...сана Николаевна

Литература. 1) Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. т ~~1-3~~

2) Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, 1, 2

3) Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по мат. анализу

Доп. литература: 1) Ильин В.А. и Позняк Э.Г. Основы математического анализа ч 1, 2.

2) Берман Г.Н. Сборник задач по матем. анализу.

$$\int x^p \cdot dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$$

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \neq 1$$

$$\int e^x \cdot dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C$$

Горнер.

Элементарные функции.

arcsin, arctg. а б. ф.

Обр. ф.

Во вторник

Д/з: $y = \arcsin(\sin x)$ - построить ~~+ arcctg~~, по примеру.

~~+ по одному примеру из задачника~~

на завтра ~~(или несколько)~~

~~табл. 236~~

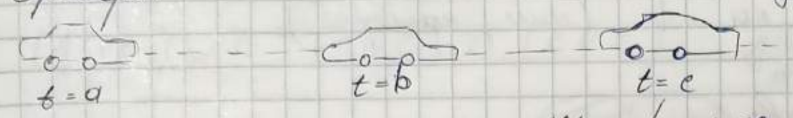
Функция	Первообразные
a	$ax + C$
$x^p,\ p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x},\ x > 0$	$\ln x + C$
$\frac{1}{x},\ x < 0$	$\ln(-x) + C$
e^x	$e^x + C$

Функция	Первообразные
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$

Математический анализ - раздел математики, изучающий функции.

Примеры:

дифференцирование (найти мгновенную ск-ть)



Интегральное исчисление.

I. Введение в математический анализ.

1. Элементы математической логики.

кванторы:

Символ	Смысл
$\exists$ - квантор существования	„существует", „найдётся"
$\forall$ - квантор всеобщности	„любой" или „всякий", „для любого"
$\exists!$ -	„существует единственный"
$A \Rightarrow B$	Утверждение A влечёт утв. B
$A \Leftrightarrow B$ - знак равносильности	„тогда и только тогда, когда" „В том и только в том случае, когда"
$A \rightleftarrows B$	„Для выполнения условия B необходимо и достаточно выполнение условия A.
$:$ $(\vert)$	„Такой что" (при условии что)
$,$	удовлетворяющий какому-то условию.
{нек. объект}	Знак совокупности объектов.
$\bar{A}$ или $\neg A$	Знак отрицания.
{нек. условия	Знак системы (усл. одновр. выполнения.)
[нек. усл.	Знак совокупности

Система условий выполнена $\Leftrightarrow$ выполнены все условия системы.

Система условий не выполнена $\Leftrightarrow$ не выполнено хотя бы одно условие системы.

Совокупность условий выполнена $\Leftrightarrow$ выполнено ~~хотя~~ хотя бы одно из условий.

Совокупность условий не выполнены $\Leftrightarrow$ не выполнены все условия.

Правила построения отрицаний.

1) Утв. „A" заменяется на $\neg A$

2) $\forall$ заменяется на $\exists$ (или наоборот)

2. Понятие множества.

Под множеством понимается как совокупность некоторых объектов (элементов множества), которые объединяются одним и тем же характерным свойством.

Множества обозначаются большими латинскими буквами: $A, B, C \dots$

$a, b, c \dots$ - элементы множества

$\varnothing$ - пустое множество

Множество B называют подмножеством ~~A~~ множества A, $B \subset A$ ($A \supset B$), если всякий элемент множества B является в то же время и элементом множества A.

$$B \subset A \iff \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

$$A \subset A$$

$$\varnothing \subset A$$

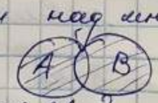
- отношение включения транзитивно (т.е. если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$)

Равенство множеств

$$A = B \iff \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \forall y \in B \Rightarrow y \in A \end{cases}$$

Операции над множествами.

1. Объединение ($\cup$)

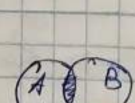


$$C \overset{def}{=} A \cup B \iff C = \left\{ c : \left[\begin{matrix} c \in A \\ c \in B \end{matrix} \right. \right\}$$

Свойства операции объединения:

- $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность) - переместительный з-н
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциотивность) - сочетательный з-н
- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$

2. Пересечение ($\cap$)



$$C \overset{def}{=} A \cap B \iff C = \left\{ c : \begin{cases} c \in A \\ c \in B \end{cases} \right\}$$

Свойства операции пересечения:

- $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность) - переместительный з-н
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциотивность)
- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$

Операции объединения и пересечения взаимно распределительные (дистрибутивные)

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$ ← наоборот

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$ - дистриб-ть объедин. отн. пересечения

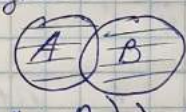
3. Разность множеств ($\setminus$)

$$C \overset{def}{=} A \setminus B = C = \left\{ c : \begin{cases} c \in A \\ c \notin B \end{cases} \right\}$$

Если $B \subset A$, то $A \setminus B$ - дополнение множества B множеством A

При помощи операций разности и объединения можно образовать симметрическую разность множеств A и B

$\setminus$ и $\cup$ Δ



$$C \overset{def}{=} A \Delta B \Leftrightarrow \cancel{C = \{c:} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$C \overset{def}{=} A \Delta B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

4. Декартово произведение множеств ($\times$)

$$C = A \times B \Leftrightarrow C = \left\{ c = (x, y) : \begin{cases} x \in A \\ y \in B \end{cases} \right\}$$

Декартово произведение двух множеств есть совокуп. упор. пар элементов, первые из которых $\in$ первому множеству, а второе второму. (некоммутативна, но ассоциативна)

$$A \times B \neq B \times A$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5\}$$

$$C = A \times B = \{(1,4), (2,4), (3,4), (1,5), (2,5), (3,5)\}$$

Законы Де Моргана.

1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Метод математической индукции.

① $S_n = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \dots + \frac{1}{4\cdot5} + \frac{1}{6\cdot6} + \frac{1}{7\cdot8} + \dots$

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

$\dots$

$S_n = \frac{n}{n+1}$

$S_n = \frac{2-1}{1\cdot2} + \frac{3-2}{2\cdot3} + \frac{4-3}{3\cdot4} + \dots + \frac{n+1-n}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} -$

$- \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

Метод математ. индукции закл. в след: утв-е справедливо для всякого натурального n, если:

1) оно справедливо для $n=1$

2) из справедливости утв-я для какого-либо произвольного натурального $n=k$ следует его справедливость для $n=k+1$

$S_n = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

1) $n=1$.

$S_1 = \frac{1}{2}$

$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ – верно

2) $n=k$

$\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

$\left(\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$

$n = k+1$.

$\frac{n}{n+1} = \frac{k+1}{k+2}$

$= \frac{1}{k+1}\left(k + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{k+1}\left(\frac{k^2+2k+1}{k+2}\right) =$

$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

② $S_n = 1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ $(n \geq 2)$

1) $S_2 = (1)\cdot2 = 2$

$S_2 = \frac{1\cdot2\cdot3}{3} = 2$ $\qquad \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = 2$ – верно

2) $n = k \ (k \geq 2)$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (k-1)k = \frac{(k-1)k(k+1)}{3} \quad (k \geq 2)$$

3) $n = k+1$

$$\underbrace{\frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{(k+1-1)(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)k(k+2)}{3}}\ (1)$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (k-1)k + (k+1-1)(k+1) = \frac{(k-1)k(k+1)}{3} + k(k+1) =$$

$$= \cancel{(k-1)k} \quad \cancel{(k+1)} \cancel{(k(k-1)+} \quad k(k+1)\left(\frac{k-1}{3} + 1\right) = k(k+1)\left(\frac{k-1+3}{3}\right) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \quad (2)$$

Выражение (1) = (2) – верно.

Сумма всех нечётных чисел:

3) $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

$S_1 = 2 - 1 = 1$ $\qquad S_3 = 4 + 5 = 9$ $\qquad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \ldots$

Отлич. на 2.

$S_2 = 1 + 3 = 4$ $\qquad S_4 = 9 + 7 = 16$

$$S_n = \frac{1 + (2n-1)}{2} \cdot n = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2$$

1) $n = 1$

$S_1 = 1$

$n^2 = 1^2 = 1$ $\Rightarrow 1 = 1$ – верно.

2) $n = k$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$$

3) $n = k+1$

$$n^2 = (k+1)^2 \quad (1)$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = k^2 + (2(k+1)-1) =$$

$$= k^2 + (2k+2-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \quad (2)$$

Выражение (1) = (2) – верно

④ $n(2n^2+7) \vdots 3$

$n + (2n^2+7) \vdots 3$

1) $n = 1$.

$n(2n^2+7) = 1 \cdot (2+7) = 9$ (кратно 3)

~~2) $n = k$. $k(2k^2+7)$~~

~~$n = k+1$~~
~~$(k+1)(2(k+1)^2+7) = (k+1)(2(k^2+2k+1)+7) =$~~
~~$= (k+1)(2k^2+4k+2+7) = (k+1)(2k^2+4k+9)$~~

~~$k=1 \quad 2 \cdot (2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 9) = 2 \cdot (8+8+9) =$~~

2) $n = k \Rightarrow k(2k^2+7) \vdots 3$

3) $n = k+1$.

$(k+1)(2(k+1)^2+7) = (k+1)(2(k^2+2k+1)+7) =$
$= (k+1)(2k^2+4k+2+7) = (k+1)(2k^2+4k+9) =$
$= 2k^3+4k^2+9k+2k^2+4k+9 =$
$= 2k^3+6k^2+13k+9 = (2k^3+7k)+6k^2+6k+9 \vdots 3 =$
$=$

⑤ $4^n + 15n - 1 \vdots 9 \quad (3^2)$

1) $n = 1$

$4 + 15 - 1 = 18 \vdots 9$

2) $n = k$.

$\Rightarrow 4^k + 15k - 1 \vdots 9$

3) $n = k+1$.

$4^{(k+1)} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 =$
$= 4 \cdot 4^k + 15k + 14 = 4 \cdot 4^k + 16k - k + 16 - 2 =$
$= (4^k + 15k - 1) + 3 \cdot 4^k + 15 \quad (1)$

$3 \cdot 4^k + 15 \vdots 9$

1) $k = 1$.

$3 \cdot 4 + 15 = 27 \vdots 9$

2) $k = m \Rightarrow 3 \cdot 4^m + 15 \vdots 9 \quad (2)$

3) $k = m+1$.

$3 \cdot 4^{m+1} + 15 = 3 \cdot 4 \cdot 4^m + 15 = 12 \cdot 4^m + 15 = 3 \cdot 4^m + 15 + 9 \cdot 4^m \vdots 9 \quad (3)$

⑥ $36^n + 10 \cdot 3^n \vdots 11$

1) $n=1$?

$36 + 30 = 66 \vdots 11$

2) $n = k \Rightarrow \underline{36^k + 10 \cdot 3^k} \vdots 11$

3) $n = k+1$

$36^{k+1} + 10 \cdot 3^{k+1} = 36 \cdot 36^k + 10 \cdot 3 \cdot 3^k = \underbrace{36^k + 10 \cdot 3^k} + 35 \cdot 36^k + 20 \cdot 3^k =$

$35 \cdot 36^k + 20 \cdot 3^k \vdots 11$ $\qquad = 3(36^k + 10 \cdot 3^k + 11 \cdot 36^k) =$?

1) $k=1 \Rightarrow 35 \cdot 36 + 60 = 1320 \vdots 11$ $\qquad = 3(36^k + 10 \cdot 3^k) + \underline{33 \cdot 36^k} \vdots 11$ ~~преобр~~

2) $k = m$

$35 \cdot 36^m + 20 \cdot 3^m$

3) $k = m+1$

$35 \cdot 36^{m+1} + 20 \cdot 3^{m+1} = \cancel{35 \cdot 36 \cdot 36^m} + \cancel{60 \cdot 3^m} = 35 \cdot 1 \cdot \cancel{36}^m + 20 \cdot 3^m +$
$+ 40 \cdot 3^m +$

⑦ $n \geq 2$

$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ $\qquad$ Расс-ть разность $S_{k+1} - S_k > 0$ по транзитивности.

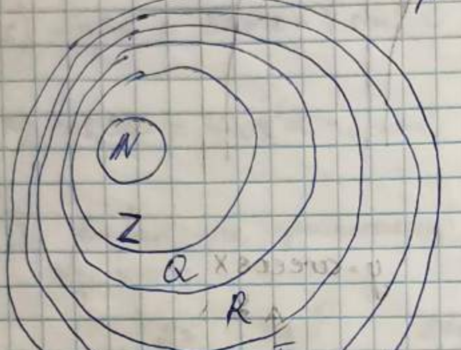
$\vdots 9$ (3)

§3. Числовые множества и их свойства.

Понятие числа - одно из элементарных понятий в математике. Оно возникло и развивалось в результате практич. потребности выражать количественно всевозможные соотношения между различными объектами внешнего мира.

3.1 Множество натуральных чисел.

$N = \{1, 2, 3 \ldots, \}$ Натуральные числа - это числа, возник. при счете предметов.



Метод математической индукции:

~ пусть имеется некоторое утверждение $A(n)$ $n \in N$. Надо док-ть, что это утверждение верно для любого натурального n, для этого нужно:

1) Проверить, что при $n=1$ → утв. верно (база индукции)

2) Предположение, что $A(n)$ - верно для $n=k$, доказывается верность утверждения $A(n)$ при $n=k+1$.

$\forall k \in N \quad A(k) \Rightarrow A(k+1)$

Если п.1 и п.2 - выполнены, то утв. верно $A(n)$ верно $\forall n \in N$

Замечание: при помощи метода матем. индукции можно док-ть утверждение $A(n)$, где $n \geq n_0$, $n_0 \in N$

① Геометрическая прогрессия ~ последовательность $\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$, в которой каждый последующий член получается при помощи предыдущего умножением на одно и то же число.

q - знаменатель прогрессии.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ (ММИ)

1) $n=1$; $b_1 = b_1 \cdot q^0 = b_1$ - верно.

2) $n=k$; $b_k = \underline{b_1 \cdot q^{k-1}}$

Д-ть, что $b_{k+1} = b_1 \cdot q^k$.

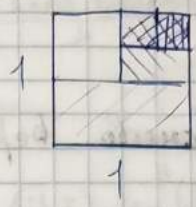
$b_{k+1} = b_k \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = \underline{b_1 \cdot q^k}$

$S_n = \dfrac{b_1}{1-q}(1-q^n)$

Для бесконечно убывающей геом. прогрессии: $S_n = \frac{b_1}{1-q}$

Беск. уб. геом. прогр. $\to |q| < 1$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \quad \to S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$



$$S_n = \frac{b_1}{1-q}(1-q^n)$$

1) $n=1$.

$S_1 = b_1 = \frac{b_1(1-q)}{(1-q)} = b_1$ - верно

2) $n = k$; $S_k = \frac{b_1}{1-q}(1-q^k)$

3) $n = k+1$; $S_{k+1} = \frac{b_1}{1-q}(1-q^{k+1})$

$$S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = \frac{b_1(1-q^k)}{1-q} + b_1 \cdot q^k = \frac{b_1}{1-q}\left(1-q^k + \frac{q^k(1-q)}{1}\right) =$$

$$= \frac{b_1}{1-q}(1-q^k+q^k-q^{k+1}) = \frac{b_1}{1-q}(1-q^{k+1})$$

② Арифметическая прогрессия - последовательность $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ в которой каждый последующий член получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа.

$a_{n+1} = a_n + d$ $\qquad a_n = a_1 + d(n-1)$ (ММИ)

1) $n=1$; $a_1 = a_1 + 0 = a_1$ - верно

2) $n=k$; $a_k = a_1 + d(k-1)$

3) $n = k+1$; $a_{k+1} = a_1 + dk$ (док-ть)

$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + dk - d + d = a_1 + dk$.

- доказано.

• $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (ММИ)

1) $n=1$; $S_1 = a_1$. - верно

$\frac{a_1 + a_1}{2} \cdot 1 = a_1$.

2) $n = k$; $S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k$

3) $n = k+1$; $S_{k+1} = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2} \cdot (k+1)$ - док-ть

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{(a_1+a_k)\cdot k}{2} + a_{k+1} = \frac{(a_1+a_k)k}{2} + a_1 + kd =$

$= \frac{a_1 k + a_k k + 2a_1 + 2kd}{2} = \frac{a_1 k + a_k \cdot k + 2(a_1 + kd)}{2} = \frac{a_1 k + a_k \cdot k + 2a_{k+1}}{2} =$

$$= \frac{(a_1+a_k)k + 2a_{k+1}}{2} = \frac{a_1(k+1) + (a_1+d)k + (a_1+dk)}{2} =$$

$$= \frac{a_1(k+1) + a_{k+1}(k+1)}{2} = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}(k+1)$$

③ Неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall x > -1$$

1) $n=1$; $1+x \geq 1+x$ — верно

2) $n=k$; $(1+x)^k \geq 1+kx$

3) $n=k+1$; $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$ — док-ть

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x) =$$

$$= \underbrace{1+x+kx}{} + \underbrace{kx^2}_{\geq 0} \geq 1+x+kx = 1+x(1+k)$$

④ Бином Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^n b^n$$

Треугольник Паскаля:

		1			$n=0$
	1		1		$n=1$
	1	2	1		$n=2$
1	3		3	1	$n=3$
1 4	6		4	1	$n=4$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

$$0! = 1.$$

$$C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$$

C_n^k — биномиальные коэффициенты; Свойства:

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$

2) $C_n^k = C_n^{n-k}$

3) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

5) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k = 0$?

Сумма биномиальных коэф-ов, стоящих на нечётных местах, равна сумме коэф-ов, стоящих на чётных местах, и равна: 2^{n-1}.

Док-во ММИ формулы Бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

1) $n=1$; $(a+b)^1 = a+b$

$$\sum_{k=0}^{1} = C_1^k a^{1-k} b^k = C_1^0 \cdot a + C_1^1 b = a+b$$

2) $(a+b)^{n+1} =$

Докажем, что при замене n на $n+1$ эта формула остается верной:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$$

...

$$C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}(n-k+1+k) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

1) $n=1$ - верно

2) $n=n$; $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

3) $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n \quad (a+b)(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \cdot (a+b) =$

$= a \sum_{k=0}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

1) $n=1$ — верно

2) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ — верно

$k+1=m$

$n+1$

Докажем, что $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k\right) \cdot (a+b) =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum C_n^k \cdot a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^k =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^k + C_n^n a^0 b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k+1} b^k \overbrace{\left(C_n^k + C_n^{k-1}\right)}^{C_{n+1}^k} + b^{n+1} \ominus$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^{n-m+1} b^m = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^k$$

$$\ominus \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n-k+1} b^k$$ — ч.т.д.

Множество целых чисел. (§ 3.2)

Натуральные числа, 0 и числа, противоположные натуральным обр. множество целых чисел.

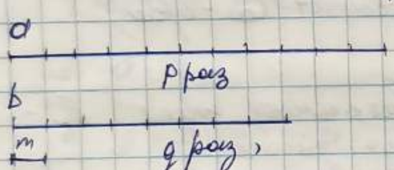
$Z = \{0; \pm 1; \pm 2, \dots\}$ die Zahl – (нем.) – число

Множество рациональных чисел (§ 3.3)

Q – рациональные числа – числа, представимые в виде $\frac{p}{q}$, где p – число целое, q – натуральное ($p \in Z; q \in N$)

Можно показать, что все рац-ые числа представимы в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Два отрезка a и b называются соизмеримыми, если существует такой отрезок m, называемый их общей мерой, который в целое число раз укладывается в отрезки a и b.
~ в противном случае: отрезки a и b называются несоизмеримыми.



Примем отрезок b – за единицу масштаба.

$l[a]$ – длина отрезка a

$l[b] = 1$ – длина отрезка b

$l[m] = \frac{1}{q}$; $l[a] = \frac{p}{q}$

Вывод: рациональные числа служат для измерения раз-х величин соизмеримых с выбранной единицей масштаба.

Иррациональные числа (§ 3.4)

I – это числа, которые нельзя представить в виде обыкновенных дробей.

$\pi, e, \sqrt{2} \dots$

Пример: Док-ть, что число $\sqrt{2}$ – иррациональное.

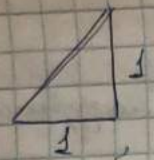
$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ несокр. $\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = \underbrace{2q^2}_{\vdots 2}$

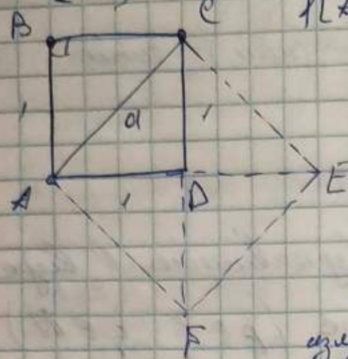
$p = 2k \longrightarrow 4k^2 = 2q^2 \; | : 2$

$\underbrace{2k^2}_{\vdots 2} = q^2 \longrightarrow q = 2m$

$2k^2 = 4m^2$

$\underbrace{k^2 = 2m^2}_{\vdots 2} \longrightarrow$ противоречие (т.к $\frac{p}{q}$ – несокр. дробь)





$l[AB] = 1$

$a^2 = S_{ACEF} = 4S_{ADC} = 2S_{ABCD} = 2$

$\Rightarrow a = \sqrt{2}$ – диагональ квадрата несоизмерима со стороной квадрата.

Вывод: иррациональные числа служат для измерения физ-х величин несоизмеримых с выбранной единицей масштаба.

Действительные числа (§3.5)

$R = Q \cup I$

Существуют различные подходы для опр понятия действительного числа, три основных из них сформулированы Кантором, Вейерштрассом, Дедекиндом.

Аксиоматическое опр-е множества действительных чисел: R – это множество, в котором введены действия сложения и умножения, а также отношение равенства и порядка, удовл. следующим аксиомам:

I. Аксиома сложения.

1. Ассоциативность сложения ($\forall a, b, c \in R$
$a + (b + c) = (a + b) + c$

2. Существование нейтрального элемента относительно сложения.

$\exists 0 \in R\ ;\ \forall a \in R \Rightarrow$

3. Существование противоположного элемента.

$\forall a \in R\ \exists (-a) \in R$, где $a + (-a) = 0$

4. Коммутативность сложения.

$\forall a, b \in R \rightarrow a + b = b + a$

II. Аксиомы умножения.

1. Ассоциативность умножения.

$\forall a, b, c \in R \rightarrow a(bc) = (ab)c$

2. Существование нейтрального (единичного) элемента.

$\exists 1 \in R \quad \forall a \in R$

$a \cdot 1 = a$

$1 \cdot a = a$

3. Существование обратного элемента.

$\forall a \in R,\ a \neq 0\ \exists\ \frac{1}{a} \in R: \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1$

4. Коммутативность умножения.

$\forall a, b \in R: \quad a \cdot b = b \cdot a$

III. Связь сложения и умножения. (дистрибутивность)

$\forall a \in R,\ \forall b \in R,\ \forall c \in R$

$(a+b)c = ac + bc.$

IV. Аксиомы равенства.

$\forall a, b, c \in R$

1. $a = a$
2. $a = b \Rightarrow b = a$
3. $a = b,\ b = c \Rightarrow a = c$ (транзитивность.)
4. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$
5. $a = b \Rightarrow ac = bc$

V. Аксиомы порядка.

1. $\forall a \in R$, выполняется одно из соотношений: $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$
2. $\forall a > 0,\ \forall b > 0, \Rightarrow a + b > 0$
3. $\forall a > 0,\ \forall b > 0 \Rightarrow ab > 0$

VI. Аксиома непрерывности.

Для любых двух подмножеств действ. чисел таких, что a лежит левее b найдётся число c, которое лежит между ними.

$\forall A \in R,\ \forall B \in R$, таких что $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b\ \exists\ c \in R$

$a \leq c \leq b$

(c – число разделяющее множество A и B.)

1 Замечание: 1) Если для элементов множества выполн. аксиомы I 1-3, то такое множество явл. группой относительно операций сложения.

2) Если для элементов множества выполн. аксиомы II 1-3, то такое мн-во явл. группой относительно операций умножения.

Аксиомы I.4 и II.4 говорят о том, что каждая из этих групп коммутативна.

2 Замечание: если для некоторого мн-ва выполняются аксиомы I - IV, то такие мн-ва называются полем

Аксиомы I - VI говорят о том, что мн-во $\mathbb{R}$ является упорядоченным непрерывным полем.

Множество $\mathbb{Q}$ также удовлетворяет аксиомам I - V и является упорядоченным полем, но аксиома VI для $\mathbb{Q}$ не выполнена.

Пример: для подмножеств рациональных чисел:

$$A = \{ r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2 \}$$
$$B = \{ r \in \mathbb{Q} \mid r^2 > 2 \}$$
$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Основные св-ва числовых неравенств
(следуют из аксиом множества действительных чисел.)

1) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$
верно одно из соотношений
$a < b, \ a = b, \ a > b$

2) $\forall a, \forall b \in \mathbb{R}: a < b \Rightarrow b > a$

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a > b, b > c \Rightarrow a > c$

4) $a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

5) $a < b, \ c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

$a < b, \ c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

6) $a < b, \ c < d \Rightarrow a + c < b + d$

7) $a < b, \ c < d, \ a > 0, \ c > 0 \Rightarrow ac < bd$

Геометрическая интерпретация множества действительных чисел.

Геометрический образ множества $\mathbb{R}$ - это числовая прямая. (числовая ось)

Числовая ось есть непрерывная бесконечная прямая, на которой выбрано начало отсчёта (произвольная точка, условно соответствующая числу 0) отмеченная стрелкой напр. возрастания чисел и масштаб (единичный отрезок от начала отсчёта до точки на прямой, условно соотв. числу 1.

Между точками числовой оси и действительными числами имеется взаимнооднозначное соответствие, т.е. 1) каждой точке числовой оси соотв. единственное число
2) для каждого числа найдется соотв. ему точка
3) и разным точкам числовой оси соотв. разные числа.

Расширенное множество действительных чисел.

Множество $\mathbb{R}$ удобно дополнить 2мя несобственными элементами которые не явл. числами $\to -\infty$ и $+\infty$

при этом полагая, что $\forall x \in \mathbb{R}$ $-\infty < x < +\infty$; $-\infty < +\infty$;

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$
$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$
$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty = (-\infty)\cdot(-\infty)$$
$$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$$
$$x + (+\infty) = +\infty$$
$$x + (-\infty) = -\infty$$

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \qquad x\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{+\infty}{x} = \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases} \qquad x\cdot(-\infty) = \begin{cases} -\infty, & x > 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{-\infty}{x} = \begin{cases} -\infty, & x > 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}$$

Не определены: $+\infty + (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, 1^{∞}, $0\cdot(\pm\infty)$

$+\infty$ и $-\infty$ - бесконечно удалённые точки числовой прямой.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ - расширенная числовая прямая (расширенное множество действительных чисел.)

$\infty = \pm\infty$

Подмножества множества $\mathbb{R}$

~ $E \subset \mathbb{R}$ - назыв. промежутком, если для любых двух чисел, лежащих в E число, лежащее между ними, также лежит в E.

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z : x<z<y \Rightarrow z \in E$$

Промежутки на прямой бывают следующих видов:

1) $[a;b]$ - отрезок : $\{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$ 

2) $(a;b)$ - интервал: $\{x \in \mathbb{R};\ a<x<b\}$ 

3) $[a;b)$ - полуинтервал: $\{x \in \mathbb{R};\ a<x<b\}$ 

4) $(a;b]$ - полуинтервал : $\{x \in \mathbb{R};\ a<x\leqslant b\}$ 

5) $[a;+\infty)$ - правый замкнутый луч : $\{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < +\infty\}$ 

6) $(a;+\infty)$ —//— открытый $\{x \in \mathbb{R};\ a<x<+\infty\}$ 

7) $(-\infty;a]$ - левый замкнутый луч: $\{x \in \mathbb{R},\ -\infty<x\leqslant a\}$ 

8) $(-\infty;a)$ —//— открытый : $\{x \in \mathbb{R};\ -\infty<x<a\}$ 

Модуль действительного числа.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$ - аналитическое опр-е модуля.

Геометрическое опр-е: $|x-y|$ - расст от x до y.

$|x|$ - расст. от точки

Св-ва модуля:

1) $|x| \geqslant x$, $|x| \geqslant -x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $|x| \geqslant 0$

3) $|xy| = |x| \cdot |y|$

4) $|-x| = |x|$

5) $|x| \leqslant a$, $a>0$ $\rightarrow -a \leqslant x \leqslant a$

$|x|>a \iff \left[\begin{array}{l} x>a \\ x<-a \end{array}\right.$

6) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$

$\begin{cases} |x| \geqslant x \\ |y| \geqslant 8 \end{cases} \rightarrow |x|+|y| \geqslant x+y$

$$\begin{cases} |x| \geq -x \\ |y| \geq -y \end{cases} +$$

$$|x|+|y| \geq -(x+y)$$

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

г) $|x_1+x_2+\ldots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$, $n \geq 2$, $n \in N$ ММИ

1) $n=2$, $|x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2|$ – б св-во

2) $n=k$; $|x_1+x_2+\ldots+x_k| \leq |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k|$, $k \geq 2$; $k \in N$

3) $n=k+1$; $|x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}| \leq |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_{k+1}|$

$$|x_1+x_2+\ldots+x_k|+|x_{k+1}| \leq \underbrace{(|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k|)+|x_{k+1}|}_{\text{что и т.д.}}$$ – по б св-ву.

в) $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$

Док-во: $|x-y|+|y| \geq |x|$ (г.) $\quad |x-y| \geq |x|-|y|$

$|y-x|+|x| \geq |y|$ (г.) $\quad \underset{=|x-y|}{|y-x|} \geq -(|x|-|y|)$

$$\Downarrow$$

$$|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$$

Пример: показать, что неравенство выполняется для всех x.

$$|3x-1| \leq |2x-1|+|x|$$

$$|2x-1+x| \leq |2x-1|+|x|$$ – по св-ву модуля (б.)

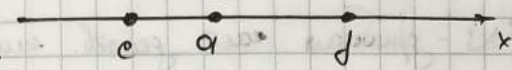
$$|x| = \max(-x, x)$$

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |x| = x \cdot \operatorname{sgn} x = \begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

Окрестности действительных чисел.

Опр. Окрестность действительного числа a есть произвольный интервал числовой оси, содерж. т. a $a \in (c; d)$



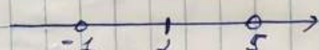
Важную роль в дальнейшем будут играть окрестности т. a, которые будут явл. серединой.

Если длину такого интервала назвать 2ε, $\varepsilon > 0$:

Такие окрестности называют ε-окрестностями точки a и обозначают $U_\varepsilon(a)$.

$$U_\varepsilon(a) = \{x: |x-a| < \varepsilon\}$$

Пример. $(-1; 5)$



3-окрестность точки 2 $(U_3(2))$

Если окрестность т. a не содержит самой этой точки, то она назыв. проколотой окрестностью т. a. $\mathring{U}_\varepsilon(a) = \{x: 0 < |x-a| < \varepsilon$

Опр. ε-окрестностью символа $+\infty$ называют промежуток $(\varepsilon; +\infty)$

$U_\varepsilon(+\infty)$:

$$U_\varepsilon(+\infty) = \{x: x > \varepsilon\}$$

Опр. ε-окрестность символа $-\infty$ назыв. пром. $(-\infty; -\varepsilon)$

$U_\varepsilon(-\infty)$:

$$U_\varepsilon(-\infty) = \{x: x < -\varepsilon\}$$

$(-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$ – ε-окрестность символа ∞ – беззнаковая бесконечность

$$U_\varepsilon(\infty) = \{x: |x| > \varepsilon\}$$

Целая и дробная часть числа.

– $[x]$ – целая часть числа – наиб. целое число, не превосходящее x

$[-1{,}2] = -2$

$[7{,}04] = 7$

$[0] = 0$

$\{x\}$ - дробная часть действ. числа. - разность между числом и его целой частью

$\{x\} = x - [x]$

$\{1{,}7\} = 1{,}7 - 1 = 0{,}7$

$\{-0{,}3\} = -0{,}3 + 1 = 0{,}7$

Домашняя работа.

3

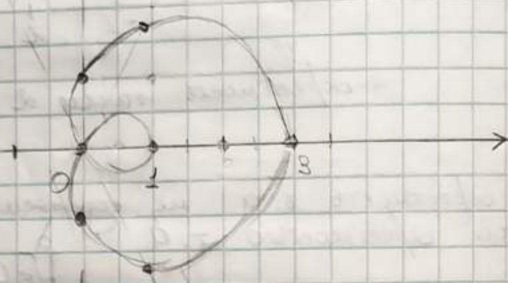
1) $r = 1 + 2\cos\varphi$

$1 + 2\cos\varphi = 0$

$\cos\varphi = -\frac{1}{2}$

$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$

$\varphi = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$



$1 = 1 + 2\cos\varphi$

$2\cos\varphi = 0$

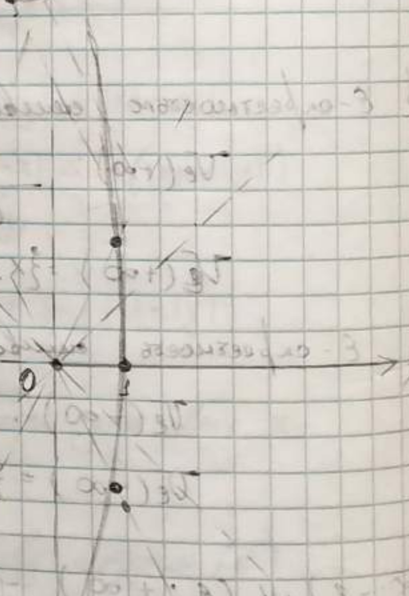
$\cos\varphi = 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

2) $r = \frac{1}{\cos\varphi}$

$\cos\varphi \neq 0$

$\varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$



Лекция ...

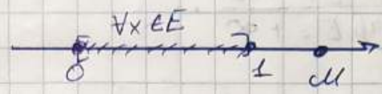
Ограниченные и неограниченные множества.

Понятие ограниченности можно ввести для любого упорядоченного поля.

Опр. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху в множестве $\mathbb{R}$, если существует $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E : x \le M$.

ограниченным

Пример: $E = [0; 1]$



При этом число M называется верхней гранью (границей) множества E.

Если множество ограничено сверху, то верхних граней существует сколько угодно много.

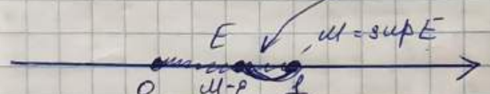
Опр. Множество $E \subset \mathbb{R}$ не ограничено сверху, если $\forall M \in \mathbb{R}; \exists x \in E: x > M$

Пример: $E = [0; +\infty)$

Опр. Точной верхней гранью множества E называется число $M = \sup E$ (супремум), что выполняются следующие условия:

1) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E;\ x \le M$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon > M - \varepsilon$



Точная верхняя грань - это наименьшая из всех верхних границ.

$\sup E = 1$.

Аналогично вводится следующее опр.

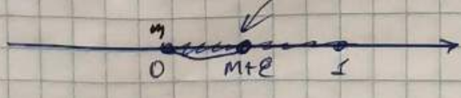
Опр. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу в множестве $\mathbb{R}$, если существует $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E: x \ge m$

Опр. Множество $E \subset \mathbb{R}$ не ограничено снизу, если $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in E: x < m$

Опр. Точной нижней гранью множества E называется число $m = \inf E$ (инфимум), что выполняются следующие условия:

1) $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E;\ x \ge m$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon < m + \varepsilon$



$\inf E = 0$

~~Пример~~ док-ть, что

$\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\right\} \quad n \in N$

Опр. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу.

Если множество $E \in \mathbb{R}$ не ограничено $\frac{\text{снизу}}{\text{сверху}}$, то будем полагать, что $\frac{\inf E = -\infty}{\sup E = +\infty}$.

~~Пример~~: док-ть, что $\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\right\}$ $n \in N$ - ограничено. Найти точные нижнюю и верхнюю грань множества.

1) $0 < \frac{n^2}{n^2+4} < 1$ - показали, что множество ограничено.

2) Док-ть, что $\sup\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\right\} \overset{?}{=} 1$

1) $\frac{n^2}{n^2+4} \le 1$

$\frac{n^2+4-4}{n^2+4} = 1 - \frac{4}{n^2+4} \le 1$ - всегда при $n \in N$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \frac{n^2}{n^2+4} > 1 - \varepsilon$

$\frac{n^2+4-4}{n^2+4} > 1 - \varepsilon$

$1 - \frac{4}{n^2+4} > \cancel{1} - \varepsilon$

$\varepsilon > \frac{4}{n^2+4}$; $\frac{4}{n^2+4} < \varepsilon \;/ : \varepsilon \,/ \cdot n^2+4$

$\frac{4}{\varepsilon} < n^2 + 4$

$n^2 > \frac{4}{\varepsilon} - 4$

$n_\varepsilon^2 > \frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$

$\exists n_\varepsilon = \left[2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right] + 1 \Leftarrow n > 2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$

доказали по опр. (т.к. $n \in N$)

$n_\varepsilon > [7{,}02]$

$n_\varepsilon =$

Доказате
пустое числ
всех чисел,
ство X огра
Каждый эл
т. е. для лю
$x \le y$. Элеме
соответстве
прерывност
существует
место нерав

$-X$
$-a$
Р

ничивающ
ляется наи
гранью мн

Итак,
сверху неп
Если те
множество
вающие сн
рассмотре
что, в силу
существует
полняется

Это, очевид
Впрочем
ограниченн
и из уже до
грани у
Достаточно
жество, то м
жество на
X относите
ху множест
ху множест
Действитель
X, то число
число b огра
чивает снизу
su

Из сущес
непустого м
ществование
множества.

Св-ва множества $\mathbb{R}$

Теорема 1.2: Любое не пустое ограниченное $\frac{\text{снизу}}{\text{сверху}}$ множество имеет конечную точную $\frac{\text{нижнюю}}{\text{верхнюю}}$ грань

Док-во о существовании верхней грани:

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ - непустое ограниченное сверху множество

$\Rightarrow \exists M,\ \forall x \in E: \quad x \leq M$

Пусть множество A - множество всех верхних граней множества E.

мн-о A - не пустое ($A \neq \varnothing$, т.к. $M \in A$), тогда по аксиоме непрерывности (VI) для любых двух подмножеств действ. чисел, таких, что a лежит левее b найдётся число c, лежит между ними.

$\exists c \in E,\ \forall x \in E,\ \forall M \in A \quad x \leq c \leq M$

Покажем, что $c = \sup E$: т.к. $x \leq c$, $\forall x \in E$, то c - верхняя граница для множества E

т.к. $c \leq M$, то c - наименьшая из всех верхних граней, т.е. $c = \sup E$

ч. и. т. д.

Док-во о существовании нижней грани: (Аналогично с верхней)

Доказательство. Пусть X — ограниченное сверху непустое числовое множество. Обозначим через Y множество всех чисел, ограничивающих сверху множество X. Множество X ограничено сверху, поэтому множество Y не пусто. Каждый элемент $y \in Y$ ограничивает сверху множество X, т. е. для любого элемента $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant y$. Элементы x и y являются произвольными элементами соответственно множеств X и Y, поэтому, в силу свойства непрерывности действительных чисел (см. свойство V в п. 2.1), существует такое число β, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ имеет место неравенство

$$x \leqslant \beta \leqslant y. \tag{3.2}$$

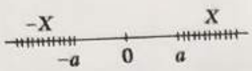


Рис. 7

Выполнение неравенства $x \leqslant \beta$ для всех $x \in X$ означает, что число β ограничивает сверху множество X, а выполнение неравенства $\beta \leqslant y$ для всех $y \in Y$, т. е. для всех чисел, ограничивающих сверху множество X, означает, что число β является наименьшим среди всех таких чисел, т. е. верхней гранью множества X:

$$\beta = \sup X. \tag{3.3}$$

Итак, существование верхней грани у ограниченного сверху непустого множества доказано.

