ → ряд сходится.

Замечание к примеру 15.

Признак Даламбера удобно применять, когда выражение для общего члена ряда содержит факториалы или последовательные произведения различных чисел.

Признак Раабе.

~ Если при достаточно больших n (или $\forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}$) выполняется неравенство

$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если же

$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

(без док-ва).

Признак Раабе в предельной форме.

~ Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q > 1$ (<1), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. (расходится.)

Пример 18.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n-1)!!\,(2n+3)\,(2n+2)!!}{(2n)!!\,(2n+1)\,(2n+1)!!} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(4n^2+10n+6-(2n+1)^2\right)}{(2n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(6n-1)}{(2n+1)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1$$

⇒ ряд сходится по признаку Раабе

Признак Гаусса.

~ Допустим, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ выражение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ может быть представлено в виде $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, где.

λ, μ - постоянные, а θ_n - огранич. величина $|\theta_n| \le C$ и $\varepsilon > 0$

Тогда, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

сходится, если $\lambda > 1$. или $\lambda = 1$, $\mu > 1$.

расходится, если $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$, $\mu \le 1$.

Пример 19* (пов. сложности) ~ №2600 Демидович

Исследовать ряд $\sum \frac{n!\, e^n}{n^{n+p}}$ на сходимость в зависимости от параметра p.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\, e^n \cdot (n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}\, e^{n+1}\, (n+1)!} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} = e^{-1} \cdot e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}} =$$

$$= e^{-1+(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-1+(n+p)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} =$$

Применим ф-лу $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $x = \frac{1}{n}$

$$= e^{-1+1-\frac{1}{2n} + \underbrace{n\,o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{o\left(\frac{1}{n}\right)} + \frac{p}{n} - \underbrace{\frac{p}{2n^2} + p \cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{o\left(\frac{1}{n}\right)}} =$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$$= e^{\frac{1}{n}\left(p-\frac{1}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \text{,,}\ o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= 1 + \frac{1}{n}\left(p-\frac{1}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\left(\frac{1}{n}\left(p-\frac{1}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}{2!} + \ldots$$

→ величина более высокого порядка малости, чем $\frac{1}{n}$ при $n\to\infty$

$$= 1 + \left(p - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Здесь $\lambda = 1$, $\mu = p - \frac{1}{2}$

При $p - \frac{1}{2} > 1$ ряд сходится, т.е. при $p > \frac{3}{2}$

При $p \le \frac{3}{2}$ ряд расходится

§3. Знакопеременные ряды.

3.1. Признаки сходимости знакопеременных рядов.

Опр. 1. – Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется знакопеременным, если он содержит бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов.

Опр. 2. – Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. (ряд из модулей)

Пример 1.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ сходится абсолютно, т.к. ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to$ сходится.

Опр. 3. – Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Теорема 1. – Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

Док-во. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, т.е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Но тогда сходится и ряд $2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

По свойству модуля:

$$0 \le x + |x| \le 2|x| \quad \text{(проверить сам-но)}$$

поэтому $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$

и значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ сходится по признаку сравнения.

Но тогда, при вычитании сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ получим сходящийся ряд (п.1.4, следствие 1 свойства 1), ч.т.д.

Замечание: Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Пример 2.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \ldots$ сходится, а ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Для определения абсолютной сходимости ряда можно использовать все признаки сходимости знакоположительных рядов.

- признак сравнения

– Пусть (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакопеременный, а (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - знакоположительный.

Если $|a_n| \le b_n$, $\forall n > n_0 \in \mathbb{N}$, то из ~~расх~~сходимости (2) следует абсолютная сходимость ряда (1).

Если $|a_n| \geq b_n$, $\forall n > n_0 \in \mathbb{N}$, то из расходимости (2) следует расходимость ряда (3) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

• предельный признак сравнения

– Если $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = k$ $(0 < k < +\infty)$, то ряд (2) и (3) ведут себя одинаково, т.е. сходятся и расходятся одновременно.

• эквивалентный признак.

– Если $|a_n| \sim b_n$, при $n \to \infty$ то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

• интегральный признак Коши.

– Если $f(x) \geq 0$, $f(x)$ – невозрастающая ф-я при $x \geq n_0$, $f(n) = |a_n|$, то $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходятся или расходятся одновременно.

• радикальный признак Коши в предельной форме.

– Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, тогда при $q < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, при $q > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, при $q = 1$ вопрос о сходимости открыт.

• признак Даламбера в предельной форме.

– Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, тогда при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, при $q > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, при $q = 1$ вопрос о сходимости открыт.

• Достаточное условие расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакопеременный ряд.

– Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2} = \frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \ldots$

знакопеременный ряд.

Составим ряд из абсолютных величин (ряд из модулей)

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| + \ldots$$

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится как обобщённо гармонический ряд.

Следовательно по признаку сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$$ сходится абсолютно.

