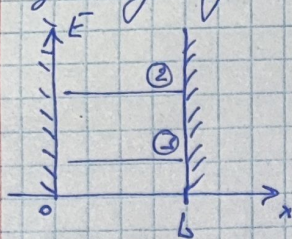


Задача 1-2

№1. Для идеального кб. ямы, удерж. электр. в электрог. б. электр. потенциал. Включить электр. потенциал электр. б. электр. для электр. с 1 на 2 уровня.



$$H\psi = E\psi$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) = E\psi(x) \quad ; \quad \kappa = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi'' + \kappa^2 \psi = 0$$

$$\psi(x) = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x$$

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

$$\psi(0) = C_1 = 0$$

$$\Rightarrow \psi(x) = C_2 \sin \kappa x$$

из нормировки.

$$\psi(L) = \sin \kappa L = 0 \Rightarrow \kappa L = \pi n$$

$$\Rightarrow \kappa L = \pi n$$

$$\kappa = \frac{\pi n}{L}$$

$$\Rightarrow \psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

$$\kappa^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}$$

По пр. выбора для электр. б. электр. Δn - любое

$$\Delta L = \pm 1$$

$$\Delta m = 0, \pm 1$$

$$\Delta m_s = 0$$

} ах не.

Так все равно $\int \psi_{mn} \neq 0$:

$$\Rightarrow \int_{mn} = \tilde{e} \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right) \times \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx =$$

$$= \tilde{e} \cdot \frac{2}{L} \int_0^L x \cdot \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{\tilde{e}}{L} \int_0^L x \cdot \left(\cos\left[\frac{\pi x}{L}(m-n)\right] - \cos\left[\frac{\pi x}{L}(m+n)\right] \right) dx =$$

$$= \frac{\tilde{e}}{L} \left(\int_0^L x \cdot \cos\left[\frac{\pi x}{L}(m-n)\right] dx - \int_0^L x \cdot \cos\left[\frac{\pi x}{L}(m+n)\right] dx \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{но не нулю} \\ \text{ма д е ф} \end{array} \right.$$

$$\int_0^L x \cdot \cos\left[\frac{\pi x}{L}(m-n)\right] dx \rightarrow v = \sin\left[\frac{\pi x}{L}(m-n)\right] \cdot x \cdot \frac{L}{\pi(m-n)}$$

$$= \frac{\tilde{e}}{L} \left(\frac{L x}{\pi(m-n)} \sin\left[\frac{\pi x}{L}(m-n)\right] \Big|_0^L - \int_0^L \frac{L}{\pi(m-n)} \sin\left[\frac{\pi x}{L}(m-n)\right] x dx - \right.$$

$$\left. - \frac{L x}{\pi(m+n)} \sin\left[\frac{\pi x}{L}(m+n)\right] \Big|_0^L + \int_0^L \frac{L}{\pi(m+n)} \sin\left[\frac{\pi x}{L}(m+n)\right] x dx \right) =$$

$$= \frac{\tilde{e}}{L} \left(\frac{L^2}{\pi^2(m-n)^2} \cos\left[\frac{\pi x}{L}(m-n)\right] x \Big|_0^L - \frac{L^2}{\pi^2(m+n)^2} \cos\left[\frac{\pi x}{L}(m+n)\right] x \Big|_0^L \right) =$$

$$= \frac{\tilde{e}}{L} \frac{L^2}{\pi^2}$$

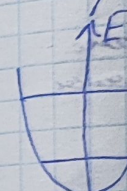
$$m = 2$$

$$\frac{\tilde{e} L}{\pi^2} \cdot \frac{1}{L}$$

$$= \frac{\tilde{e} L}{\pi^2}$$

(3)

№2. Проб



об-ва

№3

3p

Canva

q/n

R3

R1

Замечание

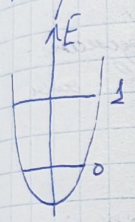
$$= \frac{\tilde{e} \hbar^2}{2} \left\{ \frac{1}{(m-n)^2} (\cos \pi(m-n) - 1) - \frac{1}{(m+n)^2} (\cos \pi(m+n) - 1) \right\}$$

$$\begin{aligned} m=3, n=1 \\ 3-1=2 \\ 3+1=4 \\ m=4, n=1 \end{aligned} \rightarrow \langle \delta_1 = 0$$

$$m=2, n=1$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{e} \hbar^2}{2} \left\{ \frac{1}{1} (-1-1) - \frac{1}{9} (-1-1) \right\} = \\ = \frac{\tilde{e} \hbar^2}{2} \left\{ -2 + \frac{2}{9} \right\} = -\frac{\tilde{e} \hbar^2}{2} \cdot \frac{16}{9} \end{aligned}$$

(3) Извлечь одфа для гармон. осциллятора



$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right); \quad \hat{V} = -(\vec{J}, \vec{E}_0) = -\tilde{e} E_0 \hat{x}$$

Формально надо: $X_{nm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \cdot x \cdot \psi_m(x) dx \rightarrow$ на практике

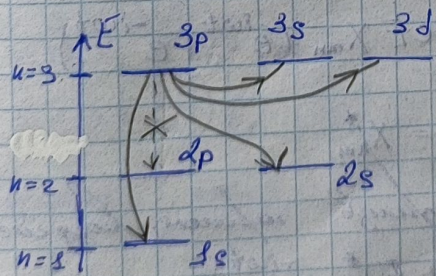
В-во понижения Уолленба-Зимана:

$$X_{mn} = X_0 \left(\sqrt{\frac{n}{2}} \delta_{m,n-1} + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \delta_{m,n+1} \right) \text{ где } X_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega}}$$

$$\Rightarrow \int_{m=n-1}^{m=n+1} \Rightarrow \Delta n = \pm 1$$

возможны переходы только на соседние уровни.

н3
3p → l=1



$$\psi_{3p} = \begin{cases} l=1 \\ m=0, \pm 1 \end{cases} = C_1 \psi_{311} + C_2 \psi_{310} + C_3 \psi_{31-1}$$

Самый большой по частоте: 3p → 1s.

$$\psi_{10} = \psi_{100}(r, \theta, \varphi) = R_{10}(r) \cdot Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}a_0^3} \cdot \frac{r}{a_0} \left(1 - \frac{r}{6a_0} \right) \cdot \exp \left\{ -\frac{r}{3a_0} \right\}$$

$$\text{где } a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}$$

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

(1) нч. Обработать приближенно теорию возмущения в атом в первом приближении его λ -м на частоте $\lambda = 121 \text{ нм}$ с точн. 10^{-3}

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \psi(\vec{r}, t) \quad \text{г.д.} \quad \hat{V} \rightarrow \text{вклад} \ll \hat{H}_0$$

$$\lambda = 121 \text{ нм.} \Rightarrow \text{переход } 2p \rightarrow 1s. \quad V_{mn} < M_{mn}^{(0)}$$

$$\text{м.д. } |\Delta E| = |E_1 - E_2| \gg |V_{21}|$$

$$E_2 - E_1 = \hbar \omega = \frac{\hbar c}{\lambda} \approx \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{121 \cdot 10^{-9}} \approx 0,16 \cdot 10^{-17} \approx 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$$

$$V_{12} = -(\hat{d}_{12}, \vec{E}) \approx +\vec{e} \cdot \vec{r}_{12} \cdot E \sim \vec{e} \cdot \vec{r}_{12} \cdot \sqrt{\frac{8\pi I}{c}} \approx 10^{-22}$$

$$\frac{|\vec{E}|^2}{8\pi} = \frac{I}{c} \Rightarrow E = \sqrt{\frac{8\pi I}{c}} \approx 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \sqrt{\frac{8\pi \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 10^{10}}}$$

$$\text{или } \hbar \omega_p = \frac{d_{12} E}{\hbar} \ll \frac{\hbar \omega}{\lambda}$$

нв. Для двух уровней системы рассмотреть возм-ть вероятности перехода с ниж. уровня в верхний под действием внешнего переменного электр. поля на частоте $\omega = \omega_{12} + \delta\omega$

Э-е Шредингера в представлении возмущ-я:

$$i\hbar \dot{C}_m = \sum_n V_{mn} C_n e^{i\omega_{mn}t} \quad \text{где} \quad \omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$$

Рассеяние монохром. возм-я:

$$V = \vec{e} \cdot \vec{r} E \cos \omega t$$

$$V_{mn} = eE X_{mn} \cos \omega t = \frac{1}{2} eE X_{mn} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$\text{где } X_{mn} = \int \psi_m^* \hat{x} \psi_n dV = X_{nm}^*$$

Более общий случай произв. гармон. возмущения

$$V_{mn} = (F_{mn} e^{-i\omega t} + F_{nm}^* e^{i\omega t})$$

$$\Rightarrow i\hbar \dot{C}^{(1)} = F_{mn} e^{i(\omega_{12}-\omega)t} + F_{nm}^* e^{i(\omega_{12}+\omega)t}$$

$$\Rightarrow C_{12}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{F_{12} e^{i(\omega_{12}-\omega)t}}{i(\omega_{12}-\omega)} + \frac{F_{21}^* e^{i(\omega_{12}+\omega)t}}{i(\omega_{12}+\omega)} \right]$$

не резонансное возм-е

Пусть на атом возм. поле близко к резонансу:

$$\omega \approx \omega_{12} + \delta\omega$$

из уравнения:

$$i\hbar \dot{c}_2 = c_1 (F_{21} e^{-i\omega t} + F_{12}^* e^{i\omega t}) \cdot e^{i\omega_{12}t}$$

$$i\hbar \dot{c}_1 = c_2 (F_{12} e^{+i\omega t} + F_{21}^* e^{-i\omega t}) \cdot e^{i\omega_{21}t}$$

$\omega = \omega_{12} + \delta\omega$

→ перенос →

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar \dot{c}_2 = c_1 \cdot e^{-i\delta\omega t} \cdot F_{21} \\ i\hbar \dot{c}_1 = c_2 \cdot F_{21}^* \cdot e^{i\delta\omega t} \end{cases}$$