Если теперь Y — непустое ограниченное снизу числовое множество, то отнесем к множеству X все числа, ограничивающие снизу множество Y. Далее, рассуждая аналогично рассмотренному случаю верхней грани, легко убеждаемся, что, в силу свойства непрерывности действительных чисел, существует такое число α, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство

$$x \leqslant \alpha \leqslant y. \tag{3.4}$$

Это, очевидно, и означает, что $\alpha = \inf Y$. □

Впрочем, утверждение о существовании нижней грани у ограниченного снизу непустого множества можно получить и из уже доказанного утверждения о существовании верхней грани у непустого ограниченного сверху множества. Достаточно заметить, что если X — ограниченное снизу множество, то множество $-X$ всех чисел $-x$, где $x \in X$, т. е. множество на числовой прямой, симметричное с множеством X относительно нуля, является уже ограниченным сверху множеством, и, наоборот, если X — ограниченное сверху множество, то множество $-X$ ограничено снизу (рис. 7). Действительно, если число a ограничивает снизу множество X, то число $-a$ ограничивает сверху множество $-X$, а если число b ограничивает сверху множество X, то число $-b$ ограничивает снизу множество $-X$. Отсюда следует, что

$$\sup(-X) = -\inf X, \quad \inf(-X) = -\sup X. \tag{3.5}$$

Из существования верхней грани у ограниченного сверху непустого множества и каждого из равенств (3.5) следует существование нижней грани у ограниченного снизу непустого множества.

...ьное снизу/сверху множество
...ограниченного ... грань
...верхнего

...у множество

...них граней множества E.
...да по аксиоме непрерывности
... чисел таких, что a лежит
...ду ними.
...$\leq c \leq M$
..., $\forall x \in E$, то c - верхняя граница
для множества E
...меньшая из всех верхних
...ней, т.е. $c = \sup E$
ч.и.т.д.
(Аналогично с верхней)

③ Теорема 3. (св-во Архимеда) Множество всех N не ограничено сверху в $\mathbb{R}$

Док-во (методом от противного):

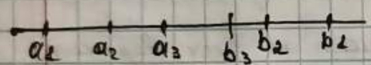
Предположим, что N ограничено сверху в $\mathbb{R}$, тогда: существует $\exists M = \sup N$ – по теореме 1.

Т.к. M – наим. верхняя граница, то число $M-1$ не является верхней границей.

Тогда $\exists n_0 > M-1 \ (n_0 \in N) \Rightarrow n_0 + 1 > M$ – противоречие

Любое натуральное число должно быть не больше M $\Rightarrow$ предположение не верно и N не огр. сверху в $\mathbb{R}$.

④ Теорема 4. (т-а Кантора о вложенных отрезках) → Пусть существует система вложенных друг в друга отрезков $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \ldots \supset [a_n; b_n]$ соответств., длина которых стремится к нулю, тогда существует единственная общая точка всех этих отрезков

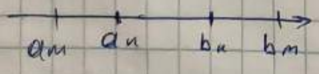


$$(\exists! c : \forall n \in N,\ c \in [a_n; b_n])$$

Док-во: Расс-м множество A, состоящее из всех левых концов отрезка и множество B, состоящее из всех правых концов отрезка.

Покажем, что $a = a_m$ не превосходит любого элемента $b = b_n$ множества B.

- $m = n$, то $a_m < b_n$
- $m < n$, то т.к. $[a_n; b_n]$ вложен в отрезок $[a_m; b_m]$



$[a_m; b_m] \supset [a_n; b_n]$, то $a_m < a_n$

т.к. $a_n < b_n$, то $a_m < b_n$

$\forall a \in A, \forall b \in B, \ a \leq b$

По аксиоме непрерывности VI $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B \ a \leq c \leq b$

поэтому $\forall a = a_n \in A, \ \forall b = b_n \in B : a_n \leq c \leq b_n$

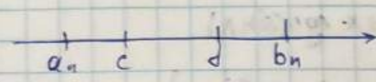
т.е. $\forall n \in N, \ c \in [a_n, b_n]$

Докажем, что т. C – единственная.

Пусть $\exists d \neq : \forall n \in \mathbb{N} \quad c \in [a_n; b_n], \ d \in [a_n; b_n]$, тогда

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < |d - c| \leq b_n - a_n < \varepsilon = \frac{1}{2}|d - c|$

В силу условия стремления к нулю длин отрезков



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 ; \ b_n - a_n < \varepsilon$ → получим противоречие

⑤ Теорема 5. Множество рациональных чисел Q всюду плотно в множестве R (означает, что между любыми двумя различными действительными числами всегда рациональное число)

$\forall a \in R, \forall b \in R, \ a < b \Rightarrow \exists r \in Q : \ a < r < b$

Где в учебнике?

Разобрать док-во в учебнике

Существуют сколь угодно малые иррациональные числа. Например, числа вида $\frac{\sqrt{2}}{n}$, где $n \in N$. Из этого следует, что никакой отрезок прямой не может целиком состоять из рациональных чисел.

3.6. Комплексные числа. ($\mathbb{C}$)

Опр. Комплексными числами называют упорядоченные пары действительных чисел, для которых введены следующие действия
(a, b), $a \in R$, $b \in R$

1) Сложение и вычитание:
$$(a,b) \pm (c,d) = (a \pm c;\ b \pm d)$$

2) Умножение:
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

3) Деление:
$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) \qquad c^2+d^2>0$$

Для операций, введённых для компл. чисел, выполняются все законы подобных операций для действительных чисел.)

$$(a,0) \pm (b,0) = (a \pm b,\ 0)$$
$$(a,0) \cdot (b,0) = (ab,\ 0)$$
$$\frac{(a,0)}{(b,0)} = \left(\frac{ab}{b^2},\ 0\right) = \left(\frac{a}{b},\ 0\right)$$

$a = (a,0)$ – действительное число

Комплексные числа в алгебраической форме.

Опр. Обозначим упор. пару $(0,1)$ буквой i $\rightarrow$ $(0,1) = i$ – мнимая единица

Теорема. Если $i = (0,1)$, то 1) $i^2 = -1$ 2) $(a,b) = a + bi$ $\forall a, b \in R$

1) $i = (0,1)$
$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$. – доказано.

2) $a + bi = (a,b)$
$$a + bi = (a,0) + (b,0)(0,1) = (a,b)$$

Теорема позволяет задать любое к.ч. с использованием действительных чисел.

Представление комп. числа: $z = a + bi$ – называется алгебраической формой комплексного числа.

$$\rightarrow \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-(di)^2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} =$$
$$= \frac{ac - adi + cbi - bi^2d}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+i(cb-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$z = x + iy$

Опр. 1) Пуст...

2) D...

3) y...

4) Чис...

5)

6)

Теорема.

Док-во:

z

Теорема.

1) к...

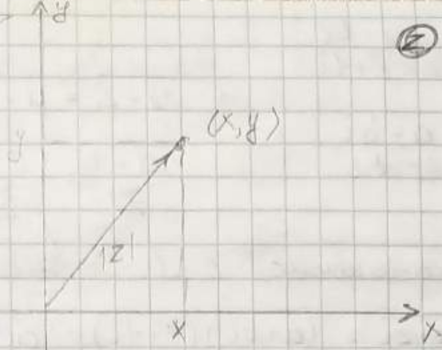
2)

3)

4)

$z = x + iy$

Z - комплексная плоскость



Опр. 1) Пусть $z = x + iy$; неотриц. число $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ - называется модулем или абсолютной величиной компл. ч. z.

2) Действительное число x - назыв. реальной частью к.ч. z
$x = Re(z)$ (real)

3) y - мнимая часть к.ч. $z = x + iy$
$y = Im(z)$ (imagine)

4) Числа вида $\left.\begin{matrix} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{matrix}\right\}$ - называются комплексно-сопряжённые

5) $\left.\begin{matrix} z = x + iy \\ -z = -x - iy \end{matrix}\right\}$ - противоположные

6) $z = iy$ - чисто мнимое число

Теорема. Сумма и произведение комплексно-сопряжённых чисел есть числа действительные!

Док-во: $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2Re\,z$ - действительное число

$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$ - действит. число.

Теорема. Для комплексно-сопряжённых чисел справедливы следующие свойства:

1) Комплексно-сопряжённое от суммы равно сумме комплексно-сопряжённых.
$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2) Комплексно-сопряжённое от произведения равно произведению компл.-сопр.
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3) $\forall a \in R$, $\forall z \in C$: $\overline{a \cdot z} = a \cdot \bar{z}$ 5) $\forall a \in R$ $\bar{a} = a$

4) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ → $\forall n \in N$

Д/З

Док-во: 1) $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ $\rightarrow$ $\overline{z_1+z_2} = \overline{a+c+i(b+d)} = a+c-i(b+d) = \underbrace{a-bi}_{\overline{z_1}} + \underbrace{c-di}_{\overline{z_2}}$

$\overline{z_1} = a-bi$

$\overline{z_2} = c-di$

2) Аналогично с 1. (- расписать!)

Доказано:

$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac+adi+cbi+dibi} = \overline{(ac-db)+i(ad+cb)} = (ac-db)-i(ad+cb)$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (a-bi)(c-di) = ac-adi-cbi+bdi^2 = (ac-bd)-i(ad+\ldots)$

3) $\overline{a\cdot z} = \overline{a}\cdot\overline{z}$ (из пункта 2)

$\overline{a}$; т.к. $a\in R$ $\quad a = a+0\cdot i \quad \overline{a} = a-0\cdot i \Rightarrow a=\overline{a}$

$\Rightarrow \overline{a\cdot z} = \overline{a}\cdot\overline{z} = a\cdot\overline{z}$

4) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

1) $n=1 \rightarrow \overline{z}=\overline{z}$ - верно

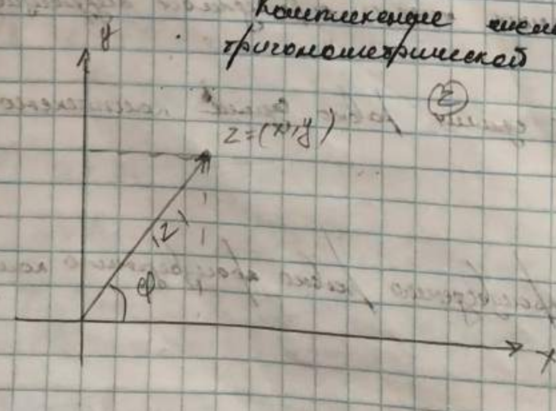
2) $n=k \rightarrow \overline{z^k} = (\overline{z})^k$ - верно

3) $n=k+1 \rightarrow \overline{z^{k+1}} = (\overline{z})^{k+1} \overset{?}{=} (\overline{z})^k\cdot\overline{z}$

$\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k\cdot z} \xrightarrow[\text{два}]{\text{из св-ва}} \overline{z^k\cdot z} = \overline{z^k}\cdot\overline{z} = (\overline{z})^k\cdot\overline{z}$

$\Rightarrow$ доказано методом ММИ

Комплексные числа в тригонометрической форме.



$x = |z|\cos\varphi$

$y = |z|\sin\varphi$

$\rightarrow z = x+iy = |z|\cos\varphi + |z|\sin\varphi\, i = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *

* представление компл. числа выше * называется тригонометрической формой комплексного числа.

$\varphi = \operatorname{Arg} z$ (аргумент)

$\operatorname{Arg} z = \arg(z) + 2\pi k,\ k\in Z$

$arg(z)$ - главное значение аргумента. $-\pi < \arg z \le \pi$

$tg\varphi = \frac{y}{x}$

Теорема. Для компл. ч. z_1 и z_2; $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ справедливо:

1) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$$Arg(z_1, z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2.$$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$$Arg\,\frac{z_1}{z_2} = Arg\, z_1 - Arg\, z_2 \qquad (z_2 \neq 0)$$

Док-во: 1) $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
$z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$

$\alpha = Arg\, z_1$

$\beta = Arg\, z_2$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$$
$$= |z_1||z_2|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

2) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{|z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{|z_1| \cdot e^{i\varphi_1}}{|z_2| \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} = !$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \Rightarrow Arg\,\frac{z_1}{z_2} = Arg\, z_1 - Arg\, z_2$$

Следствие: если утв. 1. применить к n одинаковым сомножителям, то получим формулу Муавра:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$Arg\, z^n = n \cdot z$$

Показательная форма комплексного числа.

Ф-ла Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \underline{|z| \cdot e^{i\varphi}}$ - пок-ая форма компл. числа.

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$
$$+\ e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Ф/3

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$e^{i\pi} = -1 + 0 \Rightarrow \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

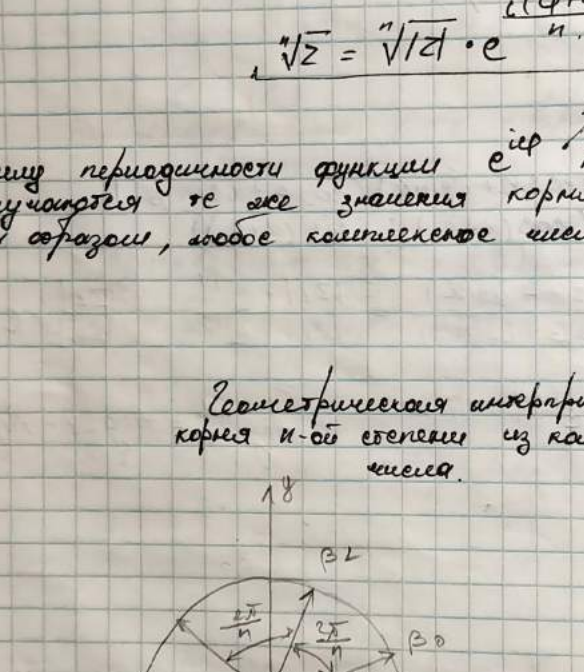
$$z = |z|\,e^{i\varphi} = |z| \cdot e^{i(\varphi + 2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Корень n-ой степени из комп. числа:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

В силу периодичности функции $e^{i\varphi}$ при других целых значениях k получаются те же значения корня, что и $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, любое комплексное число не равное 0 имеет

Геометрическая интерпретация корня n-ой степени из комплексного числа.



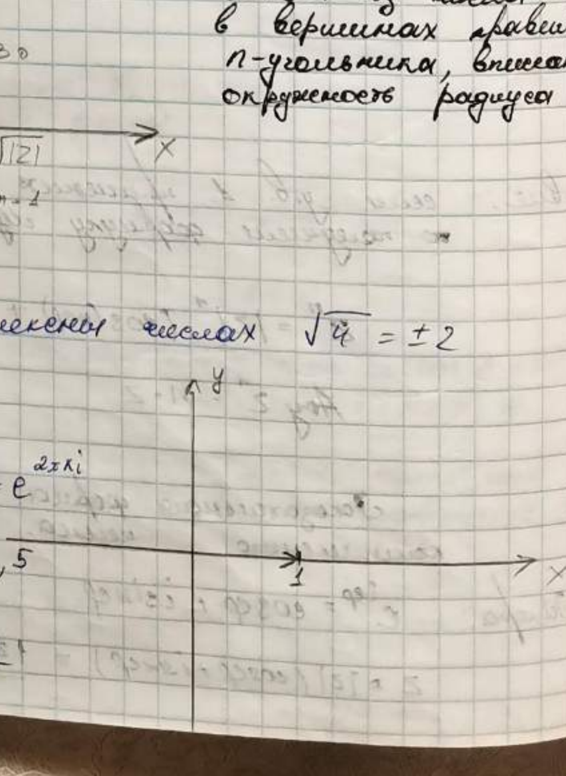
Значение корней n-ой степени из числа z лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$

$\sqrt{4} = 2 \rightarrow$ в комплексных числах $\sqrt{4} = \pm 2$

$\sqrt[6]{1}$

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = e^{i(0 + 2\pi k)} = e^{2\pi k i}$$

$$\sqrt[6]{1} = \underset{1}{\sqrt[6]{|1|}} \cdot e^{\frac{2\pi k i}{6}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 5$$



$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{6} i \cdot 0} = e^{0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

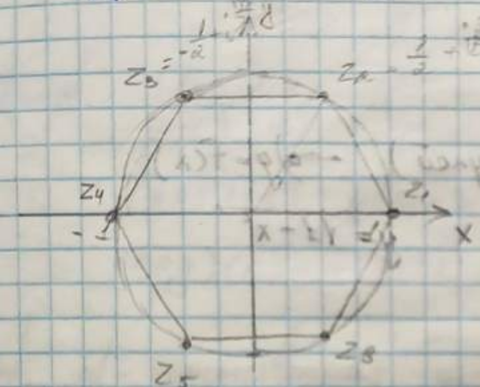
$k=1$
$$z_2 = e^{\frac{2\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi}{3}\cdot i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$k=2 \rightarrow$
$$z_3 = e^{\frac{2\pi\cdot 2 i}{6}} = e^{\frac{2}{3}\pi i} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$k=3$
$$z_4 = e^{\frac{2\pi\cdot 3i}{6}} = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$k=4 \rightarrow$
$$z_5 = e^{\frac{2\pi\cdot 4i}{6}} = e^{\frac{4}{3}\pi i} = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$k=5 \rightarrow$
$$z_6 = e^{\frac{2\pi\cdot 5i}{6}} = e^{\frac{5}{3}\pi i} = \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



§4. Функции действительного переменного.

Опр. Функцией f, действующей из множества X в мн-во Y называют правило, по-которому каждому элементу из X ($x \in X$) сопоставляют один и только 1 элемент из множества Y.

При этом X - называется ООФ (Df - обозначение.), а множество Y - множество значений (Ef - обозначение.)

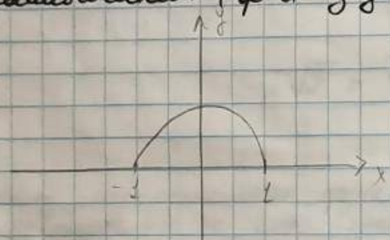
$$f: X \to Y$$

$$f(x) = y$$

4.1. Способы задания функции.

1. Аналитический (ф-я задана формулой) → а) $y = f(x)$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$



б) $F(x, y) = 0$ - неявное задание функции

$$x^3 + y^3 - 1 = 0$$

в) $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ - параметрически ; $t \in T$

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t = [0; \pi]$ - верхняя половина окр.

2. Словесный

Функция Дирихле могут быть заданы так, в рациональных точках ф-я равна 1, в иррациональных 0.

~построить нельзя.

3. Графический

4. Табличный (это возможно, если ООФ - конечное множество)

Опр. Две функции тождественно равны ($f \equiv g$), если их области опр-я совпадают и $f(x) = g(x)$ для любого x из ООФ.

Опр. Суммой двух функций ($\varphi = f + g$) называется её область опр. 1) X_φ - является пересеч. областей X_f и X_g : $X_\varphi = X_f \cap X_g$

2) $\forall x \in X_\varphi$: $\varphi(x) = f(x) + g(x)$

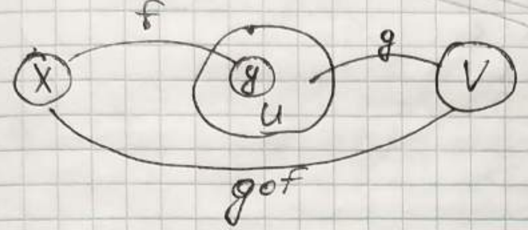
$f-g$, $f\cdot g$ — определяются аналогично.

Опр. Композицией функции $f: X \to Y \subset U$ и функции $g: U \to V$ называется такая функция $f \circ g$ $(g \circ f)$:

Такая что, $\forall x \in X \quad (g\circ f)(x) = g(f(x))$

внутр. ф-я

внешняя ф-я



Пример $f(x) = \cos x$

$g(x) = 2^x$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{\cos x}$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \cos 2^x$

исп. в дифференцировании

Опр. id — тождественная ф-я.

$id(x) = x, \quad \forall x \in X$

Опр. Пусть задана ф-я $f: X \to Y$, обратной к ней назыв. функция $f^{-1}: Y \to X$, такая что $f^{-1}\circ f = id$ и $f \circ f^{-1} = id$.

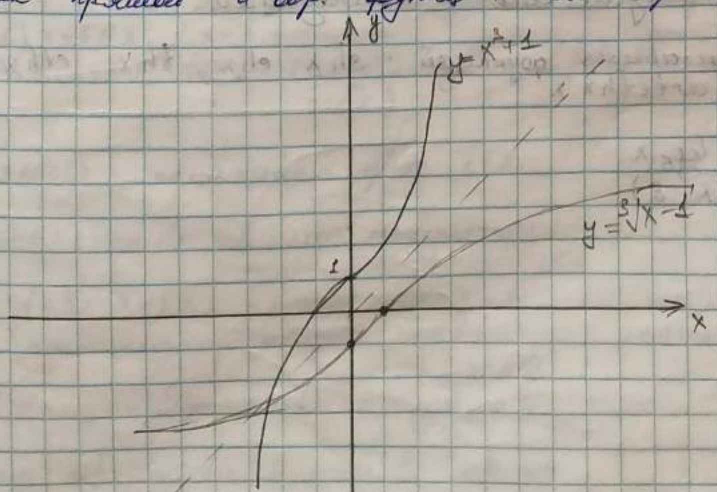
Обратная ф-я (f^{-1}) существует, если функция f - монотонна.

Пример: $y = x^3 + 1$

$x^3 = y - 1 \quad \to \quad x = \sqrt[3]{y-1}$

$y = \sqrt[3]{x-1}$ (обратная к $y = x^3+1$)

График прямой и обр. функции симметричны отн. прямой $y = x$.



1) $f = y = \sin x \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad |x| \leq 1$

$(f^{-1} \circ f)(x) = \arcsin(\sin x) = x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$(f^{-1} \circ f)(y) = \sin(\arcsin y) = y, \quad |y| \leq 1.$

Д/з: Пример 3: $y = \cos x \quad 0 < x \leq \pi$ } Аналогично.
Пример 4: $y = \operatorname{tg} x, \quad x \in \mathbb{R}$ $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
Пример 5: $y = \operatorname{ctg} x, \quad x \in (0, \pi)$

нарисовать

Свойства возрастающих и убывающих функций.

I. $f\uparrow \Rightarrow kf\uparrow$ при $k>0$; $kf\downarrow$ при $k<0$

II $f\uparrow, g\uparrow \Rightarrow (f+g)\uparrow$

III. $f\uparrow, g\uparrow \Rightarrow (f \cdot g)\uparrow$, если $f>0$ и $g>0$

IV. $f\uparrow, g\uparrow \Rightarrow f \circ g\uparrow, \; g \circ f\uparrow$

V. $f\uparrow, g\downarrow \Rightarrow f \circ g\downarrow$

VI. $f\downarrow, g\downarrow \Rightarrow f \circ g\uparrow$

2.3. Элементарные функции.

Опр. 1) Основные элементарные функции - это постоянная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрическая и обратные к тригонометрическим: $C, x^a, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.

2) Элементарные функции - это функции, которые получаются из основных элементарных функций путём конечного числа арифметических действий и композиций.

Примеры элементарных функций: $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{cth} x, \operatorname{arcsh} x, \operatorname{arcch} x, \operatorname{arcth} x, \operatorname{arccth} x$

$$\frac{\cos(2^x) + 3\log_5 x}{\operatorname{arctg}(\arccos x - 8)}$$

Элементарные св-ва функций.

① Монотонность. ~ ф-я f назыв. монотонной на промежутке, если она возрастает или убывает на этом пром-е.

Опр. $f: X \to Y$ возрастает, если $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

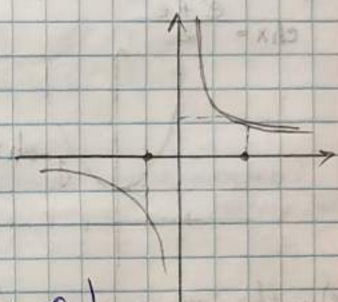
$f: X \to Y$ убывает, если $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Опр.: $f: X \to Y$ неубыв (невозрастающей), если для $\forall x_1, x_2 \in X$
$x_1 < x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) \geq f(x_2)$ - неубыв / $f(x_1) \leq f(x_2)$ - невозр.

Функция монотонна в широком смысле если она невозрастающая и неубывающая.

Контр пример: $y = \frac{1}{x}$

$D_y: x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$



Из графика есть точки $x \uparrow$, то значения не убыв

$\Rightarrow$ убыв от $(-\infty; 0)$ и убыв $(0; +\infty)$

② Чётность (нечётность.)

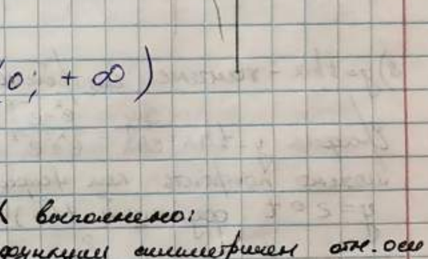
Опр. Функция $f: X \to Y$ называется чётной, если $\forall x \in X$ выполнено:
1) $-x \in X$; 2) $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен отн. оси ординат.

Опр. Функция $f: X \to Y$ называется нечётной, если $\forall x \in X$ выполнено:
1) $-x \in X$; 2) $f(-x) = -f(x)$. График нечётной ф-ии симметричен отн. нач. координат.

Опр. Функция назыв. общего вида, если она является ни чётной, ни нечётной.

③ Периодичность.

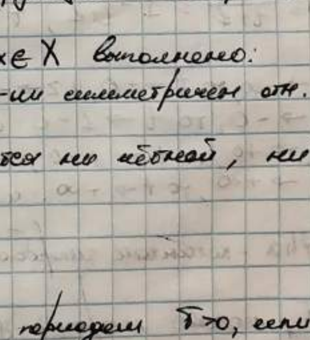
Опр. Функция $f: X \to Y$ называется периодической с периодом $T > 0$, если $\forall x \in X$
1) $x + T \in X$, $x - T \in X$
2) $f(x + T) = f(x)$ (т.е. при сдвиге вправо на период переходит сам в себя.)



Пример 1. $y = \cos 2x$, наименьший период $T = \pi$.

Пример 2. $y = [x]$ - не является периодической.

Пример 3. $y = \{x\} = x - [x]$ - периодическая с наименьшим периодом $T = 1$.



Пример 4. У функции Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$

нет наим. периода, т.к. в качестве периода можно взять любое рациональное число q

Действительно при этом $D(x+q) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \in I \end{cases} = D(x)$

④ Ограниченность.

Опр. Функция называется ограниченной, если ограниченно множество её значений.

Аналогично опр. ограниченность функции сверху и снизу.

Раскрывая понятие огранич. мн-ва, получим следующие опр:

1) ф-я огр. сверху, если $\exists M \in R;\ \forall x \in X \quad f(x) \le M$

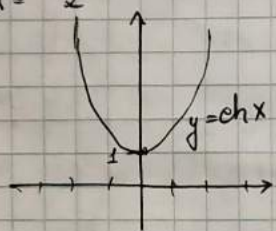
2) ф-я огр. снизу, если $\exists M \in R;\ \forall x \in X \quad f(x) \ge M$

3) ф-я ограничена, если $\exists m \in R \ \exists M \in R;\ \forall x \in X \quad m \le f(x) \le M$

Гиперболические функции.

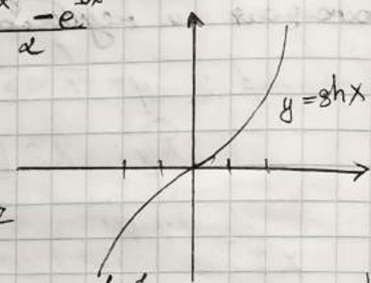
1) $y = ch x$ - косинус гиперболический

$$ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



2) $y = sh x$ - синус гиперболический.

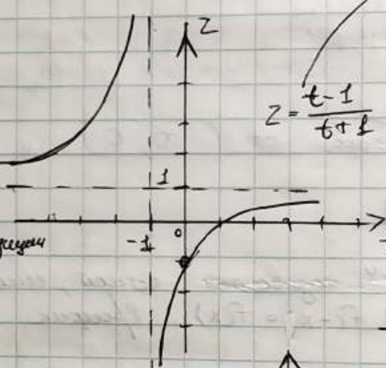
$$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

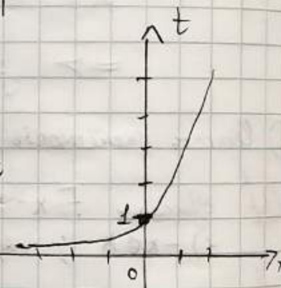


3) $y = th x$ - тангенс гиперболический

График $y = th x = \frac{sh x}{ch x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ можно построить как график композиции $y = z \circ t$ функций $t(x) = e^{2x}$ и

$$z(t) = \frac{t-1}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1},\ t > 0$$



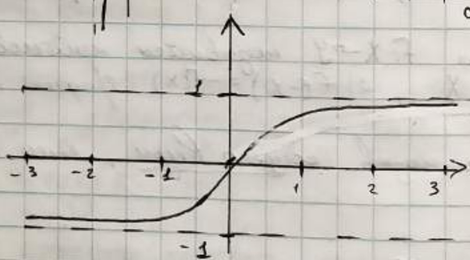


Если $x \to -\infty$, то $t \to +0$, и $z \to -1+0$.

Если $x \to -0$, то $t \to 1-0$ и $z \to -0$

Если $x \to +0$, то $t \to 1+0$, и $z \to +0$

Если $x \to +\infty$, то $t \to +\infty$, и $z \to 1-0$



4) $y = cth x$ - котангенс гиперболический

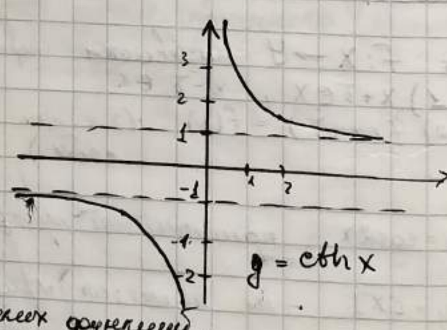
График $cth x$, можно построить учтя, что $cth x = \frac{1}{th x}$

Если $x \to -\infty$, то $y \to -1-0$

Если $x \to -0$, то $y \to -\infty$

Если $x \to +0$, то $y \to +\infty$

Если $x \to +\infty$, то $y \to 1+0$



Св-ва гиперболических функций.

1) $ch^2 x - sh^2 x = 1$ - основное гиперболическое тождество

2) $ch^2 x + sh^2 x = ch 2x$ - формулы двойного угла.

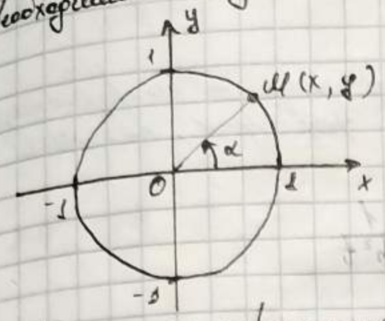
$2 sh x\, ch x = sh 2x$

3) $sh(x \pm y) = sh x\, ch y \pm ch x\, sh y$

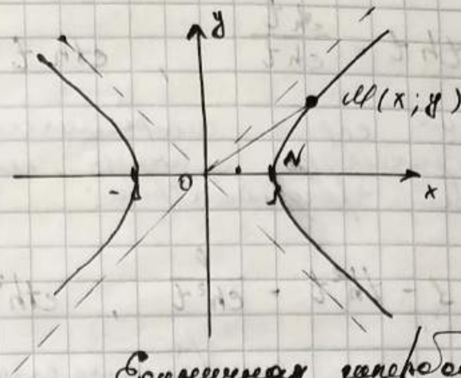
$ch(x \pm y) = ch x\, ch y \mp sh x\, sh y$

Гиперболические функции.

Необходимые сведения:



Единичная окружность
$x^2+y^2=1$



Единичная гипербола.
$x^2-y^2=1$.

Гиперболические функции вводятся аналогично круговым (обычным тригонометрическим) функциям.

Рас-м ед. окружность $x^2+y^2=1$, где $M(x, y)$

$\to x = \cos\alpha$; $y = \sin\alpha$

Если подставить эти координаты в уравнение единичной окружности, то получим основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Угол α считается положительным, если вращение луча происходит против часовой стрелки, и отрицательным, если вращение - по часовой стрелке.

Вычислим площадь сектора для ед. окр.: $S_{OMN} = S = \frac{1}{2}\alpha R^2 = \frac{1}{2}\alpha$

$\to \alpha = 2S$, т.е. угол α равен удвоенной площади сектора единичной окружности обр. при вращении луча вокруг точки O, взятой со знаком „+", если вращ. происх. против часовой стрелки, и со знаком „-" если по часовой.

Единичная гипербола:
$$x^2-y^2=1$$

Углом t в гиперболической тригонометрии между лучами ON и OM называется число, равное удвоенной площади сектора OMN взятой со знаком „+", если M находится выше оси X, и со знаком „-" если ниже.

Ордината y точки $M(x, y)$ единичной гиперболы называется синусом $sh\,t$, а абсцисса x - косинусом $ch\,t$ гиперболического угла t

$$y = sh(t) \qquad x = ch(t)$$

Если подставим в уравнение единичной гиперболы:

$$ch^2 t - sh^2 t = 1$$

Гиперболические тангенс и котангенс опр так же, как и в круговой тригонометрии

$$th\,t = \frac{sh\,t}{ch\,t}, \quad cth\,t = \frac{ch\,t}{sh\,t}$$

Используя опр-я гиперболических функций и гиперболическую тригонометрическую единицу, получаем формулы, похожие из круговой тригонометрии:

$$1 - th^2 t = \frac{1}{ch^2 t}, \quad cth^2 - 1 = \frac{1}{sh^2 t}$$

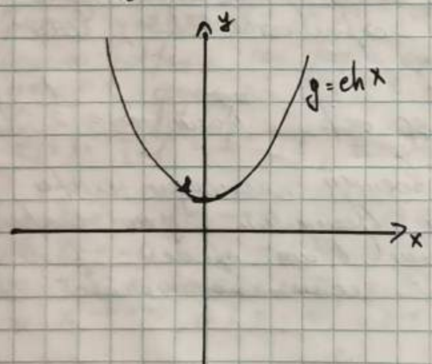
Известно, что гиперболические функции можно выразить через показательные по формулам:

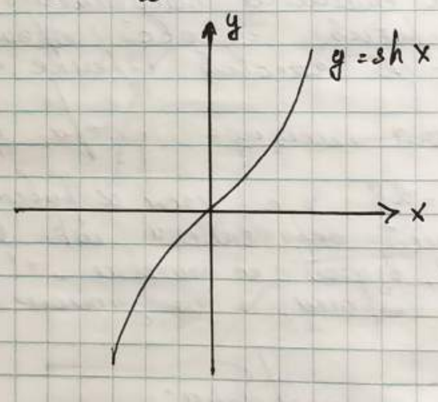
$$ch\,t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad sh\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$th\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \qquad cth\,t = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$$

Заметим, наконец, что так же как и в круговой тригонометрии, гиперболический косинус - ф-я чётная, а гиперболические синус, тангенс и котангенс - нечётные

① $ch\,x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ $\qquad$ $sh\,x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$





При выводе формул гиперболической тригонометрии в основном исп. идеи круговой тригонометрии

Формулы:

2.1. $ch(x+y) = ch\,x\,ch\,y + sh\,x\,sh\,y$

2.2 $ch(x-y) = ch\,x\,ch\,y - sh\,x\,sh\,y$

2.3 $ch\,x \cdot ch\,y = \frac{1}{2}(ch(x+y) + ch(x-y))$

2.4. $sh\,x \cdot sh\,y = \frac{1}{2}(ch(x+y) - ch(x-y))$

2.5. $ch\,x + ch\,y = 2\,ch\frac{x+y}{2}\,ch\frac{x-y}{2}$

2.6. $ch\,x - ch\,y = 2\,sh\frac{x+y}{2}\,sh\frac{x-y}{2}$

2.7. $ch\,2x = ch^2 x + sh^2 x$

2.8. $ch^2 x = \dfrac{ch\,2x + 1}{2}$, $sh^2 x = \dfrac{ch\,2x - 1}{2}$

$$th^2 x = \frac{ch\,2x - 1}{ch\,2x + 1}$$

2.9. $ch\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{ch\,x + 1}{2}}$, $sh\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{ch\,x - 1}{2}}$

$$th\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{ch\,x - 1}{ch\,x + 1}}$$

Док-ва:

2.1 $ch\,x\,ch\,y + sh\,x\,sh\,y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^y - e^{-y}}{2} =$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}\right) =$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = ch(x+y)$$

2.2. Пользуясь чётностью косинуса и нечётного синуса, из формулы 2.1 получаем:

$$ch(x-y) = ch(x + (-y)) = ch\,x\,ch(-y) + sh\,x\,sh(-y) =$$
$$= ch\,x\,ch\,y - sh\,x\,sh\,y$$

2.3. Складывая почленно формулы 2.1 и 2.2

$$\to ch(x+y) + ch(x-y) = 2\,ch\,x\,ch\,y$$
$$\to ch\,x\,ch\,y = \frac{1}{2}\left(ch(x+y) + ch(x-y)\right)$$

2.4. Вычитая из первой формулы вторую

$$ch(x+y) = ch\,x\,ch\,y + sh\,x\,sh\,y$$
$$ch(x-y) = ch\,x\,ch\,y - sh\,x\,sh\,y$$

$$ch(x+y) - ch(x-y) = 2\,sh\,x\,sh\,y$$
$$sh\,x\,sh\,y = \frac{1}{2}\left(ch(x+y) - ch(x-y)\right)$$

2.5. Введём обозначения $x = u + v$, $y = u - v$, тогда:

$$ch\,x + ch\,y = ch(u+v) + ch(u-v) = ch\,u\,ch\,v + sh\,u\,sh\,v + ch\,u\,ch\,v - sh\,u\,sh\,v = 2\,ch\,u\,ch\,v = 2\,ch\frac{x+y}{2}\,ch\frac{x-y}{2}$$

2.6 Аналогично с 2.5 получаем:

$$ch\,x - ch\,y = ch(u+v) - ch(u-v) = ch\,u\,ch\,v + sh\,u\,sh\,v - ch\,u\,ch\,v + sh\,u\,sh\,v = 2\,sh\,u\,sh\,v = 2\,sh\frac{x+y}{2}\,sh\frac{x-y}{2}$$

2.7. Выходит из формулы суммы.