Пример 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{3}$ расходится, т.к. $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi n}{3}$ не существует.

Пример 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}$

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}\right| = \frac{1}{n-\ln n}$$

$\frac{1}{n-\ln n} \sim \frac{1}{n}$, т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right) = 1$, то

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$ расходится. Про сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}$ пока ничего сказать нельзя.

Ответ на вопрос о сходимости данного ряда может быть решён с помощью признака Лейбница, который расс-м далее.

Признак Дирихле.

~ Расс-м ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (4). Пусть выполнены условия:

1) посл-ть $\{b_n\}$ не возрастающая и бесконечно малая, т.е. $\forall n > n_0$ $b_n \geq b_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

2) посл-ть частичных сумм для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена, т.е. $\exists M > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|S_n| = |a_1 + a_2 + \ldots a_n| \leq M$.

Тогда ряд (4) сходится. (без док-ва.)

Пример 6.

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, где x - любое действ-ое число и $\alpha > 0$ (если $\alpha \leq 0$ и $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то общий член ряда не стремится к нулю и ряд расходится)

Пусть $a_n = \sin nx$, $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$, применим признак Дирихле.

Последовательность $\{b_n\}$ монотонно убывает до нуля: $b_n > b_{n+1}$ $\left(\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$, и $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ (при $\alpha > 0$)

Проверим выполнение условия 2)

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$ $\ominus$ {умножение и разделение на $2\sin\frac{x}{2}$ при $x \neq 2\pi m$)

$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx\right) =$

$\{\ 2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\ \}$

$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cancel{\cos\frac{3x}{2}} + \cancel{\cos\frac{3x}{2}} - \cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{5x}{2} + \ldots + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) =$

$= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$

$$|S_n| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{|\sin\frac{x}{2}|} = \overset{M}{\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}}, \text{ при } x \ne 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$$

Т.е. $|S_n| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$, если $x \ne 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, т.е. для любого фиксированного x не равного $2\pi m$, любая сумма S_n ограничена по модулю числом $M = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$.

Условие 2) выполнено и следовательно ряд по признаку Дирихле сходится, если $x \ne 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Если же $x = 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, то все члены ряда равны нулю и ряд также сходится.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$ сходится при $\forall x$.

- Если $\alpha > 1$, то ряд сходится абсолютно, т.к. ряд из модулей сходится:
$\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \le \frac{1}{n^\alpha}$, а $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$

- Если $0 < \alpha \le 1$ и $x \ne \pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, то ряд из модулей расходится:

$$\left|\frac{\sin x}{n^\alpha}\right| \ge \frac{\sin^2 nx}{n^\alpha} = \frac{1-\cos 2nx}{2n^\alpha}$$

При $0 < \alpha \le 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2nx}{2n^\alpha}$ расходится, т.к. его можно представить в виде разности

$$\underbrace{\underset{\text{расходится}}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2n^\alpha}} - \underset{\text{сходится по признаку Дирихле.}}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^\alpha}}}_{\text{расходится (следствие 2 св-ва 3 п 1.4)}}$$

Т.к. расходится ряд с меньшими членами, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right|$ расходится.

Значит, при $0 < \alpha \le 1$ и $x \ne \pi m$, $m\in\mathbb{Z}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$ сходится условно.

Признак Абеля (следствие из признака Дирихле)

~ Если посл-ть $\{b_n\}$ монотонная и ограниченная, а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Док-во:

1. Случай: Пусть $\{b_n\}$ невозрастающая и ограниченная, тогда она сходится и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

Если $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, то $\{b_n - b\} \to 0$ при $n \to \infty$ и $\{b_n - b\}$ невозр-ая;

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b + b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b) + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n b}$$

$b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (сходится по условию)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)$ сходится по признаку Дирихле, т.к $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а значит, что $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. послед-ть его частичных сумм ограничена (если послед-ть сходится, то она ограничена, т.е. $\exists M > 0$, такая, что $|S_n| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le M$)

По признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)$ сходится.

Следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

2 случай: пусть $\{b_n\}$ неубыв. и огранич. (док-ть самостоят., воспользовавшись равенством: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} -a_n (b_n + b - b)$)

Пример 7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$ исследовать на сходимость.

Воспользуемся признаком Абеля:

Пусть $a_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$; $b_n = \arccos \frac{1}{n}$

$\{b_n\} = \{\arccos \frac{1}{n}\}$ монотонна и ограничена $(0 \le \arccos \frac{1}{n} \le \frac{\pi}{2})$

$(\arccos \frac{1}{n})' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} > 0$, $\arccos \frac{1}{n}$ возрастает),

поэтому по признаку Абеля ряд сходится.

Опр. 4. Ряд называется знакочередующимся, если знаки членов ряда чередуются.

Знакочередующийся ряд - это частный случай знакопеременного ряда.