Введем новые переменные: $c_2 = b_2 e^{-i\delta\omega t/2}$; $c_1 = b_1 e^{i\delta\omega t/2}$

$$\Rightarrow i\hbar (b_2 - i \frac{\delta\omega}{2} b_2) = F_{21} b_1 (i\hbar b_1 + i \frac{\delta\omega}{2} b_1) = F_{12}^* b_2$$

$$\begin{cases} b_2(t) \\ b_1(t) \end{cases} = \begin{cases} b_2 \\ b_1 \end{cases} e^{-i\delta\omega t/2} \rightarrow \text{приведем}$$

$$i\hbar (-i\delta\omega - i \frac{\delta\omega}{2}) b_2 = F_{21} b_1$$

$$i\hbar (-i\delta\omega + i \frac{\delta\omega}{2}) b_1 = F_{21}^* b_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hbar(\delta\omega + \frac{\delta\omega}{2}) b_2 = F_{21} b_1 \\ \hbar(\delta\omega - \frac{\delta\omega}{2}) b_1 = F_{21}^* b_2 \end{cases}$$

Найдем решение коэф.: $\hbar^2(\delta\omega^2 - \frac{\delta\omega^2}{4}) = |F_{21}|^2$

$$\Rightarrow \delta\omega^2 = \frac{\delta\omega^2}{4} + \frac{|F_{21}|^2}{\hbar^2}$$

частота Рамзи

Решение СЛАУ: $\begin{cases} b_2(t) \\ b_1(t) \end{cases} = c_1 \begin{cases} b_2^{(1)} \\ b_1^{(1)} \end{cases} e^{-i\delta\omega t/2} + c_2 \begin{cases} b_2^{(2)} \\ b_1^{(2)} \end{cases} e^{i\delta\omega t/2}$

$$b_2^{(1,2)} = F_{21} \quad ; \quad b_1^{(1,2)} = \hbar(\pm\delta\omega + \frac{\delta\omega}{2})$$

Другое решение: $\begin{cases} b_2(t) \\ b_1(t) \end{cases} = c_1 \begin{cases} F_{21} \\ \hbar(\delta\omega + \frac{\delta\omega}{2}) \end{cases} e^{-i\delta\omega t/2} + c_2 \begin{cases} F_{21} \\ \hbar(-\delta\omega + \frac{\delta\omega}{2}) \end{cases} e^{i\delta\omega t/2}$

$b_2(t=0) = 0$ $b_1(t=0) = 1$

Из этих двух в 4-е состоянии: $\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2\hbar\delta\omega}$

NS. Вывести формулу Рэби для осцил. при слабом резонансе
 (2) для перехода с 1 на 2 энерг. уровни атома в поле СВ-волн.
 Ширина линии 10 нм, $I = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$

$$\Delta\omega^2 = (\Delta\omega)^2 + \left(\frac{W_{mk}}{\hbar}\right)^2$$

$\stackrel{=0}{\Delta\omega}$

Св. вол. $\rightarrow d_{12} = -\frac{\tilde{e}L}{8\pi^2} \cdot \frac{16}{9}$

$$V_{12} = d_{12} \cdot E_0 = -\frac{16\tilde{e}L}{9\pi^2} E_0$$

$$\frac{|E_0|^2}{8\pi} = \frac{I}{c} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{8\pi I}{c}}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \left| \frac{W_{mk}}{\hbar} \right| = \frac{16\tilde{e}L}{9\pi^2\hbar} \sqrt{\frac{8\pi I}{c}}$$

Уширение спектр. линии.

14. Известно, что функция амплитуды $\tilde{E}$ в возд. среде ϵ . Подумать график для спектр. функции линии.

$$f(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow \text{Фурье}$$

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} A_0 e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = A_0 \int_0^{\infty} e^{t(i\omega_0 - i\omega - \frac{1}{\tau})} dt = A_0 \int_0^{\infty} e^{t(i(\omega_0 - \omega) - \frac{1}{\tau})} dt$$

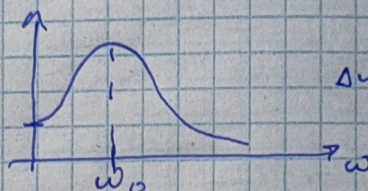
$$= \frac{A_0}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{1}{\tau}} = \frac{A_0 \tau}{1 + i\tau(\omega - \omega_0)}$$

$$|S(\omega)| = \frac{A_0 \tau}{\sqrt{1 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2}}$$

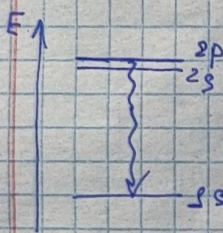
Интенсивный спектр:

$$S(\omega) \cdot S^*(\omega) = \frac{A_0^2 \tau^2}{1 + i\tau(\omega - \omega_0)} \cdot \frac{A_0^2 \tau^2}{1 - i\tau(\omega - \omega_0)} = \frac{A_0^2 \tau^2}{1 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2}$$

$$= \frac{A_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{1}{\tau})^2}$$



16. Рассчитать уширение линии $2p \rightarrow 1s$ перехода в атоме водорода.



$$\Delta\omega = \Delta E_{el} = \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\hbar c^3} \hat{d}_{el}^2$$

частота перехода
электрический диполь

$$\hat{d}_{el} = \int \psi_{1s} \hat{d} \psi_{2p} \sqrt{r^3}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

пусть $m=0$

$$\psi_{1s} = R_{10}(r) Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\psi_{2p} = R_{21}(r) \cdot \begin{pmatrix} Y_{10} \\ Y_{11} \\ Y_{1,-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{r}{a_0^{3/2}} e^{-\frac{r}{2a_0}} \cdot \frac{r}{a_0} \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\theta$$

$$\hat{d}_{el} = \int \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \tilde{e} r (\cos\varphi \sin\theta \hat{x} + \sin\varphi \sin\theta \hat{y} + \cos\theta \hat{z}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{r}{a_0^{3/2}} e^{-\frac{r}{2a_0}} \cdot \frac{r}{a_0} \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\theta \sqrt{r^3} dr d\Omega$$

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$$

$$\omega_0 = 1,58 \cdot 10^{16} \text{ рад/с}$$

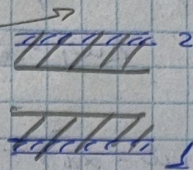
$$\hat{d}_{el} \approx \tilde{e} r_0 = 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 0,5 \cdot 10^{-8} \approx 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ ф. см}$$

$$\Delta\omega = \frac{4}{3} \frac{\omega_0^3 \cdot \hat{d}_{el}^2}{\hbar c^3} \approx 2,9 \cdot 10^8 \text{ рад/с}$$

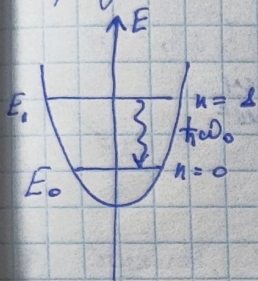
15. Почему происходит дисперсия спектра лампы накаливания (излучения) в-ва в световых полях?

Было: $P_{\text{в-ва}} = \frac{\omega^3 (\vec{e}_\lambda \cdot \vec{e}_{\text{ва}})}{2\pi\hbar c^3} n_\lambda F(\omega) \cdot g_{\text{ва}} \sim \text{излуч. излуч.}$

с резонансом поля $n_\lambda \uparrow \Rightarrow P \uparrow \sim \frac{1}{\Sigma} \Rightarrow \Sigma \downarrow \Rightarrow \Delta\omega \uparrow$
 $P_{\text{изл}} = n_\lambda P_{\text{ен}} \quad \Delta E \sim \Delta\omega$



16. Какова асимметрия линии спектра излуч. лампы накаливания при переходе $E_1 \rightarrow E_0$. Какова ее физическая сущность в эксперименте?



Все зависит от соотнош. вер-ти $3 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 1; 1 \rightarrow 0$

Симметрия $\chi_{mn} \rightarrow$ чем выше пара, тем $P \uparrow \Rightarrow \Delta\omega \uparrow$
 - тем больше асимметрия. $\Rightarrow$ наименьший замечен
 верхний.

$$\Delta\omega_{\text{ен}} = A_{\text{ен}} = \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2}{\hbar} \frac{d_{10}^2}{c^3}$$

Изучим аналогично d_{10}

$$d_{10} = \tilde{e} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x) \cdot x \psi_0(x) dx$$

Чел-ли об-ва, применяя
 Чебышева-Фронта

$$\chi_{mn} = \chi_0 \left(\sqrt{\frac{n}{2}} \delta_{m,n-1} + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \delta_{m,n+1} \right) \quad \begin{matrix} m=1 \\ n=0 \end{matrix}$$

$$\chi_{10} = \chi_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow d_{10} = \tilde{e} \chi_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2}{\hbar c^3} \cdot \frac{\tilde{e}^2 \chi_0^2}{2}$$

либо: $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\chi_0 \sqrt{\pi}}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\chi_0^2} \right\}$

можно представить

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\chi_0 \sqrt{\pi}}} \cdot \frac{2x}{\chi_0} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\chi_0^2} \right\}$$

12. Число волн, прошедших за время измерения длины волны в поле
 между $\sqrt{SF_6}$, облуч. CO_2 -лазером ($\lambda = 10,6$ мкм, $\nu = 50$ Вт),
 если лазерный пучок имеет диаметр 0,5 см, $T = 300$ К;
 $\rho = 100$ тор.; $v_{ном} = 5 \cdot 10^{-14}$ см.
 Число фотоэлектронов

1.) Доплеровское уширение:

$$\Delta \omega_D = 2 \sqrt{\ln 2} \cdot \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \approx 3,8 \cdot 10^8 \text{ рад/с.}$$

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx 1,78 \cdot 10^{14} \text{ рад/с.}$

$m_0 = \frac{M_{SF_6}}{N_A} \approx \frac{186 \text{ г/моль}}{6 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль}} \approx 24 \cdot 10^{-25} \text{ г.}$

2.) Столкновительное уширение:

$\gamma_{столк.} \approx \sqrt{\frac{mkT}{\hbar}} \cdot \frac{1}{\rho \cdot r} ; \quad \rho = 133322 \text{ г/см}^3$

$\Delta \omega_{столк.} \approx \gamma_{столк.} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{m_0 k T}} \approx$