2.8. Складывая и вычитая две формулы:

$$\pm\begin{cases} ch2x = ch^2x + sh^2x \\ 1 = ch^2x - sh^2x \end{cases}$$

$$2ch^2x = ch2x + 1, \quad 2sh^2x = ch2x - 1$$

$$\to ch^2x = \frac{ch2x+1}{2}, \quad sh^2x = \frac{ch2x-1}{2}, \quad th^2x = \frac{ch2x-1}{ch2x+1}$$

2.9 Формулы половинных углов следуют из формул понижения степени (2.8), если x заменить на $\frac{x}{2}$

$$\downarrow$$

$$ch\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{chx+1}{2}}; \quad sh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{chx-1}{2}}, \quad th\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{chx-1}{chx+1}}$$

① $(2+3i)(4-5i) + (2-3i)(4+5i) = 8 + \cancel{12i} - \cancel{10i} - 15i^2 + 8 + \cancel{10i} - \cancel{12i} - 15i^2 =$

$= 16 + 15 + 15 = 46$

② $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i) = ((x-1)^2 - i^2)\cdot((x+1)^2 - i^2) =$

$= (x^2 - 2x + 1 + 1)(x^2 + 2x + 1 + 1) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) =$

$= x^4 + \cancel{2x^3} + 2x^2 - \cancel{2x^3} - 4x^2 - \cancel{4x} + \cancel{2x^2} + \cancel{4x} + 4 = x^4 + 4$

③ $\frac{1+2i}{3+5i} = \frac{(1+2i)\cdot(3-5i)}{(3+5i)\cdot(3-5i)} = \frac{(1+2i)(3-5i)}{34} = \frac{3-5i+6i-10i^2}{34} = \frac{13+i}{34} =$

$= \frac{13}{34} + \frac{i}{34}$

④ $\frac{2+3i}{(2-3i)^2} = \frac{2+3i}{4-12i+9i^2} = \frac{2+3i}{-5-12i} = -\frac{(2+3i)}{(5+12i)} = -\frac{(2+3i)(5-12i)}{25-144i^2} =$

$= -\frac{10-24i+15i-36i^2}{169} = -\frac{46-9i}{169} = -\frac{46}{169} + \frac{9i}{169}$

⑤ $\frac{5i}{(2+i)^3} = \frac{5i}{(4+4i+i^2)(2+i)} = \frac{5i}{(3+4i)(2+i)} = \frac{5i}{6+3i+8i+4i^2} =$

$= \frac{5i}{2+11i} = \frac{5i(2-11i)}{4-121i^2} = \frac{10i-55i^2}{125} = \frac{55+10i}{125} = \frac{11+2i}{25} =$

$= \frac{11}{25} + \frac{2i}{25}$

⑦ $x^2 + x + 1 = 0$

$D = 1 - 4 = -3; \quad \sqrt{D} = \sqrt{-3} = \sqrt{-1\cdot 3} = \sqrt{3i^2}$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}; \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$x^2 + 2x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = 0$

$(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0$

$(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{3i^2}{4} = 0$

$\cancel{x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}i}{2}}$ $\quad (x+\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2})(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})=0$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$

⑧ $x^2-50x+1025=0$ $\qquad 1025 - 625 = 400$

$x^2 - 2\cdot 25x + 625 - 625 + 1025 = 0$

$(x-25)^2+400=0$

$(x-25)^2+20^2=0$

$(x-25)^2 - 20^2 i^2 = 0$

$(x-25-20i)(x-25+20i)=0$

$\Rightarrow x_{1,2} = 25 \pm 20i$

⑨ $3x^2-2x+3=0 \quad /:3$

$x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 1 = 0$

$(x-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}=0$

$(x-\frac{1}{3})^2 - (\frac{\sqrt{8}}{3})^2 i^2 = 0$

$(x-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{8}}{3}i)(x-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{8}}{3}i)=0$

$x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{8}}{3}i = \frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}i$

⑩ $x_{1,2} = \frac{3}{5} \pm \frac{i}{2}$

$\cancel{(x-\frac{3}{5}+\frac{i}{2})(x-\frac{3}{5}-\frac{i}{2}) = (x-\frac{3}{5})^2 - \frac{i^2}{4}}$

$\cancel{x^2 - \frac{2\cdot 3}{5}x + \frac{1}{4} = 0}$

$x^2 - \frac{6}{5}x + \cancel{\frac{1}{4}} = 0$

$$\begin{cases} x_1+x_2 = \frac{3}{5}+\frac{i}{2}+\frac{3}{5}-\frac{i}{2} = \frac{6}{5} \\ x_1\cdot x_2 = (\frac{3}{5}+\frac{i}{2})(\frac{3}{5}-\frac{i}{2}) = \frac{9}{25} - \frac{i^2}{4} = \frac{9}{25}+\frac{1}{4} = 0{,}61 \end{cases}$$

$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25}+\frac{1}{4} = 0 \quad /\cdot 100$

$100x^2 - 120x + 61 = 0$

⑪ $z=(3+5i)^2(1-i) = (9+30i+25i^2)(1-i) = (-16+30i)(1-i) =$

$= -16+16i+30i-30i^2 = 14+46i$

$Re(z)=14 \qquad Im(z)=46$

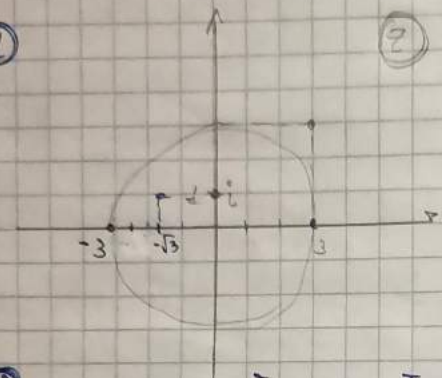
(12) $z = \frac{1+i}{(4+8i)^2} = \frac{1+i}{16+64i+64i^2} = \frac{1+i}{-48+64i} = \frac{(1+i)\cdot(-48-64i)}{(-48+64i)(-48-64i)} =$

$= \frac{-48-64i-48i-64i^2}{2304+4096} = \frac{16-112i}{6400} = \frac{1}{400} - \frac{i\cdot 112}{6400} = \frac{1}{400} - \frac{7i}{400}$

~~$Re(z) = \frac{1}{400}$~~ ; ~~$Im(z) = -\frac{1}{64}$~~

$Re(z) = \frac{1}{400}$ $\qquad Im(z) = -\frac{7}{400}$

(1)



$3 = 3(\cos 0 + i\sin 0) = 3\cdot e^{i0} = 3e^{i(0+2\pi k)}$

$3e^{2\pi k}$

$-3 = |-3|(\cos\pi + i\sin\pi) = 3e^{i\pi} = 3e^{i(\pi+2\pi k)}$

(2) $i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$

(3) $-\sqrt{3}+i = \sqrt{3+1}\,(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 2\cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$

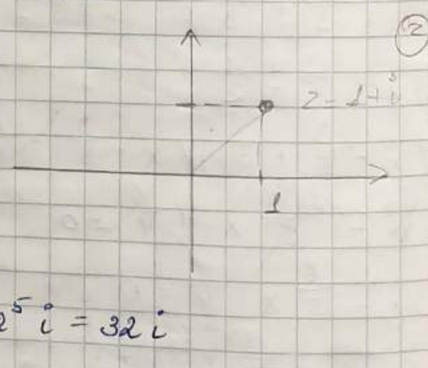
$= 2\cdot e^{i(\frac{5}{6}\pi+2\pi k)}$, $k\in Z$

(4) $4(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) = 4(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2-2\sqrt{3}i$

$4(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = 4\cdot e^{i(-\frac{\pi}{3}+2\pi k)}$, $k\in Z$

(5) $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{10} = \frac{(1+i)^{10}}{2^{10}} = \frac{2^5 i}{2^{10}} = \frac{i}{2^5} = \frac{i}{32}$

$z = 1+i$



$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$z^{10} = (\sqrt{2})^{10}(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) =$

$= (\sqrt{2})^{10}(\underbrace{\cos\frac{5}{2}\pi}_{0} + \underbrace{i\sin\frac{5}{2}\pi}_{i}) = 2^5 i = 32i$

Д/З: (1) $(3+4i)+(-5+3i) = -2+7i$

(2) $(\sqrt{3}-i)(\sqrt{2}+i\sqrt{3}) = \sqrt{6}+3i-i\sqrt{2}-\sqrt{3}i^2 = \sqrt{6}+\sqrt{3}+3i-i\sqrt{2} =$

$= \sqrt{3}(\sqrt{2}+1) + i(3-\sqrt{2})$

(3) $(4-5i)(4+5i) = 16-25i^2 = 16+25 = 41$

(4) $\frac{-2+i}{1+3i} = \frac{(-2+i)(1-3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-2+6i+i-3i^2}{1-9i^2} = \frac{1+7i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$

⑦ $x^2+25=0$

$x^2=-25$

$x=\pm\sqrt{-25}$

$x=\pm\sqrt{25i^2} \rightarrow x_{1,2}=\pm 5i$

⑧ $x^4+5x^2+4=0$

$x^2=t$

$t^2+5t+4=0$

$t^2+2\cdot\frac{5}{2}t+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+\frac{16}{4}=0$

$(t+\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}=0$

$(t+\frac{5}{2}-\frac{3}{2})(t+\frac{5}{2}+\frac{3}{2})=0$

$(t+1)(t+4)=0$

$\rightarrow t=-1 \qquad t=-4$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{i^2} \qquad x_{3,4}=\pm\sqrt{4i^2}$

$x_{1,2}=\pm i \qquad x_{3,4}=\pm 2i$

Ответ: $x_{1,2}=\pm i$; $x_{3,4}=\pm 2i$

⑨ $(1+i)x+(1+2i)y=1+5i$

$x+xi+y+2yi=1+5i$

$x+y+xi+2yi=1+5i$

$(x+y)+(x+2y)i=1+5i$

$-\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=5 \end{cases} \qquad -y=-4 \rightarrow y=4 \qquad x=-3$

Ответ: $x=-3$, $y=4$

⑩ $z=(1+2i)^2(2-3i)^3=(1+4i+4i^2)(4-12i+9i^2)(2-3i)=$

$=(4i-3)(2-3i)(-5-12i)=(8i-12i^2-6+9i)(-5-12i)=$

$=(6+17i)(-5-12i)=-30-72i-85i-204i^2=174-157i$

$Re\, z=174$; $Im=-157$

⑪ $z=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

$Re\, z=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$; $Im=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

Лекция. Раздел. II.
Пределы. Теория пределов.

§1. Определение числовой последовательности и её предела. (L.L.)

Опр. Числовая последовательность – это функция натурального аргумента, принимающая действительные (или комплексные) значения.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Последовательностью также называют множество значений этой функции.

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

x_1 – первый член последовательности
x_2...
x_n – общий //-//-

Пример: $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\to$ $x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{2}{3}$

$x_3 = \frac{3}{4}$

Опр. Предел числовой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – это точка a расширенной числовой прямой такая, что для любой её окрестности все члены послед., начиная с некоторого, попадают в эту окрестность.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N},\ \forall n>n_0 :\ x_n\in U_\varepsilon(a)$$

для любого $\varepsilon > 0$ существует ...

1) $a\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N},\ \forall n>n_0 :\ |x_n-a|<\varepsilon$$

Когда предел послед-и конечен, то для любого ε больше 0 внутрь этого интервала $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ попадут все члены последовательности начиная с n_0+1.

Вне этого интервала может находиться только конечное число членов последовательности.

С уменьшением ε номер n_0 может увеличиваться.

Пример: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$

$\forall\varepsilon\ \ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N},\ \forall n>n_0 :\ |x_n-1|<\varepsilon$

$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$

$\left|1-\frac{1}{n+1}-1\right|<\varepsilon$

$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$; $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$; $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$

ε – просто положительное число

$\varepsilon = 0{,}01 \rightarrow n_0 = 99$

$\varepsilon = 0{,}001 \rightarrow n_0 = 999$, т. е. когда $n = 1000 \Rightarrow$ вся послед. (хвост) попадёт внутрь интервала.

2) $a = +\infty$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \forall n > n_0: \quad x_n > \varepsilon$

Пример: $x_n = 2n + 5$

3) $a = -\infty$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \forall n > n_0: \quad x_n < -\varepsilon$

Пример: $x_n = -n^2$

4) $a = \infty$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \forall n > n_0: \quad |x_n| > \varepsilon$

Пример: $x_n = (-1)^n \cdot n$

$x_n = (-1)^n$ – не имеет предела.

Определения.

Оп. 1 Последовательность сходится, если у неё существует конечный предел (число)

Оп. 2 Последовательность называется бесконечно большой, если её предел равен ∞

Оп. 3 Последовательность назыв. бесконечно малой, если её предел равен 0

Оп. 4 Последовательность возрастает, если $\forall n \in \mathbb{N}, \ x_{n+1} > x_n$ или $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1\right)$ – для последовательности с положительными членами.

Оп. 5 Последовательность убывает, если $\forall n \in \mathbb{N}, \ x_{n+1} < x_n$

Опр. 6 Последовательность ограничена сверху, если $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \leq M$

Опр. 7 Последовательность ограничена снизу, если $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: x_n \geq$

Опр. 8 Последовательность ограничена, если она ограничена и сверху и снизу. $\rightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: m \leq x_n \leq M$

§2. Основные свойства предела последовательности. (2.1.)

Теорема 1. Если последовательность сходится, то её предел единственный.

Док-во: (методом от противного)

Предположим, что предел не единственный.

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b, \quad a \neq b$

Зафиксируем $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} > 0$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n > n_1: |x_n - a| < \frac{|b-a|}{2} \quad (*)$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n > n_2: |x_n - b| < \frac{|b-a|}{2} \quad (**)$$

При $n > \max\{n_1, n_2\}$ будут выполняться эти неравенства * и **

$$|b-a| = |b - x_n + x_n - a| \leq \underset{|x_n - b|}{\underbrace{|b - x_n|}} + |x_n - a| < \frac{|b-a|}{2} + \frac{|b-a|}{2} < |b-$$

Теорема 2. Если последовательность сходится, то она ограничена. (т.е. если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, то $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$: $m \leq x_n \leq M$)

Док-во:

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда по опр-ю предела:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0$; $|x_n - a| < 1$

$-1 < x_n - a < 1$

$a - 1 < x_n < a + 1$

Вне окрестности могут находиться эл-ты $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$

Положим $M = \max\{a+1, x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$

$m = \min\{a-1, x_1, x_2, \ldots x_{n_0}\}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq M$ и $x_n \geq m$ или

$m \leq x_n \leq M$

=> значит она ограничена.

Обратное утверждение (если последовательность ограничена, то она сходится.) – неверно!

$$x_n = (-1)^n$$

Опр. Подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ называется последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots x_{n_k}, \dots$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

Теорема 3. (Больцано – Вейерштрасса)
~ Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.
~ без доказательства!

Определения:

Опр. 1. Частичный предел последовательности – это предел любой её подпоследовательности.

Опр. 2 Верхний предел последовательности $\{x_n\}$ – это наибольший из всех её частичных пределов. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$

Опр. 3 Нижний предел последовательности – это наименьший из всех её частичных пределов
$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$$

$$x_n = (-1)^n \rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -1$$

Теорема 4. (Критерий Коши сходимости послед-и)
~ Последовательность сходится тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0,\ \forall m > n_0:\ |x_n - x_m| < \varepsilon$

~ без доказательства!
(в книгах!)

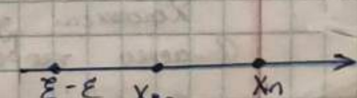
Теорема 5. (О существовании предела монотонной ограниченной послед.-и)
~ Любая неубывающая и ограниченная сверху посл-ть сходится к своей точной верхней грани.

$\{x_n\}$ – неубыв. и огр. сверху, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$

Д-во: по св-ву множества действ. чисел (любое непустое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань) существует $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \xi$ (кси)

Покажем, что ξ есть предел послед-и x_n.

По опр-ю супремума 1) $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \le \xi$
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : x_{n_0} > \xi - \varepsilon$



эффициентами. Число e в математическом анализе играет особую роль. Оно, в частности, является основанием натуральных логарифмов.

4.6. Теорема Больцано—Вейерштрасса

В п. 4.4 было доказано, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение, конечно, неверно. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена и расходится. Однако оказывается, что всякая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Это утверждение называется теоремой Больцано—Вейерштрасса[1] или свойством компактности ограниченной последовательности.

ТЕОРЕМА 4. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а из любой неограниченной последовательности — бесконечно большую подпоследовательность, имеющую своим пределом бесконечность определенного знака.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е. существует такой отрезок $[a, b]$, что $a \leqslant x_n \leqslant b$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Разделим отрезок $[a, b]$ на два равных отрезка. По крайней мере один из получившихся отрезков содержит бесконечно много элементов данной последовательности. Обозначим его через $[a_1, b_1]$. Пусть x_{n_1} — какой-либо из членов данной последовательности, лежащий на отрезке $[a_1, b_1]$.

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ на два равных отрезка; снова хотя бы один из получившихся отрезков содержит бесконечно много членов исходной последовательности; обозначим его через $[a_2, b_2]$. В силу того что на отрезке $[a_2, b_2]$ бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, найдется такой ее член x_{n_2}, что $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ и $n_2 > n_1$. Продолжая этот процесс, получим последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, в которой каждый последующий является половиной предыдущего, и последовательность таких элементов x_{n_k} данной после-

[1] Б. Больцано (1781—1848) — чешский математик.

последовательность $X_{n_1}, X_{n_2}, \dots X_{n_k}$ ... последовательности $\{X_n\}$ называется

довательности, что $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots$, и $n_{k''} > n_{k'}$ при $k'' > k'$. Последовательность $\{x_{n_k}\}$ является, в силу построения, подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Покажем, что эта подпоследовательность сходящаяся.

Последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots$, является последовательностью вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю, так как $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$. Согласно принципу вложенных отрезков (см. п. 3.7), существует единственная точка ξ, принадлежащая всем этим отрезкам. Как было показано (см. формулу (4.26)) в замечании 2 к теореме 3, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$, но $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, $k = 1, 2, \dots$, поэтому, согласно свойству II (см. п. 4.3 сходящихся последовательностей), последовательность $\{x_{n_k}\}$ также сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

Пусть теперь последовательность $\{x_n\}$ не ограничена. Тогда она либо не ограничена сверху, либо не ограничена снизу, либо имеет место и то и другое. Пусть для определенности последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху. Тогда существует такой номер $n_1 \in N$, что $x_{n_1} > 1$.

Очевидно, последовательность x_n, $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots$, также не ограничена сверху, так как получается из данной неограниченной сверху последовательности x_n, $n = 1, 2, \dots$, отбрасыванием конечного числа ее членов. Поэтому существует такое $n_2 > n_1$, $n_2 \in N$, что $x_{n_2} > 2$.

Продолжая этот процесс, получаем последовательность таких номеров n_k, что $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ и $x_{n_1} > 1$, $x_{n_2} > 2, \dots x_{n_k} > k \dots$. Отсюда следует, что $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ и, согласно следствию свойства II п. 4.3, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. □

З а м е ч а н и е. Второе утверждение теоремы 4 можно уточнить. В доказательстве теоремы 4 было показано, что если последовательность не ограничена сверху, то у нее су-

Показали, что ξ есть предел послед-и X_n.

ществует подпоследовательность, стремящаяся к $+\infty$. Аналогично, если последовательность не ограничена снизу, то у нее существует подпоследовательность, стремящаяся к $-\infty$.

Определение 13. *Предел, конечный или определенного знака бесконечный, подпоследовательности данной последовательности называется ее частичным пределом.*

Теорема Больцано—Вейерштрасса (первая часть теоремы 4) и ее аналог для неограниченных последовательностей (вторая часть теоремы 4) показывают, что

всякая последовательность имеет хотя бы один частичный конечный или бесконечный предел, причем заведомо конечный, если данная последовательность ограничена.

Таким образом, каждая числовая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in \boldsymbol{R}$, имеет хотя бы один частичный предел в расширенном множестве действительных чисел, т. е. множество частичных пределов в $\overline{\boldsymbol{R}}$ для любой последовательности всегда не пусто.

УПРАЖНЕНИЯ. 9. Доказать, что, для того чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и имела единственный частичный предел.

10. Доказать, что элемент a (число или одна из бесконечностей со знаком: $+\infty$ или $-\infty$) является частичным пределом последовательности тогда и только тогда, когда в любой его окрестности содержится бесконечно много членов данной последовательности.

4.7. Критерий Коши сходимости последовательности

До сих пор не было дано достаточно общего критерия, с помощью которого можно было бы узнать, сходится ли данная последовательность. Само определение сходящейся последовательности для этого неудобно, так как в него входит значение предела, которое может быть и неизвестным. Поэтому желательно иметь такой критерий для определения сходимости и расходимости последовательностей, который основывался бы только на свойствах элементов данной последовательности. Следующая ниже теорема 5 и дает как раз подобный критерий.

Определение 14. *Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши*[1], *если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров n и m, удовлетворяющих условию $n > n_\varepsilon$, $m > n_\varepsilon$, справедливо неравенство*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{4.30}$$

Последовательности, удовлетворяющие условию Коши, называются также *фундаментальными последовательностями*.

С помощью логических символов условие Коши записывается следующим образом:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}\ \forall\, n \in \boldsymbol{N}\ \forall\, m \in \boldsymbol{N},\ n > n_\varepsilon,\ m > n_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Условие (4.30) можно сформулировать и так:

для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и всех целых неотрицательных p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{4.31}$$

Для того чтобы убедиться в равносильности условий (4.30) и (4.31), достаточно положить $p = n - m$, если $n \geqslant m$, и $p = m - n$, если $m > n$.

ТЕОРЕМА 5 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Доказательство необходимости. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon > 0$; тогда, согласно определению предела последовательности, существует такое n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть теперь $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$; тогда

$$|x - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие Коши.

Доказательство достаточности. Пусть последовательность удовлетворяет условию Коши, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что если $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$, то

---

[1] О. Коши (1798—1857) — французский математик.

$|x_n - x_m| < \varepsilon$. Возьмем, например, $\varepsilon = 1$; тогда существует такое n_1, что при $n > n_1$ и $m > n_1$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < 1$. В частности, если $n > n_1$ и $m = n_1 + 1$, то $|x_{n_1} - x_{n_1+1}| < 1$, т. е. $x_{n_1+1} - 1 < x_n < x_{n_1+1} + 1$ при $n > n_1$. Это значит, что последовательность x_n, $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots$, ограничена. Поэтому, в силу теоремы 4, существует ее сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$. Покажем, что вся данная последовательность $\{x_n\}$ также сходится и имеет пределом число a. Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда, во-первых, по определению предела последовательности, существует такое k_ε, что для всех номеров $k > k_\varepsilon$ или, что то же самое, согласно определению подпоследовательности, для всех $n_k > n_{k_\varepsilon}$ выполняется неравенство $|x_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Во-вторых, так как последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, то существует такое n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $m > n_\varepsilon$ выполняются неравенства $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Положим $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ и зафиксируем некоторое $n_k > N_\varepsilon$. Тогда для всех $n > N_\varepsilon$ получим

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и доказывает, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. □

УПРАЖНЕНИЯ. 11. Сформулировать позитивные необходимые и достаточные условия, являющиеся отрицанием критерия Коши, для того чтобы последовательность не имела предела.

12. Доказать, что, для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $n_\varepsilon \in N$, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполнялось неравенство $|x_n - x_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$.

$\{x_n\}$ неубывающая.

$\forall n > n_0 \quad x_n \geq x_{n_0} > \xi - \varepsilon$

$\forall n > n_0: \quad \xi - \varepsilon < x_n \leq \xi < \xi + \varepsilon$

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon), \ \forall n > n_0: \ |x_n - \xi| < \varepsilon$ — опр. предела

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$

Теорема 6. (О предельных переходах неравенства.) Пусть $\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n \leq y_n$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда $a \leq b$

Док-во (методом от противного): Пусть $a > b$

пусть $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$, тогда

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \ \forall n > n_1: \ |x_n - a| < \dfrac{a-b}{2} \quad (*)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \ \forall n > n_2: \ |y_n - b| < \dfrac{a-b}{2} \quad (**)$

При $n > \max\{n_1, n_2\}$ верны неравенства $(*)$ и $(**)$

$$a - b = a - x_n + x_n - b \leq a - x_n + y_n - b \leq |a - x_n| + |y_n - b| < \frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} = a-b$$

~ противоречие
$\Rightarrow$ теорема доказана.

Замечание: при переходе к пределу неравенств строгое неравенство может перейти в нестрогое.

$$\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}$$

Число e.

Число e опр. как предел последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$n = 100 \qquad x_n = 2,7048\ldots$

$n = 1000 \qquad x_n = 2,7169\ldots$

$n = 1000000 \qquad x_n = 2,7182\ldots$

$n = 1\,000\,000\,000 \qquad x_n \approx 2,718281\ldots$

Опр. $\boxed{e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$

$e \approx 2,718281828459045\ldots$

Докажем существование предела последовательности x_n:
Согласно теореме 5:

① Ограниченность сверху:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \underset{\substack{\text{биномиальный} \\ \text{коэффициент}}}{\underline{n}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} +$$

$$+ \dots + n \cdot \left(\frac{1}{n^{n-1}}\right) + 1 \cdot \frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n-2}} +$$

$$+ \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-2}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \ (*) \dots$$

Каждая скобка положительна и ограничена сверху единицей!

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n} <$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} < 2 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}}_{\text{сумма } n\text{-членов геом. прогр.}} =$$

$$= 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < 3$

$\{x_n\}$ – ограничена сверху.

В записи x_{n+1} каждое слагаемое > чем соотв. слагаемое в записи x_n

② $\{x_n\}$ – возрастает?

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Запись x_{n+1} длиннее на 1 положит. число записи x_n,

т.е $x_{n+1} > x_n$.

$\Rightarrow \{x_n\}$ – возрастающая.)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$ – существует.

$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \to \quad 2 \le e < 3$

$\forall n: \quad 2 \le x_n < 3$

Бесконечно малые последовательности и их свойства (п.1.3)

Опр. Послед-ть называ. бесконечно малой, если её предел равен 0

Теорема 7. (О св-ве бесконечно малой послед-ти.)

1) Сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой
2) Произведение бесконечно малой последовательности на огранич. посл-ть явл. бесконечно малой.
3) Произведение бесконечно малой послед-ти на сходящуюся послед-ть явл. бесконечно малым.

① Зафиксируем $\varepsilon > 0$, например $\frac{\varepsilon}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

для $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists n \in \mathbb{N}, \forall n > n_1 : |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n > n_2 : |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (**)

для $n > \max\{n_1, n_2\}$ выполняются (*) и (**)

$$|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : |x_n + y_n| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$

② $\{x_n\}$ - беск. малая, $\{y_n\}$ - ограниченная, тогда

$\{x_n \cdot y_n\}$ - б.м. - док-ть!

Зафиксируем $\varepsilon > 0$

$\{y_n\}$ - огранич., то $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N} : |y_n| \le M$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Для $\frac{\varepsilon}{M}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 : |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

$\forall n > n_0 \quad |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n \cdot y_n\} = 0$

т.е. $\{x_n y_n\}$ - беск. м.

③ По теореме 2. сход. послед-ть является ограниченной, а по предыдущему пункту произведение б.м на ограниченную есть б.м

Пример 1: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n!}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{б.м.}} \underbrace{(\sin n!)}_{\text{огр.}} = 0$

Пример 2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot(1+2+3+\ldots+n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)}{2n^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^3}\cdot \operatorname{arctg} n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n^2}\cdot\operatorname{arctg} n = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{n}+1\right)}{2n^2}\cdot\operatorname{arctg} n =$$

0 огр.

$= 0$

Теорема 6.1. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$

$\forall n,\ x_n \le y_n \le z_n$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ ~ Теорема "о двух милиционерах"

$(a\in\overline{\mathbb{R}})$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

~ док-во найти в литературе.

(п. 1.4.) Арифметические действия над пределами последовательностей.

Теорема 8. ~ Последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \iff \{x_n - a\} - \text{б.м.}$$

Доказательство.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N},\ \forall n>n_0:$

$|x_n - a| < \varepsilon \iff \{x_n - a\}$ – б.м.

Теорема 9. (О свойствах пределов при арифметич. действиях над послед.)

~ Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in\mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\in\mathbb{R}$,

Тогда:

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c\cdot x_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c\cdot a$, $c = const.$

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a+b$

Найти док-во в литературе

3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$

4) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, если $\forall n\in\mathbb{N},\ y_n\ne 0,\ b\ne 0$

Док-во пункта 4: $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ - б.м. (нужно док-ть.)

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + x_n - a}{b + (y_n - b)} - \frac{a}{b} = \frac{b(x_n - a) - a(y_n - b)}{b \cdot y_n}$$

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + x_n - a}{b + y_n - b}^{b} - \frac{a}{b}^{y_n} = \frac{ab + b(x_n - a) - ay_n}{y_n b} =$$

$$= \frac{b(x_n - a) - a(y_n - b)}{y_n b} = \frac{1}{y_n}\left((x_n - a) - \frac{a}{b}(y_n - b)\right)$$

$y_n \to b \neq 0$, то для $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ $\exists n_0(\varepsilon), \forall n > n_0: |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$

Поэтому $|y_n| = |b - (b - y_n)| \geq |b| - |b - y_n| > \frac{|b|}{2}$

$\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$ при $\forall n > n_0$

$\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ - ограничена

$\{x_n - a\}$ и $\{y_n - b\}$ - б.м.

$\left\{(x_n - a) - \frac{a}{b}(y_n - b)\right\}$ - б.м.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{1}{y_n}}_{огр.}\underbrace{\left((x_n - a) - \frac{a}{b}(y_n - b)\right)}_{б.м.}$$

=> По св.-ну: $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ - б.м.

=> $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$

=> $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, что и треб. док-ть.

Теорема 10.

~ Если последовательность $\{x_n\}$ - б.м., $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ - бесконечно большая (обратная тоже верна.)

Док-во: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |x_n| < \varepsilon$

$\frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon}$ $\frac{1}{\varepsilon}$ - произвольное, => $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \infty$

(п.1.5) Табличные пределы.

① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} = 0$, при $p > 0$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$ $(a > 0)$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{a^{n}} = 0 \quad (a>1)$

④ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

⑥ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a>0)$

⑦ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$

Док-во (1): $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \forall n>n_0: \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p} < \varepsilon$$

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$n_0 = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

Док-во (2): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

- $a=0$ ~ очевидно
- $a\neq 0$

$$x_n = \frac{a^n}{n!}$$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, a^n} = \frac{a}{n+1} < 1$ при $n+1 > a$ $\quad \{x_n\}$ - убыв.

т.к. $x_n > 0$, то $\{x_n\}$ - ограниченно снизу

Поэтому $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$

$$x_{n+1} = \frac{a\, x_n}{n+1}$$

$b = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} \cdot x_n = 0 \ \to b=0$, что и требов-ось

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Док-во (3): без док-ва (в учебнике)

Док-во (4): $(n!)^2 \geq n^n$

$$(n!)^2 = (1\cdot 2\cdot 3 \ldots n)(1\cdot 2\cdot 3 \ldots n) = (1\cdot n)(2\cdot(n-1))(3\cdot(n-2))\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot(k(n-k+1))\ldots(n\cdot 1)$$

$k(n-k+1) \geq n$?

$$kn - k^2 + k - n \overset{?}{\geq} 0$$

$$n(k-1) - k(k-1) = (k-1)(n-k) \geq 0$$

$$\begin{cases} k-1 \geq 0 \\ n-k \geq 0 \end{cases} \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\Rightarrow (1\cdot n)(2\cdot(n-1))\ldots(k(n-k+1))\ldots(n\cdot 1) \geq n^n$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

По теореме „о двух милиционерах" $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$ и следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

Док-во (5): $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$x_n = \sqrt[n]{n} - 1.$

$x_n \geq 0$

$(x_n + 1) = \sqrt[n]{n}$

$- n = (1 + x_n)^n$

$n = (1+x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2!} x_n^2$

$n \geq \frac{n(n-1)\cdot x_n^2}{2}$

$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$; $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

$\;\;\downarrow$

$\;\;0$

Док-во (6): $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$

1) $a > 1 \quad x_n = \sqrt[n]{a} - 1.$

$x_n > 0$, тогда

$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + n x_n$ (по биному Ньют

$0 < x_n \leq \frac{a-1}{n}$

$\;\;\downarrow \qquad \downarrow$

$\;\;0 \qquad 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

2) $a = 1$ ~ тривиально

3) $0 < a < 1$

$a = \frac{1}{b}$, $b > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = 1.$$ (подставили, что док-ли в п. 1)

(п. 1.6) Вычисление пределов последовательности.

① $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

① $$\lim_{n\to\infty} \frac{2(1+n^2)^3+n^5}{(1+2n^3)^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(1+n^2)^3+n^5}{n^6}}{\frac{(1+2n^3)^2}{n^6}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^6\left(2\left(\frac{1}{n^2}+1\right)^3+\frac{1}{n}\right)}{n^6\left(\frac{1}{n^3}+2\right)^2} = \frac{1}{2}$$

② $$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}+3)^2 \cdot \sqrt{9n^3+5}}{\sqrt{16n^5+n^4-n^3}-2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n} \cdot \frac{\sqrt{9n^3+5}}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{\sqrt{16n^5+n^4-n^3}}{n^{\frac{5}{2}}} - \frac{2n^2}{n^{\frac{5}{2}}}} =$$

$$= \frac{3}{4}$$

③ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+n)^4+(2+n^2)^2}{(2+n)^3-(1-n)^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n^2}+1\right)^2\right]}{n^3\left\{\left(\frac{2}{n}+1\right)^3-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\right\}} = \infty$$

④ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}{n+3} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt[3]{\frac{n}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}}{\sqrt{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 0$$

⑤ $$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n}-3n\right) = \{\infty-\infty\} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{9n^2}+2n-\cancel{9n^2}}{\sqrt{9n^2+2n}+3n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{n}}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

⑥ $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2+3}\right)^{2n^2} = \{1^\infty\} = \lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2+3}\right)^{n^2+3}}_{e}\right)^{\frac{1}{n^2+3}\cdot 2n^2} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}} = e^2$$

§2. Предел функции действительного аргумента.

(п.2.1.) Опр-е предела функции по Коши и по Гейне.

Пусть на множестве $E \subset \mathbb{R}$ задана функция f. Предел функции определяется только в предельной точке мн-ва E.

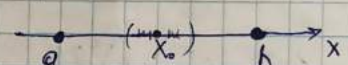
Опр. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной точкой мн-ва E (или точкой сгущения), если любая её проколотая окрестность содержит хотя бы одну точку множества E (т.е. $\forall U(a) \quad \mathring{U}(a) \cap E \neq \varnothing$)

~ Под проколотой ε-окрестностью точки a понимается множество $\mathring{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$

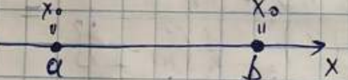
Критерий предельной точки:

Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ - предельная точка мн-ва $E \iff \exists \{x_n\} (n \in \mathbb{N}) \subset E$: $x_n \to a$ (при $n \to \infty$)

Примеры:

① 

x_0 - предельные точки.

② 

x.

③ 

$x_0 \notin [a; b]$

Пред. точка может принадлежать мн-ву E, а может ему не принадлежать (3.)

Опр-е предела функции не должно зависеть от того, принадл. предельная точка мн-ву или нет.

Опр. предела ф-и по Коши. (опр. №6.) ~ Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$ что для всех $x \in E \setminus \{a\}$, лежащих в этой δ-окрестности, значение функции попадает в заданную ε-окрестность точки A, т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in E$$

$$0 < |x - a| < \delta : \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

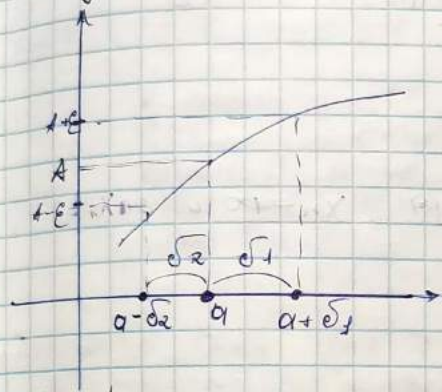
Через окрестности: $\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \forall U_\varepsilon(A) \ \exists U_\delta(a), \ \forall x \in E \cap \mathring{U}_\delta(a)$:

$$f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Замечание! при $a \in \mathbb{R}$, $a=\infty$, $a=+\infty$, $a=-\infty$ окрестности точки a записываются по разному.
Аналогично, есть 4 варианта записи для окрестности точки A ($A\in\mathbb{R}$, $A=\infty$, $A=-\infty$, $A=+\infty$)

Геометрический смысл определения предела.

~ Какое бы сколь угодно малое положительное число ε мы не взяли, всегда найдется положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех x, принадлежащих проколотой δ окрестности значения ф-и будут попадать в ε окрестность числа A.



За $\delta(\varepsilon)$ берётся min из чисел δ_1 и δ_2 $\rightarrow \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Опр-е предела ф-и по Гейне ~ Пусть на мн-ве $E\in\mathbb{R}$ задана ф-я $y=f(x)$ и $x=a$ – пред. точка мн-ва E.
Составим из элементов мн-ва E последовательность значений x: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, отличных от a ($x_n\ne a$), так чтобы посл-ть $\{x_n\}$ сходилась к a.
При этом значения ф-и в выбранных точках образуют числовую послед-ть $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$.
Число A назыв. пределом ф-и $f(x)$ при $x\to a$, если для любой послед-и $\{x_n\}$, сходящейся к a, $x_n\ne a$, соответствующие послед-и значений ф-и сх-ся к числу A

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \iff \forall \{x_n\}\subset E,\ x_n\to a,\ x_n\ne a:\ f(x_n)\to A$ (опр. по Гейне)

Пример: докажем, что $\lim\limits_{x\to1} x^2+3x = 4$

если $x_n\to1$, то $x_n^2\to1$, $3x_n\to3$, $x_n^2+3x_n\to4$ (по арифметич. св-вам предела последовательности.)

Теорема. (Об эквивалентности двух опр-ий предела.)

~ Определение предела ф-и по Коши и по Гейне эквивалентны, т.е если выполнено опр-е предела по Коши, то будет выполнено опр-е и по Гейне.

Замечание:

- Опр-е предела ф-и по Коши удобно исп-ть для док-ва существования предела.
- Опр-е по Гейне обычно исп. для док-ва отсутствия предела.

Примеры!

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$

По Коши:

$$|f(x)-A| = |2x+3-5| = |2x-2| = 2|x-1| < \varepsilon$$

$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{cases} |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \\ x\neq 1 \end{cases}, \text{ за } \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \forall x \in E, \; 0 < |x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}:$$

$$|2x+3-5| < \varepsilon \iff \lim_{x\to 1} 2x+3 = 5$$

2) Д-ть, что $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ - не существует.

Возьмём посл-ть $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $x_n \to +\infty$ и $\sin x_n =$
$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \to 1$ (при $n \to +\infty$)

$x_m = \pi m$, $m \in \mathbb{N}$

$x_m \to \infty$ и $\sin x_m = \sin\limits_{m\to\infty} \pi m = 0$

Посл-ть $f(x_n)$ по теореме 2 (дополнения) расходится, при $x_n \to +\infty$

Реш. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x = \left| \begin{array}{l} x=-t \\ x\to-\infty \\ t\to+\infty \end{array} \right| = \lim\limits_{t\to+\infty} \sin(-t) = -\lim\limits_{t\to+\infty} \sin t$ не $\exists$

Теорема 1. Необходимое и достаточное усл-е сх-ти последо-ти.
Для того, чтобы $\{x_n\}$ имела своим пределом число a, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff$ чтобы $\forall$ её подпоследовательность сходилась к числу a.

Теорема 2. (Условие расходимости послед-и.)
Если послед-ть x_n имеет 2 подпослед, сходящиеся к разным пределам, то данная посл-ть расходится.

Посл-ть наз-ся расходящейся, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или пред. не существует, т.е. $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Св-ва пределов функций.

Теорема 1 (1°) Если у функции в заданной точке существует конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки функция ограничена.