Знакочередующийся ряд записывают так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n+1} b_n + \ldots \qquad b_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Признак Лейбница (следствие к признака Дирихле)

~ Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n$ - знакочередующийся ряд ($b_n > 0$).

Если:

1) b_n монотонно убывает, т.е. $\forall n > n_0 \quad b_n > b_{n+1}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n$ сходится.

Док-во: Пусть $a_n = (-1)^{n+1}$

Частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ ограничены,

$$|S_n| = |1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}| \le 1.$$

$\{b_n\}$ монотонно убывает до нуля, поэтому по признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n$ сходится.

Пример 5 (продолжение)

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}$ на сходимость.

Последовательность $\{b_n\} = \{\frac{1}{n-\ln n}\}$ положительна ($n > \ln n \ \forall n \in \mathbb{N}$) и стремится к 0 при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n} = 0$$

Докажем, что $n - \ln n \to \infty$ при $n \to \infty$

$$n - \ln n = \ln e^n - \ln n = \ln\frac{e^n}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n}{n} = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{e^n}{n} = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n - \ln n = \infty$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}$ сходится по признаку Лейбница.

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}$ сходится условно (ряд из модулей расходится)

Замечание 1: Условие монотонности последовательности $\{b_n\}$ в признаке Лейбница существенно.

Замечание 2: Признаки Дирихле, Абеля, Лейбница позволяют установить сходимость ряда без уточнения какая именно сходимость (абсолютная или условная).

Замечание 3: Признаки Дирихле, Абеля и Лейбница являются достаточными признаками сходимости ряда. Если же условия какого-либо признака не выполняются, то ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае нужны дополнительные исследования.

Замечание 4: Признак Лейбница является не только достаточным, но и необходимым признаком сходимости для знакочередующегося ряда с монотонно убыв. членами:

если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то по необх. усл. сх. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)b_n$ будет

расходиться.

3.2. Св-ва абсолютно сходящихся рядов

Для конечных сумм выполняются переместительный, сочетательный и распределительный законы.

На абсолютно сходящиеся ряды также распространяются эти законы.

Св-во 1: ~ Если в абс. сх-ся ряде произвольным образом переставить члены, то полученный ряд будет абс. сходиться и его сумма будет равна сумме исходного ряда.

Св-во 2: ~ Абсолютно сходящиеся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S'$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S''$ можно почленно складывать (или вычитать).
Полученный ряд будет абс. сходится и его сумма

$$S = S' + S'' \quad (\text{или } S' - S'')$$

Св-во 3: ~ Произведение двух абс. сходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S'$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S''$ есть абс. сход. ряд и его сумма равна $S = S' \cdot S''$

Для условно сходящихся рядов переместительный закон не работает!

Теорема Римана

~ Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то для любого числа S можно так переставить члены ряда, что сумма полученного ряда будет равна S.

§4. Функциональные последовательности и ряды.

4.1. Определение и область сходимости функционального ряда.

Понятие функциональной зависимости - одно из важнейших в математике.

Всякая функция осуществляет некоторое соответствие между объектами (область определения функции) и объектами, составляющими множество её значений.

Можно рассматривать числовые функции от чисел ($f: R \to R$); числовые функции от систем чисел ($f: R^n \to R$ - функции нескольких переменных); вектор-функции (значения вектор-функции - векторы)

Близкими к вектор-функциям являются также функции, которые ставят в соответствии числам - ряды.

Эти функции называются функциональными рядами.

Опр. 1. ~ Выражение (1) $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется функциональным рядом относительно переменной x, $x \in E \subset R$

Пример 1.

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$ - функциональный ряд

Придавая в выражении (1) переменной $x = x_0$, получим:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \qquad (2)$$

В зависимости от значения, принимаемого переменной x, числовой ряд (2) может оказаться сходящимся или расходящимся.

Опр. 2. ~ Совокупность всех значений переменной x, для которого ряд (2) сходится называется областью сходимости функционального ряда (1).

Если значения x_0 переменной x принадлежит области сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, то можно говорить о сумме этого функционального ряда в точке $x = x_0$:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots = S(x_0)$$

Т.о., значение суммы функц-ого ряда зависит от значения x_0 переменной x, т.е. сумма функционального ряда сама является функцией переменной x.

Областью задания суммы функционального ряда является область сходимости этого ряда.

Т.к. сумма функц-ого ряда является функцией, то для неё можно ставить и решать вопросы о её непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости и т.д.

Также можно ставить вопрос, какие ф-ии можно получать в виде суммы функциональных рядов и как находить ряды, у которых суммы — заданные ф-ии.

Пример 2.

Ряд $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ при каждом x

представляет собой геометрич. прогрессию со знаменателем $\frac{x}{2}=q$

При $|q|=\frac{|x|}{2}<1$ данный ряд сходится, т.е. область сходимости ряда $-2<x<2$.

Пример 3.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится при $\forall x\in\mathbb{R}$, т.к. по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=0$$

Область сходимости данного ряда $x\in\mathbb{R}$.