$\sqrt{\nu}$ - скорость перемещения молекул, $\sqrt{\nu} = 5,33 \text{ Å}$

$\sqrt{\nu} = \pi \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \approx 8,92 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2 \approx 8,92 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$

3.) Полевое уширение:

$\rho_{изл.} = \frac{I_{изл.}}{h\nu} \quad \gamma_{изл.} \sim \frac{1}{\rho}$

$I = \frac{U}{\pi \left(\frac{0,05 \text{ м}}{2} \right)^2} \approx 25465 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} = 25 \cdot 10^{10} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2}$

$\Delta \omega_{изл.} \sim \rho_{изл.} \sim$

4.) Спонтанное: $A_{сп} = \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\pi c^2} |J_{21}|^2$

$\gamma_{ном} = \frac{4\pi^2 \omega}{\hbar c} F(\omega) (e_{\lambda, J_{21}})^2 \sim |J_{21}|^2 \approx \frac{\gamma_{ном} \hbar c}{4\pi^2 \omega}$

$F(\omega) \approx \frac{2}{\pi \Delta \omega_{сп}}$

13. Опр-ть сечений, рассеяния, и столкнов нейтрону неона для
преодоления неона $3S_2 \rightarrow 2p_1$ ($\lambda = 632,8 \text{ нм}$) в He-Ne
разряде при давлениях $p_{\text{He}} = 1 \text{ тор}$; $p_{\text{Ne}} = 0,2 \text{ тор}$ и $T = 4000 \text{ К}$.

$$\tau(3S_2) = 60 \text{ нс}; \quad \tau(2p_1) = 20 \text{ нс}; \quad \nabla_{\text{изл}} = 6 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$$

$$1) \Delta\omega_{\text{ест.}} = \frac{1}{\tau_{\Sigma}} = \frac{1}{\tau_{3S_2}} + \frac{1}{\tau_{2p_1}} \approx 6,7 \cdot 10^7 \text{ рад/с}$$

2) Доплеровская: He - просто буферный газ

$$\Delta\omega_d = 2\sqrt{v_{\text{изл}}} \cdot \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \approx 9,6 \cdot 10^9 \text{ рад/с}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda} \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ рад/с}$$

$$m = \frac{M_{\text{He}}}{N_A} \approx \frac{20 \text{ г/моль}}{6 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль}} \approx 3,33 \cdot 10^{-23} \text{ г}$$

3) Столкнов.

$$\Delta\omega_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{\pi}{m_0 v_{\text{изл}}}} \cdot \overbrace{(\Delta\omega_0^2)}^{\omega_0} \cdot \rho \quad \omega_0 = 38 \cdot 10^{-10} \text{ см}$$

$$\rho_{\Sigma} = \rho_{\text{He}} + \rho_{\text{Ne}} = 1,2 \text{ тор} \approx 1,2 \cdot 133,32 \text{ Па} = 159,98 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1599 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega_{\text{ст}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{3,33 \cdot 10^{-23} \text{ г} \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эВ}}{\text{К}} \cdot 4000 \text{ К}} \cdot (38 \cdot 10^{-10} \text{ см})^2 \cdot 1599 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}} \approx 9,4 \cdot 10^4 \text{ рад/с}$$

17. Сил. рассеяния $\rightarrow$ + суммируй разр. 13/12.

18. Типичное время жизни для возбужденного атома, переходя в
высшее энергетическое состояние $\sim 10 \text{ нс}$. Рассчитать сечение рассеяния
рентгеновского излучения, излучающего в диапазоне 10 нм.

$$\lambda = 10 \text{ нм} \rightarrow \omega_2 = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda} \approx 1,88 \cdot 10^{12} \text{ рад/с}$$

$$A_{\text{спонт}}^{\text{выр.г.}} = \frac{4}{3} \frac{\omega_2^3}{c^3} \frac{f_{\text{ва}}^2}{\tau_1} \sim \frac{1}{\tau_{\text{жизн}}} \approx 10^8 \text{ рад/с}$$

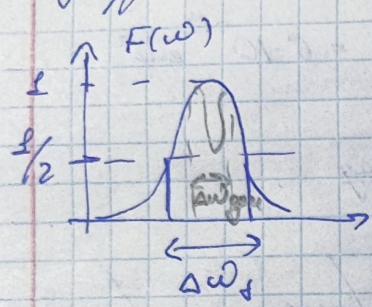
$$A_{\text{спонт}}^{\text{рентг.г.}} = \frac{4}{3} \frac{\omega_2^3}{c^3} \frac{f_{\text{ва}}^2}{\tau_1}$$

$$\Rightarrow \frac{A_{\text{рентг.г.}}}{A_{\text{выр.г.}}} = \frac{\omega_2^3}{\omega_1^3} \Rightarrow A_{\text{рентг.г.}} \approx A_{\text{выр.г.}} \cdot \frac{\omega_2^3}{\omega_1^3} \approx 10^{13} \text{ рад/с}$$

выр. диапазон $\sim 380 - 750 \text{ нм}$, возбужден $\sim 500 \text{ нм}$.

$$\omega_1 \approx 3,7 \cdot 10^{15} \text{ рад/с}$$

19. Потерпевшая амфино линия 500 мбч. Оценки времени жизни уровня 10^{-8} с. Предложить метод измерения коэффициента порогового контура.



По этой кривой в пачке

$$\Delta \omega_1 = 2 \sqrt{\ln 2} \cdot \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{2k\sigma}{c}}$$

Если светить на всех частотах, то близ к др. диаметр $\rightarrow$ получ. провал его ширины $\sim \Delta \omega_{др}$?

20. Линия NH^{3+} в спектре для раббиса перехода N^1 ядер имеет ширину ~ 10 мк. Работе амфино верхнего лазерного уровня, если катодный деактивируется со ск-по 10^8 с $^{-1}$. Что можно сказать о хар-ке удержания линии максимум энергии.

$$\lambda = 3,06 \text{ мкм.}$$

$$\Delta \nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{(3,06 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 10^{-8} = 3 \cdot 10^{12} \text{ Гц.}$$

$$\Delta \nu \gg 10^8 \text{ с}^{-1}$$

?

4. Запр. электромагнит. волн. в одномерном ящике. длина a в состоянии $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$. На частицу действует

время $\vec{E}(t) = \int_0^t E_0 e^{i\omega t'} \sin \omega t' dt'$, $t \in [0, \tau]$. В первом приближении.

теории возмущений найти к малому $t > 0$ вероятность перехода с уровня n на уровень m .

$$C_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t V_{mn}(t') e^{i\omega_{mn}t'} dt'$$

$$\hat{V} = -e_0 E(t) \hat{x} ; \quad \omega_{mn} = \frac{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}}{\hbar} = \frac{e^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

Для энергии сел. д: $E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2ma^2}$

$$\begin{aligned} V_{mn} &= \int_0^a \psi_m^* \hat{V} \psi_n dx = +e_0 E(t) \cdot \frac{2}{a} \int_0^a x \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) dx = \left\{ \text{сел. д} \right\} = \\ &= +e_0 E(t) \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\pi^2} \left[\frac{(-1)^{m-n} - 1}{(m-n)^2} - \frac{(-1)^{m+n} - 1}{(m+n)^2} \right] = \\ &= \frac{e_0 E(t) a}{\pi^2} \left[\frac{(-1)^{m-n} - 1}{(m-n)^2} - \frac{(-1)^{m+n} - 1}{(m+n)^2} \right] \neq 0 \quad \text{при } m \neq n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{n \rightarrow m} &= |C_m^{(1)}(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t V_{mn}^* \frac{e_0 a}{\pi^2} \cdot E_0 \sin \omega t' \cdot e^{i\omega_{mn}t'} dt' \right|^2 = \leftarrow \text{при } 0 < t < \tau \\ &= \frac{|V_{mn}^*|^2 |e_0|^2 a^2}{\hbar^2 \pi^4} \left| \int_0^t \frac{e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}}{2i} \cdot e^{i\omega_{mn}t'} dt' \right|^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{|V_{mn}^*|^2 |e_0|^2 a^2}{\hbar^2 \pi^4 \cdot 4} \cdot \left| \frac{e^{i(\omega + \omega_{mn})t}}{i(\omega + \omega_{mn})} - \frac{e^{i(\omega_{mn} - \omega)t}}{i(\omega_{mn} - \omega)} \right|_0^t \Big|^2 =$$

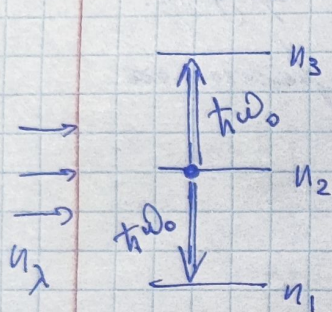
$$= \frac{|V_{mn}^*|^2 |e_0|^2 a^2}{4\hbar^2 \pi^4} \cdot \left| \frac{e^{i(\omega + \omega_{mn})t} - 1}{i(\omega + \omega_{mn})} - \frac{1 - e^{-i(\omega - \omega_{mn})t}}{i(\omega - \omega_{mn})} \right|^2$$

Для $t > \tau \Rightarrow \int_0^\tau \Rightarrow$

$$P_{n \rightarrow m} = \frac{|V_{mn}^*|^2 |e_0|^2 a^2}{4\hbar^2 \pi^4} \left| \frac{e^{i(\omega + \omega_{mn})\tau} - 1}{i(\omega + \omega_{mn})} - \frac{1 - e^{-i(\omega - \omega_{mn})\tau}}{i(\omega - \omega_{mn})} \right|^2$$

10. Можно ли получить излучающееся (лазерное) излучение в квантовой системе. орудийстве в электрод. приближении?

Рассматриваем 3 уровня.



Пусть в начале $t=0$ на втором уровне. Как можно реализовать излучение. Куда перейдет на n_1 или n_3 ?

$$P_{2 \rightarrow 3}^{\text{погл}} \sim d_{32}^2; \quad P_{2 \rightarrow 1}^{\text{изл}} \sim d_{12}^2$$

Из св-в квантового Уоллишера-Зингера

$$X_{mn} = X_0 \left(\sqrt{\frac{n}{2}} \delta_{m, n-1} + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \delta_{m, n+1} \right)$$

$$d_{32} \sim X_{32} \rightarrow X_{32} = X_0 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \delta_{3,1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \delta_{3,3} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} X_0$$

$$d_{12} \sim X_{12} \rightarrow X_{12} = X_0 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \delta_{1,1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \delta_{1,3} \right) = X_0$$

$$P_{2 \rightarrow 3}^{\text{погл}} > P_{2 \rightarrow 1}^{\text{изл}} \rightarrow \text{не лазер?}$$

24. Найдите связь мнимости, показателя 2х уровней, сред, и мнимости χ_{ik} волепрямительного эфф сред.