Док-во: Пусть у функции f существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда согласно определению б для любого

$\varepsilon > 0$, в частности, для $\varepsilon = 1$, существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$ точки a, что для всех $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ имеет место $f(x) \in U(A, 1)$, т.е. выполняется неравенство

$$A - 1 < f(x) < A + 1$$

Это и означает ограниченность функции f на проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$

Теорема 2 (2°) Если у функции в заданной точке существует конечный не равный нулю предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки функция имеет тот же знак, что и указанный предел (в частности, она не равна нулю.)

Док-во: Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и для определённости $A > 0$. Тогда согласно опр. в для любого $\varepsilon > 0$, в частности для $\varepsilon = A$ (в случае $A < 0$, надо взять $\varepsilon = -A$) существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, что для всех $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ имеет место $f(x) \in U(A, A)$, т.е. выполняется неравенство $A - A < f(x) < A + A$. В частности, $f(x) > 0$

Теорема 3. (3°) Если $f(x) = c$ - постоянная, $x \in \mathring{U}(a)$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

Теорема 4. (4°) Если $f(x) \geq A$, $x \in \mathring{U}(a)$, и существует конечный или определённого знака бесконечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, то
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq A$

Теорема 5 (5°) Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, $x \in \mathring{U}(a)$ и существуют конечные или бесконечные определённого знака пределы
$\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Теорема 6. (6°) Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то существуют и конечные пределы
$\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)]$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x)$, а если $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, то - и предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad (4.15)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \qquad (4.16)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \qquad (4.17)$$

Следствие: Если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, то для любого числа $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} c f(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

Заметим, что частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ конечно, может быть не определено на всей исходной проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta_0)$. Однако, согласно свойству 2° из условия $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ следует, что существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a,\delta)$, $0 < \delta \leq \delta_0$, на которой $g(x) \neq 0$, и потому, на ней имеет смысл частное $f(x)/g(x)$. Предполагается, что в формуле предела частного рассматривается сужение f и g на указанной проколотой окрестности $\mathring{U}(a,\delta)$

Св-ва 3° - 6° могут быть доказаны одинаковым методом основанным на соответствующих св-вах пределов последовательностей

Док-во формулы 4.16:

Пусть $A \overset{def}{=} \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $B \overset{def}{=} \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тогда согласно определению 7 предела функции (см. п. 4.6.) для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, справедливы равенства

$$A = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \quad B = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

Поэтому вспоминая, что предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению их пределов, получаем, что существует предел.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\, g(x_n) = AB$$

~ не зависит от выбора указанной послед-и

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) g(x) = AB = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

Теорема ~ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$ и при $x \neq a$ $f(x) \neq A$,

тогда $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$

Док-во (опр Гейне):

Возьмём произвольную последовательность $\{x_n\}$ из $E \setminus \{a\}$, сходящуюся к a.

Тогда т.к. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $f(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$

Отсюда, т.к. $y_n = f(x_n) \to A$ и $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, получаем, что $g(f(x_n)) \to B$ $(n\to\infty)$

Итак, $\forall \{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$, $x_n \to a$ $(n\to\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_n) \to A$ $(n\to\infty)$

Согласно опред. предела по Гейне это означает, что $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$

←

Св-ва пределов функций.
(из фото)

Теорема 1. (О единственности предела)
~ Если функция имеет конечный предел, то он единственный.

Док-во. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$. Тогда, согласно определению предела по Гейне: $\forall \{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ $x_n \to a\ (n\to\infty)$ $\Rightarrow f(x_n) \to A\ (n\to\infty)$ и $f(x_n) \to B\ (n\to\infty)$

Значит, по теореме о единственности предела послед-и, $A = B$

Теорема 2. (Об ограниченности функции, имеющей конечный предел)
~ Функция, имеющая конечный предел в точке из расширенной числовой прямой $\overline{R}$ ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Док-во: Пусть $a \in \overline{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in R$. Покажем, что найдется окрестность точки a, в которой функция f ограничена, т.е. $\exists m, M \in R: \forall x \in X \cap U(a)\ m \le f(x) \le M$

В силу определения предела по Коши для $\varepsilon = 1$ $\exists U_\delta(a)$:
$\forall x \in (X \setminus \{a\}) \cap U_\delta(a)$ $f(x)$
т.е. $\forall x \in X \cap U_\delta(a)$ $x \ne a \Rightarrow A - 1 < f(x) < A + 1$.

Таким образом, если точка a не принадлежит X, то можно взять $m = A-1$, $M = A+1$, а если $a \in X$, то можно взять $m = \min\{A-1, f(a)\}$, $M = \max\{A+1, f(a)\}$, ч.т.д.

Следующие три теоремы посвящены предельным переходам в неравенствах.

Теорема 3. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) < B$ (или $\lim\limits_{x\to a} f(x) > B$). Тогда $\exists U(a): \forall x \in X \cap U(a)$ $f(x) < B$ (соответственно $f(x) > B$)

Док-во: По определению предела, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то для $\varepsilon = B - A > 0$

$\exists U(a): \forall x \in X \cap U(a)$ $|f(x) - A| < B - A$. Поэтому $f(x) < A + (B - A) = B$, ч.т.д.

Теорема 4. (о переходе к пределу в неравенстве)
~ Пусть $\exists U(a): \forall x \in U(a) \cap X_f \cap X_g$ $f(x) \le g(x)$, и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$,

$\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, тогда $A \le B$

Док-во (методом от противного):

Допустим, что $A > B$. Тогда, т.к. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > \frac{A+B}{2}$, то по предыдущей теореме $\exists U_1(a): \forall x \in U_1(a)$ $f(x) > \frac{A+B}{2}$.

Поэтому $\forall x \in U(a) \cap U_1(a) \cap U_2(a)$ $f(x) > \frac{A+B}{2} > g(x)$, то есть $f(x) > g(x)$.

Получили противоречие с условием $\forall x \in U(a)$ $f(x) \le g(x)$, значит $A \le B$

Теорема 5 (о трёх функциях)

Пусть $\exists U(a): \forall x \in U(a) \cap X_f \cap X_g \cap X_h \quad f(x) \le g(x) \le h(x)$, и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$

Док-во: Зафиксируем $\varepsilon>0$, тогда, по опр-ю предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$,

$\exists U_1(a): \forall x \in X \cap U_1(a) \quad |f(x)-A| < \varepsilon$, а значит $f(x) > A-\varepsilon$

Аналогично, по опр-ю предела $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$

$\exists U_2(a): \forall x \in X \cap U_2(a) \quad |h(x)-A| < \varepsilon$, а значит $h(x) < A+\varepsilon$, то есть

$\forall x \in X \cap U(a) \quad |g(x)-A| < \varepsilon$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$

Теорема 6. (об арифметических действиях над пределами)

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, тогда

1) $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = A+B$

2) $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, если $B \ne 0$

Доказательство вытекает из определения предела функции по Гейне и свойств предела последовательности.

(п.2.3.) Односторонние пределы

Пусть на $E \subset \mathbb{R}$ задана $f(x)$

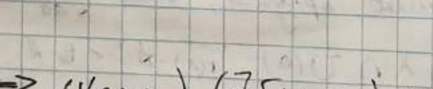
$f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a - предельная точка мн-ва E.

E, т.е.

⊛ если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta(\varepsilon)>0)(\forall x \in E,\ 0<|x-a|<\delta): |f(x)$-

В ⊛ $0<|x-a|<\delta$

$\begin{cases} a-\delta < x < a+\delta \\ x \ne a \end{cases}$



Опр. число A - назыв. пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$ <u>справа</u> / слева (<u>правосторонним пределом</u> / левосторонним пределом), если $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0)$

$\left(\forall x \in E,\ \dfrac{a<x<a+\delta}{a-\delta<x<a}\right): |f(x)-A| < \varepsilon$

Предел $\dfrac{\text{справа}}{\text{слева}}$ $\dfrac{\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)}{\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)}$

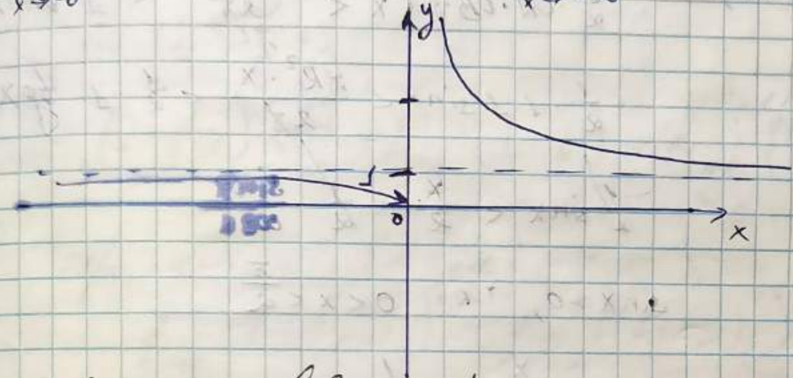
Если $a \to 0$ справа $a \to +0$ (стремится справа.)
слева $a \to -0$ (стремится слева.)

Пример: $y = f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$

$y \to 0$

$\lim\limits_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$

$\lim\limits_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$



Теорема. (Связь существования предела функции в точке с существованием односторонних пределов ~ необходимое и достаточное усл. сущ-я пределов.)

~ Для того, чтобы существовал $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ необходимо и достаточно, чтобы существовали равные между собой и нему A односторонние пределы

$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \rightleftarrows \exists f(a-0),\ \exists f(a+0),\ f(a+0) = f(a-0) = A$

Док-во: $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in E,\ 0 < |x-a| < \delta : |f(x) - A| < \varepsilon$

$0 < |x-a| < \delta$

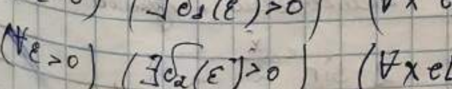
$\left[\begin{array}{l} a < x < a+\delta \\ a-\delta < x < a \end{array}\right.$ ~ док-ли существование односторонних пределов.

При $a < x < a+\delta$ $\exists f(a+0)$
$a-\delta < x < a$ $\exists f(a-0)$ $\rightarrow f(a+0) = f(a-0) = A$

Достаточность: $\leftarrow$ $\exists f(a+0),\ \exists f(a-0)$
$f(a+0) = f(a-0) = A$

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)\ (\forall x \in E,\ a < x < a+\delta),\ |f(x) - A| < \varepsilon$ (1) – справа

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta_2(\varepsilon) > 0)\ (\forall x \in E,\ a-\delta < x < a) : |f(x) - A| < \varepsilon$ (2) – слева.



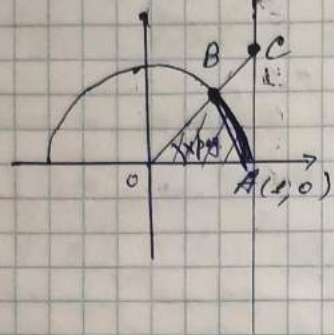
При $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (1) и (2) – выполняются, значит $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

~ что и треб. док-ть.

(п.24.) Первый замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Док-во: $0 < x < \frac{\pi}{2}$



$\angle COA = x$ рад.

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сектора}} < S_{\triangle AOC}$$

$$\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin x < \frac{\pi R^2\cdot x}{2\pi} < \frac{1}{2}\cdot OA\cdot AC$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin x < \frac{\pi R^2\cdot x}{2\pi} < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} x$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\sin x < \frac{x}{\cancel{2}} < \cancel{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$\sin x > 0$, т.к. $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

{ Если a, b, c - одного знака, то если $a < b < c \Rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ }

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$x \to 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

При $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ $\quad \lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = 1.$ (т.к. $\frac{\sin x}{x}$ - чётная.)

Или заменой. $\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = \left\{ \begin{matrix} -x = t \\ \Rightarrow t \to +0 \end{matrix} \right\}$

Следствия из 1-ого замечательного предела:

$1^\circ)$ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$

$2^\circ)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x} = 1$

$3^\circ)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \left\{ \begin{matrix} x = \sin t \\ x\to 0,\ t\to 0 \end{matrix} \right\} = \lim_{t\to 0}\frac{\arcsin(\sin t)}{\sin t} = 1.$

$4^\circ)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ (аналогично с пунктом 3°)

$5^\circ)$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{2}} = 1$

Второй замечательный предел.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ док-я через замену

Док-во: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$?

$$\underset{n}{[x]} \le x < \underset{n}{[x]}+1 \to n \le x < n+1.$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \quad \Big| +1$$

$$\frac{1}{n+1}+1 < \frac{1}{x}+1 \le 1+\frac{1}{n} \quad \uparrow x$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}_{\to e} \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x < \left(\frac{1}{x}+1\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^x < \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{\to e} \quad \{ n \le x < n+1.$$

$\to e$

При $n\to+\infty$ $\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e}\right)^{-1} = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2) $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Замена: $\{-x = t+1\}$ $\quad x\to-\infty$, $t\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t-1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-t-1+1}{-t-1}\right)^{-(t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{\to e}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)}_{1} = e.$$

Обобщая $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Следствия из 2-ого замечательного предела.

1°) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+x) =$

$a>0,\ a\ne 1$ $\quad = \lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{\frac{1}{\ln a}} = 1.$$

2°) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

3°) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a^x-1=t \\ a^x=t+1 \\ x=\log_a(t+1) \\ x\to 0 \Rightarrow t\to 0 \end{array}\right\}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

4°) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p-1}{x} = p$$

$$1+x = e^t$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{pt}-1}{e^t-1} = \lim_{t\to 0} \frac{(e^{pt}-1)\cdot p\cdot t}{tp\cdot e^{t-1}} = p$$

Примеры по второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x}{x^2+2x}\right)^x = \{1^\infty\} =$$

1) $$\frac{x^2+4x}{x^2+2x} = \frac{x^2+2x+2x}{x^2+2x} = 1+\frac{2x}{x^2+2x}$$

2) $$\frac{x^2+4x}{x^2+2x}+1-1 = 1+\frac{2x}{x^2+2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{2x}{x^2+2x}\right)^{\frac{x^2+2x}{2x}}}_{e}\Bigg)^{\frac{2x^2}{x^2+2x}} = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+2x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{4x+1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\left(1+\frac{4x+1}{x^2}\right)^x}^{\to e^4}}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}_{\to e^2}} = \frac{e^4}{e^2} = e^2$$

(п.2.5) Сравнение функций. Сравнение бесконечно-малых и беск. больших.

Опр. $\alpha(x), \beta(x)$ – б.м. ф-и при $x\to a$

1) $\alpha(x)$ – назыв. беск. малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, если:
$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$
$\to \alpha(x) = o(\beta(x))$

2) Если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \in R,\ C\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б. малые величины одного порядка малости.

3) Если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные

б.м. величина.

4) Если существуют $\to$ $\exists C \neq 0$, $C \in R$, $k > 0$, такие, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{C(x-a)^k} = 1$, то говорят, что б.м. величина $\alpha(x)$ имеет порядок малости k по отношению к $(x-a)$, а $C \cdot (x-a)^k$ - назыв. главной частью б.м $\alpha(x)$.

5) б.м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимы при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ - не существует!

Св-ва символа $o(\alpha(x))$.

1, 2) $o(\alpha(x)) \pm o(\alpha(x)) = o(\alpha(x))$

3) $C \cdot o(\alpha(x)) = o(\alpha(x))$

4) $o(\alpha(x)) \cdot o(\beta(x)) = o(\alpha(x) \cdot \beta(x))$

5) $o(o(\alpha(x))) = o(\alpha(x))$

6) $o(\alpha(x)) \cdot o(\alpha(x)) = o(\alpha(x))$

Теорема. ~ Если $C(x-a)^k$ - гл. часть б.м. $\alpha(x)$ при $x \to a$, то

$$\alpha(x) = C \cdot (x-a)^k + o\left((x-a)^k\right).$$

Док-во:

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{\alpha(x)}{C(x-a)^k} - 1\right) = 0$$

$$\frac{\alpha(x)}{C(x-a)^k} - 1 = \beta(x) \text{ - б.м. величина.}$$

$$\Rightarrow \alpha(x) = C \cdot (x-a)^k + \beta(x) \cdot C(x-a)^k$$

т.к. $\beta(x) \cdot C(x-a)^k = o\left((x-a)^k\right)$

$$\to \alpha(x) = C \cdot (x-a)^k + o\left((x-a)^k\right)$$

Теорема. ~ $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - б.м при $x \to a$.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \underset{\text{тогда и только тогда, когда}}{\rightleftarrows} \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \to a.$$

Док-во: Если $\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \to 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} \to 0$

$\to$ т.е. $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$

Таблица эквивалентностей при $x \to 0$

1) $\sin x \sim x$

2) $\operatorname{tg} x \sim x$

3) $\arcsin x \sim x$

4) $\operatorname{arctg} x \sim x$

5) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

следствия из 1-го зам. пред.

6) $\ln(1+x) \sim x$

7) $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$

8) $e^x - 1 \sim x$

9) $a^x - 1 \sim x \ln a$

следствия из 2-ого зам. предела.

10) $(1+x)^p - 1 \sim px$

Применение эквивалентных беск. малых при вычислении пределов.

Теорема. (о замене ф-й на экв-ые при вычислении пределов)

$\sim \alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. при $x \to a$

$$\alpha(x) \sim \alpha^*(x)$$
$$\beta(x) \sim \beta^*(x)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}$$

Док-во:
$$\lim_{x\to a} \frac{\overbrace{\alpha(x)\cdot\alpha^*(x)}\cdot\beta^*(x)}{\beta(x)\cdot\underbrace{\alpha^*(x)\cdot\beta^*(x)}_{\to 1}} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}$$

что и т.д.

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt[3]{1+4x}-1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\frac{1}{3}\cdot 4x} = \frac{9}{4}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 5x + \ln(1+x+x^2) - 10x^3}{\operatorname{tg}^2(\sqrt{3}x) + \sin 4x + e^{x^2} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x + o(x) + x}{4x + o(x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\left(6 + \frac{o(x)}{x}\right)}{x\left(4 + \underbrace{\frac{o(x)}{x}}_{\to 0}\right)} = \frac{3}{2}$

$\arcsin 5x = 5x + o(5x)$, $o(5x) = o(x)$

$\ln(1+x+x^2) = x^2 + x + o(x) = x + o(x)$

$10x^3 = o(x)$

$\operatorname{tg}^2(\sqrt{3}x) = 3x^2 + o(x)$

$\sin 4x = 4x + o(x)$; $e^{x^2} - 1 = x^2 + o(x)$

3) Выделить главную часть $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x \quad x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{c \cdot x^k} = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(x^3 - 3x + 2)}{x \cdot c \cdot x^{k-1}}.$$

$\frac{2}{c} = 1$ при $k = 1$. $\to$ Гл. часть $f(x) = 2x + o(x)$

Сравнение бесконечно больших. (б.б.)

Опр. $\sim \alpha(x), \beta(x)$ - бесконечно большие (б.б.) при $x \to a$,

т.е. $\lim_{x \to a} \alpha(x) = \infty$

1) $\beta(x)$ назыв. б.б. более высокого порядка роста, чем $\alpha(x)$, если
$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

2) Если $\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, $c \in R$, $c \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$

назыв. б.б. одного порядка роста.

3) Если $\exists$ конечные числа $c \neq 0$, $k > 0$, такие что
$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\frac{1}{c(x-a)^k}} = \lim_{x \to a} \alpha(x) \cdot c(x-a)^k = 1, \text{ то}$$

$\alpha(x)$ назыв. беск. большой порядка роста k по отношению к $\frac{1}{x-a}$

4) Если $\alpha(x)$ и $\frac{c}{(x-a)^k}$ б.б. при $x \to a$, $k > 0$, $c \neq 0$

и $\exists \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\frac{c}{(x-a)^k}} = 1$, то $\frac{c}{(x-a)^k}$ - гл. часть б.б. $\alpha(x)$ при $x \to a$

$\alpha(x) = \frac{c}{(x-a)^k} + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ имеет порядок роста $< k$.

Пример:

$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$ опр. порядок роста и выдел. гл. часть

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}}{c \cdot x^k} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt[6]{\frac{1}{x}} \right)}{c \cdot x^k}$$

при $k = \frac{2}{3}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{c \cdot x^k} = 1 \to c = 1$

§3. Непрерывность функции.

(п.3.1.) Опр-е непрерывной ф-и в точке и на множестве.

Опр. Пусть на мн-ве $E \subset R$ задана $f(x)$ и x_0 - предельная точка $\in E$ (обл. опр. функции.)

Ф-я $f(x)$ назыв. непрерывной в точке x_0, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\Updownarrow$$

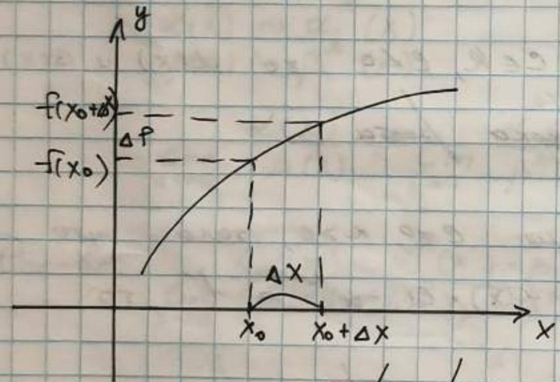
По Коши: ⊛ 1) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta(\varepsilon) > 0)\ (\forall x \in E,\ |x - x_0| < \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

По Гейне: 2) $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E \quad x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

⊛ $x - x_0 = \Delta x$ - приращение аргумента

$f(x) - f(x_0) = \Delta f$ - приращение функции

⊛ Перепишем: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in E,\ |\Delta x| < \delta) : |\Delta f| < \varepsilon$



Критерий непрерывности функции в точке!

→ $f(x)$ - непрерывна в т. x_0 $\rightleftarrows$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

Опр. Пусть на мн-ве E задана ф-я $f(x)$;
$f(x)$ - непрерывна на E, если она непрерывна в каждой точке этого мн-ва.

Теорема 1. Все основные элементарные ф-и (степенные, тригонометрические, показательные, логарифмические и т.д.) непрерывны в своей области опр.
(без док-ва.)

Пример: $f(x) = \sin x$ - непрерывна в $\forall x_0 \in R$

По определению: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin\frac{x - x_0}{2} \cos\frac{x + x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2} \cos\frac{x + x_0}{2}\right|$

$|\sin x| \le x$

$|\cos x| \le 1.$

$$\Rightarrow 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} < \underbrace{\varepsilon}_{\delta}$$

$$\rightarrow (\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta(\varepsilon)=\varepsilon)\ (\forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|<\delta)\ \underbrace{|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon}_{|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon}$$

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$$

x_0 - мн-во т. из R.

$y=\sin x$ непрерывна на R

Теорема 2. (Об арифметических действиях над непрерывными ф-ями)

~ Пусть ф-и f и g непрерывны на мн-е E,

тогда, $f\pm g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(x)\neq 0,\ x\in E)$ ~ непрерывны на E.

Док-во следует из теоремы об арифмет-их действий с пределами:

Для суммы: $\forall x_0\in E$, $f(x)$ и $g(x)$ непр. в $(\cdot)$ x_0,

если $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, $\exists\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$

$$\underline{\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))}=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=\underline{f(x_0)+g(x_0)},$$ что и т.д.

Аналогично для разности и др-х действий!

Пример 1.

Многочлен $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ непрерывен $\forall x\in\mathbb{R}$,
т.к. является суммой непрерывных функций.

Пример 2:

Рациональная ф-я:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}$$

Теорема 3. (О непрерывности композиции (сложных функций))

~ Пусть f задана на мн-ве X и принимает значения во мн-ве Y $(f: X\to Y)$, а g - задана на мн-ве Y, тогда

если f непрер. в $(\cdot)$ x_0, ф-я g непрерывна в $(\cdot)$ $f(x_0)\in Y$, то $g(f)$ также непр. в $(\cdot)$ x_0

Док-во (самостоятельно!)

Теорема 4.

~ Пусть $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонно $\frac{\text{возрастает}}{\text{убывает}}$ на мн-ве E.

Тогда на мн-ве Y (мн-во значений ф-и $f(x)$) $\exists$ обратная ф-я $x = f^{-1}(y)$, которая будет являться монотонно $\frac{\text{возрастающей}}{\text{убывающей}}$ на данном мн-ве.

Теорема 5. (О пределе степенно-показательного выражения)

~ Пусть $\exists$ конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = A^B$

Док-во:

$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$

$f(x) \to A \quad (x \to x_0)$

$\ln f(x) \to \ln A$ — следует из непрерывности нат. логарифма

По теореме 2: $g(x) \cdot \ln f(x) \to B \cdot \ln A$ при $x \to x_0$

Т.к. $y = e^x$ непр. $\to e^{g(x) \ln f(x)} \to e^{B \ln A} = A^B$

→ Следствие: Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $(\cdot)\ x_0$, и $f(x)$ то ф-я $f(x)^{g(x)}$ также непрерывна в $(\cdot)\ x_0$,

т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = f(x_0)^{g(x_0)}$

(п 3.2.) Односторонняя непрерывность.

Опр. Пусть на мн-ве E задана $f(x)$ и $x_0 \in E$ — предельная точка. $f(x)$ назыв. непрерывной в $(\cdot)\ x_0$ $\frac{\text{слева}}{\text{справа}}$, если $\frac{\text{левосторонний}}{\text{правосторонний}}$ предел функции в $(\cdot)\ x_0$ = значению ф-и в этой точке.

т.е. $\exists$ $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ — слева

$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ — справа.

Опр. $f(x)$ непрерывна на $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Опр. $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, если она непрерывна в интервале $(a; b)$ и при $x = a$ — непрерывна справа, $x = b$ — непрерывна слева

Критерий непрерывности ф-и в точке:

~ Для того чтобы $f(x)$ была непрерывна в т. x_0 необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева и справа.

$$\exists\, f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$$

~ док-во (самостоятельно!)

(п.3.3.) Классификация точек разрыва.

~ Точки, в которых ф-я не явл. непрерывной называются — точками разрыва ф-и.

Опр. Пусть ф-я $f(x)$ задана на мн-ве E и $x_0 \in E$ — пред. точка.

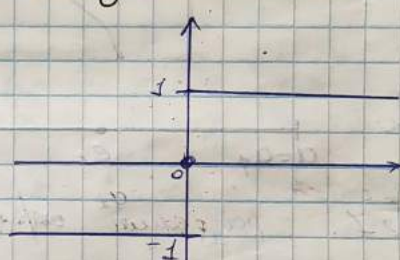
x_0 — назыв. точкой разрыва 1-ого рода, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы.

$$\exists\, f(x_0+0), \quad \exists\, f(x_0-0).$$

При этом $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ назыв. скачком ф-и в точке x_0.

Пример 1:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$



$x=0$ — точка разрыва 1-ого рода.

Пример 2:

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$x = 0$

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

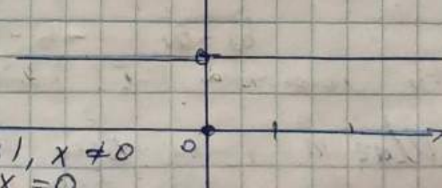
$$\lim_{x\to-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow x=0$ — точка разрыва 1-го рода.

Опр. x_0 — назыв. точкой устранимого разрыва если в этой точке существуют конечные односторонние пределы, равные между собой, но не равны значению ф-и в этой точке.

Пример:

$$y = |\operatorname{sgn} x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$



$x=0$ — точка устранимого разрыва. $\rightarrow$ $y = \begin{cases} |\operatorname{sgn} x|, & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

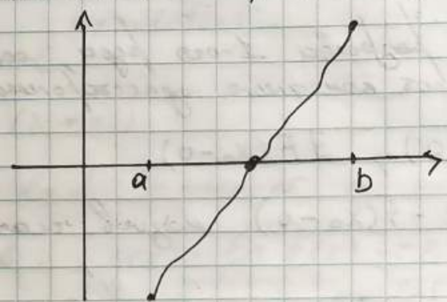
Опр. Предельная (•) x_0 называется точкой разрыва 2-ого рода, если хотя бы один из её односторонних пределов $=\infty$ или не существует.

Пример:
$$y = 2^{\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x\to+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$$

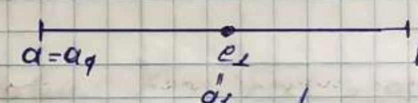
(п.э.и) Св-ва ф-й непрерывных на отрезке.

Теорема 1. (Первая теорема Больцано-Коши)

~ Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков $f(a)\cdot f(b) < 0$, то $\exists c \in (a; b)$: $f(c)=0$



Док-во:



Шаг 1. - разделим отрезок на пополам

$\to [a_0; c_1]$ и $[c_1; b_0]$

Если $f(c_1)=0$ то доказали.

Если $f(c_1)\neq 0$

$\to c_1 = a_1$

Пусть разных знаков отр $[a_1; b_1]$

$f(a_1)\cdot f(b_1) < 0$

Длина отр. $[a_1; b_1] = \dfrac{b-a}{2}$

Шаг 2: $[a_1, b_1]$ - делим пополам:

Если: $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ док-но

~ если нет - то из двух половинок выбираем отр. $[a_2, b_2]$, такой, что $f(a_2)\cdot f(b_2)$

$$\frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$$

Шаг n $\to [a_n, b_n]$
$f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$

Длина $[a_n, b_n] = \dfrac{b-a}{2^n} = 0$

при $n \to \infty$

$[a, b] > [a_1, b_1] > [a_3, b_3] \ldots > [a_n, b_n] > \ldots$

~ длинны отрезков стремятся к нулю.

По теореме Кантора: $\exists!\, c: \forall n \in \mathbb{N},\ c \in [a_n, b_n]$,
т.к. длины отр. стремятся к нулю

$f(a_n) \to f(c)$

$f(a_n) \cdot f(b_n) \to f(c)$

$f(b_n) \to f(c)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$

$0 \le f^2(c) = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \le 0$

$\to f(c) = 0$ ч.т.о. и т.д.

1. Замечание: точек, в которых ф-я обр. в ноль может быть несколько.

2. Замечание: если ф-я монотонно возрастает, то такая точка единственная.

На этой теореме основано приближённое решение уравнений!

Пример: $x^5 + x - 1 = 0$

$f(1) = 1 > 0$; $f(-1) = -3 < 0$

$f(0) = -1 < 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} + \frac{1}{2} - 1 < 0 \quad \to$ корень где-то $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

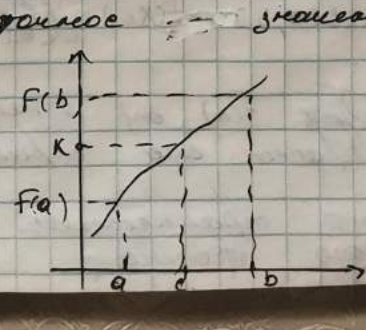
$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{13}{1024} < 0 \quad (0,75; 1)$

$f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{12711}{32768} > 0 \quad \xrightarrow{\text{корень}} \left(\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right)$

Корень примерно: $0,75 < x_0 < 0,875$

Теорема (Вторая теорема Больцано-Коши)

~ Если ф-я непрерывна на $[a; b]$, то она принимает любое промежуточное значение между $f(a)$ и $f(b)$



Док-во: пусть $F(a) < f(b)$

Докажем, что $\forall k \in (f(a); f(b))$ $\exists c \in [a, b]$, $f(c) = k$

Рассм-м ф-ю $g(x) = f(x) - k$ (тоже непрерывная)

Тогда $g(a) = f(a) - k < 0$

$g(b) = f(b) - k > 0$

$\Rightarrow$ По теореме 1. $\exists c \in [a, b] \rightarrow g(c) = 0$

Т.к. $g(c) = 0 \rightarrow g(c) = f(c) - k \rightarrow \underline{\underline{f(c) = k}}$

— что и т.д.

Аналогично если $f(a) > f(b)$

27.10.2020

Теорема 3. (I-ая теорема Вейерштрасса)

— Если $F(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е.

$\exists M \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

$f(x) \in C[a, b]$

Док-во (от противного):

Пусть $F(x)$ не ограничена сверху, тогда для любого n.

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a, b] : F(x_n) \geq n$

x_n ограничена, т.к. $x_n \in [a, b]$, по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выбрать сходящуюся подпослед-ть

$x_{n_k} \rightarrow x_0$, где $x_0 \in [a; b]$

Т.к. $F(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то

$F(x_{n_k}) \rightarrow F(x_0)$ - противоречие

$\forall n_k \in \mathbb{N} \quad f(x_{n_k}) \geq n_k$.

Значит, $f(x)$ ограничена сверху.

Аналогично можно док-ть, что $f(x)$ огр. снизу (самостоятельн

Теорема 4. (II-ая теорема Вейерштрасса)

— Если функция опр-на и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на ней точной верхней / нижней гранией.

$$\left(\frac{\exists x_1 \in [a; b],\ f(x_1) = \sup\limits_{[a; b]} f(x)}{\exists x_2 \in [a, b],\ f(x_2) = \inf\limits_{[a, b]} f(x)} \right)$$

Док-во:

Пусть $f(x)$ опр. и непр. на $[a; b]$, по I-й теореме Вейерштрасса она ограничена.

Всякое ограниченное мн-во имеет точную верхнюю и нижнюю границу.

Пусть $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x) \iff$

1) $(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall x \in [a;b]) : f(x) \le M$

2) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x_\varepsilon \in [a;b]) : f(x) > M - \varepsilon$.

(От противного!)

Пусть $f(x)$ не достигает своей верхней грани на $[a;b]$,

т.е. $f(x) < M \quad \forall x \in [a;b]$

Введём вспом. ф-ию: $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)} > 0$

$\varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и по I-ой теореме Вейерштрасса она ограничена на $[a,b]$, т.е. будет иметь точную верхнюю грань.

т.е. $\exists K \in \mathbb{R}^+$

$\forall x \in [a,b] \qquad 0 < \varphi(x) \le K$

$f(x) \le M - \dfrac{1}{K} \qquad \Rightarrow \dfrac{1}{M - f(x)} \le K$ — противоречие.

Следствие: непрерывный образ отрезка есть отрезок.

Пусть $f \in C[a,b]$

$m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$

, тогда $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$

$M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$

3. Дифференцирование (ф-я одной переменной)

Раздел 1.

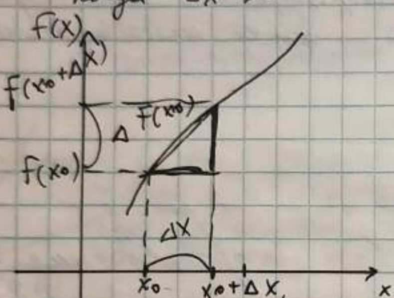
§1. Опр-е производной

Опр. Пусть $f(x)$ задана на мн-ве $E=[a,b]$ и $x_0 \in (a;b)$ - внутр. точка мн-ва E $(\exists U(x_0) \subset E)$

$$\Delta x = x - x_0 \text{ - приращение аргумента в точке } x_0$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \text{ - приращение ф-и в т. } x_0$$

Опр. Производная ф-и $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения ф-и к приращению аргумента, когда $\Delta x \to 0$



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$y'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \frac{dy(x_0)}{dx}$$

Замечание: производная может быть как конечной так и бесконечной.

Пример: $y(x) = \sqrt[3]{x}$

$$x_0 = 0$$

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0+\Delta x} - 0}{\Delta x} = +\infty$$

Примеры вычисления (по определению) некоторых основных элементарных функций.

1) $c' = 0 \quad (f(x) = c)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

2) $f(x) = x^\alpha$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^\alpha\left(\overbrace{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}^{\sim \alpha\cdot\frac{\Delta x}{x}}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

3) $f(x) = a^x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x(\overbrace{a^{\Delta x} - 1}^{\sim \Delta x \ln a})}{\Delta x} = \frac{a^x \cdot \Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a$$

4) $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

$\to 1$

5) $f(x) = \cos x$; $f'(x) = -\sin x$ — док-ть дома!

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}\cdot 2} =$$

$\to 0$ $\to 1$

$= -\sin x$, что и т.д.

§2. Односторонние производные. Связь непрерывности функции с существованием конечной производной.

Оп. Если $\exists \begin{matrix} \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta_f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \\ \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \end{matrix}$, то его называют

правосторонним / левосторонним пределом точки x_0

Теорема. (Необходимое и достаточное условие существования производной)

~ Для того чтобы ф-я $f(x)$ имела в точке x_0 производную необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали равные односторонние производные.

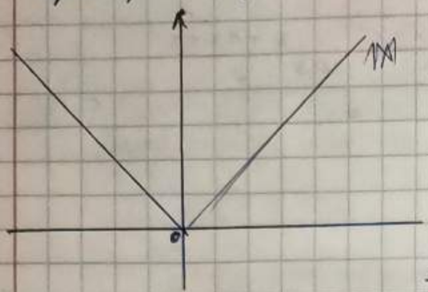
Док-во (следует из теоремы об односторонних пределах.)

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \rightleftarrows \begin{matrix} \exists \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \\ \exists \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

$(\exists f'(x_0) = A \iff \exists f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = A)$

Пример: $y=|x|$ в $(\cdot)$ $x_0=0$



$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|x+\Delta x|-\overset{=0}{|x|}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$$

$\Rightarrow$ в $(\cdot)$ $x_0=0$ производная не существует.

Теорема. (о связи непрерывности ф-и в точке с существованием конечной производной)

— Если ф-я имеет конечную производную в точке, то она непрерывна в этой точке.

Док-во: $\exists\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A\in\mathbb{R}$

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to0}\underbrace{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}_{A}\cdot\Delta x=0$$

— док-ли, что точка непрерывна в точке.

Обратное неверно!

§3. Правило вычисления производной. Таблица производных.

Правило вычисления:

Пусть $\exists f'(x)\in\mathbb{R}$, $\exists g'(x)\in\mathbb{R}$, тогда

1) $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$ c - константа.

2) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ - док-ть самост-о!

$$(f(x)+g(x))'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\left(\underbrace{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{f'(x)}+\underbrace{\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}_{g'(x)}\right)=f'(x)+g'(x)$$

3) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Док-во:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\, g(x+\Delta x) - f(x)\, g(x+\Delta x) + f(x)\, g(x+\Delta x) - f(x)\, g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\underbrace{\frac{g(x+\Delta x)\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)}{\Delta x}}_{f'(x)} + \underbrace{\frac{f(x)\left(g(x+\Delta x) - g(x)\right)}{\Delta x}}_{g'(x)} \right) \ominus$$

Т.к. $g(x)$ имеет конечную производную, то она непрерывна в этой точке.