Пример 4.

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+\sin x}$ расходится при $\forall x\in\mathbb{R}$, т.к.

$\sin x\le 1$, то

$$\frac{1}{n+\sin x}\le\frac{1}{n+1},\ \forall n\ge 2 \quad \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+\sin x}=1\right)$$

Т.к. ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ расходится, то $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+\sin x}$ расходится по признаку сравнения.

4.2. Равномерная сходимость последовательности функций.

Опр. 3. ~ Последов-ть ф-ий $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots$ сходится к предельной ф-ии $S(x)$ в точке x, если $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N},\ \forall n>N:\ |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

Опр. 4. ~ Последовательность ф-ий $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots$ сходится к предельной ф-ии $S(x)$ на некотором множестве $E\subset\mathbb{R}$, $\forall x\in E$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x),\text{ т.е.}$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall x\in E\quad\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N},\ \forall n>N:\ |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

Заметим, что в этом опр-ии $N(\varepsilon)$ находится $\forall x\in E$, т.е. вообще говоря, зависит от x, т.е. $N(\varepsilon, x)$.

Обозначение: $S_n(x) \xrightarrow{E} S(x)$

Несколько иной факт описывается в следующем определении.

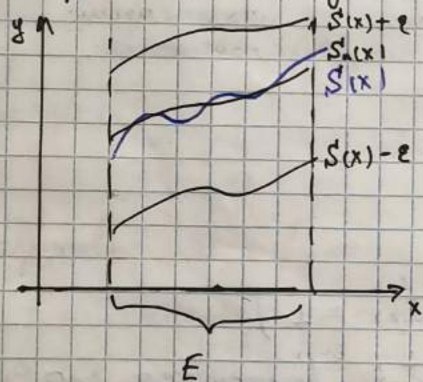
Опр. 5. Посл-ть ф-ций (3) $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$ сходится к предельной функции $S(x)$ равномерно на $E \subset \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N \text{ и } \forall x \in E: |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение: $S_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$

В отличие от опр. 4, здесь утверждается существование N, подходящего для всех $x \in E$.

Главным моментом в этом опр-ии явл. то, что для любого ε найдётся „нужный" номер N, один и тот же для всех x из мн-ва E. Термин „равномерно сходится" означает равномерность (одинаковость) по отношению ко всем значениям переменной x, - неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ выполняется для всех x из мн-ва E, начиная с некоторого номера, одного и того же для всех x.



Геометрически, это неравенство означает, что при $n > N$ график ф-ии $y = S_n(x)$ лежит в ε-окрестности графика предельной ф-ии.

$y = S(x)$, т.е. между кривыми:

$$y = S(x) - \varepsilon \quad \text{и} \quad y = S(x) + \varepsilon$$

Опр. 6. Посл-ть $\{S_n(x)\}$ называется равномерно сходящейся к ф-ии $S(x)$ на E, если числовая последоват-ть

$\{\sup_E |S_n(x) - S(x)|\}$ явл. бесконечно малой, т.е.

$\sup_E |S_n(x) - S(x)| \to 0$ при $n \to \infty$

Эквивалентность опр. 5 и 6 следует из того, что если $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in E$, то

$\sup_E |S_n(x) - S(x)| \le \varepsilon$, и обратно: если $\sup_E |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$,

то $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Пример 6.

Исследовать на равномерную сходимость $S_n = x^n$

1) Расс-м эту посл-ть на $[0; \frac{1}{2}]$.
на этом отрезке $\lim_{n\to\infty} x^n = S(x) = 0$

Т.к. $\sup_{[0;\frac{1}{2}]} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{[0;\frac{1}{2}]} |x^n - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$

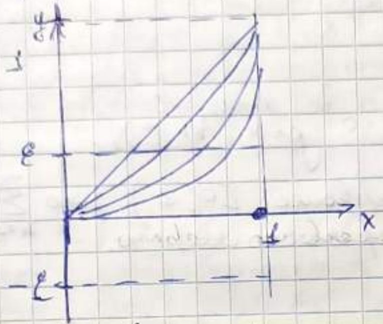
при $n\to\infty$, то $\{x^n\}$ сходится и $f(x)=0$ равномерно на $[0;\frac{1}{2}]$

2) Расс-м x^n на $[0;1)$

На этом полуинтервале $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = S(x)=0$, но при этом

$$\sup_{[0;1)} |S_n(x)-S(x)| = \sup_{[0;1)} |x^n| = 1 \quad \forall n$$

Т.о. $\{x^n\}$ сходится на $[0;1)$ неравномерно!



Критерий Коши равномерной сходимости послед-ти.

Для того, чтобы посл-ть функций $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$ была равномерно сходящейся на E необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \text{ такой, что } \forall n>N,\ \forall p\in\mathbb{N},$$

$$\forall x\in E: |S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in E$$ — без док-ва

4.3 Равномерная сходимость функц.-ных рядов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля.