Связь мнимости: $\vec{P} = \chi \vec{E}$, где $\chi = \chi' + i\chi''$

В лекциях при решении д.у. для поляризации:

$$\ddot{\vec{p}} + \frac{2}{T_2} \dot{\vec{p}} + (\omega^2 + \frac{1}{T_2^2}) \vec{p} = f(t) \quad \text{где } f(t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \vec{P}(\omega) = \frac{\sqrt{21} (\sqrt{21} \cdot \vec{E}_0) N_0}{\hbar} \cdot \frac{(\omega_{21} - \omega) \cos \omega t + i \frac{1}{T_2} \sin \omega t}{(\omega - \omega_{21})^2 + \frac{1}{T_2^2} + \left(\frac{\sqrt{21} E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{T_1}{T_2}} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= (\chi' + i\chi'') \vec{E}_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \\ &= E_0 (\chi' \cos \omega t + i\chi' \sin \omega t + i\chi'' \cos \omega t - \chi'' \sin \omega t) = \\ &= E_0 (\chi' \cos \omega t - \chi'' \sin \omega t) + i E_0 (\chi' \sin \omega t + \chi'' \cos \omega t) \end{aligned}$$

Пусть $\vec{E}_0 \parallel \vec{E}_0$; Re и Im части направлены:

$$\vec{P} = \chi E_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) = (*)$$

$$\Rightarrow \chi' = \frac{\sqrt{21}^2 N_0}{\hbar} \cdot \frac{(\omega_{21} - \omega)^2}{(\omega - \omega_{21})^2 + \frac{1}{T_2^2} + \left(\frac{\sqrt{21} E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{T_1}{T_2}}$$

$$\chi'' = \frac{\sqrt{21}^2 N_0}{\hbar T_2} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_{21})^2 + \frac{1}{T_2^2} + \left(\frac{\sqrt{21} E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{T_1}{T_2}}$$

Из мнимой части можно получить:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} E_0^2 \omega \chi''$$

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}} = \frac{\sqrt{21}^2 E_0^2 \omega N_0}{2\hbar T_2} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_{21})^2 + \frac{1}{T_2^2} + \left(\frac{\sqrt{21} E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{T_1}{T_2}}$$

25. Найдите выражение для дисперсионной функции ϵ на резонансе ω_{12}

Есть связь $\epsilon = 1 + 4\pi \chi(\omega) \Rightarrow \chi$ - реал. $\Rightarrow \epsilon$ - реал.

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi}{\hbar} \cdot \frac{\sqrt{21}^2 N_0}{1} \cdot \frac{(\omega_{21} - \omega) + i \frac{1}{T_2}}{(\omega - \omega_{21})^2 + \frac{1}{T_2^2} + \left(\frac{\sqrt{21} E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{T_1}{T_2}}$$

Можно ввести поправку: $\omega_{21} - \omega \approx \delta\omega$

21. Для двухуровневого параматричного со спином $\frac{1}{2}$ найти матричные элементы перехода и рок-т, что по вер-ть равна 0 при $H_0 \parallel H_1$.

Матрица по ЭПР:

Матр. элемент связан со спином

$$\vec{\mu} = -g\vec{S} = -g\beta_B \vec{S}/\hbar$$

$$\beta_B = \frac{e\hbar}{2mc} \quad - \text{магнетон Бора.}$$

Потенциальное земановское расщепление энергии:

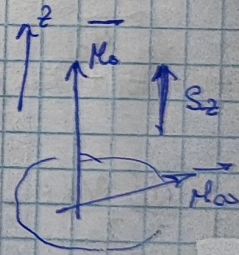
$$E = \langle \vec{\mu} | H_0 \rangle \Rightarrow E_m = g\beta_B H_0 \cdot m = \pm \frac{1}{2} g\beta_B H_0 \quad (\text{для } S = \frac{1}{2})$$

При наложении на параматрично систему внешнего магнитного поля H_0 частота ω между земановскими уровнями будет проходить через резонансную частоту, сопр. сдвинутому уровню. Вероятность таких переходов:

$$W_{mm'} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | \hat{V} | m' \rangle|^2 \delta(E_m - E_{m'} - \hbar\omega)$$

матр. элемент оператора возмущения для сев. с проекцией спина m и m'

$$\hat{V} = -(\vec{\mu} \cdot \vec{H}_0) = g\beta_B (\hat{S} \cdot \vec{H}_0) / \hbar$$



Условие параматри. резонанса $\rightarrow$ ЭПР совп. с эк. резонанса

$$\hbar\omega = g\beta_B H_0$$

Изменения земановских уровней N_m и $N_{m'}$ опис-ся ур-нами

$$\begin{aligned} \frac{dN_m}{dt} &= (N_{m'} - N_m) W_{mm'} - \frac{N_m - N_m^0}{T_1} \\ \frac{dN_{m'}}{dt} &= (N_m - N_{m'}) W_{mm'} - \frac{N_{m'} - N_{m'}^0}{T_1} \end{aligned} \Rightarrow \frac{dN_{mm'}}{dt} = -2\Delta N_{mm'} W_{mm'} - \frac{\Delta N_{mm'} - \Delta N_{mm}^0}{T_1}$$

$$\Rightarrow \Delta N_{mm'} = \frac{\Delta N_{mm}^0}{1 + 2W_{mm'} T_1}$$

Вероятность перехода представляется в виде:

$$W_{mm'} = \left(\frac{\mu_{mm'} H_1}{\hbar} \right)^2 \frac{2T_2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2}$$

$$\text{где } \mu_{mm'} = g\beta_B \langle m | \hat{S} \cdot \vec{H}_0 | m' \rangle / H_0$$

Рассеивание: $\langle m | \hat{S} \cdot \vec{M}_0 | m' \rangle$

спиновые волновые ф-ии

$$\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Оператор $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{M}_0 = M_0 \cdot \vec{z}$$

→ просто вычисляем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow 0 \text{ вероятности}$$

$$M_0 = M_1 \cdot (1 - 2\epsilon) \quad M_1(0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

22. Для 2х уровней без дегенерации ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) найдите выражение для популяций при воздействии на среду резонансного внешнего поля $E = E_0 \cos(\omega t)$

$$\begin{cases} \ddot{\vec{p}} + \frac{2}{T_2} \dot{\vec{p}} + (\omega^2 + \frac{1}{T_2^2}) \vec{p} = -\frac{2\omega_0 \vec{d}_{12}}{\hbar} (\vec{d}_{12} \vec{E}) \Delta N \\ \Delta \dot{N} = \frac{2}{\hbar \omega} (\dot{\vec{p}} + \frac{1}{T_2} \vec{p}) \vec{E} - \frac{1}{T_1} (\Delta N - \Delta N^{(0)}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\vec{p}} + \omega^2 \vec{p} = -\frac{2\omega_0 \vec{d}_{12}}{\hbar} (\vec{d}_{12}, \vec{E}_0) \Delta N \cos \omega t \\ \Delta \dot{N} = \frac{2}{\hbar \omega} \vec{p} \cdot \vec{E}_0 \cos \omega t \quad A = \text{const} \end{cases}$$

ΔN_0
 Дел-м приближ
 $\Delta N(t)$ малое
 по сравнению
 $\Rightarrow$ можно брать
 $\Delta N \approx \Delta N_0$

$$p = z e^{i\omega t} + z^* e^{-i\omega t}$$

$$\dot{p} = z(i\omega) e^{i\omega t} + z^*(-i\omega) e^{-i\omega t} \Rightarrow \dot{z} e^{i\omega t} + \dot{z}^* e^{-i\omega t} = 0$$

$$\ddot{p} = i\omega(\dot{z} e^{i\omega t} - \dot{z}^* e^{-i\omega t}) - \omega^2(z e^{i\omega t} + z^* e^{-i\omega t})$$

$$\Rightarrow i\omega(\dot{z} e^{i\omega t} - \dot{z}^* e^{-i\omega t}) - \omega^2(z e^{i\omega t} + z^* e^{-i\omega t}) + \omega^2(z e^{i\omega t} + z^* e^{-i\omega t}) = A \cos \omega t$$

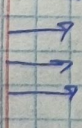
$$i\omega 2\dot{z} e^{i\omega t} = \frac{A}{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \frac{A}{4i\omega} \Rightarrow z = \frac{At}{4i\omega} \sim \text{мал. фаз сдвиг}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = -\frac{\Delta N_0 \vec{d}_{12} (\vec{d}_{12}, \vec{E}_0)}{\hbar} t \sin \omega t$$

23. На 2х уровнях атомный газ воздействует поле $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ в дробовом режиме квантового перехода. Для стационарного режима рассчитать вероятность спонтанного излучения (ср. в рез. фрект.)

$E_0 \cos \omega t$



спонт? Спонтанное излучение от поля не зависит.
 С точки зрения энергет. баланса:
 спонт = спонт

$$W_{\text{сп}} = \hbar \omega \cdot A_{\text{сп}} \cdot N_0$$

всп-ть спонт-перехода.

из сохр. энергии балансов ур-ий:

$$N_2 = \frac{A_{12} B_{12}}{A_{\text{сп}} + 2A_{12} B_{12}} \quad N_0 \approx N_2(E)$$

$$B_{12} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |V_{12}|^2$$

$$\hat{V} = -(\vec{d}, \vec{E}) ; V_{12} = W_{12} e^{-i\omega t} + W_{21} e^{i\omega t}$$

что имеет
 форму, зависит
 от поля?

откуда эта ф-ла?