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$$

$$\ominus f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Док-во:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\, g(x) - f(x)\, g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\, g(x)\cdot \Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)\, g(x)} \left(\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x) - f(x)\, g(x) + f(x)\, g(x) + f(x)\, g(x+\Delta x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)\, g(x)} \left(g(x)\overbrace{\frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)}{\Delta x}}^{\to f'(x)} - f(x)\overbrace{\frac{\left(g(x+\Delta x) - g(x)\right)}{\Delta x}}^{\to g'x} \right) =$$

$$= \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$$

Примеры:

① $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$(tg\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot \cos x - \sin(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

② $(ctg\, x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$(ctg\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x\cdot \sin x - \cos x\cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

5) $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\left(f(g(x))\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \ominus$$

30.10.2020} Обозначим $\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$

Тогда, $\Delta g \to 0$ при $\Delta x \to 0$
(в силу непрерывности ф-и $g(x)$)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{(g(x+\Delta x) - g(x))} \cdot \frac{(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'_g \cdot g'(x)$$

Пример:

$$y = \cos^3(tg^2(e^{3x}))$$

$$y' = 3\cos^2(tg^2(e^{3x})) \cdot (-\sin(tg^2(e^{3x}))) \cdot 2\,tg(e^{3x}) \cdot \frac{1}{\cos^2(e^{3x})} \cdot e^{3x} \cdot 3$$

$=$

6) Теорема. Если ф-я $y = f(x)$ удовл. услов.:
1) ф-я монотонна и непрерывна на (a, b)
2) дифференцируема в $(\cdot)$ $x_0 \in (a, b)$, причём $y'(x_0) \neq 0$, тогда:

на интервале $(c; d)$ $\exists$ обратная ф-я $x = f^{-1}(y)$ дифференцируемая в $(\cdot)$ x_0 и её производная вычисляется по формуле:

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$$

Док-во:

В силу условия 1) $\exists$ обратная ф-я монотонная и непрерывная на $(c; d)$

Обозначим, $x = f^{-1}(y) = g(y)$ и $x'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} =$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{y - y_0}{g(y) - g(y_0)}} =$$

Т.к. $x = g(y)$, то $g(y) = x$, $g(y_0) = x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{y - y_0}{x - x_0}} = \frac{1}{y'_x} = x'(y)$$

Продолжение примеров:

③ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $\qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$f(x) = \log_a x = y$

$x = a^y = f^{-1}(y)$. Поэтому, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{(a^y)'} = \dfrac{1}{a^y \ln a} =$

$= \dfrac{1}{x \ln a}$

④ $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f(x) = \operatorname{arctg} x = y$

$x = \operatorname{tg} y = f^{-1}(y)$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

⑤ $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ (самостоятельно) ; $f(x) = \operatorname{arcctg} x = y$

$x = \operatorname{ctg} y = f^{-1}(y)$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

⑥ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arcsin x$, $x = \sin y$ $\to$ $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

$|x| < 1$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

⑦ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (сам-о) $f(x) = \arccos x = y$

$x = \cos y = f^{-1}(y)$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

⑧ $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

⑨ $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

⑩ $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

11) $(cth\,x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$ (сам-но) $f(x) = cth\,x = y$

$$(cth\,x)' = \left(\frac{ch\,x}{sh\,x}\right)' = \frac{ch'x\,sh\,x - sh'x\,ch\,x}{sh^2 x} = \frac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x} = -\frac{(ch^2 x - sh^2 x)}{sh^2 x} = -\frac{1}{sh^2 x}$$

Таблица производных:

1) $c' = 0$
2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \cdot x'$
3) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \cdot x'$
4) $(e^x)' = e^x \cdot x'$
5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot x'$
6) $(\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot x'$
7) $(\sin x)' = \cos x \cdot x'$
8) $(\cos x)' = -\sin x \cdot x'$
9) $(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x'$
10) $(ctg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot x'$
11) $(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot x'$
12) $(arcctg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2} \cdot x'$
13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x'$
14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x'$
15) $(sh\,x)' = ch\,x \cdot x'$
16) $(ch\,x)' = sh\,x \cdot x'$
17) $(th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x} \cdot x'$
18) $(cth\,x)' = \frac{-1}{sh^2 x}$
19) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \cdot x'$
20) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x'$
21) $|x|' = \frac{x}{|x|} = sgn\,x$, $x \neq 0$

Процесс вычисления производной непосредственно по правилам и таблице наз-ся <u>дифференцированием функции</u>.

§4 Физический и геометрический смысл производной.

<u>Физический смысл производной</u>

Пусть $S(t)$ - путь, пройденный точкой к моменту времени t.
Тогда, $S(t+\Delta t)$ - путь пройденный к моменту $t+\Delta t$,
$S(t+\Delta t) - S(t)$ - путь, пройденный за промежуток времени Δt
$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ - средняя ск-ть точки на промежутке времени Δt.

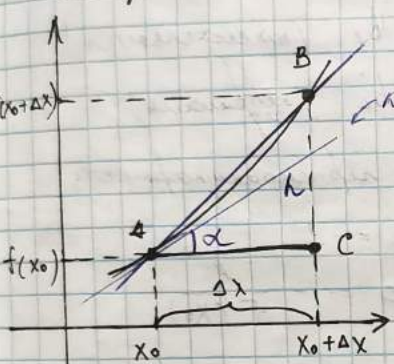
$\Delta t \to 0$, то средняя ск-ть будет стремиться к мгновенной ск-ти в момент времени t:

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = V(t)$$ – мгновенная ск-ть в момент времени t.

~ Физический смысл: – производная пути по времени в момент времени t равна мгновенной ск-ти, т.е. $S'(t) = V(t)$

– производная ск-ти по времени в момент времени t равна мгновенному ускорению, т.е. $V'(t) = a(t)$

Геометрический смысл производной.



ΔABC:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tg\angle BAC$$

т.е. отношение приращение функции к приращению аргумента равно тангенсу угла наклона секущей AB.

Если $\Delta x \to 0$, то (·) B стремится к (·) A, и секущая AB стремится к касательной AL,

Поэтому предел: $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha,$$

α – угол наклона к оси OX касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0

~ Геометрический смысл: – производная ф-и в точке равна тангенсу угла наклона к положительному направлению оси OX касательной к графику этой функции в данной точке, т.е.

$$\boxed{f'(x_0) = tg\alpha}$$

Замечание: Если производная в точке равна ∞, то в этой точке касательная вертикальна.

Уравнение касательной:

$y = kx + b$, $\quad k = tg\alpha = f'(x_0)$

$\to \quad y = f'(x_0) \cdot x + b$

b – находится из условия, что точка $(x_0; f(x_0))$ – коорд., лежит на прямой.

$$\Rightarrow \quad b = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$$

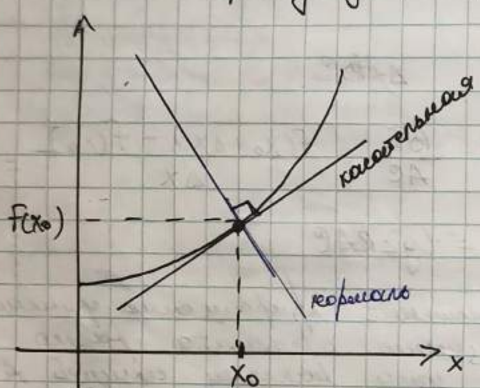
Отсюда, $y = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 =$

$= f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$ — ур-е касательной к графику ф-и $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

Уравнение нормали.

Нормаль — это прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$, и перпендикулярная касательной



$y = k_1 x + b_1$ (касательная)

$y = k_2 x + b_2$ (нормаль)

Условие перпендикулярности:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Уравнение нормали:

$$\boxed{y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)}$$

§5. Логарифмическое дифференцирование. Степенно-показательная ф-я.

1) Логарифмическое дифференцирование:

Пусть $y(x)$ положительна и имеет конечную производную в точке x.

$$(\ln y(x))' = (\ln y)'\cdot y'(x) = \frac{y'(x)}{y}$$

$\Rightarrow \boxed{y' = y\cdot(\ln y)'}$ — формула логарифмического дифференцирования.

Пример 1:

$$y = (x^2+5)^{\sin x}$$

$$y' = y\cdot\left(\ln (x^2+5)^{\sin x}\right)' = y\left(\sin x\cdot\ln(x^2+5)\right)' =$$

$$= y\left(\cos x\cdot\ln(x^2+5) + \frac{\sin x\cdot 2x}{x^2+5}\right) =$$

$$= (x^2+5)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln(x^2+5) + \frac{2x\sin x}{x^2+5}\right).$$

Пример 2:
$$y = \frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}$$

$$y' = y\cdot\left(\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}\right|\right)' = y\left(\ln\sqrt{x+2} + 4\ln|3-x| - 5\ln|x+1|\right)' =$$
$$= y\cdot\left(\frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}\left(\frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1}\right)$$

$$(a(x))^{b(x)}$$
$$(a(x))^{b(x)} = e^{\ln(a(x))^{b(x)}} = e^{b(x)\cdot\ln(a(x))}$$
$$\left((a(x))^{b(x)}\right)' = \left(e^{b(x)\cdot\ln(a(x))}\right)' = e^{b(x)\cdot\ln(a(x))}\cdot\left(b(x)\cdot\ln(a(x))\right)' =$$
$$= (a(x))^{b(x)}\cdot\left(b'(x)\cdot\ln(a(x)) + b(x)\cdot\frac{a'(x)}{a(x)}\right) =$$
$$= (a(x))^{b(x)}\cdot b'(x)\ln(a(x)) + b(x)\cdot a'(x)\,a(x)^{b(x)-1}$$
$$\Rightarrow \left((a(x))^{b(x)}\right)' = (a(x))^{b(x)}\cdot\ln(a(x))\cdot b'(x) + b(x)\cdot(a(x))^{b(x)-1}\cdot a'(x)$$

2.11.2020

§6. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал.

Опр. Ф-я дифференцируема в точке, если её приращение представимо в виде суммы главной линейной части (относительно приращения переменной Δx) и бесконечно малой более высокого порядка малости, чем Δx.

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \underbrace{A\cdot\Delta x}_{\text{линейная часть}} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\text{б.м. более выс. пор.}},\quad A\in\mathbb{R}$$

При этом, главная линейная часть приращения называется дифференциалом df: $df(x_0) = A\cdot\Delta x$

Пример: $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$.

Приращение: $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (1+\Delta x)^2 - 1 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 =$
$= 2\Delta x + (\Delta x)^2$.

Дифференциал, т.е. главная линейная часть приращения равен $2\Delta x$; $o(\Delta x) = (\Delta x)^2$

Теорема. (Необходимое и достаточное условие дифференцируемости) Функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда у неё существует конечная производная в этой точке, причём дифференциал:
$$df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x$$

(т. е. $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$, $A \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \exists f'(x_0) = A \in$

Док-во:

$\Rightarrow$ (Необходимость)

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т. е

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x), \text{ где } A \in \mathbb{R}$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}_{\to 0}$$

$$f'(x_0) = A$$

(Достаточность)

Пусть $\exists$ конечная производная $f'(x_0) = A \in \mathbb{R}$

т. е: $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - A = 0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - A\Delta x}{\Delta x} = 0$$

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - A\cdot\Delta x = o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0$$

Отсюда, $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$, $A \in \mathbb{R}$

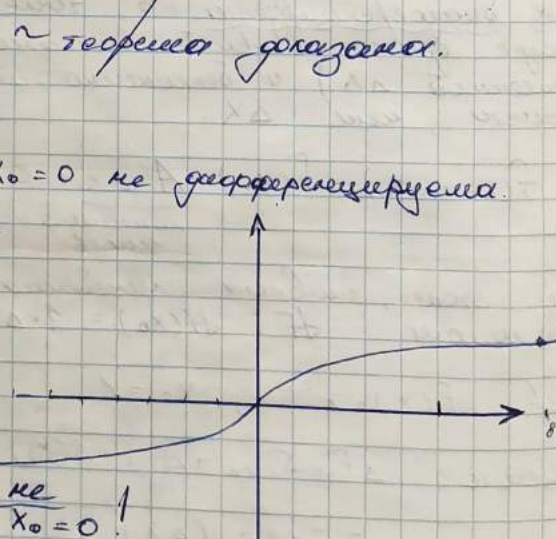
~ теорема доказана.

Примеры:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, в $(\cdot)$ $x_0 = 0$ не дифференцируема.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty$$



Т.к. не существует конечной производной, то ф-я $y = \sqrt[3]{x}$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$!

Отметим, что касательная к гр-ку ф-и в этой точке вертикальная.

2) Если $f(x) = x$, то $df = 1\cdot\Delta x = \Delta x$,
то есть $dx = \Delta x$

$$\Rightarrow \quad df = f'(x)\cdot dx \quad *$$

$A \in R$)

Замечание:

1) Если $A=0$, то $dF=0$, а $\Delta f = o(\Delta x)$ ~ док-ть самостоятельно!

2) Если $A\neq 0$, то $df \sim \Delta f$ при $\Delta x \to 0$

3) Из ф-лы $*$ $\to \frac{df}{dx} = f'(x)$

Правило вычисления дифференциала:

1) $d(c\cdot F) = c\cdot dF$

2) $d(f+g) = df + dg$

3) $d(f\cdot g) = df\cdot g + f\cdot dg$

4) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df\cdot g - f\cdot dg}{g^2}$

Док-во вытекает из формулы вычисления дифференциала и правила вычисления производной:

4) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{f}{g}\right)' dx = \frac{f'g - fg'}{g^2}\cdot dx = \frac{f'\cdot dx\cdot g - f\cdot g'\cdot dx}{g^2} =$

$= \frac{df\cdot g - f\cdot dg}{g^2}$

3) $d(f\cdot g) = (f\cdot g)'\cdot dx = (f'g + g'f)\cdot dx = f'dx\cdot g + fg'dx = df\cdot g + f\cdot dg$

2) $d(f+g) = (f+g)'\cdot dx = (f'+g')dx = df + dg$

1) $d(c\cdot F) = (c\cdot F)'\cdot dx = c\cdot F'\cdot dx = c\cdot dF$ ч.т.д.

Инвариантность дифференциала. (неизменность)

$dF = f'(x)\cdot dx$ получено для случая, когда x - независимая переменная.

Но если $x = x(t)$

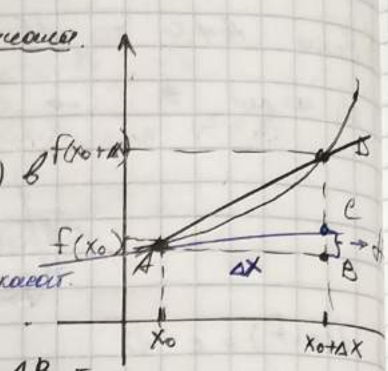
$\Rightarrow dx = x'(t)\cdot dt$

$d(f(x(t))) = (f(x(t)))'\cdot dt = f'(x(t))\cdot x'(t)\cdot dt = f'(x)\cdot dx$

$\Rightarrow$ Ф-ла $dF = f'(x)\cdot dx$ верна и в случае, когда x - зависимая переменная.

Инвариантность дифференциала заключается в том, что дифференциал всегда можно записать в одном и том же виде: произведение производной по некоторой переменной на приращение этой переменной, независимо от того, будет ли эта переменная независимой или функцией от какой-то другой переменной.

Геометрический смысл дифференциала.



Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
Тогда, $df = f'(x_0) \cdot \Delta x$.
Проведём AC - касат. к графику $y=f(x)$ в $(\cdot)$ x_0

Из геом. смысла произв. следует, что
$f'(x_0) = tg\angle CAB$, Расс-м $\triangle ABC$

$AB = \Delta x$, то $df = f'(x_0)\cdot\Delta x = tg\,CAB \cdot AB =$
$= \frac{CB}{AB}\cdot AB = \underline{\underline{BC}}$

- Геометрический смысл: в $(\cdot)$ x_0 состоит в том, что он равен приращению, которое получает ордината касательной к графику $y=f(x)$, проведённой в точке $(x_0; f(x_0))$ при переходе от точки x_0 к точке $x_0+\Delta x$

Приближённые вычисления с помощью дифференциала.

Пусть $f(x)$ диф-ма в $(\cdot)$ x_0:

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{A}\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

При малых Δx (при $\Delta x \to 0$) последнее слагаемое мало по сравнению с Δx, т.е. $\Delta f \approx df$ при $\Delta x \to 0$

$$\Rightarrow \quad \Delta f \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$\boxed{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x}$$ ~ формула для приближённых вычислений.

1 Пример: $\sqrt[3]{7{,}98}$ $\quad f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$ $\to f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$\Delta x = 7{,}98 - 8 = -0{,}02$

$f(7{,}98) \approx f(8) + f'(8)\cdot\Delta x = 2 + \frac{1}{12}\cdot(-0{,}02) = 2 - \frac{0{,}02}{12} \approx 1{,}99$

2 Пример: $\sin 31^\circ$

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ рад.

$\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад.

$\sin 31^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} = 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0{,}5152$

§ 7. Производные высших порядков.

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$, x_0 – внутренняя точка области определения E, и пусть в некоторой окрестности $U(x_0)$ везде существует производная, т.е. $\forall x \in U(x_0) \ \exists f'(x)$.

Тогда, в окрестности $U(x_0)$ определена функция $\varphi(x) = f'(x)$, поэтому x_0 – внутренняя точка области определения функции φ.

Значит, в этой точке определена производная для ф-и φ, называемая <u>второй производной функции f</u>. (или производной второго порядка в т. x_0)

$$f''(x_0) = \varphi'(x_0) \quad \text{или} \quad f''(x_0) = (f')'(x_0)$$

Аналогично определяется производная третьего, четвёртого, ..., n-го порядка.

$$f''' = f^{(3)} = (f'')'$$

$$f^{IV} = f^{(4)} = (f''')'$$

...

Таблица производных n-го порядка

1) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0)$ $\qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$

3) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$

4) $(x^m)^{(n)} = m \cdot (m-1)(m-2) \dots (m-n+1) \cdot x^{m-n}$

5) $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$

Док-во 2 формулы:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$y^{IV} = \sin x = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right)$$

ММИ: $y^{(n-1)}(x) = (\sin x)^{(n-1)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right)$ – предположение

$$y^{(n)}(x) = \left((\sin x)^{(n-1)}\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right) =$$

$$= \cos\left(x + \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right) = \underline{\sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)}$$

Правило вычисления производных высших порядков.

1) $(c\cdot f)^{(n)} = c\cdot f^{(n)}$

4) $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$

2) $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

3) $(f\cdot g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$ ~ формула Лейбница

Док-во формулы 3 ММИ:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1) $n = 1$.

$$(f\cdot g)' = \sum_{k=0}^{1} C_1^k f^{1-k} \cdot g^k =$$

$$= \underset{1}{\underset{\parallel}{C_1^0}} f' \cdot \underset{g}{\underset{\parallel}{g^{(0)}}} + \underset{1}{\underset{\parallel}{C_1^1}} \cdot \underset{f}{\underset{\parallel}{f^{(0)}}} \cdot g' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

2) Пусть для n - ф-ла верна

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

Покажем, что формула верна для следующего натурального числа $n+1$, т.е

$$(f\cdot g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)}$$

$$(f\cdot g)^{(n+1)} = \left((f\cdot g)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)} + f^{(n-k)} \cdot g^{(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k+1)} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k+1)} = \left\{ \begin{matrix} k+1 = m \\ k = m-1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} \cdot f^{(n-m+1)} \cdot g^{(m)} = \{m = k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(n-k+1)} \cdot g^{(k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \cdot f^{(n-k+1)} \cdot g^{(k)} =$$

$$= C_n^0 \cdot f^{(n+1)} \cdot g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} \cdot f^{(n-k+1)} \cdot g^{(k)} +$$

$$+ C_n^n \cdot f^{(0)} \cdot g^{(n+1)} =$$

$$= f^{(n+1)} \cdot g + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) f^{(n-k+1)} g^{(k)} + g^{(n+1)} f =$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}(n-k+k+1) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k$$

$$= f^{(n+1)} \cdot g + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(n-k+1)} g^{(k)} + g^{(n+1)} f =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)}$$ – док-ли

Пример: $(x^2 \cdot \sin x)^{(20)}$

Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$$

По ф-ле Лейбница

$$(x^2 \sin x)^{20} = C_{20}^0 \cdot x^2 \cdot (\sin x)^{(20)} + C_{20}^1 \cdot 2x \cdot (\sin x)^{(19)} + C_{20}^2 \cdot 2 (\sin x)^{18} +$$

$+0$ $=$

т.к. $2' = 0$

$$= x^2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 20\right) + 20 \cdot 2x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi \cdot 19}{2}\right) + 190 \cdot 2 \cdot \sin(x + 9\pi) =$$

$$= x^2 \cdot \sin(x + 10\pi) + 40x \cdot \cos x + 380(-\sin x) =$$

$$x^2 \cdot \sin x + 40x - 40x \cdot \cos x - 380 \sin x = \sin x (x^2 - 380) - 40x \cos x$$

§8. Производная функции, заданной параметрически.

Оп. Говорят, что ф-я $y(x)$ задана параметрически, если и переменная x и ф-я y заданы, как функции некоторого параметра t.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in T$$

Физический смысл функции, заданной параметрически.

Пару $(x(t), y(t))$ можно понимать как координаты точки на пл-ти в момент времени t.

Пример:

$$y(x): \begin{cases} x = tg\, t \\ y = \sin 2t - 2\cos 2t \end{cases}$$

$$\sin 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t} \qquad \cos 2t = \frac{1-\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$$

$$y = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2-2x^2}{1+x^2} = \frac{2x^2+2x-2}{1+x^2}$$ — явно заданная

$$dy = y'(x)\cdot dx$$

$$dx = x'(t)\cdot dt \quad ; \quad dy = y'(t)\,dt$$

$$\boxed{y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)\cdot dt}{x'(t)\cdot dt} = \frac{y'(t)}{x'_t}}$$

$$\boxed{y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}}$$ — формула для производной ф-и, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \end{cases}, \quad t \in T$$

$$y''(x) = (y'(x))'_x$$

$$y''(x) = \frac{(y'(x))'_t}{x'_t}$$

$$\boxed{y''(x) = \frac{(y'(x))'_t}{x'_t} = \frac{1}{x'_t}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}$$

— формула для второй производной ф-и, заданной параметрически

Пример 1.

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases} \qquad x'_t = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t^2\,\cancel{(1+t^2)}}{\cancel{(1+t^2)}\cdot 2t} = \frac{t}{2}$$

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y' = \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

$$y''_{xx} = y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1\cdot(1+t^2)}{2\cdot 2t} = \frac{1+t^2}{4t}$$

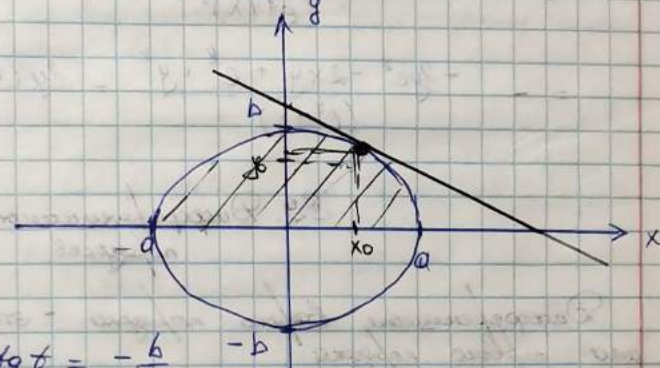
Пример 2. (Написать ур-е касательной к графику функции)

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi$$

в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— ур-е эллипса с центром в $O(0;0)$



$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$$

$t_0 = \frac{\pi}{4}$; $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$

$y(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b$

$$y'(x) = \frac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t} = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t = -\frac{b}{a}$$

$$\to y = -\frac{b}{a}\cdot\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}b = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$$

— ур-е касат. к гр-у ф-и $y = y(x)$ в точке $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a; \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$

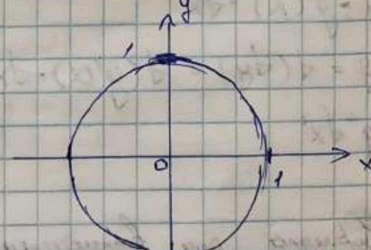
§8. Производная функции, заданной неявно.

Ур-е $F(x,y) = 0$ задаёт ф-ю $y(x)$ неявно

Пример: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad 0 \le t < 2\pi$$

$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$



Вычисление производной от неявно заданной функции.

Равенство $F(x, y) = 0$ нужно дифференцировать как тождество, считая x независимой переменной, а y - функцией от x.

Пример 2.

$$e^y + x\cdot y = e$$

$$e^y\cdot y' + y + x\cdot y' = 0 \quad \to \quad y'(e^y + x) = -y$$

$$y' = -\frac{y}{e^y + x}$$

$$y'' = -\left(\frac{y}{e^y+x}\right)' = -\frac{y'(e^y+x) - y(e^y \cdot y' + 1)}{(e^y+x)^2} =$$

$$= -\frac{y'(e^y + x - e^y \cdot y) - y}{(e^y+x)^2} = -\frac{\frac{-y}{e^y+x}(e^y+x-e^y \cdot y) - y}{(e^y+x)^2} =$$

$$= -\frac{-y(e^y+x-e^y\cdot y) - y(e^y+x)}{(e^y+x)^3} = -\frac{-ye^y - xy + e^y \cdot y^2 - e^y \cdot y - xy}{(e^y+x)^3} =$$

$$= -\frac{-2ye^y - 2xy + e^y \cdot y^2}{(e^y+x)^3} = \frac{2y(e^y+x) - y^2 e^y}{(e^y+x)^3}$$

§9. Дифференциалы высших порядков.

Дифференциал второго порядка – это дифференциал от дифференциала первого порядка

$$d^2 y = d(dy)$$

Дифференциал первого порядка – это функция от двух переменных x и dx

Дифференциал функции $df(x)$, вычисленный в предположении, что новое приращение аргумента совпадает с приращением аргумента при первом дифференцировании, называется __вторым дифференциалом__ ф-и $f(x)$ в точке x и обозначается

$$d^2 f(x) = f''(x) \cdot dx^2$$

$$dy = y'(x) \cdot dx$$

$$d^2 y = d(dy) = d(y'(x) \cdot dx) = dx \cdot d(y'(x)) = dx \cdot y''(x) \cdot dx = y''(x) \cdot (dx)^2 =$$

$$= y'' dx^2$$

__Формула для вычисления дифференциала n-ого порядка:__

$$\boxed{d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n}$$ – формула!

Св-ва дифференциала n-ого порядка.

1) $d^n(c \cdot f) = c \cdot d^n f$

2) $d^n(f+g) = d^n f + d^n g$

3) $d^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot d^{n-k} f \cdot d^k g$

Св-во инвариантности, справедливое для дифференциала первого порядка, для дифференциала n-ого порядка неверно!

Действительно: пусть $x = x(t)$

$$d^2y = d(y'(x)\cdot dx) = d(y'(x))\cdot dx + y'(x)\cdot d^2x =$$

$$= y''dx^2 + \underbrace{y'(x)\cdot x''_t\, dt^2}_{\text{если } \neq 0}$$

, тогда св-во инвариантности не выполн.

Но если $x(t) = at+b$ (линейно), при линейной замене $x(t) = at+b$ св-во инвариантности дифференциала 2-ого и соотв. n-ого порядка верно. !

Раздел 2.

§1. Основные теоремы дифференциального исчисления

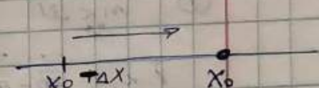
Теорема Ферма

Пусть выполн. следующие условия:
1) ф-я определена на мн-ве E
2) x_0 - внутр. точка E
3) ф-я в (·) x_0 принимает наибольшее (наименьшее) значение, т.е. $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$) для всех точек x из E.
4) Существует конечная производная в т. x_0 ($\exists f'(x_0) \in R$)

Тогда, $f'(x_0) = 0$

Док-во: По условию $\exists f'(x_0) = A \in R \iff \exists f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = A$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



По условию, в (·) x_0 ф-я принимает наиб. значения, то

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \le 0$$

$f'_-(x_0) \ge 0$ (т.к. $\Delta x < 0$)

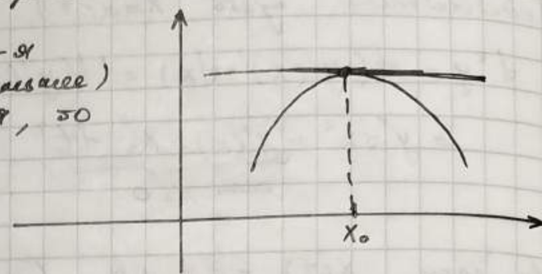
$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0$$

Итак,
$$\begin{cases} f'_-(x_0) \ge 0 \\ f'_+(x_0) \le 0 \end{cases} \Rightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$$
, т.е. $f'(x_0) = 0$, ч.т.д.

Замечание: Теорема верна, если функция в (·) x_0 принимает наименьшее значение.

Геометрический смысл теоремы Ферма:

Если в точке, в которой ф-я принимает наибольшее (наименьшее) значение существует касательная, то она параллельна оси OX.



Теорема Ролля

1) Ф-я f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$

2) $\forall x \in (a; b) \ \exists f'(x) \in R$

3) $f(a) = f(b)$

тогда внутри отрезка найдётся точка, в которой производная функции обращается в ноль (т.е. $\exists c \in (a; b) : f'(c) = 0$)

Док-во:

Т.к. $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса, она достигает на этом отрезке своих верхней и нижней граней.

Обозначим, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Рас-м два случая:

1) $m = M$. Тогда $\forall x \in [a, b] \quad m \le f(x) \le M \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = const$$

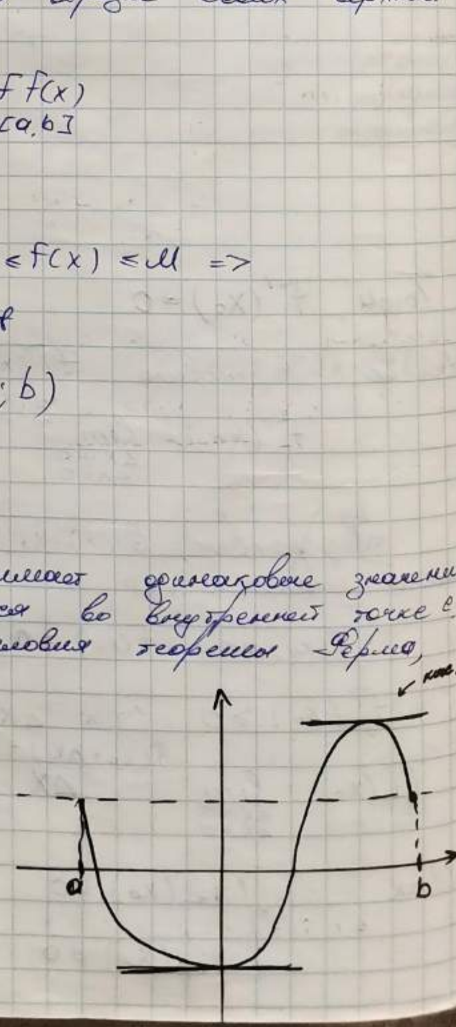
$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a; b)$$

2) $m < M$

Т.к. ф-я на концах отрезка принимает одинаковые значения, то из значений (m или M) достигается во внутренней точке c. Тогда, для (·)c выполняются все условия теоремы Ферма, поэтому $f'(c) = 0$

Геометрический смысл теоремы Ролля:

Если ф-я удовлетворяет условиям теоремы Ролля, то найдется точка, в которой касательная параллельна оси OX.



Такая точка может быть не одна.

Теорема Лагранжа

Пусть: 1) ф-я f определена и непрерывна на $[a, b]$

2) ф-я f дифференцируема на интервале (a, b)

Тогда, $\exists\, c \in (a,b): \; f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Док-во: Рассм-м вспомогательную ф-ю $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Вычислим $F(x)$ на концах отрезка:

$$F(a) = f(a)$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(b-a) = f(a)$$

Ф-я $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля: непрерывна на $[a,b]$ (как разность двух непрер. функций), дифференцируема на (a,b) и $F(a) = F(b)$

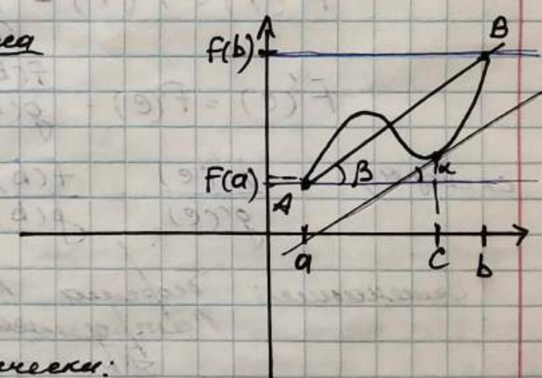
Значит, по теореме Ролля $\exists c \in (a,b): F'(c) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$, ч.т.д.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tg\,\beta$$

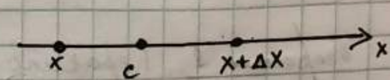
β - угол наклона секущей, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ и

$f'(c) = tg\,\alpha$, α - угол наклона касательной в точке $x=c$, то геометрически:

внутри $[a,b]$ найдётся точка c, в которой касательная $\parallel$-на хорде, проходящей через точки A и B.

Формула конечных приращений Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$



Пусть $a = x$, $b = x + \Delta x$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(c)\cdot \Delta x \quad \rightarrow \quad \Delta f = f'(c)\cdot\Delta x$$

$$c = x + \theta\cdot\Delta x, \text{ где } 0<\theta<1$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x, \quad 0<\theta<1$$

$$\boxed{f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\Theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x, \quad 0<\Theta<1}$$

Теорема Коши.

Пусть

1. Функции f и g определены и непрерывны на $[a;b]$;
2. $\forall x \in (a;b) \quad \exists f'(x) \in \mathbb{R},\ g'(x) \in \mathbb{R},\ g'(x) \neq 0$

Тогда, $\exists c \in (a;b)$: $\boxed{\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$

Док-во: введём вспом. функцию:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot(g(x)-g(a))$$

$F(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифф-ма на $(a;b)$

$F(a) = f(a)$ и $F(b) = f(a)$

т.е. $F(x)$ - удовл. всем условиям теоремы Ролля

Значит, $\exists c \in (a;b)$: $F'(c) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c) = 0 \quad (\text{по т. Ролля}),$$

откуда, $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, что и т.д.

Замечание: Теорема Коши явл. обобщением теоремы Лагранжа.
При $g(x) = x$, из теоремы Коши следует теорема Лагранжа, из которой можно получить теорему Ролля, если $f(a) = f(b)$

§2. Раскрытие неопределённости по правилу Лопиталя. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

I. $\left(\frac{0}{0}\right)$

Теорема 1. (правило Лопиталя)
Пусть на (a,b) определены $f(x)$ и $g(x)$, причём:

1) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$;

2) на (a,b) существуют конечные производные $f'(x)$, $g'(x)$ и $g'(x) \neq 0$

3) $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K \quad (K \in \overline{\mathbb{R}})$

Тогда: $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$

Док-во:

Доопределим $f(x)$ и $g(x)$ в (·) $x = a$ таким образом, чтобы они были непрерывными справа в этой точке.

Тогда, $f(x)$ и $g(x)$ будут непрерывными на $[a; b)$ (непрерывность во внутр. точках следует из существования конечных производных $f'(x)$ и $g'(x)$.)

Возьмём некоторую точку $x \in [a; b)$

На отрезке $[a; x]$ $f(x)$ и $g(x)$ - удовл. всем условиям теоремы Коши.

Поэтому внутри $[a, x]$ $\exists c$, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \text{и } f(a) = \lim_{x \to a+0} f(x) = 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad g(a) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$$

Если $x \to a+0$, то $c \to a+0$ т.к. $a < c < x$

Получим: $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c \to a+0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = K$

Замечание: В теореме 1 (·) a явл. левым концом промежутка и x стремится к a справа. Аналогично рассматриваются случаи, когда (·) a - правый конец промежутка и x стремится к (·) a слева; или когда (·) a - внутр. точка промежутка и $x \to a$ любым способом.

Пример 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Пример 2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{5-x}} \cdot (-1)}{\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot (-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{5-x}} = \frac{1}{2}$$

Пример 3.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{\frac{1-x}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1-x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^x \ln x + x^x)(\ln x + 1) + x^{x-1}}{-1} = -2$$

проверить $\to$ $\left(x^{x+1}(\ln x + 1) - x\right)'$

Покажем, что правило Лопиталя остаётся в силе и в случае, когда аргумент $x \to \infty$

Пусть $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

Замена: $x = \frac{1}{t}$, тогда при $x \to \infty$ $t \to 0$

и $f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) \to 0$ $g(x) = g\left(\frac{1}{t}\right) \to 0$

Применим теорему 1 к функциям $f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$, считая их при дифференцировании сложными функциями от t.

Получим, $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$ — что и т.д.

Пример 4.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\pi - 2\operatorname{arctg} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-2\cdot\frac{1}{1+x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2\cdot(-2)}{(x^2+1)\cdot x^2 x}}{-\frac{2}{(1+x)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Теорема 2.

Пусть на (a, b) опр. ф-и $f(x)$ и $g(x)$, причём:

1) $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$ и $\lim_{x\to a+0} g(x) = \infty$

2) на (a, b) $\exists$ конечные производные $f'(x)$, $g'(x)$ и $g'(x) \neq 0$

3) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$ $(K \in \overline{\mathbb{R}})$

Тогда: $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K,$ (док-ть самост-о) без док-ва! в Фихтенгольц, том I.

Замечание:
Теорема верна и в случае, когда $x \to a-0$ или $x \to a$
При выполнении условий, можно применять повторно.

Пример 5.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_b x} \ominus, \quad \alpha>0, \quad b>0, \quad b\neq 1$$

$$\ominus \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^\alpha)'}{(\log_b x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x\ln b}} = \lim_{x\to+\infty} \alpha \ln b \cdot x^\alpha = +\infty$$

Вывод: степенная ф-я $y = x^\alpha$ $(\alpha>0)$ растёт быстрее логарифмической! $y = \log_b x$ $(b>0, b\neq 1)$ при $x\to+\infty$

Аналогично можно убедиться, что $y = x^\alpha$ $(\alpha>0)$ растёт быстрее, чем $y = (\ln x)^k$, $k>0$, причём α может быть очень малым, а k - большим!

Пример 6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} \ominus$, $a>1$, $n\in\mathbb{N}$

$$\ominus \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{n x^{n-1}}{a^x \cdot \ln(a)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)\cdot x^{n-2}}{a^x\cdot \ln^2(a)} =$$

$$= \ldots \text{применим } n \text{ раз} \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x\cdot \ln^n(a)} = 0$$

Вывод: пок-ая ф-я $y = a^x$ $(a>1)$ растёт быстрее любой степенной ф-и.

$y = x^\alpha$ $(\alpha>0)$ при $x\to+\infty$

Раскрытие неопределённостей $(0\cdot\infty)$ и $(\infty-\infty)$, (∞^0) и др.

Пример 7.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}(x-1) + \ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to+0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = (\infty^0) = \lim\limits_{x\to+0} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{tg} x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+0} \frac{-\ln x}{\operatorname{ctg} x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to+0} \frac{\sin^2 x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin x}_{\to 0}} = e^0 = 1$$

Ос
тригонометри

$\sin^2\alpha$

Двой

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2$

$\cos 2\alpha = 2\cos$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2}$

Сумма синусов

$\sin\alpha + \sin\beta =$

$\sin\alpha - \sin\beta =$

$\cos\alpha + \cos\beta$

$\cos\alpha - \cos\beta$

Универсальная т

Пусть $t = tg$

§3. Формула Тейлора для многочлена.

Пусть дан многочлен степени n.

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $(*)$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

Говорят, что $P_n(x)$ разложен по степеням x.

$P_n(x)$ всегда можно разложить по степеням $(x - x_0)$

Пример.

$P_3(x) = 4x^3 + 5x^2 - x$

Разложить по степеням $x-1$

$x - 1 = t \qquad x = t+1$

$P_3(t) = 4(t+1)^3 + 5(t+1)^2 - (t+1) = 4t^3 + 17t^2 + 21t + 8$

$P_3(x) = 4(x-1)^3 + 17(x-1)^2 + 21(x-1) + 8$. ~ разложен по степеням $x-1$.