Введём теперь понятие равномерной сходимости функц-ого ряда, сход. в каждой точке мн-ва X. Пусть сумма ряда равна $S(x)$

Опр. 7. Говорят, что функц. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на мн-ве E, если посл-ть его частичных сумм сходится равномерно к $S(x)$ на E.

Это означает (в соответствии с опр. 6), что $\forall\varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N}$, такой, что

$$\forall x\in E: |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$ или (в соотв. с опр. 6), что

$$\sup_E \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Пример 7. Рассм. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$

1) Пусть $E=[0;\frac{1}{2}]$, тогда $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$

$$|S_n(x)-S(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} x^k - \frac{x}{1-x}\right| = \left|\frac{x}{1-x}(1-x^n) - \frac{x}{1-x}\right| = \left|\frac{x-x^{n+1}-x}{1-x}\right| = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\sup_{[0;\frac{1}{2}]} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{[0;\frac{1}{2}]} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится к своей сумме равномерно на $[0; \frac{1}{2}]$.

г) Пусть $E = [0; 1)$

Тогда $S(x) = \frac{x}{1-x}$, $|S_n(x) - S(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\sup_{[0;1)} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, т.к.

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} \to \infty \text{ при } x \to 1-0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно на полуинтервале $[0; 1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится к своей сумме $S(x) = \frac{x}{1-x}$ неравномерно.

Критерий Коши равномерной сходимости функц. ряда.

Для того чтобы функц. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходился равномерно на E, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \text{ такой, что } \forall n > N, \ \forall p \in \mathbb{N}$$

и $\forall x \in E$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

без док-ва.

Опр. 8 Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами называется МАЖОРАНТНЫМ (или МАЖОРИРУЮЩИМ) для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на E, если $\forall n$ и $\forall x \in E$ выполнено неравенство

$$|u_n(x)| \leq a_n$$

Пример 8. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ является мажорантным для функц. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, т.к. $\forall n \in \mathbb{N}$, и $\forall x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\left| \frac{\sin nx}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$

Теорема 1. (признак Вейерштрасса)

Если для функц. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на мн-ве E существует сходящийся мажорантный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на мн-ве E.

Док-во:

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши для числовых рядов $\exists N$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon \qquad (4)$$

Т.к. $\forall k$ и $\forall x \in E$ справедливо неравенство $|u_k(x)| \le a_k$ (в силу условия теоремы), то $\forall n \ge N$, $\forall p \in \mathbb{N}$, и $\forall x \in E$, используя (4), получаем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Т.о. для функц. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ выполнены условия критерия Коши равномерной сходимости функц. ряда, следовательно, этот ряд сходится равномерно на E, ч.т.д.

Пример 10.

Функциональная последовательность $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ является равномерно ограниченной на всей числовой прямой, т.к. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le 1.$$

Т.о. для данной последовательности в качестве числа M можно взять $M=1$ (а также любое число, большее 1).

Признаки Дирихле и Абеля относятся к рядам вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \qquad x \in E$$

Введём обозначение: $S_n(x) = \sum_{n=1} a_n(x)$

Теорема 2. (признак Дирихле равномерной сходимости ряда.)

~Пусть выполнены условия:

1) последовательность $\{b_n(x)\}$ при каждом $x \in E$ является невозрастающей, т.е. ($\forall n$: $b_{n+1}(x) \le b_n(x)$) и $b_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)=0$ на E

2) $\{S_n(x)\}$ равномерно ограничена на X (т.е. $\exists$ число $M>0$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$: $|S_n(x)| \le M$,

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Теорема 3. (признак Абеля равномерной сход. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$)

~Пусть выполнены условия:

1) последовательность $\{b_n(x)\}$ является равномерно ограниченной на E и монотонной при каждом $x \in E$

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на E.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Пример 9 (продолжение)

По признаку Дирихле можно получить, что

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, где $0 < \alpha \le 1$ сходится равномерно на любом сегменте принадлежащем интервалу $(0; 2\pi)$ и следовательно, в силу периодичности синуса, такое же утверждение справедливо для любого интервала $(2\pi m, 2\pi + 2\pi m)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Однако, на сегменте $[0; 2\pi]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ сходится неравномерно (это можно показать, используя критерий Коши)

4.4. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов.

① Равномерная сходимость и непрерывность.

Теорема 4.

~ Пусть все члены функц. последовательности $\{S_n(x)\}$ являются непрерывными функциями на E, и пусть

$$S_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x).$$ Тогда,

предельная функция $S(x)$ непрерывна на E.

Теорема 4.1.

~ Если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ являются непрерывными функциями на E, и ряд сходится равномерно на этом промежутке, то его сумма $S(x)$ – непрерывная ф-я на E

② Переход к пределу под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда.