Для свободных прецессирующих ядер
 $L = \frac{e\hbar}{2}$; $\omega_0 = \frac{\gamma H}{2\pi}$
 $\Delta\omega = 2 \cdot 10^8 \frac{1}{с}$, следовательно
 коэф-т усиления

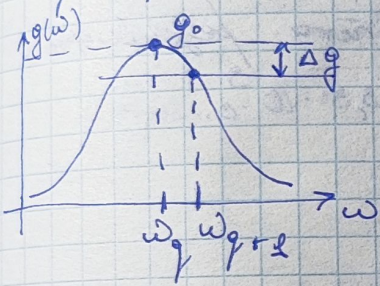
резонанса Рэби-Перо динков
 средот с шириной линии
 оценок отнесит, разности

$$L = \frac{e\hbar}{2} ; \omega_0 = \frac{\gamma H}{2\pi}$$

$$\omega_{q+1} - \omega_q = \frac{\gamma H}{2\pi}$$

$$\omega_{q+1} - \omega_q = \frac{c}{2\pi L} \approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ Гц} \approx 10^9 \frac{1}{с}$$

Сравнивается
 с $\Delta\omega \rightarrow$ ширина
 линии сигнала с детектированием



Экспрессирован профиль усиления:

$$g(\omega) = \frac{g_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \left(1 + \frac{1}{T_{\text{наб.}}}\right)^{-1}$$

где $T_2 = \Delta\omega_{\text{фн.}}$

$$g(\omega) = \frac{g_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Delta\omega^2}{4}} \cdot \left(1 + \frac{1}{T_{\text{наб.}}}\right)^{-1}$$

$$\frac{g(\omega_q)}{g(\omega_{q+1})} = \frac{(\omega_{q+1} - \omega_0)^2 + \frac{\Delta\omega^2}{4}}{(\omega_q - \omega_0)^2 + \frac{\Delta\omega^2}{4}} = \left\{ \text{пусть } \omega_q = \omega_0, \text{ а } \omega_{q+1} = \omega_0 + \frac{\gamma H}{2\pi} \right\}$$

$$= \frac{\left(\frac{\gamma H}{2\pi}\right)^2 + \frac{\Delta\omega^2}{4}}{\frac{\Delta\omega^2}{4}} = 1 + \frac{4\omega^2 c^2}{\gamma^2 H^2 \Delta\omega^2}$$

30. Сил. лекции про резонаторы

31. Рассчитайте добротность Q и $\tau_{\text{ф}}$ в РДП. (в практике 7-1)

$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ м} \\ R_1 &= R_2 = 0,95 \\ \lambda &= 0,8 \text{ мкм} \\ \alpha_0 &= 0,01 \text{ см}^{-1} \end{aligned}$$

$$\alpha_{\text{дифф}} = 0 \sim \text{пренебр.}$$

$$\tau_{\text{ф}} = \frac{1}{\alpha_{\Sigma} c} = \frac{1}{(\alpha_0 + \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2}) c} \approx 3,2 \cdot 10^{-9} \text{ с.}$$

$$\text{если } n \neq 1. \rightarrow c \leftrightarrow \frac{c}{n}$$

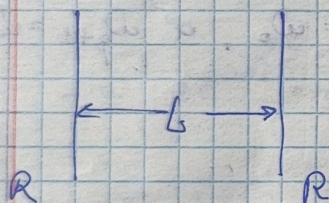
$\rightarrow$ оп-ть света в среде.

$$\begin{aligned} Q &= ? \\ \tau_{\text{ф}} &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Время пролета резонатора} \\ \tau_{\text{ф}} \sim \frac{L}{c} \sim 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ с.} \end{aligned}$$

$$Q = \omega \tau_{\text{ф}} = \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot \tau_{\text{ф}} \approx 10^7$$

32. Покажите, что доб. резонатора с зеркалами зеркала не зависит от частоты. Оцените (в см⁻¹) интервал между соседними интервалами и шириной линии такого резонатора при $R=0,99$ и $L=1 \text{ м}$.



$$\alpha_{\Sigma} = \alpha_0 + \alpha_{\text{дифф}} + \alpha_{\text{изл.}}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $U_0 \quad \quad U_2$

Предположим, что зеркальная поверхность $U_0 \rightarrow$ имеет бесконечную ширину, и что отражение

$$Q = \frac{\omega L}{\frac{\Delta U}{\Delta t}} = \frac{\omega L U_2}{\left| \frac{\Delta U}{\Delta t} \right|} \approx \frac{\omega L U_2}{\left| \frac{\Delta U}{\Delta t} \right|} \quad \Delta U = (1-R) U_0$$

$\rightarrow$ время пролета

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{c(1-R) U_0}{L} \Rightarrow Q = \frac{\omega L U_0}{c(1-R) U_0} \approx \frac{\omega L}{c(1-R)} \approx \frac{\omega}{\Delta \omega}$$

Ширина:

$$\Delta \omega = \frac{c(1-R)}{L}$$

$\rightarrow$ не зависит от частоты

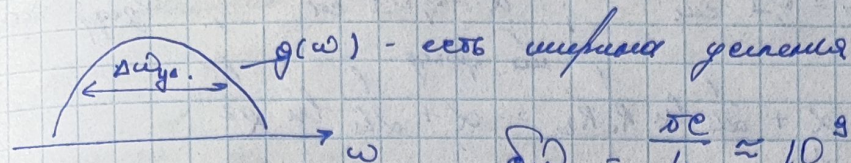
Но! $Q = \frac{\omega L \sqrt{R}}{c(1-R)}$ — по-иному выраж. ширину. эквивал.

$$\text{Если } R_1, R_2 \rightarrow R \leftrightarrow \sqrt{R_1 R_2}$$

$$Q = \frac{\kappa L \sqrt{R}}{1-R} = \frac{2\pi \sqrt{R}}{(1-R)} \cdot \frac{L}{\lambda}$$

$$\omega_{\text{г1}} - \omega_{\text{г2}} = \frac{2\pi c}{L}$$

23. Для гелий-неонового лазера ($\lambda \approx 632,8 \text{ нм}$) рассчитайте число продольных мод, попадающих в спектр. линии излучения



$$\Delta \omega_p = \frac{\pi c}{L} \approx 10^9 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$+ \Delta \nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{c}{\lambda_2} - \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c \Delta \lambda}{\lambda^2}$$

$$\Delta \omega = \Delta \nu \cdot 2\pi = \frac{c \Delta \lambda \cdot 2\pi}{\lambda^2}$$

→ ширина спектра лазера не зависит от L

Для He-Ne основное усиление → роллеровское.

$$\Delta \omega_{\text{ролл.}} = \sqrt{2 \ln 2} \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{m}}$$

св. зяр. 13

34. Оценить минимальную величину затухания частоты лазера на фазе в лазере на рубине → через лог. формулу на два.

$$\omega_{\text{ли}} \approx \frac{\omega_{\text{ва}}}{\Delta \omega_{\text{ва}}} + \frac{\omega_{\text{рез}}}{\Delta \omega_{\text{рез}}} \rightarrow \Delta \omega_p \approx \frac{c(1-R)}{L \sqrt{R}}$$

→ из св. лог. формул. → роллер.

Рабочие среды:
Композит. No
Диаметр волни. пер.
Ширина спектра
мгновенн.
Время жизни
Квант. в полр

Рубин Cr^{3+}
 $1,8 \cdot 10^{19}$
0,69 мкм
0,55 мкм
 $3 \cdot 10^{-3} \text{ с}$
0,2

$N \sqrt{3+}$
 10^{21}
1,08 мкм
20 мкм.
 $2,4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$
0,1

35. Определить оптимальное коэффициент пропускания зеркала резонатора лазера, позволяющий получить макс. выходную мощность.

$L = 10 \text{ см}$; $g_0 = 0,1 \text{ см}^{-1}$; $\alpha = 0,01 \text{ см}^{-1}$; $\Delta g_{\text{эфф.}} = 0$

$g_0 = \alpha_{\text{пот}} + \alpha_{\text{изл.}} = \alpha + \frac{1}{2L} \ln \frac{r}{R_1 R_2} = \alpha + \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R^2}$

$g_0 - \alpha = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R^2}$

$\frac{1}{R^2} = \exp \{ 2L(g_0 - \alpha) \}$

$\rightarrow R^2 = \exp \{ -2L(g_0 - \alpha) \}$

$R = \exp \{ -L(g_0 - \alpha) \}$

Пороговое генерирование

36. Газовый лазер работает на диффузно-униформном переходе, активная длина 200 см. Вероятность спонтанного излучения на рабочем переходе ($\lambda = 1 \text{ мкм}$) $A_{\text{сп}} = 10^8 \text{ с}^{-1}$. Какова пороговая концентрация активной среды?

$\Delta \nu = 200 \text{ нм}$

$A_{\text{сп}} = 10^8 \text{ с}^{-1}$

$\lambda = 1 \text{ мкм}$

$L = 2 \text{ м}$

$\eta = 0,02 \text{ потери}$

$g_{\text{пор}} = \alpha_{\Sigma} = \gamma_{\text{изл.}} \Delta N_{\text{пор.}}$

Пример из лекций:

$\frac{3 \times 10^8 A_{\text{сп}} F(\omega)}{\omega^2} e^{\gamma} \Delta N_{\text{пор}} = \frac{Q}{Q} = \frac{1}{2\eta} = \frac{1}{\alpha_{\Sigma}} \text{ см}^{-1}$

$\Delta N_{\text{пор}} = ?$

По условию упрощение дифференциальное:

$F(\omega) = \frac{2}{\pi \Delta \omega} = \frac{2}{2 \times 10^8 \Delta \nu} = \frac{1}{10^8 \Delta \nu}$

$\omega^2 = \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2}$; $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

По размерности $\alpha_{\Sigma} = \frac{1}{L}$

$\frac{3 \times 10^8 A_{\text{сп}} F(\omega) e^{\gamma}}{\omega^2} \Delta N_{\text{пор}} = \frac{1}{L}$

$\Delta N_{\text{пор}} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\omega^2 \Delta \nu}{3 A_{\text{сп}} e^{\gamma} \cdot 1} = \frac{1}{L} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\Delta \nu}{3 A_{\text{сп}}} \sim 10^6 \frac{1}{\text{см}^3}$

37. Одр-то порождено конденсировано веществом. Рассчит. величину макс. конденсации ионов Ca^{3+} в рубиновом ОКЛ.