Таким образом, $P_n(x)$ с помощью замены $t = x - x_0$ $(x = t + x_0)$ можно представить в виде:

$(**)$ $P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \ldots + A_n(x-x_0)^n$

$P_n(x_0) = A_0$

$P_n'(x_0) = A_1 + 2A_2\underbrace{(x-x_0)}_{=0} + 3A_3\underbrace{(x-x_0)^2}_{=0} + \ldots + n \cdot A_n \underbrace{(x-x_0)^{n-1}}_{=0} = A_1$

$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 1 \cdot A_n = n! \cdot A_n$

$$\Rightarrow \boxed{A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}} \quad (***)$$

Подставим в $(**)$,

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{P_n'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

~ формула Тейлора для многочлена $P_n(x)$, где коэффициенты вычисляются по формуле $(***)$

Пример:

$P_3(x) = 4x^3 + 5x^2 - x$

$A_0 = P_3(1) = 4+5-1=8$

$P_3'(x) = 12x^2+10x-1 \quad \to A_1 = \dfrac{12+10-1}{1!} = 21$

$P_3''(x) = 24x+10 \quad \to A_2 = \dfrac{24+10}{2!} = 17$

$P_3'''(x) = 24 \quad \to A_3 = \dfrac{24}{3!} = 4$

$P_3(x) = 8+21(x-1)+17(x-1)^2+4(x-1)^3$

§4. Формула Тейлора для произвольной функции

Пусть $f(x)$ - функция общего вида (произвольная ф-я, не многочлен).

Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные до n-ого порядка включительно

Многочлен $T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

называется многочленом Тейлора для $f(x)$

Т.к. $f(x)$ не является многочленом, то формула Тейлора даёт лишь некоторое приближение к $f(x)$, которая может быть вычислена с некоторой степенью точности.

Обозначим $r_n(x) = f(x) - T_n(x)$ ~ остаточный член ф-лы Тейлора.

$r_n(x)$ может быть представлен след. образом:

- в форме Пеано ✓
- в форме Лагранжа ✓
- в форме Коши —
- в форме Шлемильха - Роша —

$f(x) = T_n(x) + r_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x)$

Основное св-во многочлена Тейлора

$T_n(x_0) = f(x_0)$

$T_n'(x_0) = f'(x_0)$

$\ldots$

$T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \quad \to \quad r_n^{(n)}(x_0) = 0 \; ?$

$r_n(x) = f(x) - T_n(x)$

$r_n^{(n-1)}(x_0) = \underbrace{f^{(n-1)}(x_0) - T_n^{(n-1)}(x_0)}_{=0}$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+ \underline{o\left((x-x_0)^n\right)}$$ – остаточный член в форме Пеано.

Докажем, что $r_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

т.к. $r_n(x) = f(x) - T_n(x)$

$$r_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - T_n^{(k)}(x),$$ где $k = \overline{0,n}$ (изменяется от 0, до n)

Из основного св-ва многочлена Тейлора

$$r_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - T_n^{(k)}(x_0) = 0, \text{ для } k = \overline{0,n}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} \underset{=0}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!\,(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}$$

Если в ф-ле (*) $x_0 = 0$, то получим формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Теорема.

Если $f(x)$ определена и непрерывна в $(\cdot)$ x_0 и имеет в этой точке производные до n-го порядка включительно, также $\exists$ $(n+1)$ производная ф-и $f(x)$ в окрестности $(\cdot)$ x_0, тогда найдётся $(\cdot)$ $c \in (x_0, x)$, такая что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

– формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

§5. Разложение по формуле Тейлора (Маклорена) некоторых элементарных функций.

① $f(x)=e^x$ (в окр. 0)

$$f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=f^{(n+1)}(x)=e^x$$

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=1$$

(*) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$ при $x\to 0$

Остаточный член в форме Лагранжа:

$$r_n(x)=\frac{e^{x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

② $f(x)=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

(**) $e^{-x}=1-x+\frac{(-x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-x)^n}{n!}+\underbrace{o((-x)^n)}_{=o(x^n)}$

Сложим $\frac{(*)+(**)}{2}$ и поделим на 2

$$\Rightarrow \operatorname{ch}x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$ при $x\to 0$

③ $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ аналогично:

$$\Rightarrow \operatorname{sh}x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$ при $x\to 0$

④ $f(x)=\sin x$

$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$, где $n=0,1,2\ldots$

$f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}$

Если $n=2k$, то $f^{(2k)}(0)=\sin\pi k=0$

$n=2k+1$, то $f^{(2k+1)}(0)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=(-1)^k$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2k+2})$$

Остаточный член в форме Лагранжа

$$r_n(x)=\frac{\sin\left(c+\frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

⑤ $f(x) = \cos x$ (самостоятельно)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

Остаточный член в форме Лагранжа:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 2k+1 \\ (-1)^k, & \text{при } n = 2k \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

⑥ $f(x) = \ln(1+x)$ (самостоятельно!)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad f'''(x) = +\frac{1 \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! \, (1+x)^{-k}, \quad k = 1, 2 \ldots$$

Поэтому: $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$, $k = 1, 2 \ldots$ и т.к. $f(0) = 0$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

⑦ $f(x) = (1+x)^\alpha$ (самостоятельно)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+1-n)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

20.11.2020.

§6. Применение формулы Тейлора.

6.1. Приближённые вычисления.

Ф-ла Тейлора позволяет приближённо представить (аппроксимировать) произвольную ф-цию в виде многочлена

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

и вместе с тем позволяет оценить возникающую погрешность $r_n(x)$, которая м.б. сколь угодно малой.
(это возможно только при тех, когда $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$)

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \to 0$$

e^c – огр.

x – фикс.

x^{n+1} – мало

$c \in (0; x)$

Пример 1:
Вычислить e с точностью до 0,001.
$c \in (0, 1)$

$$e = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

$$r_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot \underset{=1}{x^{n+1}} = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0,001$$

$(n+1)! \geq 3000$ $\qquad 6! = 720$, $7! = 5040$

$\Rightarrow n = 6$

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$= 2\frac{517}{720} \approx \underline{2,718}$$

$e \approx 2,\underline{718}28182 84\ldots$

Пример 2:

$\sin 0,1$ с помощью приближения многочлена $P_3(x)$ и определить погрешность вычисления.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + r_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4$$

$$c \in (0; 0,1)$$

$$r_3(0,1) = \frac{\sin c}{4!}(0,1)^4 < \frac{0,0001}{4!} < 0,000004 < 0,00001$$

$$\sin 0,1 \approx 0,1 - \frac{(0,1)^3}{6} \approx 0,09983$$

6.2. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора:

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{3!} - o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!} - \underbrace{\frac{o(x^3)}{x^3}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{6}$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 - x^2}{x^4} =$$

можно не писать в т.к. более '>' инф. малости

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{2\,x^4}{3!\cdot 3} + o(x^4) - x^2}{x^4} = -\frac{1}{3}$$

можно и по дурному перемножить

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \qquad o(x^4)\cdot o(x^4) = o(x^8)$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{24} + \underbrace{\frac{o(x^4)}{x^4}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{24}$$

6.3. Таблица эквивалентных бесконечно малых.

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^4}{n!} + o(x^4)$

$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^4}{n!} + o(x^4)$

При $x \to 0$ $\boxed{e^x - 1 \sim x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

2) $\sin x = x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$

$\boxed{\sin x \sim x}$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

$\boxed{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}}$

4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

$\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x}$

5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + o(x^n)$

$\boxed{\ln(1+x) \sim x}$

§7. Исследование функций с помощью производной.

7.1. Условие постоянства ф-и на промежутке

Теорема. – Пусть ф-я $f(x)$ определена и непрерывна на на некотором промежутке X и в каждой внутр. точке этого промежутка существует конечная производная.
Тогда ф-я $f(x)$ постоянна на X тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ в $\forall$ внутр точке промежутка X

Док-во. (док-ть, что $\forall x \in X$ $f(x) = c \rightleftarrows \forall x \in \mathring{X}$, $f'(x) = 0$, где $\mathring{X}$ - мн-во внутр. точек. X.)

Необходимость: По условию, $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

Достаточность: Пусть $a \in X$ - фиксированная точка промежутка X. Возьмём произвольную точку $x \in X$.

Тогда, на $[a; x]$ выполн. условия теоремы Лагранжа.

Поэтому, между a и x найдётся такая точка c, что

$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$; т.к. $f'(c) = 0$, то $f(x) = f(a)$ $\forall x \in X$

Таким образом f постоянна на промежутке X и её значение равно $f(a)$.

Пример:

$y = \arcsin x + \arccos x$ ~ определена на $[-1; 1]$

непрерывна и дифф-ма (как сумма двух дифф. ф-й)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$\Rightarrow y = const.$

$$\Rightarrow y(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}$$

7.2. Условие монотонности ф-ии на промежутке.

Теорема (Критерий нестрогой монотонности)

~ Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X, дифференцируема в любой внутр. точке этого промежутка,

$f(x)$ – неубывающая ф-я на $X \rightleftarrows \forall x \in \mathring{X}, f'(x) \geq 0$

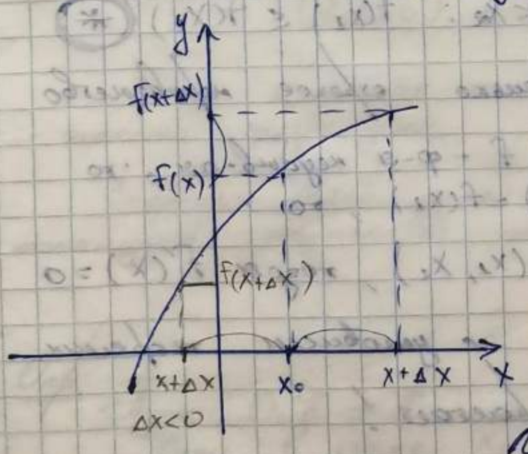
мн-во внутр. точек

Док-во: 1) Необходимость $(\rightarrow)$

Пусть x – произвольная внутр. точка из X, тогда по опр. производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Т.к. $f(x)$ неубыв., то $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ будет ≤ 0 при $\Delta x < 0$, ≥ 0 при $\Delta x > 0$



$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \forall \Delta x \neq 0$$

При $\Delta x \to 0$ $f'(x) \geq 0$.

2) Достаточность: $(\leftarrow)$

$\forall x_1, x_2 \in X, \ x_1 < x_2$

Тогда, на $[x_1; x_2]$ удовл. условиям теор. Лагранжа.

$\Rightarrow \exists c \in (x_1; x_2)$: такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$$

$\Rightarrow f'(c) \geq 0, \ x_2 - x_1 > 0$ тогда $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

Следовательно, $f(x_1) \leq f(x_2)$

Т.е. $f(x)$ ~ неубывающая ф-я

Теорема. (Критерий строгой монотонности)
~ Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X, дифференцируема на X.

$f(x)$ строго возрастает $\rightleftarrows$ 1) $\forall x \in \overset{\circ}{X}$ $f'(x) \geq 0$
2) мн-во решений $f'(x) = 0$ не содержит интервалов.

Док-во: 1) Необходимость ($\rightarrow$)

$f(x)$ строго возрастает, то она явл. неубывающей.
По предыд. теореме.

$\forall x \in \overset{\circ}{X}$ $f'(x) \geq 0$

2) От противного:

Пусть мн-во решений ур-я $f'(x) = 0$ содержит интервал (a, b) $a < b$, то

$\forall x \in (a; b)$ $f'(x) = 0$. Тогда из условия постоянства функции на промежутке.

$f = const$ на $[a; b]$. А это противоречит её строгому возрастанию.

Достаточность ($\leftarrow$):

Т.к. $\forall x \in \overset{\circ}{X}$ $f'(x) \geq 0$, то $f(x)$ - неубывающая на X.
Значит для любого $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$ (*)

Покажем, что в (*) возможно только строгое неравенство.
Действительно, если $f(x_1) = f(x_2)$, то т.к. f - ф-я неубыв.-ая, то
$\forall x_1 < x < x_2$: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(x_1)$, то

$f(x) \equiv f(x_1)$ на (x_1, x_2), тогда $f'(x) = 0$

~ получили противоречие с условием теоремы.

$\rightarrow$ ф-я f - строго возрастает!

Пример. 1
Исследовать на монотонность $y=x^3$

$y' = 3x^2 \geq 0$

$y' = 0$ при $x=0$, тогда по теореме $y=x^3$ - строго возр. ф-я.

Пример 2. (иссл. на монотонность.)

$$y = x + \sin x$$

$$y' = 1 + \cos x \geq 0 \qquad y' = 0$$

$$\cos x = -1.$$

$$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Эти точки интервала не заполняют, значит, что $y = x + \sin x$ - строго возрастающая.

7.3. Экстремумы функции.

Опр. Пусть $f: E \to \mathbb{R}$

а) Будем говорить, что ф-я $f(x)$ имеет <u>локальный максимум</u> в точке $x_0 \in E$, если $(\exists \delta > 0)\ (\forall x \in E,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta) : f(x) \leq f(x_0)$

б) Будем говорить, что $f(x)$ имеет <u>локальный минимум</u> в точке $x_0 \in E$, если

$$(\exists \delta > 0)\ (\forall x \in E;\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta) : f(x) \geq f(x_0)$$

Точки локального максимума или минимума называются точками экстремума.

Значение $f(x_0)$ ф-ии $f(x)$ в точке локального максимума (или минимума) называется локальным максимумом (или минимумом.)

Опр. Пусть $f: E \to \mathbb{R}$.
Если в точке $x_0 \in E$ выполняется условие $f'(x_0) = 0$, то точка x_0 называется <u>стационарной</u> точкой.

Если в точке x_0 производная $f'(x_0)$ обращается в ноль или не существует ($\nexists$), то такая точка называется <u>критической</u> точкой.

Теорема (необходимое условие экстремума)

Пусть $f(x): (a; b) \to R$

Если $f(x)$ имеет в т. $x_0 \in (a; b)$ локальный максимум или локальный минимум, то x_0 - критическая точка.

Док-во: Пусть в точке $x_0 \in (a; b)$ существует $f'(x_0)$.
Предположим для определённости, что $f(x)$ в точке $x_0 \in (a; b)$ имеет локальный максимум, т.е

$$(\exists \delta > 0)\ (\forall x,\ a < x_0 - \delta < x < x_0 + \delta < b):\ f(x) \leq f(x_0)$$

Если $x_0 - \delta < x < x_0$, то $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) = f'(x_0) \geq 0$

Если $x_0 < x < x_0 + \delta$, то $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \leq 0$

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для локального минимума.

Пример 1.

$y = x^2$

$y' = 2x = 0$ при $x = 0$

$x = 0$ - критическая, стационарная, точка минимума.

Пример 2.

$y = |x|$ в точке $x = 0$ $f'(0)$ не $\exists$

$x = 0$ - критическая, не явл. стационарной, точка минимума.

Пример 3.

$y = x^3$

$y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$ - не явл. точкой экстремума.

Теорема. (Первое достаточное условие экстремума.)

Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. удовлетворяет след. условиям:

1) $f(x)$ определена и непрерывна на (a,b)
($f(x)\in C(a,b)$)

2) $f'(x)$ $\exists$ на (a,b) за исключением может быть точки x_0

Тогда

а) Если $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$,
то x_0 – точка минимума.

б) Если $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$,
то x_0 – точка максимума.

Доказательство.

На $[x,x_0]$ и $[x_0,x]$, из (a,b) ф-я $f(x)$ удовл. всем условиям теоремы Лагранжа.

Сл-но, $\exists\, c_1\in(x,x_0)$, $c_2\in(x_0,x)$, такие, что

$$f(x)-f(x_0)=f'(c_1)(x-x_0),\ \text{если } x<x_0$$

$$f(x)-f(x_0)=f'(c_2)(x-x_0),\ \text{если } x>x_0$$

а) Пусть $f'(x)<0$ при $x<x_0$, тогда

$$f'(c_1)<0 \text{ и } f(x)-f(x_0)=f'(c_1)(x-x_0)>0,$$

т.е. $f(x)>f(x_0)$

Если $f'(x)>0$ при $x>x_0$, то $f'(c_2)>0$ и

$$f(x)>f(x_0)$$

Значит, $f(x)$ имеет в (.) x_0 локальный минимум.

б) Утверждение б) доказывается аналогично.

Теорема. (Второе достаточное условие экстремума.)

~ Пусть $f(x)$ определена на (a,b) и удовлетворяет на (a,b) след. условиям:

1) $f(x)$ n раз дифференцируема на $(a;b)$

2) В точке $x_0 \in (a;b)$ выполняется

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)} \neq 0$$

Тогда,

а) Если $n = 2k+1$, $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 $f(x)$ не имеет экстремума.

б) Если $n = 2k$, $f^{(2k)}(x_0) \neq 0$, то ф-я $f(x)$ имеет в этой точке локальный максимум, если $f^{(2k)}(x_0) < 0$ или локальный минимум, если $f^{(2k)}(x_0) > 0$

Доказательство:

По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$o((x-x_0)^n) = \frac{\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n, \text{ где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to x_0$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

Поскольку $\alpha \to 0$ при $x \to x_0$, то $\exists \delta > 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что знаки $f^{(n)}(x_0) + \alpha$ и $f^{(n)}(x_0)$ будут совпадать, а знаки $f(x) - f(x_0)$ будет совпадать со знаком $f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$

Возможные случаи:

а) $n = 2k+1$ $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, и $f^{(2k+1)}(x_0) \cdot (x-x_0)^{2k+1}$ при прохождении через точку x_0 меняет знак и экстремума нет.

б) $n = 2k$

$f^{(2k)}(x_0)(x-x_0)^{2k}$ в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ принимает знак $f^{(2k)}(x_0)$ и

$$f(x) > f(x_0), \text{ если } f^{(2k)}(x_0) > 0$$

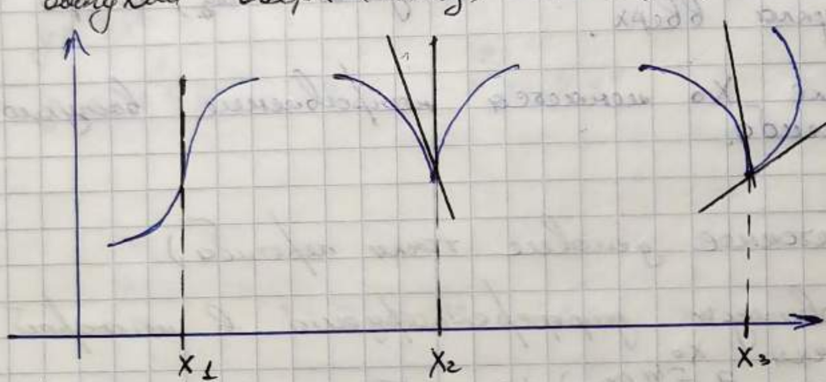
$$f(x) < f(x_0), \text{ если } f^{(2k)}(x_0) < 0$$

7.5. Точки перегиба.

<u>Опр.</u> Точка x_0 называется точкой перегиба функции $f(x)$, а точка $(x_0; f(x_0))$ – точкой перегиба графика функции $F(x)$ если:

- существует производная $f'(x_0)$ (конечная или бесконечная)
- точка x_0 является концом интервала строгой выпуклости вверх и концом интервала строгой выпуклости вниз *

* если $f''<0$ (>0) на (a, b), то функция f строго выпукла вверх (вниз) на (a, b)



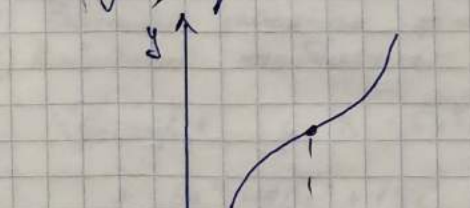
x_1 – точка перегиба.
x_2, x_3 – не явл. точками перегиба.

<u>Теорема.</u> (необходимое условие точки перегиба.)

~ Пусть x_0 – точка перегиба функции f, причём f'' непрерывна в точке x_0.
Тогда $f''(x_0)=0$

<u>Док-во:</u> Пусть x_0 – точка перегиба $f(x)$ и пусть при $x<x_0$ $f(x)$ выпуклая вверх, а при $x>x_0$ выпуклая вниз функция.

Тогда, при $x<x_0$ $f'(x)$ монотонно убывает $(f'(x))'=f''(x)<0$



а при $x>x_0$ $f'(x)$ монотонно возрастает.

$$f''(x)>0$$

Получаем, что при переходе через точку x_0 первая производная от $f'(x)$ меняет знак с „–" на „+". Значит x_0 – точка min для ф-и $f'(x)$

$$\begin{array}{ccccl} - & & + & & f''(x) \\ \hline & x_0 & & & \\ \searrow & & \nearrow & & f'(x) \end{array}$$

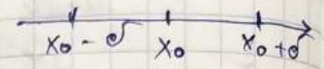
Следовательно по необходимому условию экстремума получаем, что

$$(f'(x))'\Big|_{x=x_0}=f''(x_0)=0$$

Теорема (достаточное условие точки перегиба)

~ Если в некоторой окрестности точки x_0 $f''(x)$ непрерывна всюду, кроме, может быть, самой точки x_0 (в ней $f''(x)$ может и не существовать) и при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то x_0 – точка перегиба $f(x)$

Док-во: Пусть для определенности в левой части окрестности точки x_0 (т.е. при $x_0 - \delta < x < x_0$) $f''(x) > 0$, а при $x_0 < x < x_0 + \delta \to f''(x) < 0$



Тогда при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ф-я выпукла вниз, а при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ – выпукла вверх.

Значит, в точке x_0 меняется направление выпуклости, т.е. x_0 – точка перегиба.

Теорема (второе достаточное условие точки перегиба)

~ Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, $f''(x_0) = 0$ и $\exists\, f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 – точка перегиба (без док-ва)

Теорема (третье достаточное условие точки перегиба)

~ Пусть в некоторой окрестности точки x_0 существует производная $f^{(2n+2)}(x)$, непрерывная в точке x_0, причем

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(2n)}(x_0) = 0, \quad a \quad f^{2n+2}(x_0) \neq 0$$

~ тогда x_0 – точка перегиба.

Пример 1.

$y = x^3$

$y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6 \neq 0$

$x = 0$ – точка перегиба.

Пример 2.

$y = x^4$

$y' = 4x^3$; $y'' = 12x^2$; $y''' = 24x$; $y^{IV = 2n} = 24$

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$ – не явл. точкой перегиба.

Пример 3.

$y = \sqrt[3]{x}$

$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; $y'' = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$

$x = 0$ − точка перегиба.

Пример 4

$y = \sqrt[3]{x^2}$

$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $y'' = -\frac{2}{3\cdot 3\cdot\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$

$x = 0$ − не явл. точкой перегиба.

Наибольшее и наименьшее значения функции.

1.) $f(x)$ − непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$ (т.е. по теореме Вейерштрасса $f(x)$ − на этом отрезке достигает своего sup и inf).

2) Вычисляем производную.
3) Находим критические точки
4) Из найденных критических точек, выбираем те, которые лежат внутри отрезка.
5) Считаем значения ф-ии на концах отрезка и в отобранных точках.
6) Выбираем наибольшее и наименьшее значение.

Пример 1: $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $x \in [-2; 2]$

$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$

$5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$

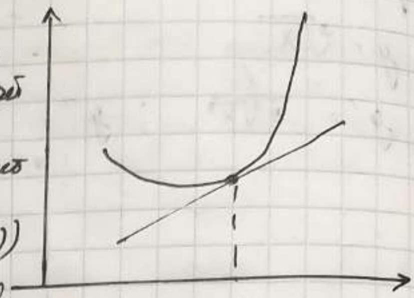
$5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$

Корни: $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$ $\Rightarrow$ $y(0) = 1$; $y(1) = 2$; $y(2) = -7$

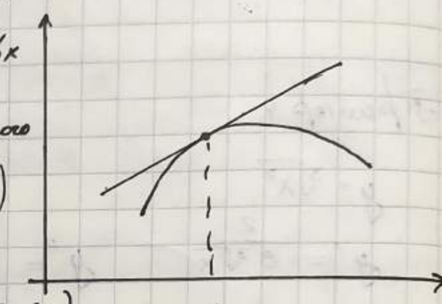
$y(-2) = -151$

Ответ: $y_{max} = 2$ и $y_{min} = -7$

7.4. Выпуклость функции



Опр. Ф-я, непрерывная на промежутке, и дифф-ая в любой его внутр. точке, называется выпуклой вниз на этом промежутке, если в любой его внутренней точке касат. к графику лежит ниже самого графика на этом пром-ке.
$(\forall x_0 \in \mathring{X},\ \forall x \in X \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \le f(x))$



Опр. Ф-я, непрерывная на промежутке, и дифф-ая в любой его внутр. точке, называется выпуклой вверх на этом промежутке, если в любой его внутр. точке касат-ая к графику лежит выше самого графика на этом промежутке.
$(\forall x_0 \in \mathring{X},\ \forall x \in X \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ge f(x).)$

Теорема. (Первый критерий выпуклости ф-ии на пром-е)
~ Пусть ф-я f определена и непрерывна на пром.-е X, а также дифференцируема в любой его внутр. точке. Тогда:
1) f выпукла вниз на X $\Leftrightarrow$ f' - неубыв. ф-я на $\mathring{X}$
2) f выпукла вверх на X $\Leftrightarrow$ f' - невозраст. ф-я на $\mathring{X}$

Док-во: (для 1 пункта, 2-ой док-ся аналогично)
Необходимость ($\rightarrow$)
Надо док-ть, что f выпукла вниз, то f' - неубыв.

$x_1, x_2 \in \mathring{X}$, так что $x_1 < x_2$.
По опр-ю выпуклости выполнено:

$$f(x_2) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad \text{и} \quad f(x_1) \ge f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

Складываем неравенства:

$$f(x_1) + f(x_2) \ge f(x_1) + f(x_2) + (f'(x_1) - f'(x_2))(x_2 - x_1).$$

После сокр-я и деления на $(x_2 - x_1) > 0$, находим, что

$$f'(x_1) - f'(x_2) \le 0 \quad \text{или} \quad f'(x_1) \le f'(x_2), \text{ ч.т.д.}$$

Достаточность: ($\leftarrow$) Надо док-ть, что если f' неуб, то f выпукла вниз.

Пусть $x_0 < x$. На отр. $[x_0; x]$ выполн. все условия теоремы Лагранжа,
$\Rightarrow$ $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$
Поскольку f' - неубыв, то $f'(c) \ge f'(x_0)$

Отсюда, т.к. $x - x_0 > 0$, получаем: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \ge f'(x_0)(x - x_0)$,
т.е. $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ч.т.д.
для $x_0 > x$ док-во аналогично.

Теорема. (Второй критерий выпуклости ф-ции на промежутке.)

Пусть ф-я f определена и непрерывна на промежутке X, а также дважды дифференцируема в любой внутренней точке этого промежутка.

Тогда 1) f выпукла вниз на $X \Leftrightarrow \forall x \in \mathring{X} \ f''(x) \geq 0$

2) f выпукла вверх на $X \Leftrightarrow \forall x \in \mathring{X} \ f''(x) \leq 0$

Док-во: По первому критерию выпуклости f - выпукла вниз на промежутке тогда и только тогда, когда $f'(x)$ - неубыв.

В то же время, по критерию нестрогой монотонности, $f'(x)$ - неубывающая $\Leftrightarrow f''(x) = (f')'(x) \geq 0$, ч.т.д.

7.6. Асимптоты функции

Наклонные — Горизонтальные.

Опр. Прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой к графику $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$

При $k=0$ ~ наклонная асимптота становится горизонтальной.

Опр. $y=b$ назыв. горизонт. асимптотой к графику $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$

Поиск асимптот при $x\to\pm\infty$ аналогичен.

Теорема.
– Прямая $y=kx+b$ – наклонная асимптота к графику $y=f(x)$ при $x\to\infty$

$\Leftrightarrow$ 1) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$ и 2) $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)\in\mathbb{R}$

Док-во:
Необходимость ($\Rightarrow$) 1) Пусть $y=kx+b$ – асимптота к гр. $y=f(x)$ при $x\to\infty$.

Тогда по опр-ю асимптоты: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$

Отсюда получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-kx-b}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k=0$$

$$\Rightarrow\ k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

2) Равенство $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$ вытекает из опр-я асимптоты.

Достаточность ($\Leftarrow$): Если k – конечное действительное число, и $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$, то тогда $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$, значит по опр-ю, $y=kx+b$ – наклонная асимптота к графику $y=f(x)$

Замечание: Т.к. коэф. k и b вычисляются однозначно, то при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ может быть не более чем по одной наклонной асимптоте.

Вертикальные асимптоты.

Опр. Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой к графику $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке a бесконечен, то есть $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ (в частности $\pm\infty$), или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ (в частности $\pm\infty$)

Замечание: Из опр-я видно, что вертикальные асимптоты обязательно проходят через точки разрыва второго рода.

27.11.2020

Неопределённый интеграл.

§1. Понятие неопределённого интеграла и основные методы его вычисления.

1.1. Первообразная и неопределённый интеграл.

Опр. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на $(a;b)$, если $\forall x \in (a;b)$, $f(x)$ является производной для ф-и $F(x)$, (т.е. $F'(x) = f(x)$) а $f(x) \cdot dx$ – является дифференциалом для ф-и $F(x)$ (т.е. $dF(x) = f(x)\,dx$)

Примеры:

1. $f(x) = x$

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ или $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5$

$F'(x) = x$

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$F(x) = \left[\begin{array}{l} \arcsin x \\ -\arccos x \end{array}\right.$

Утверждение 1. ~ Если $F(x)$ – некоторая первообразная, то $F(x) + C$ также является первообразной для ф-и $f(x)$

Верно и обратное утверждение!

Утверждение 2. ~ Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для ф-и $f(x)$ на $(a;b)$. Тогда,

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Док-во: $\left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$

По теореме об условии постоянства ф-и

=> таким образом, $F_1(x) - F_2(x) = C$ (const)

Следствие: Если $F(x)$ – некоторая первообразная ф-и $f(x)$ на $(a;b)$, то $\{F(x) + C$, где C – произвольная постоянная$\}$ ~ множество всех первообразных функции $f(x)$ на $(a;b)$.

Опр. Неопределённый интеграл функции $f(x)$ – это множество всех первообразных:

$\int f(x)\,dx$

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$, а $F(x)$ - некоторая первообразная ф-и $f(x)$.

1.2. Свойства неопределённого интеграла.

Теорема.

- Если существуют неопределённые интегралы

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int g(x)\,dx = G(x) + C$$

то для них выполняется следующие св-ва.

① Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределённого интеграла равна подынтегральной ф-ии:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

Д-во: $d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = dF(x) = F'(x)\cdot dx = f(x)\,dx$

② Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой ф-ии равен сумме этой ф-ии и произвольной постоянной C.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

③ Постоянный множитель у подынтегральной функции можно выносить за знак интеграла.

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \qquad \alpha \neq 0,\ \alpha = const$$

Д-во: $d\left(\alpha \int f(x)\,dx\right) = d\cdot\alpha \int f(x)\,dx = \alpha f(x)\,dx$

④ Интеграл от суммы двух (или нескольких) функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Д-во: $d\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right) = d\left(\int f(x)\,dx\right) + d\left(\int g(x)\,dx\right) =$
$= f(x)\,dx + g(x)\cdot dx = (f(x)+g(x))\,dx$

⑤ Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то
$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C, \text{ где } a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$
док-во - нужно взять производную от правой части.

Комментарий к теореме

Св-во ① означает, что знаки d и $\int$ взаимно уничтожаются, если знак дифф. стоит перед знаком интеграла.

Св-во ② означает, что знаки $\int$ и d взаимно уничтожаются, если знак интеграла стоит перед знаком дифф. (в этом случае к $F(x)$ нужно прибавить произвольную постоянную C).

Св-во ③ называют однородностью интеграла.

Св-во ④ называют аддитивностью интеграла.

Св-ва ③ и ④ называют линейностью интеграла и формулируют так:

$\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $\forall f(x)$, $\forall g(x)$, имеющих первообразные,
$$\int(\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x))\,dx = \alpha_1 \int f(x)\,dx + \alpha_2 \int g(x)\,dx$$

1.3. Таблица неопределённых интегралов.

① $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

$\int dx = x + C \qquad - \alpha = 0$

$\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C \qquad \alpha = -2$

$\int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C \qquad \alpha = -\dfrac{1}{2}$

$\int \dfrac{dx}{x^n} = -\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + C \qquad \alpha = -n$

② $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad , x \neq 0$

③ $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad , (a > 0,\ a \neq 1)$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

④ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

⑤ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

⑥ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \qquad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z)$

⑦ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \qquad (x \neq \pi n,\ n \in Z)$

⑧ $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$

⑨ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (-1 < x < 1)$

⑩ $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$

⑪ $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$

⑫ $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C$

⑬ $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

I $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

II $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

III $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

IV $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

(V) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

(VI) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

1.4. Основные методы интегрирования.

1.4.1. Метод разложения.

Пример 1.

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int 1\cdot dx - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= x - \operatorname{arctg} x + C$$

Пример 2.

$$\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos x\,dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x + \sin x\right) + C$$

Пример 3.

$$\int \frac{1\cdot dx}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x} =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

Пример 4.

$$\int (3-x^3)^2\,dx = \int (9 - 6x^3 + x^6)\,dx = 9x - \frac{3}{2}x^4 + \frac{x^7}{7} + C$$

Пример 5

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 6.

$$\int \cos^2 4x\,dx = \int \frac{1+\cos 8x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 8x}{8}\right) + C$$

1.4.2. Метод замены переменной. (метод подстановки.)

Теорема. Пусть X, Y, Z - некоторые промежутки, и заданы функции $\varphi: X \to Y$, $f: Y \to Z$. При этих условиях определена композиция этих функций

$$f(\varphi(x)) : X \to Z$$

Пусть ф-я φ дифференцируема на промежутке X, и ф-я f имеет первообразную F на промежутке Y.

Тогда, $F(\varphi(x))$ - первообразная для функции $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ на X, т.е. справедлива следующая формула:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \Big|_{t=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + C}$$

Доказательство:

$$\left(F(\varphi(x)) \right)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

это значит, что $F(\varphi(x))$ является первообразной для ф-ии $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + C$$

$t = \varphi(x)$ ~ формула доказана

Пример 1:

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \end{array} \quad dx = \frac{dt}{t} \right\} = \int \frac{1 \cdot dt}{t(t+1)} = \int \frac{(t+1) - t}{t(t+1)} \cdot dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C = x - \ln(e^x + 1) + C$$

Пример 2.

$$\int \frac{\ln x \, dx}{x \sqrt{1 + \ln x}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+\ln x} = t \\ 1 + \ln x = t^2 \\ \ln x = t^2 - 1 \rightarrow \quad \frac{dx}{x} = 2t\, dt \end{array} \right. = \int \frac{(t^2 - 1) \cdot 2\cancel{t} \cdot dt}{\cancel{t}} =$$

$$= 2\int (t^2 - 1) \cdot dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C = 2 \cdot \frac{t^3 - 3t}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{3} t (t^2 - 3) + C = \frac{2}{3} \sqrt{1 + \ln x}\, (\ln x - 2) + C$$

Пример 3:

$$\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$= \left\{ t = tg\frac{x}{2} \quad ; \quad \frac{x}{2} = arctg\, t \right\} \textcircled{=}$$

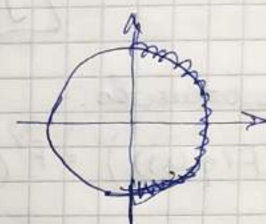
$$x = 2arctg\, t$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\textcircled{=} \int \frac{2dt\,\cancel{(1+t^2)}}{\cancel{(1+t^2)}\cdot \cancel{2}t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

Пример 4.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad , \quad a>0$$



$$a^2-x^2 \geq 0$$

$$(a-x)(a+x) \geq 0$$

$$-a \leq x \leq a$$

$$-1 \leq \sin t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -a \leq \underset{x}{\overset{\shortparallel}{a\sin t}} \leq a \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{cases} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\, dt \\ t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \end{cases} \qquad \left. \begin{aligned} &\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = \\ &= \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = |a|\,|\cos t| = a\cos t \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a\cos t \cdot a \cdot \cos t \cdot dt = \int a^2\cos^2 t \cdot dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt =$$

$$= a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\cdot \sin 2t\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right)}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\sin t \cdot \cos t\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

1.4.3. Внесение под знак дифференциала.

Из п. 1.4.2

$$\int F(\varphi(x))\, \underbrace{\varphi'(x)\, dx}_{d(\varphi(x))} = F(\varphi(x)) + C.$$

Пример 1:

$$\int \sin^5 x \cos x\, dx = \int \underset{t}{\sin^5 x}\, d(\sin x) = \frac{\sin^6 x}{6} + C \qquad = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C =$$

$$= \frac{(\sin x)^6}{6} + C.$$

Пример 2:

$$\int \arcsin^2 x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \arcsin^2 x \cdot d(\underset{t}{\arcsin x}) = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C =$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad = \frac{(\arcsin x)^3}{3} + C$$

Пример 3.

$$\int x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2} \cdot d(x^2) = \frac{1}{2}\int e^{-t} \cdot dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$d(x^2) = 2x\, dx \Rightarrow x\, dx = \frac{1}{2} d(x^2)$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-1} = \text{по II формуле} = -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|tg \frac{x}{2}\right|^2 + C =$$

$$= \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$$

Пример 4 (2-й способ)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{tg\frac{x}{2} \cdot \cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d(tg\frac{x}{2})}{tg\frac{x}{2}} =$$

$$= \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$$

$$d(f(x) + C) = d(f(x))$$

Пример 5:

$$\int e^{\sqrt{x}} \cdot \underbrace{\frac{2dx}{2\sqrt{x}}}_{d(\sqrt{x})} = 2\int e^{\sqrt{x}} \cdot d(\sqrt{x}) = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

1.4.4. Интегрирование по частям.

Теорема – Пусть $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые ф-ии.

Тогда $\int u \cdot dv = uv - \int v\, du$

Доказательство:

$d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$

$\int d(uv) = \int v\, du + \int u \cdot dv$

$uv = \int v\, du + \int u\, dv$

$$\Rightarrow \boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du}$$

Метод интегрирования по частям применяется в следующих случаях:

① Подынтегральное выражение содержит в виде множителя ф-ии $\ln x$, $\ln f(x)$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$

В качестве $u(x)$ и выбираются эти функции.

② Подынтегральное выражение содержит $p(x)\, e^{ax}$, $p(x) \cdot \sin ax$, $p(x) \cdot \cos ax$, где $p(x)$ – многочлен отн. переменной x.

В качестве $u(x) = p(x)$

③ Циклическими называют интегралы, для которых после однократного либо неоднократного интегрирования по частям приходим к такому же интегралу.

$\int e^{ax} \sin bx\, dx$, $\int e^{ax} \cos bx\, dx$,

$\int \sin(\ln x)\, dx$, $\int \cos(\ln x)$ ... и др.