Теорема 5.

~ Пусть все члены функц. последовательности $\{S_n(x)\}$ являются непрерывными ф-ями на $[a, b]$ и пусть

$$S_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x).$$

Тогда, для $\forall x_0$ и x из сегмента $[a, b]$ справедливо равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} S_n(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} S(t)\, dt$$

Теорема 5'

~ Если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ являются непрерывными ф-ями на $[a, b]$ и ряд сходится равномерно на $[a, b]$, то $\forall x, x_0 \in [a, b]$

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\, dt$$

(т.е. ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0, x] \subset [a, b]$).

③ Переход к пределу под знаком производной и почленное дифференцирование ряда.

Теорема 6. Пусть выполнены условия:

1) все члены функц. последовательности $\{S_n(x)\}$ имеют непрерывные производные $S_n'(x)$ на $[a, b]$

2) $S_n(x) \to S(x)$ на $[a, b]$

3) $S_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a, b]$

Тогда ф-я $S(x)$ дифф-ма на $[a, b]$ и справедливо равенство:

$$S'(x) = \varphi(x)$$

Теорема 6' Пусть выполнены условия:

1) Все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеют непрерывные производные $u_n'(x)$ на $[a, b]$.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится ~~равномерно~~ на $[a, b]$ и его сумма равна $S(x)$,

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ и его сумма равна $\varphi(x)$.

Тогда, $S(x)$ дифф-ма на $[a, b]$ и справедливо равенство:

$S'(x) = \varphi(x)$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифф-ть на $[a, b]$.

§5. Степенные ряды.

5.1. Понятие степенного ряда. Радиус сходимости. Свойства.

Особую роль среди функциональных рядов играют степенные ряды:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$, где a_n - коэффициенты ряда (зависят от n и не зависят от x), $a \in R$.

В частности, при $a=0$ (1) имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

Рассмотрим вопрос об области сходимости степенного ряда.

Применим признак Коши:

$$\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|\,|x-a|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,(x-a)$$

Пусть

$$\boxed{\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}, \quad R \geq 0} \qquad (3)$$

($R=0$ соответствует случаю $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$)

Тогда, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n(x-a)^n} = |x-a| \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{|x-a|}{R} = q(x)$

Следовательно, $q(x) < 1 \iff \dfrac{|x-a|}{R} < 1 \iff |x-a| < R \iff -R < x-a < R$

или $a-R < x < a+R$ - интервал с центром в точке $x=a$ и длиной $2R$, называемый интервалом сходимости степенного ряда (1)

R - радиус сходимости ряда (1)

Внутри интервала сходимости, т.е. при $a-R < x < a+R$ ряд (1) сходится абсолютно, вне интервала сходимости, т.е. при $x < a-R$ и $x > a+R$ он расходится

На границах интервала сходимости требуется доп. исследование

Замечание: Если среди $\sqrt[n]{|a_n|}$ есть нули, то ф-ла (3) для определения радиуса сходимости непригодна.

Пример 1:

Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}(x-2)^{2n} = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{3}(x-2)^4 + \dots$

Т.е. при нечётных $n = 2k+1$ $(k=0,1,2,\dots)$ $a_n = 0$ т.к. ряд содержит только чётные степени $(x-2)$: $(x-2)^2$; $(x-2)^4$; $(x-2)^6 \dots$,

поэтому ф-лу (3), записанную след. образом: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ здесь применять нельзя.

Применим признак Коши:

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|(x-2)^{2n}} = (x-2)^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}}_{\to 1} = (x-2)^2$$

При $(x-2)^2<1$ ряд сходится.

$$(x-2-1)(x-2+1)<0$$
$$(x-3)(x-1)<0$$

т.е. при $x\in(1,3)$ ряд сходится.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости:

при $x=1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^{2n}}_{1}\cdot\frac{1}{n+1}$ и при $x=3$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\underbrace{(1)^{2n}}_{1}$ ряды расходятся.

Ответ: ряд сходится при $x\in(1,3)$

Утверждение, которое даёт оценку радиуса сходимости степенных рядов, опубликовал в 1821 году Коши, но оно оставалось незамеченным, пока в 1882 году Адамар не переоткрыл его

Сформулируем теорему: формула Коши-Адамара:

Радиус сходимости степенного ряда равен $R = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$

- Если $R=+\infty$, то степенной ряд (2) сходится на всей числовой оси.
- Если $R=0$, то степенной ряд (2) сходится только в точке $x=a$.