для рубинового лазера $L \sim 50 \text{ см}$, пусть $\gamma_{\text{изл}} = 2 \cdot 10^{-20} \text{ см}^2$

$$R_1 = 1; R_2 = 0,3$$

пропуск. $\alpha_0, \alpha_{\text{зерр.}}$ $g = \alpha_{\text{изл}} = \gamma_{\text{изл}} \Delta N_{\text{пор.}} = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2}$

38.

$$\lambda = 510 \text{ нм}$$

$$A_{\text{из}} = 5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$$

$$\Delta \nu_{\text{дрн}} = 20 \text{ МГц.}$$

$$L = 20 \text{ см.}$$

$$\Pi = 0,05 - \text{потери}$$

$$\Delta N_{\text{пор.}} - ?$$

$$g_{\text{пор.}} = \alpha_z = \gamma_{\text{изл}} \Delta N_{\text{пор.}}$$

Формула из лекций:

$$\frac{3\pi^2 A_{\text{из}} F(\omega)}{\omega^2} \cdot c^3 \Delta N_{\text{пор.}} = \frac{\omega}{Q} = \frac{1}{\tau_{\text{ф}}} = \alpha_z c$$

так как дробная.

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi \Delta \omega} = \frac{2}{2\pi^2 \Delta \nu} = \frac{1}{\pi^2 \Delta \nu}$$

$$\alpha_z = \frac{\Pi}{2L}$$

(про обратную пропорсировку?)

$$\frac{3\pi^2 A_{\text{из}} \cdot 1}{\omega^2 \pi^2 \Delta \nu} \cdot c^3 \Delta N_{\text{пор.}} = \frac{\Pi c}{2L}$$

$$\Delta N_{\text{пор.}} = \frac{\Pi \omega^2 \pi^2 \Delta \nu}{2L c^3 \cdot 3\pi^2 A_{\text{из}}} = \frac{\Pi \cdot 4\pi^2 c^2 \Delta \nu}{6L c^3 \cdot \lambda^2 A_{\text{из}}}$$

39. Рубиновая сфера имеет диопр. прореги усиления с шириной $\Delta \nu = 2 \text{ ГГц}$. Фридрихова ширина $\Delta \nu_{\text{дрн}} = 50 \text{ МГц}$, вер. перехода $A_{\text{из}} = 10^8 \text{ с}^{-1}$. Проб. колота дрн из лор ($L = 30 \text{ см}$) совпадает с центр. частотой прореги усиления. Какова пороговая инверсия для центрального лор и при какой инверсии генерация начнется на соседних лорах если потери в рз. составл. 10%.

В случае неоднородного уширения:

$$g(\omega) = g_0 \exp \left\{ -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta \omega_{\text{дрн}}^2} \right\} \left[1 + \sum_j \frac{I_j(\omega_j)}{I_{\text{нас}} ((\omega - \omega_j)^2 \tau_c^2 + 1)} \right]^{-1}$$

$$\Delta \nu = 2 \text{ ГГц}; \Delta \nu_{\text{дрн}} = 50 \text{ МГц}; A_{\text{из}} = 10^8 \text{ с}^{-1}; L = 30 \text{ см}; \Pi = 0,1.$$

Центр. частота, пусть $\lambda = 1 \text{ мкм}$: Тогда $g(\omega) = \alpha_z \rightarrow$ только для центрального "ω" будет лорее дрн фаворит:

$$g(\omega) = g_0 \exp \left\{ -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta \omega_{\text{дрн}}^2} \right\}$$

или 38 или 36

$$\Rightarrow g(\omega) = \gamma_{\text{изл.}} \Delta N_{\text{пор.}}^{(0)} = \frac{\Pi}{L} \Rightarrow \Delta N_{\text{пор.}} = \frac{4\pi^2 \Delta \nu \Pi}{3L \lambda^2 A_{\text{из}}} \quad \text{где } \Delta \nu = \Delta \nu_{\text{дрн.}}$$

Рассчитание измеру лорам:

$$\delta \omega = \frac{\delta c}{L} \Rightarrow \delta \nu = \frac{c}{2L} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 30 \cdot 10^{-2}} = 0,5 \cdot 10^9 \text{ Гц.} \approx 500 \text{ МГц.}$$

$\delta \nu \gg \Delta \nu_{\text{дрн}} = 50 \text{ МГц.} \Rightarrow$ соседняя лора "не замесит" пробелов $\Rightarrow$ для нее справедливо:

$$\begin{aligned}
 g(\omega_a + \delta\omega) &= g_0 \exp \left\{ - \frac{((\omega_a + \delta\omega) - \omega_{res})^2}{\Delta\omega_{res}} \right\} = \\
 &= g_0 \exp \left\{ - \left(\frac{\delta\omega}{\Delta\omega_{res}} \right)^2 \right\} = g_0 \exp \left\{ - \left(\frac{\delta\omega}{\Delta\omega} \right)^2 \right\} = \\
 &= \left\{ \frac{\delta\omega}{\Delta\omega} = \frac{500 \text{ MHz}}{2174} = \frac{0.5}{2} = \frac{1}{4} \right\} = g_0 \exp \left\{ - \frac{1}{16} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta N_{\text{pop}}^1 = \Delta N_{\text{pop}}^0 e^{\frac{1}{16}} \approx 1,064 \Delta N_{\text{pop}}^0$$

$$\begin{aligned}
 \Delta N_{\text{pop}}^0 &= \frac{4\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 0,1}{3 \cdot 0,3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^8} \text{ cm}^{-3} = 8,77 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} = \\
 &= 8,77 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\Delta N_{\text{pop}}^1 = 9,33 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$$

40. Док-те, что в этой системе гомогенная информация
разность насел. равна нулю $\rightarrow$ р.о. в левую

41. Зная, что зеркало в РФП имеет $(R_1 = 1)$, а другое
полюса $(R_2 = R)$, найдите зависимость потерь
от R . Есть ли оптим. R ?

В конце Карпова не пишем!

$$M_{\text{пот}} = \frac{V_a N_{\text{эф}} \tau_{\text{ф}}}{\tau_c} \frac{\hbar \omega}{\tau_{\text{из}} \left(\frac{V}{V_{\text{эф}}} - 1 \right)} \cdot \eta_{\text{внеш}} \cdot \frac{\ln R_2}{\ln R_1 + \ln R_2} = 0$$

* Где-то в интернете:

Зная мощность отражения P_R из-за потерь внешнего
излучения P_V через любое Γ зеркала:

$$g_{\text{эф}} = \alpha_0 + \underbrace{\frac{2L}{\alpha_{\text{из}}}}_{\text{дизн}} \ln \frac{R_1 R_2}{1}$$

$$P_1 = \frac{1}{2\alpha_p L} \ln \frac{1}{R_1} ; \quad P_2 = \frac{1}{2\alpha_p L} \ln \frac{1}{R_2}$$

$$P_1 + P_2 = M_{\text{внешнее}} = \frac{1}{2\alpha_p L} \ln \left(\frac{1}{R_1 R_2} \right) \rightarrow R_1 = 1 \text{ — лучшее зеркало}$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2\alpha_p L} \ln \left(\frac{1}{R} \right)$$

Здесь нет гудер. потерь: $\alpha_p = \alpha_0 + \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R}$

$$M = \frac{1}{2L} \left[\frac{\ln \frac{1}{R}}{\alpha_0 + \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R}} \right] = f(R) = \beta \left[\frac{-\ln R}{\alpha_0 - \beta \ln R} \right] =$$

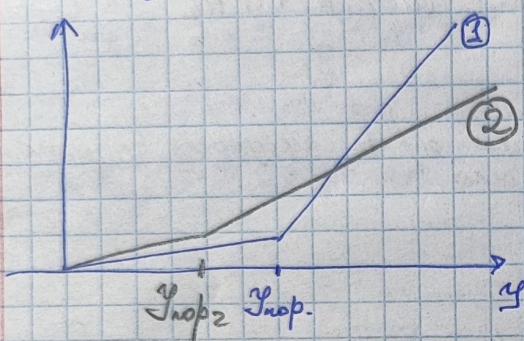
$$= \beta \cdot \frac{\ln R}{\beta \ln R - \alpha_0} = \frac{\ln R}{\ln R - \frac{\alpha_0}{\beta}} = \frac{\ln R}{\ln R - C} \rightarrow \text{не балансируется.}$$

$$\frac{1}{\ln R - C}$$

42. Резонатор интенсионального парупроверкилового лазера образован
 естественными зеркалами кристалла с коэр-аши отраз. $R_1 = R_2 = 0,37$.
 Оп-ге порог. уровень для резонаторов длиной $L = 100$ см и $L = 1000$ см. Если внутренняя потеря состав.
 $\alpha_{внут} = 5 \text{ см}^{-1}$. Во произведё, если на грани резонатора
 наложен отраз. покрытие с $R_1 = 0,98$ и $R_2 = 1$

$$\alpha_z = \alpha_{внут} + \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \rightarrow \text{минимизация для всех } R$$

Как изменится отн. мощность излучения



1) $g = \alpha_z \rightarrow$ меньше потерь $\rightarrow$ меньше порог

2) Чем от-ге наклон? Внутр. КПД резонатора

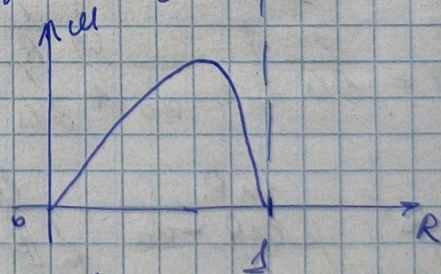
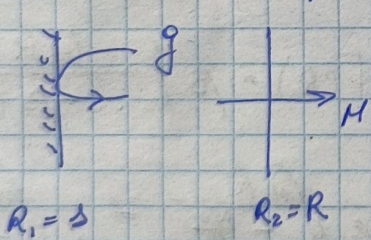
$$\eta_{внут} = \frac{\alpha_{внут}}{\alpha_0 + \alpha_{внут}}$$

$$\alpha_{внут} = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2}$$

при $R_1 = R_2 = 0,37 \rightarrow \alpha_{внут}$ больше

$R_1 = R_2 \sim 1 \rightarrow \eta_{внут} \downarrow$

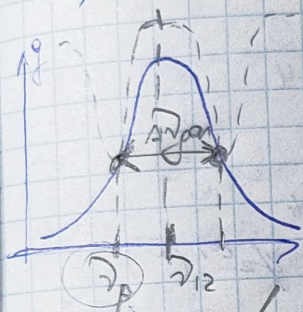
44. Нарисуйте и объясните график зависимости среднего порога от величины отразения выходного зеркала резонатора



при $R=0$ мощность лазера хар-ся спонтанным излучением и от первого зеркала ничего не отражается всё уходит и нет отр. связи.