Пример 1.

$$\int \overbrace{\arcsin x}^{u}\, \overbrace{dx}^{dv} = \left\{ \begin{array}{ll} u = \arcsin x & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & \\ v = \int dx = x & \end{array} \right\} =$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(-x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

Пример 2.

$$\int x^2 e^{3x} dx = \left\{ \begin{matrix} x^2 = u & du = 2x\,dx \\ e^{3x} dx = dv & \\ v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} & \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} \cdot 2x\,dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ e^{3x} \cdot dx = dv & v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x \cdot e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x \cdot e^{3x} + \frac{2}{9} \int e^{3x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x \cdot e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C =$$

$$= \frac{1}{27} e^{3x} \left(9x^2 - 6x + 2 \right) + C$$

$\boxed{04.12.2020}$

Пример 3:

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = \sqrt{a^2 - x^2} & dv = dx \\ du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} & v = x \end{matrix} \right\} =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a}$$

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

Пример 4. (рекуррентная формула)

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \cdot I_n$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$$

Д-во:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \int (t^2+a^2)^{-n}\, dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = (t^2+a^2)^{-n} & dV = dt \\ du = \frac{-2nt\,dt}{(t^2+a^2)^{n+1}} & V = t \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^{n+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\, dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\right)$$

$$I_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n \cdot I_n - 2na^2 I_{n+1}.$$

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \cdot I_n}$$

Пример 5:

$$\int \frac{dt}{(t^2+4)^4} = I_4$$

$n = 3,\ a = 2$

$$I_4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{t}{(t^2+4)^3} + \frac{5}{24} \cdot I_3$$

$$I_3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{t}{(t^2+4)^2} + \frac{3}{16} I_2$$

$n = 2,\ a = 2$

$$I_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{t}{t^2+4} + \frac{1}{8} \cdot I_1 = \frac{t}{8(t^2+4)} + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C$$

$n = 1,\ a = 2$

$$I_4 = \frac{t}{24(t^2+4)^3} + \frac{5t}{384(t^2+4)^2} + \frac{5t}{1024(t^2+4)} + \frac{5}{2048}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C$$

§2. Интегрирование рациональных функций.

2.1. Понятие рациональных ф-й.

Рациональная ф-я — отношение $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\ \text{где}$$

$P_n(x)$ — многочлен степени n

$Q_m(x)$ — многочлен степени m

Если $n \geq m$, то дробь неправильная
$n < m$ — " — правильная.

Если дробь неправильная, то $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{O_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k<m)$

Среди правильных дробей выделяют несколько типов, которые называют простейшими: 4 типа дробей

I) $\dfrac{A}{x-a}$ – простейшая дробь I типа.

II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k>1$, $k \in \mathbb{N}$ – простейшая дробь II типа.

III) $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$ – простейшая дробь III типа.

IV) $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$, $s>1$ – простейшая дробь IV типа.

$A, B, C, p, q \in \mathbb{R}$; $B^2+C^2 \neq 0$

$p^2-4q<0$, т.е. квадр. трёхчлен x^2+px+q – неприводимый, т.е. не раскладывается в произведение линейных множителей.

$k, s \in \mathbb{N}$

! Любую правильную дробь $\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей.
Для этого, $Q_m(x)$ нужно разложить на произведение множителей линейных и квадратных (но с отриц. дискриминантом.)

$$Q_m(x) = a_m \cdot (x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \ldots (x^2+p_lx+q_l)^{s_l}$$

$$(x-x_i)^{k_i} \to \frac{A_1^{(i)}}{x-x_i} + \frac{A_2^{(i)}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{k_i}^{(i)}}{(x-x_i)^{k_i}}$$

$$(x^2+p_ix+q_i)^{s_i} \to \frac{B_1^{(i)}x+C_1^{(i)}}{(x^2+p_ix+q_i)} + \frac{B_2^{(i)}x+C_2^{(i)}}{(x^2+p_ix+q_i)^2} + \ldots + \frac{B_{s_i}^{(i)}x+C_{s_i}^{(i)}}{(x^2+p_ix+q_i)^{s_i}}$$

В общем случае, (☆) ←

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-x_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(r)}}{(x-x_r)} + \frac{A_2^{(r)}}{(x-x_r)^2} +$$
$$+ \frac{A_{k_r}^{(r)}}{(x-x_r)^{k_r}} + \frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_2^{(1)}x+C_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{s_1}^{(1)}x+C_{s_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} +$$
$$+ \ldots + \frac{B_1^{(l)}x+C_1^{(l)}}{x^2+p_lx+q_l} + \frac{B_2^{(l)}x+C_2^{(l)}}{(x^2+p_lx+q_l)^2} + \ldots + \frac{B_{s_l}^{(l)}x+C_{s_l}^{(l)}}{(x^2+p_lx+q_l)^{s_l}}$$

Пример. 1.

$$\frac{x^4}{x^3-3x+2} = x + \frac{3x^2-2x}{x^3-3x+2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3-3x+2 \\ \hline -\left(x^4-3x^2+2x\right) & x \\ 3x^2-2x & \end{array}$$

	1	0	-3	2
1	1	1	-2	0

$$\Leftrightarrow x + \frac{3x^2-2x}{(x-1)(x^2+x-2)} = x + \frac{3x^2-2x}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$(x-1)(x+2)$$

$$\frac{3x^2-2x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$A(x+2)(x-1) + B(x+2) + C(x-1)^2 = 3x^2-2x$$

$x=1$ $\quad B(1+2) = 3-2 \quad \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

$x=-2$ $\quad C(-2-1)^2 = 3(-2)^2+4$

$C = \frac{16}{9}$

$x=0$ $\quad -2A+2B+C=0$

$A = \frac{11}{9}.$

$$\frac{x^4}{(x+2)(x-1)^2} = x + \frac{11}{9(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{16}{(x+2)}$$

Пример. 2.

$$\frac{x^4-x^3+3x^2+x+2}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$A(x^2+1)^2 + x(x^2+1)(Bx+C) + x(Dx+E) = x^4-x^3+3x^2+x+2$$

раскрыть скобки.

← и системой

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A+B=1. \\ x^3 & C=-1 \\ x^2 & 2A+B+D=3 \\ x & C+E=1 \\ x^0 & A=2 \end{array}$$

$B=-1$

$4-1+D=3 \Rightarrow D=0$

$E=2$

$$\frac{x^4-x^3+3x^2+x+2}{x(x^2+1)^2} = \frac{2}{x} + \frac{-x-1}{(x^2+1)} + \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

2 способ.

$x=0 \to A(0+1)^2=2 \Rightarrow A=2$

$x=i \to i(Di+E)=i^4-i^3+3i^2+i+2$

$Di^2+Ei=1+i-3+i+2$

$\underbrace{E\cdot i}-D=\underbrace{2i} \Rightarrow D=0$ и $E=2$

$x=-i$ ~ не подобрёт.

$\left.\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right\}$ получим нуё 2 ур-я для B и C

Пример 3

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{\overset{0}{A}}{x}+\frac{\overset{1}{B}}{x^2}+\frac{\overset{0}{C}x+\overset{-1}{D}}{x^2+1}+\frac{\overset{0}{E}x+\overset{-1}{F}}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

2.2. Интегрирование

I) $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$

II) $\int\frac{A}{(x-a)^k}d(x-a)=\frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$

$k=2,3,\ldots$

III) $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4})-(\frac{p}{2})^2+q}=\int\frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}}$

$D<0 \qquad \frac{4q-p^2}{4}=a^2>0$

Замена: $t=x+\frac{p}{2}$, $x=t-\frac{p}{2}$; $dx=dt$

$$\int\frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2}dt=\int\frac{At+\frac{2B-Ap}{2}}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\int\frac{At\,dt}{t^2+a^2}+\int\frac{2B-\frac{Ap}{2}}{t^2+a^2}dt=\frac{A}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\frac{2B-Ap}{2}\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2B-Ap}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a}+C=$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

IV) Вычисляется аналогично интегралу от простейшей дроби III типа, но с исп. рекуррентной формулы.

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = A\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + \frac{2B-Ap}{2}\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}}$$

(вычисл. внес. под знак. дифф.)

по рекуррентной формуле

$$\left(\begin{array}{l} t = x+\frac{p}{2} \\ \frac{4q-p^2}{4} = a^2 > 0 \end{array}\right)$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\cdot I_n$$

$$I_n = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \quad n\in \mathbb{N}$$

Пример:

$$\int\frac{x+2}{(x^2+2x+2)^3}\,dx = \int\frac{(x+1)+1}{((x+1)^2+1)^3}\,dx = \{x+1=t\} = \int\frac{t+1}{(t^2+1)^3}\,dt =$$

$$= \int\frac{t\,dt}{(t^2+1)^3} + \int\frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^3} + I_3 =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(t^2+1)^2} + I_3$$

$n=2 \quad I_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2$

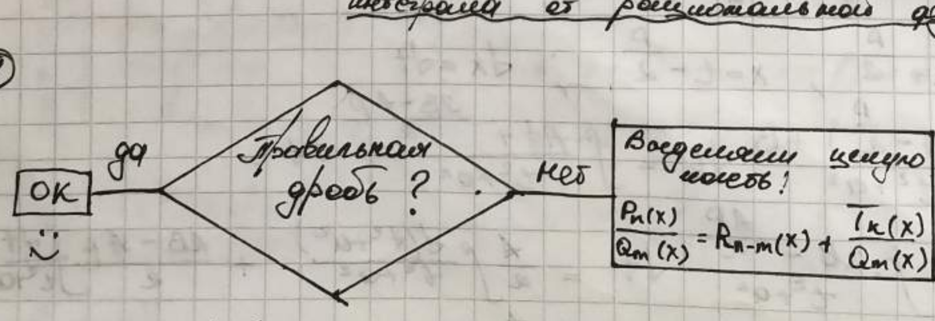
$n=1 \quad I_2 = \frac{1}{2}\,\frac{t}{(t^2+1)} + \frac{1}{2}I_1$

$$I_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{t}{(t^2+1)} + \frac{3}{8}\,\mathrm{arctg}\,t + C$$

$$\int\frac{x+2}{(x^2+2x+2)^3}\,dx = \frac{3x^3+9x^2+14x+6}{8(x^2+2x+2)^2} + \frac{3}{8}\,\mathrm{arctg}(x+1) + C$$

2.3. Алгоритм вычисления интеграла от рациональной функции

①



② Интегрируем правильную дробь

1) Раскладываем знаменатель на множители (линейные или квадратные с $D<0$)

$$Q_n(x) = a_n (x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \dots (x^2+p_lx+q_l)^{s_l}$$

2) Правильную дробь представляем в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами.
(см. ☆ ←)

3) Находим неопределённые коэффициенты (одним из 2-ух способов.)

③ Вычисляем интегралы от простых дробей (см. п. 2.2.)

Пример: $\int \frac{dx}{x^5+x^3} =$

$$\frac{1}{x^2(x^3+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2-x+1}$$

$x(x^3+1)$, x^3+1, $x^2(x^2-x+1)$, $x^2(x+1)$

$$1 = Ax(x^3+1) + B(x^3+1) + Cx^2(x^2-x+1) + (Dx+E)(x+1)x^2$$

раскроем скобки:

$$1 = x^4(A+C+D) + x^3(B-C+E+D) + x^2(C+E) + xA + B$$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ B-C+E+D=0 \\ C+E=0 \\ A=0 \\ B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C+D=0 \\ 1-C+E+D=0 \\ C+E=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} D=-C \\ E=2C-1 \\ E=-C \\ -C=2C-1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} D=-\frac{1}{3} \\ E=-\frac{1}{3} \\ \Rightarrow C=\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\int \frac{dx}{x^5+x^3} = \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx \; \ominus$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-1+1}dx = \int \frac{x+1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \left\{ x-\frac{1}{2}=t \right\} = \int \frac{t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt =$$

$$= \int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\ominus -\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

§3. Интегрирование иррациональных функций.

3.1. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

$$R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \quad m = 2, 3, \dots \qquad \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$$

a, b, c, d — произвольные константы

$$\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \quad \rightarrow \quad \frac{ax+b}{cx+d} = t^m$$

$$cxt^m + dt^m = ax + b$$

$$x(ct^m - a) = b - dt^m$$

$$x = \frac{b - dt^m}{ct^m - a}$$

$$dx = \frac{(-dm\,t^{m-1})(ct^m - a) - (b - dt^m)\cdot(cm\,t^{m-1})}{(ct^m - a)^2}\,dt =$$

$$= \frac{-m(ad + bc)\,t^{m-1}}{(ct^m - a)^2}\,dt$$

$\int R(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$, где $R(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ — рац-ая ф-я переменной t

<u>Замечание</u>! Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[m_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots \sqrt[m_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ сводятся к интегрированию рац. функции подстановкой $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, m = наим. общ. крат-ое $(m_1, m_2, m_3, \dots, m_k)$

<u>Пример 1.</u>

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = t \\ t^3 = \frac{1-x}{1+x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t^3(1+x) = 1 - x \\ t^3 + t^3x = 1 - x \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} t^3x + x = 1 - t \\ x(t^3 + 1) = 1 - t^3 \\ x = \frac{1 - t^3}{1 + t^3} \end{array} \right\}$$

$$dx = \frac{-6t^2\,dt}{(1+t^3)^2}$$

$$= -6\int \frac{t\cdot t^2\,\cancel{(1+t^3)}\,dt}{\underset{1+t^3}{\cancel{(1+t^3)^2}}\,(1-t^3)} = -6\int \frac{t^3\,dt}{(1-t^3)(1+t^3)}$$

$$\frac{t^3}{(1-t^2)(1+t^3)} = \frac{t^3}{(1-t)(1+t)(t^2+t+1)\,t^2-t+1)} =$$

$$= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{t^2+t+1} + \frac{Et+F}{t^2-t+1}$$

дома дорешать!

\+ результат продифференцировать

Пример 2:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[6]{x}=t \\ x=t^6 \end{array} \quad \begin{array}{l}\sqrt{x}=t^3 \\ \sqrt[3]{x}=t^2\end{array} \quad dx = 6t^5dt \right\} =$$

НОК $(2,3)=6$

$$= \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} = \int \frac{6t^{\cancel{5}\,3}\,dt}{\cancel{t^2}(t+1)} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} =$$

$$= 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}\,dt = 6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$$

3.2. Подстановки Эйлера.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

1 случай: $a>0$

Замена: $\sqrt{ax^2+bx+c} \overset{(\pm)}{=} \sqrt{a}\,x \overset{(\pm)}{+} t$

$$\cancel{ax^2}+bx+c = \cancel{ax^2}+2\sqrt{a}\,xt+t^2$$

$$x(b-2\sqrt{a}\,t) = t^2-c$$

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}+t = \frac{\sqrt{a}\,t^2-\sqrt{a}\,c+t(b-2\sqrt{a}\,t)}{b-2\sqrt{a}\,t} =$$

$$= \frac{-\sqrt{a}\,t^2+bt-\sqrt{a}c}{b-2\sqrt{a}\,t}$$

$$dx = \frac{2t(b-2\sqrt{a}\,t)+2\sqrt{a}(t^2-c)}{(b-2\sqrt{a}t)^2}\,dt = \frac{-2\sqrt{a}\,t^2+2bt-2\sqrt{a}\,c}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}$$

$$I = \int R\left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}, \frac{-\sqrt{a}\,t^2+bt-\sqrt{ac}}{b-2\sqrt{a}\,t}\right)\cdot\frac{-2\sqrt{a}t^2+2bt-2\sqrt{ac}}{(b-2\sqrt{a}t)^2}\,dt$$

2 случай: $c > 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \overset{(\pm)}{=} xt \pm \sqrt{c}$$ (±) ← выбираются знаки

$$ax^2+bx+c = x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c$$

$$ax+b = xt^2+2t\sqrt{c}$$

$$x(a-t^2) = 2\sqrt{c}\,t-b$$

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{2\sqrt{c}\,t^2-bt}{a-t^2}+\sqrt{c}$$

$$dx = \frac{2\sqrt{c}\,(a-t^2)+2t(2\sqrt{c}\,t-b)}{(a-t^2)^2}$$

Подставим всё в исх. интеграл, получим интеграл от рац. ф-ии.

3 случай: $D = b^2-4ac$.

x_1, x_2

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$$

$$\left(\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_2)\right)$$

Дома проделать самому.

$$a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2$$

$$ax-ax_2 = t^2x-t^2x_1$$

$$x = \frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2}$$

$$x-x_1 = \frac{ax_2-t^2x_1-ax_1+x_1t^2}{a-t^2} = \frac{a(x_2-x_1)}{a-t^2}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(x_2-x_1)t}{a-t^2}$$

$$dx = \frac{-2tx_1(a-t^2)+2t(ax_2-t^2a_1)}{(a-t^2)^2}\cdot dt$$

Подставим всё в исх. интеграл, получим интеграл от рац. функции.

Пример 3:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x^2+a}=t-x \qquad x=\dfrac{t^2-a}{2t}\\ x^2+a=x^2-2xt+t^2 \qquad dx=\dfrac{t^2+a}{2t^2}dt\\ \sqrt{x^2+a}=t-\dfrac{t^2-a}{2t}=\dfrac{2t^2-t^2+a}{2t}=\dfrac{t^2+a}{2t}\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{(\cancel{t^2+a})dt\cdot\cancel{2t}}{\cancel{2t^2}\cdot(\cancel{t^2+a})}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C$$

Пример 4:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{1-2x-x^2}=tx-1\\ \cancel{1}-2x-x^2=t^2x^2-2tx+\cancel{1} \quad /:x\\ -2-x=t^2x-2t \quad\longrightarrow\quad x=2\dfrac{t-1}{t^2+1}\\ dx=2\dfrac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}dt\\ 1+\sqrt{1-2x-x^2}=\cancel{1}+t\cdot\dfrac{2(t-1)}{t^2+1}-\cancel{1}=\dfrac{2t(t-1)}{t^2+1}\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{\cancel{2}(-t^2+2t+1)dt\;\cancel{(t^2+1)}}{(t^2+1)^2\cdot\cancel{2}t(t-1)}=\int\frac{-t^2+2t+1}{t(t^2+1)(t-1)}dt=\text{Разложить}$$

$$=\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\operatorname{arctg}t+C,$$

где $t=\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$

Пример 5.

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{(x+1)(x+2)}=t(x+1)\\ (x+1)(x+2)=t^2(x+1)^2\\ x+2=t^2(x+1)\\ x+2=t^2x+t\\ x=\dfrac{2-t^2}{t^2-1}\end{array}\right. \qquad dx=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}=t\left(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1\right)=t\left(\frac{2-t^2+t^2-1}{t^2-1}\right)=\frac{t}{t^2-1}\Bigg\}$$

$$=\int\frac{\dfrac{2-t^2}{t^2-1}-\dfrac{t}{t^2-1}}{\dfrac{2-t^2}{t^2-1}+\dfrac{t}{t^2-1}}\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=\int\frac{2-t^2-t}{2-t^2+t}\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=$$

$$=\int\frac{t^2+t-2}{t^2-t-2}\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}=\int\frac{-2t^2-4t}{(t+1)^3(t-1)(t-2)}dt$$

$$\frac{-2t^2-4t}{(t+1)^3(t-1)(t-2)}=\frac{A_0}{(t+1)^3}+\frac{A_1}{(t+1)^2}+\frac{A_2}{(t+1)}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-2}$$

Теорема.

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет корень кратности n действительное число a, т.е.

$$Q(x) = (x-a)^n Q_1(x), \quad Q_1(a) \neq 0$$

Тогда для этой дроби справедливо разложение

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n Q_1(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

где коэффициенты A_k, $k = \overline{0, n-1}$ вычисл. по формуле

$$A_k = \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{d^k}{dx^k}\left[(x-a)^n \frac{P(x)}{Q(x)}\right]}_{\text{производная от этого}}\Bigg|_{x=a}, \quad k = \overline{0, n-1}$$

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{-2t^2-4t}{(t-1)(t-2)}\right]_{t=-1} = \frac{-2+4}{-2\cdot(-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$k=1$. $$A_1 = \frac{1}{1!}\frac{d}{dt}\left[\frac{-2t^2-4t}{t^2-3t+2}\right]_{t=-1} = \frac{(-4t-4)(t^2-3t+2)+(2t^2+4t)(2t-3)}{(t^2-3t+2)^2} =$$

$$= \frac{5}{18}$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{-2t^2-4t}{t^2-3t+2}\right]_{t=-1} = \frac{-10t^3+12t^2+24t-32}{(t^2-3t+2)^3} = -\frac{17}{108}$$

Когда 1 степень - производные не нужны!

$$B = \frac{-2t^2-4t}{(t+1)^3(t-2)}\Bigg|_{t=1} = \frac{3}{4}$$

$$C = \frac{-2t^2-4t}{(t+1)^3(t-1)}\Bigg|_{t=2} = \frac{-2\cdot4-8}{27\cdot1} = \frac{-16}{27}$$

$$I = \int\left(\frac{1}{3(t+1)^3} + \frac{5}{18(t+1)^2} - \frac{17}{108(t+1)} + \frac{3}{4(t-1)} - \frac{16}{27(t-2)}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{6(t+1)^2} - \frac{5}{18(t+1)} - \frac{17}{108}\ln|t+1| + \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{16}{27}|t-2| + C,$$

где $t = \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{(x+1)} = \sqrt{\frac{(x+2)}{(x+1)}} = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{(x+1)}$

3.9. Интегрирование дифференциального бинома.

Дифференциальный бином или биномиальный дифференциал – это интеграл вида:

$$I = \int x^m (a+bx^n)^p \cdot dx, \text{ где } m, n, p \in Q, \; a, b \in R$$

Пафнутий Львович Чебышёв доказал, что I сводится к интегралу от рациональной ф-ии в трёх случаях:

1. случай: Число p явл. целым $(p \in Z)$

Замена $t = x^{\frac{1}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{x}$, λ - наименьший общий знаменатель дробей $\longrightarrow m = \frac{k}{\ell}, \; n = \frac{s}{q}$

$\lambda = \text{НОК}(\ell, q)$

2 случай: $p \notin Z, \; \frac{m+1}{n} \in Z$

Замена: $t = (a + b \cdot x^n)^{\frac{1}{\lambda}}$, где λ - знаменатель дроби p.

3 случай: $p \notin Z, \; \frac{m+1}{n} + p \in Z$

$t = (ax^{-n} + b)^{\frac{1}{\lambda}}$, где λ - знаменатель дроби p.

Док-во:

1 случай: Приведём дроби $m = \frac{k}{\ell}$ и $n = \frac{s}{q}$ к общему знаменателю. $\lambda = \text{НОК}(\ell, q)$, тогда

$m = \frac{k_1}{\lambda}, \; n = \frac{s_1}{\lambda}, \; k_1, s_1, \lambda \in Z$

Замена $t = x^{\frac{1}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{x}, \; x = t^\lambda, \; dx = \lambda t^{\lambda-1} dt$

Переходя к новой переменной, получаем

$$I = \int t^{k_1} (a + bt^{s_1})^p \lambda \cdot t^{\lambda-1} dt$$

2 случай: Число $p \notin Z$. Представим его в виде несократимой дроби

$p = \frac{k}{\lambda}, \; k, \lambda \in Z$

Сначала сделаем замену $z = x^n$,

$$x = z^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} \cdot z^{\frac{1}{n}-1}\, dz$$

$$I = \int z^{\frac{m}{n}} (a+bz)^p \cdot \frac{1}{n} \cdot z^{\frac{1}{n}-1}\, dz =$$

$$= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bz)^p\, dz$$

Если $\frac{m+1}{n} \in Z$, то I сводится к интегралу от рац. функции заменой $t = (a+b\cdot z)^{\frac{1}{\lambda}}$,

$z = \frac{1}{b}(t^\lambda - a)$, где λ - знаменатель дроби p.

В этом случае получаем интеграл от рац. функции.

$$I = \frac{1}{n} \int \left(\frac{1}{b}(t^\lambda - a)\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot t^k \cdot \frac{\lambda}{b} \cdot t^{\lambda-1} \cdot dt,$$

где $t = (a+bx^n)^{\frac{1}{\lambda}}$

<u>3 случай</u>: $z = x^n$ сначала получаем

$$I = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bz)^p \cdot dz$$

Преобразовав выражение $a+bz = z(az^{-1}+b)$, приводим интеграл к виду

$$I = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}+p-1} (az^{-1}+b)^p\, dz$$

Если $\frac{m+1}{n}+p \in Z$ и λ - знаменатель дроби p, то замена $t = (az^{-1}+b)^{\frac{1}{\lambda}}$, $z = \frac{a}{t^\lambda - b}$; $dz = -\frac{a\lambda t^{\lambda-1}\, dt}{(t^\lambda - b)^2}$

позволяет получить интеграл от рациональной ф-ии

$$I = -\frac{a\lambda}{n} \int \left(\frac{a}{t^\lambda - b}\right)^{\frac{m+1}{n}+p-1} \cdot t^k \cdot \frac{t^{\lambda-1}\, dt}{(t^\lambda - b)^2}, \text{ где}$$

$$t = (ax^{-n}+b)^{\frac{1}{\lambda}}$$

Пример. 6.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}} dx$$

$$p = -\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$$

$m = 0$
$n = 4$

$$\frac{m+1}{n} = \frac{0+1}{4} = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$$ ~~1 случай~~ ~~2 случай~~

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{3 случай}$$

$$t = \sqrt[4]{x^{-4}+1}$$

$$x^4 = \frac{1}{t^4-1} \quad ; \quad x = \frac{1}{\sqrt[4]{t^4-1}} \quad ; \quad dx = -\frac{t^3\,dt}{(t^4-1)^{\frac{5}{4}}}$$

$$x^4 + 1 = \frac{t^4}{t^4-1}$$

$$I = -\int \frac{(t^4-1)^{\frac{1}{4}}}{t} \cdot \frac{t^3\,dt}{(t^4-1)^{\frac{5}{4}}} = -\int \frac{t^2}{t^4-1}\,dt =$$

$$= -\int \frac{t^2\,dt}{(t^2-1)(t^2+1)} = -\int \frac{t^2\,dt}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \ldots$$ дальше как с рац. дробями.

§4. Интегрирование тригонометрических функций.

4.1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

1) Универсальная тригонометрическая подстановка.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \ ; \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

2) $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

$t = \cos x$.

3) $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

$t = \sin x$.

4) $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x), \text{ то}$$

$t = \operatorname{tg} x$ (или $t = \operatorname{ctg} x$)

Пример 1.

$$I = \int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x}$$

1) $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$I = \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^4 \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \frac{2}{2^4}\int \frac{(1-t^2)^3(1+t^2)^3}{t^4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{64}\int \frac{(1-t^4)^3}{t^4}\,dt = \frac{1}{64}\int \frac{1-3t^4+3\cdot t^8 - t^{12}}{t^4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{64}\int\left(\frac{1}{t^7} - \frac{3}{t^3} + 3t - t^5\right)dt =$$

$$= \frac{1}{64}\left(-\frac{1}{6t^6} + \frac{3}{2t^2} + \frac{3t^2}{2} - \frac{t^6}{6}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{64}\left(-\frac{1}{6tg^6\frac{x}{2}} + \frac{3}{2tg^2\frac{x}{2}} + \frac{3tg^2\frac{x}{2}}{2} - \frac{tg^6\frac{x}{2}}{6}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{64}\left(-\frac{1}{6}ctg^2\frac{x}{2} + \frac{3}{2}ctg^2\frac{x}{2} + \frac{3}{2}tg^2\frac{x}{2} - \frac{1}{6}tg^6\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{3}{128}\left(ctg^2\frac{x}{2} + tg^2\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{384}\left(tg^6\frac{x}{2} + ctg^6\frac{x}{2}\right) + C$$

2) $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\cos^3 x}{\sin^7 x}$

$R(-\sin x, \cos x) = \dfrac{\cos^3 x}{-\sin^7 x} = -R(\sin x, \cos x)$

$\Rightarrow t = \cos x$; $dt = -\sin x\, dx$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \quad \nearrow \quad t^2 - 1 = -\sin^2 x$

$$I = \int\frac{\cos^3 x \cdot \sin x\, dx}{\sin^8 x} = -\int\frac{t^3 dt}{(1-t^2)^4} = -\frac{1}{2}\int\frac{t^2\, dt^2}{(1-t^2)^4} = \{t^2 = u\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{u\, du}{(1-u)^4} = -\frac{1}{2}\int\frac{u\, du}{(u-1)^4} = -\frac{1}{2}\int\frac{(u-1)+1}{(u-1)^4}\, d(u-1) = \{$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{\cancel{(u-1)}\, d(u-1)}{(u-1)^{\cancel{4}3}} - \frac{1}{2}\int\frac{d(u-1)}{(u-1)^4} = +\frac{1}{4}\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{6(u-1)^3} + C =$$

$$= \frac{1}{4(t^2-1)^2} + \frac{1}{6(t^2-1)^3} + C = \frac{1}{4(-\sin^2 x)^2} + \frac{1}{6(-\sin^2 x - 1)^3} + C =$$

$$= \frac{1}{4\sin^4 x} - \frac{1}{6\sin^6 x} + C$$

3) $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\cos^3 x}{\sin^7 x}$

$R(\sin x, -\cos x) = \dfrac{-\cos^3 x}{\sin^7 x} = -R(\sin x, \cos x)$

$t = \sin x$

$dt = \cos x\, dx \qquad \cos^2 x = 1 - t^2$

$$I = \int\frac{\cos^2 x \cdot \cos x\, dx}{\sin^7 x} = \int\frac{(1-t^2)\, dt}{t^7} = \int\frac{dt}{t^7} - \int\frac{dt}{t^5} =$$

$$= -\frac{1}{6t^6} + \frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{6\sin^6 x} + \frac{1}{4\sin^4 x} + C$$

4) $R(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{+\cos^3 x}{+\sin^7 x} = R(\sin x, \cos x)$

$\Rightarrow t = tg\, x \rightarrow t = ctg\, x \qquad x = arcctg\, t$

$dt = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$

$$I=-\int \frac{ctg^3 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int ctg^3 x\,(1+ctg^2 x)\,d(ctg\,x)=\{ctg\,x=t\}=$$

$1+ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$

$$=-\int (t^3+t^5)\,dt=-\frac{t^4}{4}-\frac{t^6}{6}+C=$$

$$=-\frac{ctg^4 x}{4}-\frac{ctg^6 x}{6}+C$$

4.2. Использование тригонометрических формул при вычислении интегралов.

Пример 2:

$$\int \sin 5x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 6x+\sin 4x)\,dx=\frac{1}{2}\int \sin 6x\,dx+\frac{1}{2}\int \sin 4x\,dx=$$

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

$$=\frac{-\cos 6x}{12}-\frac{\cos 4x}{8}+C$$

Пример 3.

$$I=\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cdot\cos^2 x\,dx=$$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}\cdot\frac{(1+\cos 2x)}{2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)(1+\cos 2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x+\cos 2x-\cos 4x\cdot\cos 2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int\cos 4x\,dx+\frac{1}{16}\int\cos 2x\,dx-\frac{1}{16}\int\cos 4x\cdot\cos 2x\,dx=$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin 2x}{32}-\frac{1}{32}\int(\cos 6x+\cos 2x)\,dx=$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin 2x}{32}-\frac{\sin 6x}{192}+\frac{\sin 2x}{64}+C=$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{3\sin 2x}{64}-\frac{\sin 6x}{192}+C$$

Пример 4:

$$I=\int\frac{dx}{\sin(\alpha+x)\cdot\sin(x+\beta)}=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\int\frac{\sin((x+\alpha)-(x+\beta))}{\sin(x+\alpha)\cdot\sin(x+\beta)}\cdot dx=$$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin((x+\alpha)-(x+\beta))$

$$=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\int\left(\frac{\cos(x+\beta)}{\sin(x+\beta)}-\frac{\cos(x+\alpha)}{\sin(x+\alpha)}\right)dx=$$

$$= \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\int \frac{\cos(x+\beta)\,dx}{\sin(x+\beta)} - \int \frac{\cos(x+\alpha)\,dx}{\sin(x+\alpha)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\int \frac{d(\sin(x+\beta))}{\sin(x+\beta)} - \int \frac{d(\sin(x+\alpha))}{\sin(x+\alpha)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}\left(\ln|\sin(x+\beta)| - \ln|\sin(x+\alpha)|\right) + C$$

Понятие о неберущихся интегралах.
(нет в билетах.)

Опр. Интегралы, которые нельзя выразить в элементарных ф-ях называются неберущимися!

$\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона (исп. в статистической физике, в теории теплопроводности и диффузии.)

$\int \cos x^2 dx$ или $\int \sin x^2 dx$ (исп. в оптике.)

$\int \frac{\sin x}{x}dx = si(x)$ – интегральный синус.

$\int \frac{\cos x}{x}dx = ci(x)$ – интегральный косинус.

$\int \frac{e^x}{x}dx = \int \frac{dy}{\ln y}$ – интегральный логарифм

Эллиптические интегралы:

$$R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})\,dx \quad (1)$$

$$R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\,dx \quad (2)$$

(2). Вычисление интеграла (1) сводится к вычислению интеграла
Интеграл (2) сводится к вычислению трёх интегралов:

① $\int \frac{dz}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ ~ эллиптический интеграл I рода

② $\int \frac{z^2dz}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ ~ эллиптический интеграл II рода

③ $\int \frac{dz}{(1-kz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ ~ эллиптический интеграл III рода

заменой $z = \sin\varphi$

$\to \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi}}$

$$\left.\begin{aligned}&\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi \\ &\int \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\end{aligned}\right\}$$

Эллипт. интегралы I, II, III рода в форме Лежандра

Определённый интеграл.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

① $\int_0^2 (x)(x^2-3)^9\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2-3)^9\,d(x^2-3) = \frac{1}{20}(x^2-3)^{10}\Big|_0^2 =$

$= \frac{1}{20}\left(1-(0-3)^{10}\right) = \frac{1}{20}\left(1-3^{10}\right)$

② $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+7x+10} = \int_1^2 \frac{dx}{(x+5)(x+2)} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{(x+5)-(x+2)}{(x+5)(x+2)}\,dx = \frac{1}{3}\int\left(\frac{dx}{x+2} - \frac{1}{x+5}\right)dx =$

$= \frac{1}{3}\left(\ln|x+2| - \ln|x+5|\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x+5}\right|\Big|_1^2 =$

$= \frac{1}{3}\left(\ln\frac{4}{7} - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{7}$

③ $\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{2x\,dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}\,dx =$

$(x^2+2x)' = 2x+2$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+2} - \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+(x+1)^2} =$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} - \int_{-1}^1 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)\Big|_{-1}^1 - \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{-1}^1 =$

$= \frac{1}{2}\left(\ln 5 - \ln(1-2+2)\right) - \operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}0 =$

$= \frac{1}{2}\ln 5 - \operatorname{arctg}2$

④ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot\sqrt{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}x\cdot d(\sin x) = \frac{2\sin^{\frac{3}{2}}x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

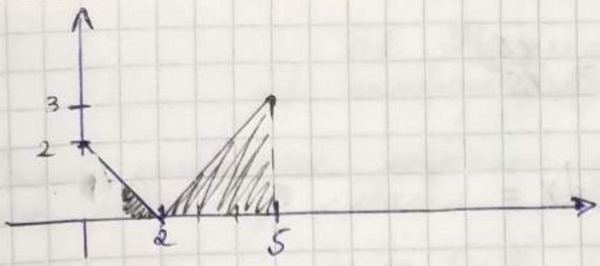
$= \frac{2}{3}$

⑤ $\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\cdot dx =$

$= \frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2\cdot 2}\sin 2x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - 0 + 0 = \frac{\pi}{2}$

⑥ $\int_1^5 |x-2|\,dx = \int_1^2 (2-x)\,dx + \int_2^5 (x-2)\,dx = -\frac{(x-2)^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{(x-2)^2}{2}\Big|_2^5 =$

$= \left(-0+\frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2} - 0 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{10}{2} = 5$



$S = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$

(7) Если ф-ии $u(x)$, $v(x)$ $\in C^{(1)}[a;b]$ (непр.), то формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\int_1^e \ln x\,dx = \left\{\begin{matrix} \ln x = u & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & \to v = x \end{matrix}\right\} =$$

$$= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x\cdot dx}{x} = e - \left(x\Big|_1^e\right) = e - e + 1 = 1.$$

(8) $$\int_0^\pi (2x+3)\cos 5x\,dx = \left\{\begin{matrix} 2x+3 = u & du = 2dx \\ \cos 5x\,dx = dv & v = \frac{\sin 5x}{5} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{(2x+3)\cdot\sin 5x}{5}\Big|_0^\pi - \frac{2}{5}\int_0^\pi \sin 5x\,dx =$$

$$= \frac{2\cos 5x}{5\cdot 5}\Big|_0^\pi = \frac{2}{25}(\cos 5\pi - \cos 0) = -\frac{4}{25}$$

1) Если непрерывная ф-я чётная на $[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

2) Если непр. ф-я нечётная на $[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

(9) $$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx = 2\int_0^\pi \sin x\,dx = 2\left(-\cos x\Big|_0^\pi\right) = 2(1+1) = 4$$

(10) $$\int_{-\pi}^{\pi} x^8 \sin x\,dx = 0$$ (см. св-во 2.)

(11) $$\int_{-1}^{1} (x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + 1)\,dx = 2\int_0^1 (x^4 + x^2 + 1)\,dx = 2\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x\Big|_0^1\right) =$$

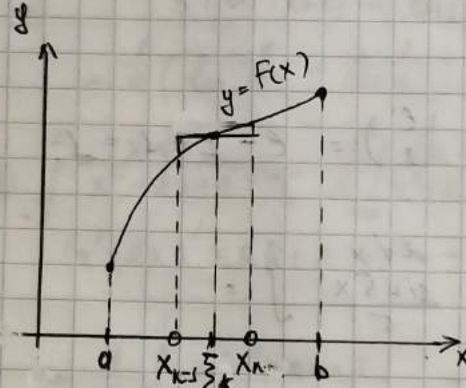
$=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}+2=\frac{46}{15}$

12) $\int\limits_0^{\pi}(x\cdot\sin x)^2\,dx=\int\limits_0^{\pi}x^2\cdot\sin^2 x\,dx=$

Определённый интеграл и его приложения.

§1. Понятие определённого интеграла.

1.1. Опр-е определённого интеграла через суммы Римана.



Пусть $f(x)$ ограниченная ф-я на $[a;b]$. Рас-м разбиение T отрезка $[a;b]$ на конечное число частей.

$T:\ a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b$

В каждом отрезке $[x_{k-1},x_k]$ $(k=\overline{1,n})$ (частичный отр.) выберем произвольную точку ξ_k и составим сумму, зависящую от разбиения T и выбора точек $\{\xi_k\}_{k=\overline{1,n}}$

Сумма произведений значения ф-и в точке ξ_k на длину соответств. частичного отрезка разбиения

$\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ – это интегральная сумма Римана для $f(x)$, составленная по данному разбиению T.

Обозначим через $\lambda=\max\limits_{k=\overline{1,n}}(x_k-x_{k-1})$ – мелкость разбиения T.

Опр. Если существует ($\exists$) конечный предел интегральных сумм при $\lambda\to0$, и этот предел не зависит ни от выбора разбиения, ни от выбора точек ξ_k внутри каждого частичного отрезка разбиения, то такой предел назыв-ся опр-ым интегралом Римана от функции $f(x)$ на $[a;b]$.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to0}\left(\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right)$$

$R[a,b]$ – класс ф-й, интегрируемых по Риману на $[a;b]$

1.2. Физический смысл опр. интеграла, задача о массе стержня.

а) Рассм. однородный стержень длины l, имеющий пост. лин. пл-ть ρ, масса стержня находится по ф-ле:

$$m = l \cdot \rho$$

б) Неоднородный стержень длины l (переменная пл-ть)

$\rho(x)$ – пл-ть стержня в точке $x \in [a, b]$

Разобьём отрезок $[a; b]$ на конечное число частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Обозначим m_k – масса стержня, соотв. частичному отрезку разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ $k = \overline{1,n}$.

$$\Rightarrow \quad m = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

Т.к. части достаточно маленькие, то $\rho(x)$ (в силу непрерывности) не сильно изменяется на $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$, поэтому, считаем на $[x_{k-1}, x_k]$ ф-ю $\rho(x)$ постоянной и равной значению в любой точке отрезка.