Радиус сходимости степенного ряда можно найти по ф-ле:

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$ (если этот предел $\exists$)

Пример 2: Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4+(-1)^n)^n}{n}x^n$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{4+(-1)^n}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, 4+(-1)^n = 5 \to R=\frac{1}{5}$$

Пусть $b_n = \left(\frac{4+(-1)^n}{5}\right)^n\cdot\frac{1}{n} = \begin{cases}\frac{1}{2k}, & n=2k\\ \left(\frac{3}{5}\right)^{2k-1}, & n=2k-1\end{cases}$

Если $x=\frac{1}{5}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$, где $c_n = \begin{cases}0, & n=2k-1\\ \frac{1}{2k}, & n=2k\end{cases}$ расходится, т.к. его можно представить суммой сходящегося и расходящегося рядов, а

$b_n \geq c_n \geq 0$, значит $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится

Если $x = -\frac{1}{5}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

Т.к. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1}$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}$ расходится,

то $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k} - b_{2k-1})$ расходится

Ответ: область сходимости ряда $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$

<u>Пример 3.</u> Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$

<u>I способ:</u>

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 (2(n+1))!}{(2n)!\,((n+1)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$$

$R = 4$

$$x = 4 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$x = -4 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 (-1)^n 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$$

т.к. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2(n+1)}{2n+1} > 1$, то $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то оба ряда расходятся.

Ответ: $(-4; 4)$ - область сходимости.

<u>II способ:</u> Применим формулу Стирлинга:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{при } n \to \infty$$

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n \cdot \left(\frac{e}{2n}\right)^{2n} \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} = \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n}$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{4}, \text{ т.е. } R = 4.$$

Если $|x| = 4$, то $|a_n x^n| \sim \sqrt{\pi n}$, $n \to \infty$ и следовательно на границе интервала ряд расходится.

<u>Пример 4.</u> Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^x + \ln x}{n}\right)^n$

Пусть $t = t(x) = e^x + \ln x$ и рассм-м ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, где $a_n = \frac{1}{n^n}$.

Т.к. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то $R = +\infty$. Значит область сходимости исходного ряда совпадает с областью опр-я ф-ии $t(x)$, т.е. $(0; +\infty)$

Свойства степенных рядов.

① Степенной ряд в интервале сходимости можно почленно дифф-ть

② Степенной ряд в интервале сходимости можно почленно интегрировать.

Указанные св-ва ① и ② равносильны утверждению о том, что для степенных рядов операции $\frac{d}{dx}$ и $\sum_{n=0}^{\infty}$, и $\int \ldots dx$ и $\sum_{n=0}^{\infty}$ коммутируют (т.е. являются „перестановочными" — их можно менять местами.)

③ Сумма степенного ряда есть ф-я, непрерывная по меньшей мере на интервале сходимости.

Ряд Тейлора.

Опр. 1. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ с коэфф-ами

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

называется рядом Тейлора для ф-ии $f(x)$ в точке $x=a$, независимо от того, сходится ли он вообще или сходится ли он к данной ф-ии $f(x)$.

a_n – коэффициенты Тейлора.

Достаточное условие разложения ф-ии в ряд Тейлора:

Пусть ф-я $f(x)$ $(f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ некоторой окрестности точки a имеет производные любого порядка n, которые равномерно ограничены в этой окрестности, т.е. $\exists$ такое число $M>0$, при котором $|f^{(n)}(x)| < M$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ в любой точке $x \in E$.

Тогда в этой окрестности ф-я разлагается в ряд Тейлора:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n}$$

Единственность разложения ф-ии в ряд Тейлора:

~ Если ф-я $f(x)$ разложена в ряд Тейлора, то это разлож-е единственно.

Ряд Маклорена.

Опр. 2. Если $a=0$ и коэф-т $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n=0,1,\dots$, то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ называется рядом Маклорена для ф-ии $f(x)$.

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

I. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

II. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

III. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$

IV. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $-1 < x \leq 1$

V. $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, $x \in (-1;1)$

VI. $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

VII. $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$

Теорема Абеля.

Всякий ряд (1) с помощью линейной замены $t = x - a$ может быть представлен рядом (2) $\sum_{n=0} a_n t^n$ с центром в нуле.

Свойства степенных рядов, инвариантные относительно такой замены, удобнее формулировать для рядов вида $\sum_{n=1} a_n x^n$

Первая теорема Абеля:

~ Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в некоторой точке $c \neq 0$, то он сходится абсолютно на интервале $(-|c|;|c|)$

Вторая теорема Абеля:

~ Пусть R - радиус сходимости степенного ряда и ряд сходится в точке $x = R$ $(x=-R)$.

Тогда, сумма ряда непрерывна слева (справа) в точке $x=R$ $(x=-R)$, т.е.

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

$$\left(\lim_{x \to -R+0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n \right)$$

Из этой теоремы следует, например, что разложение ф-ии $y=\ln(1+x)$ в степенной ряд с центром в нуле остаётся справедливым и при $x=1$.

В самом деле, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ сходится при $x=1$ по признаку Лейбница.

Используя непрерывность логарифмической ф-ии и вторую теорему Абеля, получаем:

$$\ln 2=\lim_{x\to 1-0}\ln(1+x)=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 1-0}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Пример 5.