При $R=1$ излучение лазера не выходит

15. Частота / мдм пассивного мдм параллельного Фабри-Перо резонатора (L=15 см) увеличена на 0,5. $\Delta \nu_{\text{дон.}}$ в центре гасящей линии уменьшилась газовой линией с $\lambda = 633$ мкм. Оценить затухание мдм если ширина резонатора $\Delta \nu_p = 20$ МГц. $\Delta \nu_{\text{дон.}} = 5$ Гц.



$$\Delta \omega_p = \frac{\hbar c}{L} \quad \text{Расс. ширины мдм}$$

$$2\pi \Delta \nu_p = \frac{\hbar c}{L} \Rightarrow \Delta \nu_p = \frac{c}{2L} \approx 10^9 \text{ Гц.}$$

$$\frac{\Delta \nu_{\text{дон.}}}{\Delta \nu_p} = \frac{5}{10^9} = 1 \Rightarrow 2 \text{ точки} \Rightarrow$$

2 мдм генерируются.

коэффициент для этого
эффекта затухания

$$\omega_{\text{ген}} = \frac{\frac{\omega_{12}}{\Delta \omega_{12}} + \frac{\omega_p}{\Delta \omega_p}}{\frac{1}{\Delta \omega_{12}} + \frac{1}{\Delta \omega_p}} \Rightarrow \nu_{\text{ген}} = \frac{\frac{\nu_{12}}{\Delta \nu_{12}} + \frac{\nu_p}{\Delta \nu_p}}{\frac{1}{\Delta \nu_{12}} + \frac{1}{\Delta \nu_p}} \approx 4,74 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$$

$$\nu_{12} = \frac{c}{\lambda} \approx 4,74 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$$

6. На двухуровневую систему нахор. в верхнем состоянии переключенное поле на частоте перехода в течение трех периодов (периодов) перебора осцил. Радн. Какова будет величина зависимость от времени дипольного момента перебора поле выключенное поле в этих условиях.

$$\vec{J}(t) = e \int \psi^*(\vec{r}, t) \vec{r} \psi(\vec{r}, t) d\vec{r}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\mathcal{E} = 0 \quad \omega \quad \text{и} \quad \Omega = \frac{|F_{21}|}{\hbar}$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \cos \Omega t \cdot e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \cdot \psi_1^{(0)}(\vec{r}) - i \sin \Omega t e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_2^{(0)}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \psi^* \psi = \left[\cos \Omega t e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_1^{(0)}(\vec{r}) - i \sin \Omega t e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_2^{(0)}(\vec{r}) \right] \cdot \left[\cos \Omega t e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_1^{*(0)}(\vec{r}) + i \sin \Omega t e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_2^{*(0)}(\vec{r}) \right] =$$

$$= \cos^2 \Omega t |\psi_1^{(0)}(\vec{r})|^2 + \sin^2 \Omega t |\psi_2^{(0)}(\vec{r})|^2 - i \sin \Omega t \cos \Omega t e^{-i\omega_{21} t} \psi_2^{(0)*} \psi_1^{(0)} + i \cos \Omega t \sin \Omega t e^{i\omega_{21} t} \psi_1^{(0)*} \psi_2^{(0)}$$

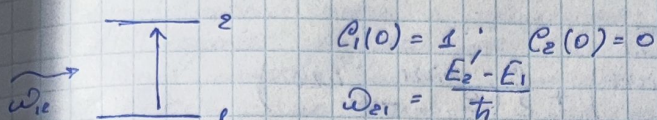
$$\vec{J}(t) = \vec{J}_2^{(0)} \left[i \cos \Omega t \sin \Omega t e^{i\omega_{21} t} - i \sin \Omega t \cos \Omega t e^{-i\omega_{21} t} \right] =$$

$$= i \underbrace{\cos \Omega t \sin \Omega t}_{\frac{1}{2} \sin(2\Omega t)} \cdot 2i \sin \omega_{21} t = -\sin(2\Omega t) \sin(\omega_{21} t) \vec{J}_2^{(0)}$$

$$= \vec{J}_2^{(0)} \sin(2\Omega t) \sin(\omega_{21} t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad \rightarrow \quad t = \frac{3}{4} \cdot \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{3\pi}{2\Omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{J=0}}$$

5. Двухуровневая система с частотой перехода ω_{21} находится под воздействием поля $\vec{E} = E_0 \cos \omega t$, где $\omega \approx \omega_{21}$. В исходном состоянии поле в системе находится на нижнем энергетическом уровне E_1 . Какова в.ф. системы в произв. момент времени $t > 0$ и ор-т вер-т перехода к в. состоянию системы в момент времени t_0 на верхний уровень.



Ш в перес. взаимодействия: $i\hbar \dot{c}_m = \sum_n V_{mn} c_n e^{i\omega_{mn}t}$
 $c_m = d_m e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t}$; $V_{mn} = F_{mn} e^{-i\omega t} + F_{nm}^* e^{i\omega t}$

~~перес.~~

$$\begin{cases} i\hbar \dot{d}_2 = [F_{21} e^{i(\omega_{21}-\omega)t} + F_{12}^* e^{i(\omega_{21}+\omega)t}] d_1 \\ i\hbar \dot{d}_1 = [F_{12} e^{i(\omega_{21}-\omega)t} + F_{21}^* e^{i(\omega_{21}+\omega)t}] d_2 \end{cases}$$

$$\omega_2 - \omega_1 - \omega \approx -\epsilon; \quad \omega_1 - \omega_2 + \omega \approx \epsilon$$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{d}_2 = F_{21} e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}t} d_1 \\ i\hbar \dot{d}_1 = F_{21}^* e^{i\frac{\epsilon}{\hbar}t} d_2 \end{cases} \quad \begin{cases} d_2 = b_2 e^{-i\frac{\epsilon}{2}t} \\ d_1 = b_1 e^{i\frac{\epsilon}{2}t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar [\dot{b}_2 - i\frac{\epsilon}{2} b_2] = F_{21} b_1 \\ i\hbar [\dot{b}_1 + i\frac{\epsilon}{2} b_1] = F_{21}^* b_2 \end{cases} \quad \text{Решение в виде: } \begin{pmatrix} b_2(t) \\ b_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

$$\begin{cases} i\hbar [-i\omega b_2 - i\frac{\epsilon}{2} b_2] = F_{21} b_1 \\ i\hbar [-i\omega b_1 + i\frac{\epsilon}{2} b_1] = F_{21}^* b_2 \end{cases} \quad \text{set } = 0 \text{ и реш. решение}$$

$$\hbar^2 [\omega^2 - \frac{\epsilon^2}{4}] = |F_{21}|^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\epsilon^2}{4} + \frac{|F_{21}|^2}{\hbar^2} \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{|F_{21}|^2}{\hbar^2}}$$

$$\begin{pmatrix} b_2(t) \\ b_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}_1 e^{-i\omega t} + \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}_2 e^{i\omega t}$$

$$-\hbar \left[-\sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{|F_{21}|^2}{\hbar^2}} - \frac{\epsilon}{2} \right] b_2 = F_{21} b_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} F_{21} \\ \hbar(\omega + \frac{\epsilon}{2}) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} F_{21} \\ \hbar(-\omega + \frac{\epsilon}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_2(t) \\ b_1(t) \end{pmatrix} = \tilde{c}_1 \begin{pmatrix} F_{21} \\ \hbar(\omega + \frac{\epsilon}{2}) \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + \tilde{c}_2 \begin{pmatrix} F_{21} \\ \hbar(-\omega + \frac{\epsilon}{2}) \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$t=0 \Rightarrow b_1 = 1; b_2 = 0 \Rightarrow \tilde{c}_2 = -\tilde{c}_1$$

$$\Rightarrow b_2(t) = \tilde{c}_1 F_{21} e^{-i\omega t} + \tilde{c}_2 F_{21} e^{i\omega t} = -2i \tilde{c}_1 \sin \omega t \cdot F_{21}$$

$$b_1(t) = \frac{1}{\hbar} c_1 \left[\left(\omega + \frac{\epsilon}{2} \right) e^{-i\omega t} - \left(-\omega + \frac{\epsilon}{2} \right) e^{i\omega t} \right]$$

$$t=0 \Rightarrow c_1 \frac{1}{\hbar} \cdot 2\omega = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2\hbar\omega} ; c_2 = -\frac{1}{2\hbar\omega}$$

$$\begin{cases} b_2 = \frac{1}{2\hbar\omega} (-2i \sin \omega t) F_{21} \\ b_1 = \frac{1}{2\omega} \left[\omega (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) + \frac{\epsilon}{2} (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_2 = -\frac{i}{\hbar\omega} F_{21} \sin \omega t \\ b_1 = \cos \omega t - \frac{i\epsilon}{2\omega} \sin \omega t \end{cases} \quad \Bigg\| \rightarrow \text{general BP}$$

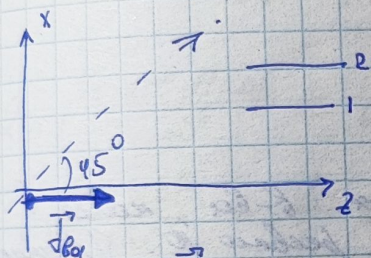
$$\psi = \left[\cos \omega t - i \frac{\epsilon}{2\omega} \sin \omega t \right] \psi_1^{(0)} e^{-i\frac{\epsilon}{2}t} - \frac{i F_{21}}{\hbar\omega} \sin \omega t \cdot \frac{1}{2} e^{i\frac{\epsilon}{2}t}$$

$$P_{1 \rightarrow 2}(t) = |b_2|^2 = \frac{|F_{21}|^2}{\hbar^2 \omega^2} \sin^2 \omega t$$

7. Докажите, что оператор взаимодействия $V = -(\vec{J} \cdot \vec{E})$ для реальных величин в эквивалентности имеет мнимую величину.