Выберем внутри $[x_{k-1}, x_k]$ точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Будем считать, что плотность стержня на $[x_{k-1}, x_k]$ постоянна и равна $\rho(\xi_k)$.

Тогда, $m_k \approx \rho(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$

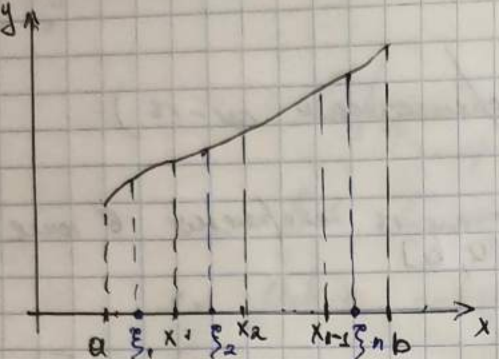
$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Если $\lambda \to 0$, то

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

1.3. Геометрический смысл определённого интеграла

Криволинейная трапеция – это фигура, огр. снизу осью Ox $(y=0)$, сверху графиком непрерывной неотр. функции $y=f(x)$



Пусть $y=f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ ф-я, $f(x)\geq 0$ $\forall x \in [a,b]$.

Рассм. произвольное разбиение $T[a,b]$ точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b$.

Выберем точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k=\overline{1,n}$ внутри каждого частичного отрезка разбиения

Произведение $f(\xi_k)\cdot(x_k-x_{k-1})$ геометрически является площадью прямоугольника с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ и высотой $f(\xi_k)$

$S=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ – площадь ступенчатой фигуры, составленной из таких прямоугольников.

При $\lambda\to 0$ $S\to$ к площади криволинейной трапеции:

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right)=S_{\text{крив. трапец.}}$$

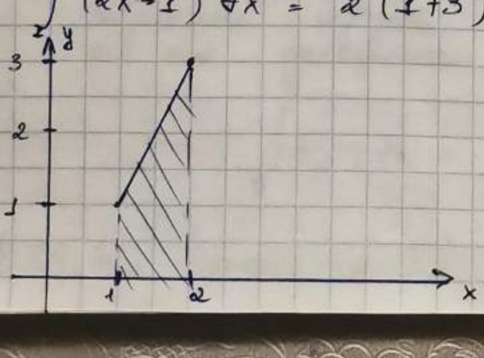
Геом. смысл. опред. интеграла.

Опред. интеграл от неотрицательной непрер. ф-и $f(x)$ на $[a,b]$ равен площади криволинейной трапеции, лежащей под графиком этой ф-и.

$$\boxed{S_{\text{кр.тр.}}=\int_a^b f(x)\,dx}$$

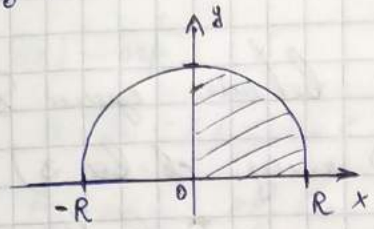
Пример 1.

$$\int_1^2 (2x-1)\,dx=\frac{1}{2}(1+3)\cdot 1=2$$



Пример 2

$$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4} S_{кр.} = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{4}$$



1.4. Суммы Дарбу. Второе определение интеграла Римана.

Пусть $y=f(x)$ ограничена на $[a;b]$

Рассм. $\tau: a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b$ - произвольное разбиение отр. $[a;b]$

Обозначим через $\tau[a;b]$ - множество всех разбиений $[a;b]$

т.к. $y=f(x)$ ограничена на $[a;b]$, то она ограничена на $[x_{k-1}, x_k]$, поэтому $\exists$ точн. верхняя и нижняя грани ф-и на этом отрезке:

$$M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \qquad m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

$$\overline{D}(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$ - верхняя интегральная сумма Дарбу.

$$\underline{D}(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$ - нижняя интегральная сумма Дарбу.

<u>Св-ва сумм Дарбу.</u>

1) Для одной и той же функции и конкретного разбиения

$$\overline{D}(f,\tau) \geq \underline{D}(f,\tau)$$

2) При измельчении разбиения (при добавлении новых точек к исходному разбиению), верхние суммы Дарбу для одной и той же функции не увеличиваются, а нижние не уменьшаются.

3) Для одной и той же ф-и и любых разбиений τ_1 и τ_2, верхняя сумма Дарбу соотв. разбиению τ_1 не меньше, чем нижняя сумма Дарбу, соотв. разб. τ_2:

$$\forall \tau_1, \tau_2 \in \tau[a;b] : \overline{D}(f, \tau_1) \geq \underline{D}(f, \tau_2)$$

~ без док-ва.)

Зафиксируем τ_0. Расс-м семейство всех верхних сумм Дарбу $\{\overline{D}(f, \tau) \mid \tau \in \tau[a, b]\}$. В силу св-ва 3)

$\forall \tau \in \tau[a, b] : \overline{D}(f, \tau) \geq \underline{D}(f, \tau_0)$, т.е. мн-во всех верхних сумм Дарбу ограничено снизу, поэтому $\exists$ конечная точная нижняя грань у этого мн-ва и эта величина наз-ся верхним интегралом Римана от $f(x)$ на $[a;b]$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\tau \in \tau[a,b]} \overline{D}(f, \tau)$$

Аналогично, $\exists$ конечная точная верхн. грань у мн-ва всех нижних сумм Дарбу и эта величина наз-ся нижним интегралом Римана от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\tau \in \tau[a,b]} \underline{D}(f, \tau)$$

Опр. ~ Если верхний интеграл равен нижнему, то ф-я $f(x)$ явл. интегрируемой по Риману на $[a, b]$ и интеграл Римана = любому из этих значений, т.е. из равенства

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{следует, что}$$

$f(x) \in R[a, b]$ и выполняется равенство

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx}$$

1.5. Классы интегрируемых функций.

Необходимое условие интегрируемости ~ ф-я должна быть ограниченной.

Пример ф-ии не интегрируемой по Риману на $[a; b]$

ф-я Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$f(x)$ - огр.

T: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$ - произв. разбиение

В силу св-ва всюду плотности мн-ва рац. чисел во мн-ве действ. чисел, в каждом частичном отрезке разбиения найдется рац-ое число, поэтому

$$\overline{D}(f, T) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) = b - a$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = b - a.$$

С друг. стороны:

$$\underline{D}(f, T) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = 0 \neq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

=> ф-я Дирихле не интегрируемая по Риману.

Теорема 1. (Достаточное усл-е интегрируемости)

~ Если ф-я непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема по Риману на $[a; b]$

~ без док-ва.

Теорема 2. (Достаточное условие интегрируемости.

~ Если $f(x)$ определена на $[a, b]$, и возрастает на этом отрезке, то $f(x)$ будет интегрируема по Риману на $[a; b]$

~ без док-ва.

Пример: $f(x) = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & \text{при } x \in [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Ф-я $f(x)$ опр-а и возрастает на $[0; 1]$

Тогда по теореме 2 $f(x)$ интегр. на $[0, 1)$, хотя имеет бесконечное число точек разрыва.

Критерий Лебега интегрируемости ф-ии по Риману

~ Ф-я интегрируема по Риману на $[a, b]$ тогда и только тогда ($\rightleftarrows$), когда мн-во её точек разрыва можно покрыть системой конечного или счётного числа интервалов, сумма длин которых меньше ε, где ε - сколь угодно малое число.

1.6. Св-ва определённого интеграла.

1. Если $f(x)$ интегр. на $[a; b]$, то $f(x)$ интегр на любом отрезке, лежащем в отр. $[a, b]$

2. Адитивность интеграла по мн-ву.

~ Если $f(x)$ интегр. на $[a; b]$ и $[b, c]$, то она интегр. на $[a; c]$.

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

3. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, k - произвольная константа, то ф-я $k \cdot f(x)$ также интегрируема на $[a, b]$

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

4. Аддитивность интеграла по ф-и.

Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то $f(x)+g(x)$ также интегр. на $[a, b]$ и при этом выполн. равенство

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

5. $\int_a^b \underbrace{1}_{f(x)} \cdot dx = b - a$

Интеграл от $f(x) = 1$ по $[a; b]$ равен длине отрезка

6.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(7) Если $f(x)$ интегр на $[a, b]$, то $|f(x)|$ также интегр. на $[a; b]$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(8) Если $f(x)$ интегр. на $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$, то её интеграл также неотрицателен.

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b],\ f \in R[a, b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

(9) Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x)$ не превосходит $g(x)$, то можно переходить к интегралу в неравенстве.

$$f, g \in R[a, b];\ f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a; b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(10) Оценка интеграла.

$$f \in R[a, b],\ m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

(11) <u>Теорема о среднем.</u>

Пусть $f \in R[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$

Тогда, $\exists\ \mu \in [m, M]$, такое что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

(12) <u>Обобщенная теорема о среднем.</u>

Пусть $f \cdot g \in R[a, b]$, $g \in R[a, b]$,

$m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a, b]$

Тогда, $\exists \mu \in [m, M]$, такое, что

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)\, dx.$$

В случае если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдётся точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx$$

Пример:

При расчёте нагрузки на опр-ый узел конструкции получили интеграл:

$$\int_{10}^{16} \frac{\sin x}{1 + x^8}\, dx \quad (\text{в тоннах})$$

Не вычисляя интеграл надо оценить нагрузку на узел.

$$|\sin x| \le 1 \quad \text{при} \quad 10 \le x \le 16.$$

$$\left| \frac{\sin x}{1 + x^8} \right| \le \frac{1}{1 + x^8} \le 10^{-8}$$

Тогда, по св. №7, №10

$$\left| \int_{10}^{16} \frac{\sin x}{1 + x^8}\, dx \right| \le \int_{10}^{16} \left| \frac{\sin x}{1 + x^8} \right| dx < 6 \cdot 10^{-8}$$

=> Нагрузка на узел не превосходит $6 \cdot 10^{-8}$ тонн или 0,06 грамма.

Значит, эта нагрузка незначительна и её можно не учитывать.

§2. Вычисление определённого интеграла.

2.1. Интеграл с переменным верхним пределом.

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$. Тогда по св-ву ① для $\forall x \in [a;b]$ ф-я $f(x)$ будет интегрируема на $[a;x]$.

Поэтому, определена ф-я $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ – интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема 1. ~ Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$. Тогда, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ будет непрерывной на $[a;b]$.

Док-во:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$ (надо док-ть!)

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

1) $\Delta x > 0$

$$\Delta F = \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

2) $\Delta x < 0$

$$\Delta F = \cancel{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt} - \cancel{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt} - \int_{x+\Delta x}^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

По теореме о среднем

$$\Delta F = \mu \cdot \Delta x$$

При $\Delta x \to 0$ $\quad \Delta F \to 0$ ч.т.д.

Теорема 2. ~ Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ будет дифференцируема на (a,b), причём $F'(x) = f(x)$

Т.е. интеграл с переменным верхним пределом явл. первообразной для подынтегральной ф-и, в случае, если она непрерывна.

Док-во: Зафиксируем (.) $x \in (a; b)$. Покажем, что в этой точке $\exists$ конечная производная.

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

Также, как в теореме 1

$$\Delta F = \int_x^{x+\Delta x} f(t) \cdot dt$$

Отсюда, по теореме о среднем в одном непр. ф-ии, получаем

$$\Delta F = f(\xi) \cdot \Delta x,$$ где ξ явл. промежуточной точкой между x и $x+\Delta x$.

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi) \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ $\xi \to 0$, а ф-я $f(x)$ непрерывна в точке ξ, то $f(\xi) \to f(x)$ и справедлива ф-ла

$$F'(x) = f(x),$$ ч.т.д.

Теорема 3. (Формула Ньютона - Лейбница.)

~ Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. $F(x)$ - одна из первообразных ф-ии $f(x)$, тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(t)\Big|_a^b$$

Док-во: Из теоремы 2 следует, что интеграл с перем. верхним пределом явл-ся первообразной для $f(x)$.

Т.к. $F(x)$ также является первообразной, то

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = C \quad ☆$$

Пусть $x = a$

$$\int_a^a f(t)\,dt - F(a) = C. \rightarrow C = -F(a)$$ подставим в ☆

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

Пусть $x = b$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

2.2. Правило интегрирования по частям в определённом интеграле.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a;b]$.

Тогда, $\int_a^b u(x)\, dv(x) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\, d(u(x))$

Пример 1.

$\int_0^{\pi} x\cos x \cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ \cos x\, dx = dv & \Rightarrow v = \sin x \end{matrix}\right\} = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, dx =$

$= \cos x\Big|_0^{\pi} = -2$

Пример 2.

Вывести рекуррентную формулу для

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx \quad (n = 0, 1, 2\ldots)$

Решение:

Обозначим $u = (\cos x)^{n-1}$; $du = (n-1)\cdot\cos^{n-2}x \cdot \sin x\, dx$

$dv = \cos x \cdot dx \to v = \sin x$

$I_n = \underbrace{(\cos x)^{n-1}\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-2}\cdot\sin^2 x\, dx =$

$= (n-1)\Big(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos)^{n-2} dx}_{I_{n-2}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx}_{I_n}\Big)$

~~$I_n + I_n \cdot n + I_n = (n-1) I_{n-2}$~~

$I_n = (n-1)\cdot I_{n-2} - (n-1) I_n$.

$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$; $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Пример 3.

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2k+1} dx$ ② $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2k} dx$

① $I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} = \ldots =$

$= \frac{2k(2k-2)\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 5\cdot 3} I_1 \quad ⊜$

$I_1 = 1$

$= \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$

② Самостоятельно $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2k} dx = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

2.3. Замена переменной в определённом интеграле.

Пусть $f(t)$ определена и непрерывна на $[A, B]$.
Ф-я $g(x)$ опр-а и непрерывна вместе со своей производной на $[a, b]$, причём

$$A \le g(x) \le B, \quad g(a) = A, \quad g(b) = B$$

Тогда, $\boxed{\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int_A^B f(t)\, dt, \quad \text{где} \quad t = g(x)}$

Пример 1:

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx =$$

1 способ.

$$= \int_1^{\sqrt{3}} x^{-2} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\left(\int x^m (a+bx^n)^p dx; \quad m = -2, \ n = 2, \ p = \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{m+1}{n} + p = 0 \in \mathbb{Z}$$

$$t = \sqrt{x^{-2}+1} = \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

т.к. $x \in [1, \sqrt{3}]$, то $|x| = x$ $\longrightarrow$

$x^2 = \frac{1}{t^2-1}$; $\sqrt{x^2+1} = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$

$$dx = \frac{-t\,dt}{\sqrt{(t^2-1)^3}}$$

$t = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ При $x=1$ $t=\sqrt{2}$

При $x=\sqrt{3}$ $t=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,(t^2-1)\cdot\frac{(-t)}{\sqrt{(t^2-1)^3}}\,dt = -\int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\frac{t^2}{t^2-1}\,dt = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= \left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right| =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}$$

2-й способ:

$x = \operatorname{tg}\varphi$ $\qquad dx = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$

$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos\varphi}$

Если $x=1$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$

$x=\sqrt{3}$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi\,\operatorname{tg}^2\varphi} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi} = \left\{\begin{array}{l} t=\sin\varphi \\ dt=\cos\varphi\,d\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}\varphi=\frac{\pi}{4}\to t=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \varphi=\frac{\pi}{3}\to t=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}$$

$$I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{(1-t^2)\,t^2} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{(1-t^2+t^2)\,dt}{(1+t^2)\,t^2} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{t^2} + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{1}{t}\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}$$

Замечание (отличие замены переменной в опр. интеграле от замены переменной в неопр. интеграле).

① Нужно пересчитывать пределы интегр.

② Не нужно возвращаться к старой переменной.

Пример - 2.

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\to I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{cases} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) =$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t} = -\frac{\pi}{2}$$

→ Противоречит условию теоремы

$-1 \leq x \leq 1$ $\quad t \leq -1, t \geq 1$

а надо

$-1 \leq t \leq 1$

2.4. Несобственный интеграл.

I. Несобственный интеграл первого рода - это интеграл по неограниченному промежутку.

Пусть $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b]$ и при $\forall b \geq a$.

Несобств. интегралом от $f(x)$ по лучу $[a; +\infty)$ назыв. предел от опред. интегр.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если lim $\exists$ и конечен, то говорят, что несобств. интегр. сх-ся.

Если $\lim = \infty$ или $\nexists$, то говорят, что несобств. интеграл расходится.

Пример 1.

Исслед. на сходимость в зависимости от p.

$$I_p = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

$p = 1$

$$I_1 = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \ln b = +\infty$$

=> интегр. расх.

$p \neq 1$.

$$I_p = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{b^{1-p} - 1}{1-p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p > 1 \\ +\infty, & p < 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится при } p > 1 \text{ и расходится при } p \le 1.}$$

Пример 2.

$$\int_1^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \cos x\,dx = \lim_{b \to +\infty} (\sin b - \sin 1.)$$

Несобственный интеграл второго рода.

Пусть задан отрезок $[a, b]$ и функция $f(x)$, такая что $\forall \varepsilon > 0$ (достаточно малого) ф-я $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a+\varepsilon, b]$, и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$

Тогда несобств. $\int$-л второго рода определяется по ф-ле.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Пример 3.

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{t^p}$$

Если $p \le 0$, $\frac{1}{t^p}$ ограничена, $\int$-л принимает конечное значение.

$p > 0$ $f(t) = \frac{1}{t^p}$ имеет особенность в точке $t = 0$

$$\lim_{t \to +0} f(t) = +\infty$$

Замена: $x = \frac{1}{t}$ $dt = -\frac{dx}{x^2}$

$$I = -\int_\infty^1 x^p \frac{dx}{x^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-p}}$$ – свелся к несобств. интегралу I рода.

I сх-ся при $\alpha - p > 1$
$p < 1$.

I расх-ся при $p \geq 1$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{t^p} \text{ сходится при } p<1 \text{ и расходится при } p \geq 1.}$$

§3. Применения определённого интеграла.

Общая схема применений опр-ого интеграла.

Пусть A – физическая или геометрическая величина. Нужно найти значение A на $[a; b]$

Пусть A – непрерывная и аддитивная, т.е.

$$[a, b] = [a, c] \cup [c, b], \text{ то}$$

$$A_{[a; b]} = A_{[a, c]} + A_{[c, b]}$$

1) Разбиваем $[a; b]$ на n частей

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

2) Пусть $\exists$ непр. ф-я $f(x)$ такая, что значение A на каждом частичном отрезке разбиения представимо в виде:

$$A_k = A_{[x_{k-1}, x_k]} \approx f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \text{ где}$$

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

3) $$A = \sum_{k=1}^{n} A_k \approx \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}_{\text{интегр. сумма Римана для ф-ии } f(x)}$$

4) $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}} (x_k - x_{k-1}) \to 0$, то

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

Более кратко:

$$\Delta A \approx f(x) \cdot \Delta x$$

$$dA = f(x) \cdot dx$$

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

3.1. Длина дуги

Пусть кривая γ задана уравнением

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

Разобьём $[a, b]$ на конечное число частей точками τ:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < \ldots < t_n = b$$

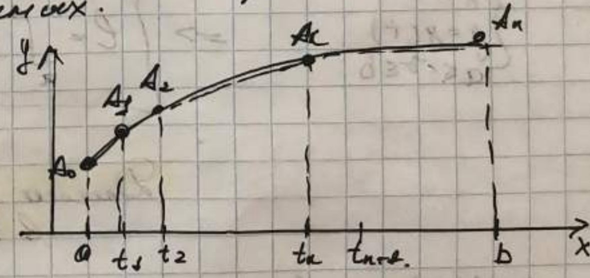
Значению t_k на кривой соотв. точка A_k.

Таким образом, каждое разбиение τ отрезка задаёт ломаную $A_0 A_1 \ldots A_n$, впис. в данную кривую.

$L(\tau)$ – длина вписанной ломаной.

Тогда, по опр-ю длина кривой – это точная верхняя грань длин всевозможных вписанных в кривую ломаных.

$$\ell(\gamma) = \sup_{\tau \in \tau[a,b]} L(\tau)$$



Вычисление длины дуги:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [a; b]$$

Обозначим через $\ell(t)$ переменную длину дуги на $[a; t)$

Известна ф-ла для дифференц. длины дуги

$$d\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

$$\boxed{l=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\cdot dt}$$

Пример.

Найти длину дуги арки циклоиды

Циклоида – траектория фиксированной точки, находящейся на ободе колеса, катящегося без проскальзывания

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

$$0\le t\le 2\pi$$

$$x'(t)=a(1-\cos t)$$
$$y'(t)=a\sin t$$

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)}=$$
$$=\sqrt{2a^2(1-\cos t)}=2\sqrt{a^2\sin^2\frac{t}{2}}=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|=2a\sin\frac{t}{2}$$

$$l=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=4a+4a=8a$$

Длина дуги плоской кривой, заданной явно.

$y=y(x) \qquad a\le x\le b$

$$\begin{cases} x=t\\ y=y(t)\\ a\le t\le b\end{cases} \Rightarrow \boxed{l=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}$$

Длина дуги кривой, заданной в полярных коорд.

$\rho=\rho(\varphi) \qquad (r=r(\varphi))$

φ – параметр, $\alpha\le\varphi\le\beta$

$x=\rho\cos\varphi=\rho(\varphi)\cdot\cos\varphi$

$y=\rho\sin\varphi=\rho(\varphi)\sin\varphi$

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

$$x'(\varphi)=\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi$$
$$y'(\varphi)=\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi.$$

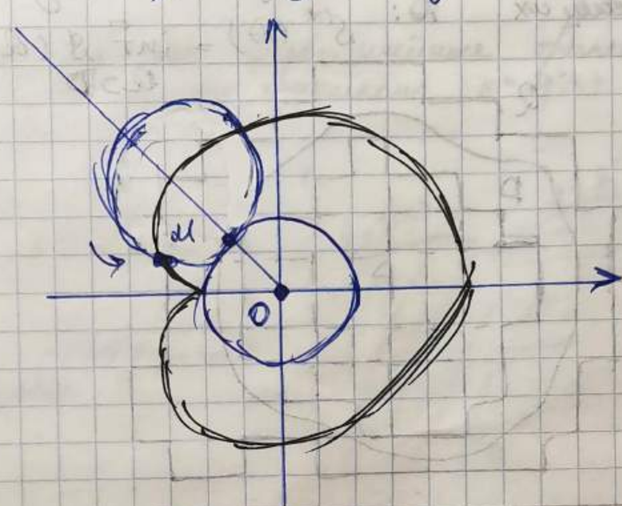
$$(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (\rho')^2 + \rho^2$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2}\, d\varphi$$

Пример:

Пусть по внешней части колеса радиуса R движется колесо меньшего радиуса a.

Точка, зафиксированная на ободе колеса меньшего радиуса, будет описывать линию, называемую эпициклоидой.



Если $R = a$.

$$\rho = a(1 + \cos\varphi)$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2}\, d\varphi =$$

$=$

$$\rho' = a(-\sin\varphi)$$

$$(\rho')^2 + \rho^2 = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

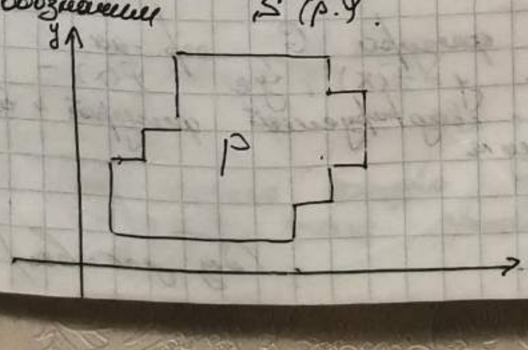
$$= \quad l = 2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 2 \cdot 4a = 8a$$

3.2. Площадь плоской фигуры.

Понятие площади плоской фигуры.

1) Площадь элементарной плоской фигуры.

Назовём плоскую фигуру элементарной, если она является объединением конечного числа квадратов со сторонами парал. осям коорд. Площадь элементарной фигуры P обозначим $S(P)$.



$\forall$ прямоуг. явл. объединением конечного числа квадратов, то в определении элем. фигуры можно вместо квадратов брать прямоугольники.

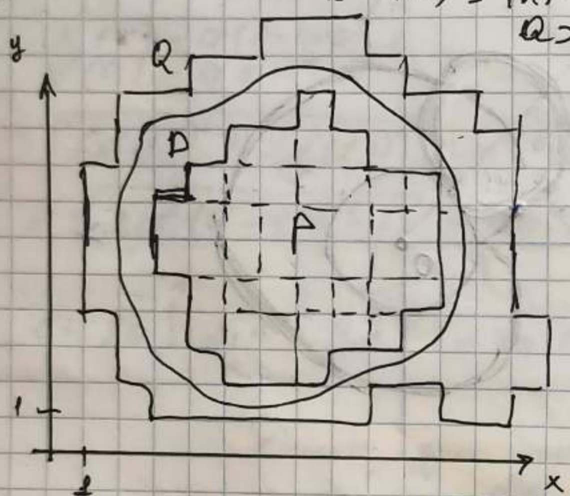
д) Площадь произвольной плоской фигуры.

Пусть D – произвольная плоская ф-и.

Нижней площадью фигуры D будем называть точную верхнюю грань площадей элемент. фигур, лежащих в D:

$$S_*(D) = \sup_{P \subset D} S(P)$$

Верхней площадью фигуры D будем называть точную нижнюю грань площадей всевозможных элемент. фигур, содержащих D: $S^*(D) = \inf_{Q \supset D} S(Q)$



Опр. Если нижняя и верхняя площади совпадают, то фигура называется квадрируемой, а их общее значение называется площадью.

Теорема. (критерий квадрируемости) – без док-ва.

~ Плоская фигура D квадрируема тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ найдутся ($\exists$) многоуг-ки P_ε и Q_ε такие, что $P_\varepsilon \subset D \subset Q_\varepsilon$

и $S_{Q_\varepsilon} - S_{P_\varepsilon} < \varepsilon$

Теорема.

~ Криволинейная трапеция, т.е. фигура G, огр.-ая линиями $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная на $[a;b]$ явл. квадрируемой фигурой и её площадь находится по формуле

$$S_{кр.тр.} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(без док-ва)

Вычисление площадей плоских фигур.

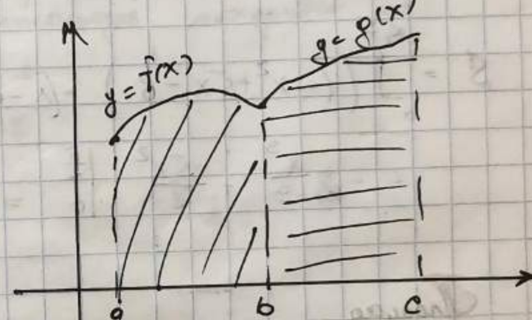
Площадь плоской фигуры в декартовых координатах.

① Пусть плоская фигура представляет собой криволинейную трапецию. (т.е. фигуру, огр. линиями $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, где $f(x)$ непр. на $[a,b]$ и $f(x)\geq 0$.)

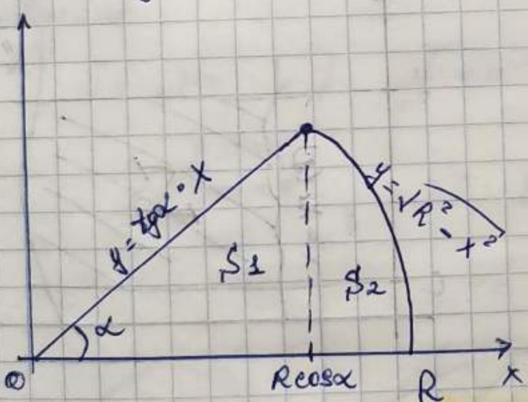
$$S_{\text{кр.трап.}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

② Пусть фигуру можно разбить на две криволинейные трапеции: под графиком $y=f(x)$ на $[a;b]$ и под графиком $y=g(x)$ на $[b,c]$. Тогда,

$$S = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c g(x)\,dx$$



Пример. Вычислить площадь сектора с углом α и радиусом R.



$$S_{\text{сект.}} = S_1 + S_2.$$

$$S_1 = \int_0^{R\cos\alpha} x\,tg\alpha\,dx = tg\alpha\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{R\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cdot R^2\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot 2} = \frac{R^2}{4}\sin 2\alpha$$

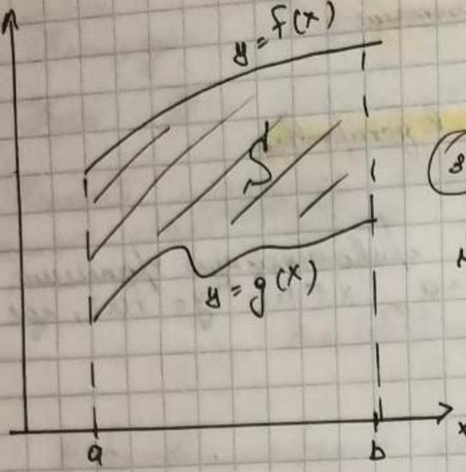
$$S_2 = \int_{R\cos\alpha}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} x = R\cos t & \\ dx = -R\sin t\,dt & \\ x = R\cos\alpha & t=\alpha \\ x = R & t = 0 \end{array}\right\}$$

$$= -R^2\int_\alpha^0 \sin^2 t\,dt = -R^2\int_\alpha^0 \sin^2 t\,dt = R^2\int_0^\alpha \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^\alpha = \frac{R^2}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) = \frac{R^2\alpha}{2} - \frac{R^2}{4}\sin 2\alpha$$

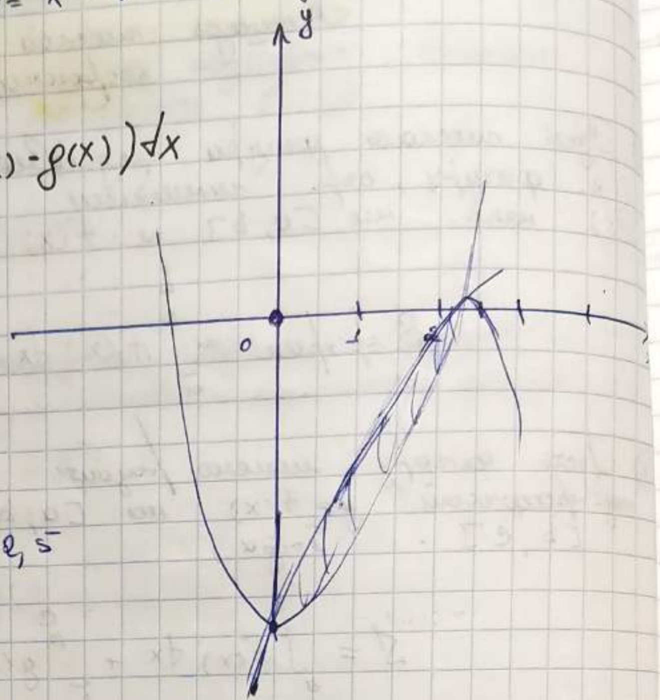
$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}R^2\alpha$$

③ Пусть плоская фигура ограничена: сверху – графиком ф-ии $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$, снизу – графиком ф-ии $y=g(x)$, $a\leq x\leq b$, $x=a$, $x=b$.



Пример: Найти S фигуры огр. линиями $y = x^2 - 6$ и $y = -x^2 + 5x - 6$

(3.1) $$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



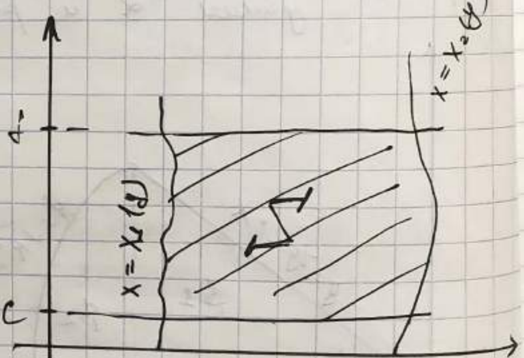
$$\begin{cases} y = x^2 - 6 \\ y = -x^2 + 5x - 6 \end{cases}$$

$\cancel{x^2 - 6} = -x^2 + 5x \cancel{- 6}$

$x = 0$ и $x = 2{,}5$

$$S = \int_0^{2{,}5} \left((-x^2 + 5x - 6) - (x^2 - 6) \right) dx =$$

$$= -2\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \Big|_0^{\frac{5}{2}} = 5\frac{5}{24}$$



(3.2) $$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy$$

Площадь фигуры под графиком параметрически заданной функции.

$$y(x): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

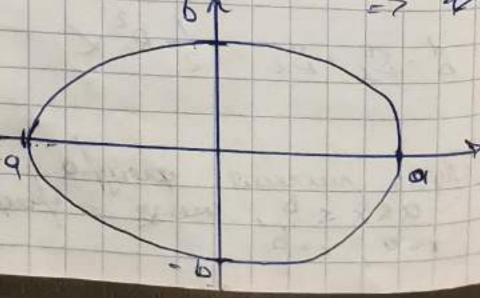
$$S_{\text{кр. трап.}} = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt.$$

Пример: Вычислить S эллипса.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$0 \le x \le a$

$\Rightarrow$



$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab\sin t\,(-\sin t\,dt) = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{4ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

Площадь плоской фигуры в полярных координатах.

Опр. - Криволинейный сектор - это фигура, огранич. в полярных коорд.-х лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и графиком ф-ии $\rho = \rho(\varphi)$

Теорема. ~ Если $\rho(\varphi)$ - непрерывна то криволинейный сектор - квадрируемая фигура и его площадь находится по формуле

$$S_{кр.сект} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

~ без док-ва.

Пример.

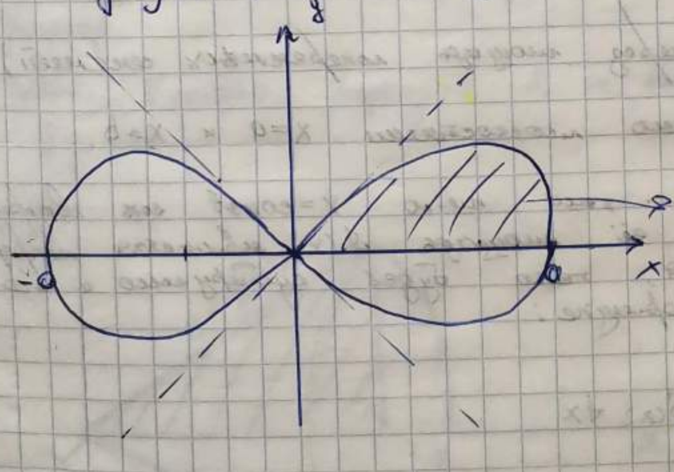
S фигуры, огр. ур-ем $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$ $\Rightarrow$ $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ - лемниската Бернулли

$\cos 2\varphi \geq 0$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$
$n \in Z$



$$S' = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad S = 4S' = a^2$$

23. Вычисление объёмов тел.

Телом называется часть пространства, замкнутой несамопересекающейся поверхностью.

Пусть F - некоторое тело в пространстве.
Его нижний объём $V_*(F) = \sup\limits_{G \subset F} V_G$, где

$\{G\}_{G \subset F}$ - мн-во всех многогранников, лежащих внутри F.

Верхний объём $V^*(F) = \inf\limits_{F \subset R} V_R$, где $\{R\}_{F \subset R}$ - мн-во всех многогранников, содерж. в себе F.

<u>Опр.</u> Тело F кубируемо, если $V_*(F) = V^*(F)$, тогда

$$V_F = V_*(F) = V^*(F)$$

<u>Критерий кубируемости:</u>

~ Тело F кубируемо тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon$ найдутся многогранники G_ε и R_ε, такие что $G_\varepsilon \subset F \subset R_\varepsilon$ и

$$V_{R_\varepsilon} - V_{G_\varepsilon} < \varepsilon$$

(без док-ва)

<u>Теорема</u> (вычисл. объёма через площадь поперечных сечений).

~ Пусть тело ограничено плоскостями $x = a$ и $x = b$.

Пусть каждое сечение тела пл-ю $x = const$ есть квадрируемая фигура $D(x)$, причём её площадь $S(x)$ является непрерывной ф-ей на $[a, b]$. Тогда, тело будет кубируемо и его объём вычисл. по формуле:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

<u>Пример:</u>

Найти объём эллипсоида.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$x = const.$ $\Rightarrow$ $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{a^2 - x^2}{a^2}$

$$\underbrace{\frac{y^2}{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}}_{A} + \underbrace{\frac{z^2}{\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}}_{B} = 1$$

$$S(x) = \pi \cdot \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \cdot \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$V = \frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi abc$$

$$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Объём тела вращения

Рассм. тело, кот. получается при вращении крив. трапеции, огранич. сверху графиком функции $y = f(x)$ $a \le x \le b$ вокруг оси OX.

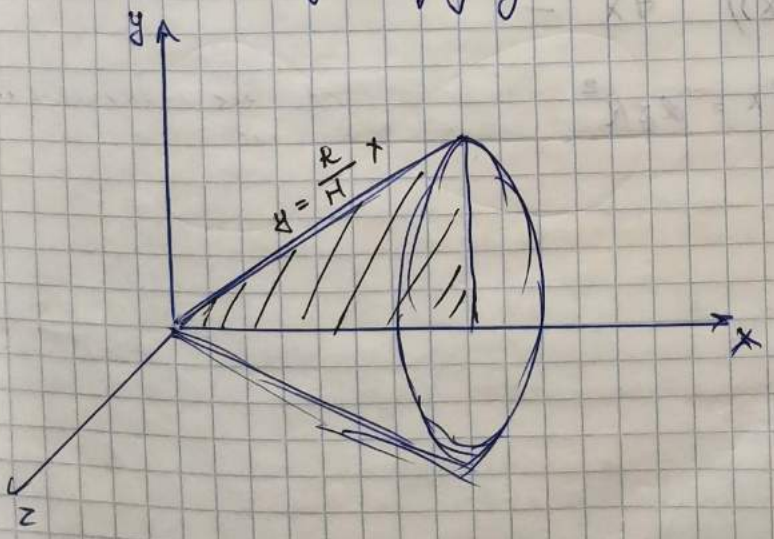
$x = const$, круг, $R = f(x)$

$$S(x) = \pi R^2 = \pi f^2(x)$$

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$ – объём тела вращения вокруг оси OX.

Пример.

Найти V конуса радиуса R и высоты H.



$$V = \pi\int_0^H \left(\frac{R}{H}\right)^2 \cdot x^2\,dx = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

В случае параметрического задания $y(x)$: $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$

$t_1 \le t \le t_2$.

$$V = \pi\int_{t_1}^{t_2}(y(t))^2 \cdot x'(t)\,dt$$

3.4. Вычисление площади поверхности тела вращения

1) Если кривая задана явно

$$P = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$ – площадь поверхн. вращения кривой заданной явно ур-ем $y = y(x)$, $a \le x \le b$.

2) $y(x) = \begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$ $\quad t_1 \le t \le t_2$

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

3) $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \sin\varphi \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

Пример:

Найти площадь шара радиуса R

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $\qquad -R \le x \le R$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$$

$$P = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx -$$

$$P_1 = 2\pi \int_0^R \frac{\sqrt{R^2 - x^2}\, R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi R^2$$

$$P_{шара} = 2P_1 = 4\pi R^2$$