Разложить функцию $y=\operatorname{arctg}x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0=0$.

Т.к. $\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}x$, то разложив ф-ию $y=\frac{1}{1+x^2}$ в степенной ряд с центром в нуле, а затем почленно интегрируя, получим:

$$\operatorname{arctg}x=\int_0^x(1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots)dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

Разложение ф-ии $\frac{1}{1+x^2}$ справедливо при $|x|<1$. Для этих же x верно и разложение

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

В силу сходимости этого ряда в точках $x=\pm1$ и непрерывности арктангенса из второй теоремы Абеля следует, что разложение справедливо при $x\in[-1;1]$

Пример 6.

Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$

Ряд является результатом почленного диф-я ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots =$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ при $|x|<1$ (по ф-ле суммы беск. убыв. геом. прогр.)

$$=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{1}{(1-x)^2}$, $|x|<1$

Пример 7.

Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}$

Преобразуем ряд: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x f(x)$

$$(f(x))' = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{n-1} \right)' = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad \text{при } |x| < 1$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} \, dt = -\ln|1-t| \Big|_0^x = -\ln(1-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = -x \ln(1-x)$$

5.2. Приложение степенных рядов.

Степенные ряды используются для:

1) представления неэлементарных ф-ий (например, неберущихся интегралов)
2) приближённых вычислений
3) приближённого решения алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений.

Пример 8 (необязательный)

Представить в виде одного ряда неэлементарную ф-ю

$$S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt \quad \text{(интегральный синус)}$$

Расс-м ф-ю:

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ тогда}$$

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$S_i(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n} \, dt}{(2n+1)!} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} \, dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \; x \in \mathbb{R}$$

Пример 9.

Вычислить приближённо с точностью до 0,0001 $\ln 1,1$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots \quad \text{сходится при } x \in (-1; 1]$$

Пусть $x = 0,1$.

$$\ln 1,1 = 0,1 - \frac{0,1^2}{2} + \frac{0,1^3}{3} - \frac{0,1^4}{4} + \ldots$$

Абсолютное значение четвёртого члена этого ряда меньше 0,0001

Ошибка при замене суммы сходящегося знакочередующегося ряда (с убывающими по абсолютному значению членами) суммой нескольких его первых членов меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Поэтому для приближённого вычисления $\ln 1,1$ с точностью до 0,001 достаточно взять сумму трёх первых членов ряда:

$$\ln 1,1 \approx 0,1 - \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{3} \approx 0,0953$$

Пример 10.

Вычислить приближённо e с точностью до 10^{-3}.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

При $x = 1$ $\quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} + r_k$

Найдём такой номер, что $r_k < 10^{-3}$, для этого оценим остаток ряда:

$$r_k = \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \ldots = \frac{1}{(k+1)!}\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{k+2}} + \underbrace{\frac{1}{(k+2)(k+3)}}_{>(k+2)^2} + \ldots$$

сумма беск. убыв. геом. прогрессии:

$$q = \frac{1}{k+2} < 1.$$

Искомый номер находим, решая неравенство:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{k+2}} = \frac{k+2}{k+1}$$

$$r_k < \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{k+2}{k+1} < 10^{-3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(k+1)!\,(k+1)}{(k+2)} > 1000$$

при $k = 6 \Rightarrow \frac{7! \cdot 7}{8} = \frac{720 \cdot 49}{8} > 1000$

$$e \approx \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} \approx 2,718.$$

Пример 11.

Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Найдём решение ДУ $y = y(x)$ в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Т.к. $y(0)=1$, то $1 = a_0 + a_1 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 \Rightarrow a_0 = 1$

$y'(0)=0$, то $0 = a_1 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 \Rightarrow a_1 = 0$

Тогда, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$

$$y'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) x^{n-2}$$

Подставим выражения в исходное ур-е

$$y'' + xy = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + x\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n\right) = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Определим коэф-ты, приравняв коэф-ты при одинаковых степенях x.

$2 \cdot 1 \cdot a_2 + 0 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$3 \cdot 2\, a_3 + 1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{3!}$

$4 \cdot 3 \cdot a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = 0$

$a_5 = 0$

$a_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{4}{6!}, \ldots$

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k \cdot 1 \cdot 4 \ldots (3k-2)}{(3k)!}$$

$a_n = 0$, $n \neq 3k$.

Таким образом, $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{(3n)!} x^{3n}$

Пример 12

Вычислить с точностью до 10^{-4} $I = \int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$

$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \ldots$ $(x \geq 0)$

$$I = \int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx = x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} - \frac{x^4}{6!\,4} + \frac{x^5}{8!\,5} - \ldots \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!\,2} + \frac{1}{4!\,3} - \frac{1}{6!\,4} + \frac{1}{8!\,5} \ldots$$

Пятый член этого знакочеред. ряда $< 0{,}0001$, поэтому

$$I = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} \approx 0{,}7635$$