ан. н 4. (2) $\rightarrow$ для этого верифици

8. На двухуровневой атом с дипольным моментом $\vec{d}_{ba}$, напр. по ос. oz , порожд резонансное ($\omega = \omega_{ba}$) ЭМ П, сост. из двух взаимно перпендикулярных плоских волн с амплитудой E_0 и частотой ω . Волны распространяются перпендикулярно друг к другу (по осям ox и oy). Как происходит взаимодействие этих волн с атомом? Какова вер-ть спонтанного излучения атома в напр. по осям ox и oy и какова частота излучения?



$$P_{\text{изл.}} = \frac{n \omega^3 (\vec{e}_x \vec{d}_{ba})^2}{2 \pi \hbar c^3} \cdot F(\omega) \cdot g_a = 1.$$

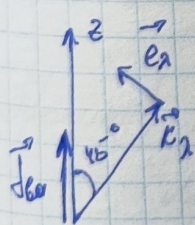
$$(\vec{e}_x, \vec{d}_{ba}) = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{d}_{ba}) = (\vec{e}_1, \vec{d}_{ba}) + (\vec{e}_2, \vec{d}_{ba}) = 0$$

$$= (\vec{e}_1, \vec{d}_{ba}) = \pm |d_{ba}|$$

$\Rightarrow$ спонт. изл. погл. только в напр. z .

$$P_{\text{изл. погл.}} \approx P_{\text{изл. изл.}} = \frac{n \omega^3 |d_{ba}|^2}{2 \pi \hbar c^3}$$

Спонтанное излучение - по всем направлениям. $\Rightarrow$ для 45°



$$(\vec{e}_x, \vec{d}_{ba})^2 = |d_{ba}|^2 \sin^2 \theta = \{ \theta = 45^\circ \} = \frac{|d_{ba}|^2}{2}$$

$$\Rightarrow P_{\text{изл.}}^{(45^\circ)} = \frac{n \omega^3 |d_{ba}|^2}{4 \pi \hbar c^3}$$

26. Опр-ть импульсов коэр. уст. слабого сигнала в 2-х уровнях, если коэр. амплитуда $N_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, вероятность исп. $\hbar\omega = 10^2 \text{ с}^{-1}$. Аппарат имеет форму поршня с иерархией, оп-ой спонтанности излучения

$$g = \Gamma_{\text{изл}} \cdot \Delta N \Rightarrow \Gamma_{\text{изл}} = \frac{4\pi^2}{\hbar c} \omega_{21}^2 F(\omega) \Delta z_1^2$$

$$A_{\text{сп}} = \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\hbar c^3} \Delta z_1^2; \quad F(\omega) \approx \frac{2}{\pi \Delta \omega} \approx \frac{2}{\pi A_{\text{сп}}}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{изл}} &= \frac{4}{3} \frac{\pi^2 \omega^5}{\hbar c^3} \Delta z_1^2 \cdot F(\omega) \cdot \frac{3c^2}{\omega^2} = \pi^2 A_{\text{сп}} \cdot \frac{2}{\pi A_{\text{сп}}} \cdot \frac{3c^2}{\omega^2} = \\ &= \frac{6 \cdot \lambda^2}{4\pi} \approx \frac{3\lambda^2}{2} \end{aligned}$$

27. Отношение населенностей двух ур-ов для в-ва, находя в сост. равнов. при температуре 300 К, равно 10. В каком частоту излучения, соотв. переходу между этими уровнями.

$$\begin{array}{c} N_2 \\ \times \times \times \times \times E_2 \\ \hline N_1 \\ \times \times \times \times \times E_1 \end{array} \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{10}$$

$$T = 300 \text{ К}; \quad k = 1,38 \cdot 10^{-23}; \quad h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

Исп.-е распр. Больцмана:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} = \frac{\hbar\omega}{kT} = \ln \frac{N_2}{N_1}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{kT}{\hbar} \ln \left(\frac{N_1}{N_2} \right) \approx 1,44 \cdot 10^{13} \text{ Гц.}$$

28. Оценить мин. мощность накачки (к.п.д. = 100%), необход для создания инверсии в твердотельном лазере с सकонч. активными ионами $n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $V_{\text{кр}} = 10 \text{ см}^3$. Частота срединной линии оптич. накачки $\omega = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$. Время жизни ионов на верхнем рабочем уровне $\tau_{\text{жиз}} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ с}$.

Погл. мощность:

$$P_{\text{погл}} = \hbar\omega P_{1 \rightarrow 2} \cdot \Delta N = \frac{\hbar\omega N_0 \cdot B_{12} \cdot \rho_{12}}{1 + 2\rho_{12} B_{12} \tau_{\text{жиз}}} = P_{\text{нак.}}$$

$$B_{12} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega^3} A_{21}$$

$$P_{\text{погл}}(\omega) = \frac{I_{\text{ин}}(\omega)}{c} F(\omega) \approx \frac{I_{\text{ин}}(\omega)}{c} \cdot \frac{2}{\pi A_{\text{сп}}} \approx \frac{P_{\text{нак.}}}{c V^{2/3}} \cdot \frac{2}{\pi A_{\text{сп}}}$$

$$u[B_5], \quad I = \left[\frac{B_5}{cm^2} \right] \rightarrow u = I \cdot S \approx I \cdot V^{2/3}$$

$$\hbar \omega N_0 = \frac{\pi^2 c^3 A_{en}}{\hbar \omega^3} \cdot \frac{u_{nuc}}{c V^{2/3}} \cdot \frac{2}{\pi A_{en}} \quad n = \frac{N_0}{V} \Rightarrow$$

$$1 + 2 \frac{u_{nuc}}{c V^{2/3}} \cdot \frac{2}{\pi A_{en}} \cdot \frac{\pi^2 c^3 A_{en}}{\hbar \omega^3} \tau_{en}$$

$$= \frac{n V \cdot \frac{\pi^2 c^3 A_{en}}{\omega^2} \cdot \frac{u_{nuc}}{c V^{2/3}} \cdot \frac{2}{\pi A_{en}}}{1 + \frac{4 u_{nuc}}{c V^{2/3}} \cdot \frac{\pi c^3}{\hbar \omega^3} \tau_{en}} = \frac{n V^{1/3} \frac{\pi c^2 u_{nuc}}{\omega^2} 2}{1 + \frac{4 u_{nuc} \pi c^2}{V^{2/3} \hbar \omega^3} \tau_{en}} = u_{nuc}$$

$$2 n V^{1/3} \frac{\pi c^2 u_{nuc}}{\omega^2} = u_{nuc} + \frac{4 u_{nuc} \pi c^2 \tau_{en}}{V^{2/3} \hbar \omega^3} \cdot \frac{1}{2 u_{nuc}}$$

$$n V^{1/3} \frac{\pi c^2}{\omega^2} - \frac{1}{2} = \frac{2 u_{nuc} \pi c^2 \tau_{en}}{V^{2/3} \hbar \omega^3}$$

$$u_{nuc} \sim \frac{1}{2} \frac{V^{2/3} \hbar \omega^3}{\pi c^2 \tau_{en}} \left[n V^{1/3} \frac{\pi c^2}{\omega^2} - \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{V^{2/3} \hbar \omega^3}{\pi c^2 \tau_{en}} \left[n V^{1/3} \frac{\pi c^2}{4 \pi^2 \omega^2} - \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2 \pi} \left[n V \cdot \hbar \omega - \frac{V^{2/3} \hbar \omega^3}{\pi c^2} \right] = \frac{1}{2 \pi} \left[n V \cdot \frac{\hbar}{2 \pi} \cdot 2 \pi \omega - \frac{V^{2/3} \hbar \omega^3}{\pi c^2} \right] \approx \frac{1}{2} n V \cdot \hbar \omega \cdot \frac{1}{\tau_{en}} \approx \frac{1}{2} n V \cdot \hbar \omega \cdot A_{en}$$

$$\approx \frac{1}{2} n V \cdot \hbar \omega \cdot \frac{1}{\tau_{en}} \approx \frac{1}{2} n V \cdot \hbar \omega \cdot A_{en}$$

Проце! Нулевое слагаемое убавлено:

$$u_{nuc} = u_{en} = \hbar \omega_{21} A_{21} \cdot \left(\frac{N_0}{2} + 1 \right) \approx \frac{n V}{2} \cdot \frac{1}{\tau_{en}} \cdot \hbar \omega_{21}$$

43. Мощность непрерывной излучения полусферического лазера равна 10 Вт , длина волны излучения $\lambda = 0,8 \text{ мкм}$, ширина спектр. линии $\Delta \nu = 100 \text{ МГц}$, радиус зеркала ближнего поля 1 см $\times$ 10 см . По какой температуре надо нагреть абсолютно черное тело, чтобы его спектральная яркость в заданном диапазоне достигла яркости на зеркале лазера?

Спектр. пл-ть энергии излучения АЧТ (абс. черн. тела):

$$u_\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Тогда СПМ на границе излуч. поверхности в зад. интервале частот:

$$J_{\text{АЧТ}} = c u_\nu = \frac{8\pi \nu^2 h\nu}{c^2 (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)}$$

Спектральная яркость лазера:

$$J_{\text{лаз}} = \frac{P}{\Delta \nu \cdot S} = \frac{10 \cdot 10^{-5}}{100 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-12}} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{Гц}} = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{Гц}} = 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \text{Гц}}$$

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 = \frac{8\pi^2 h \nu^3}{c^2 J_{\text{АЧТ}}} \Rightarrow \frac{h\nu}{kT} = \ln \left(1 + \frac{8\pi^2 h \nu^3}{c^2 J_{\text{лаз}}} \right)$$

$$T = \frac{h\nu}{k \ln \left(1 + \frac{8\pi^2 h \nu^3}{c^2 J_{\text{лаз}}} \right)} = \frac{hc}{\lambda k_B \ln \left(1 + \frac{8\pi^2 hc}{\lambda^3 J_{\text{лаз}}} \right)} = 5,87 \cdot 10^3 \text{ К}$$