ЗАДАЧИ НА ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Применяя свойства преобразования Лапласа, найти изображение следующего оригинала
$$f(t) = \int_1^\infty \frac{\cos \tau t}{\tau}\, d\tau.$$

2. Применяя операционное исчисление, решить задачу о распространении граничного режима по полубесконечной струне, т.е. решить уравнение
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x < +\infty,\ t > 0)$$
с нулевыми начальными условиями и граничным условием: $u(0,t) = \mu(t)$.

3. Применяя операционное исчисление, решить систему уравнений
$$x' - y' - y = e^t,$$
$$2x' + y' + 2y = \cos t,$$
с начальными условиями: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

4. Применяя операционные методы, вычислить интеграл
$$\int_0^t \tau \cos(t-\tau) e^{-\tau}\, d\tau.$$

5. Применяя операционные методы, найти оригинал по заданному изображению
$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a/p}.$$

6. Применяя операционное исчисление, найти решение интегрального уравнения
$$y(t) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t (t-\tau) e^{-(t-\tau)} y(\tau) d\tau.$$

7. Применяя свойства преобразования Лапласа, найти изображение одного из интегралов Френеля
$$S(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\, d\tau.$$

8. Применяя свойства преобразования Лапласа, найти изображение оригинала $f(t) = A\{t\}$, где $\{t\}$ - дробная часть t.

9. Применяя равенство Парсеваля, вычислить интеграл
$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{x^2+b^2}\, dx \qquad (a > 0).$$

10. Применяя операционное исчисление, решить задачу о вынужденных колебаниях полубесконечной струны с жестко закрепленным концом $x = 0$ под действием синусоидальной силы, т.е. решить уравнение
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \sin \omega t$$
$(0 \le x < +\infty,\ t > 0)$ с нулевыми начальными условиями.

11. Применяя операционные методы, найти решение дифференциального уравнения
$$x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t$$
с начальными условиями: $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

12. Применяя операционное исчисление, решить систему дифференциальных уравнений для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$
$$x' + y + z = 0,$$
$$y' + x + z = 0,$$
$$z' + x + y = 0$$
с начальными условиями: $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

13. Применяя теорему Эфроса, найти оригинал, соответствующий следующему изображению:
$$F(p) = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\left(\sqrt{p}+a\right)}.$$

14. Применяя операционное исчисление, найти решение интегрального уравнения

$$\int_0^t J_0(t-\tau)y(\tau)d\tau = \sin\, t,$$

где $J_0(t)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

15. Применяя равенство Парсеваля, вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^{15}}{(x+2)^{19}}\, dx.$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ

1. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty x^n e^{-x^2} \cos 2bx\, dx \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

2. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\, \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

3. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^{\pi/2} \ln(1+p\cos^2 x)\, dx \qquad (p \geq -1).$$

4. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2+b^2 \mathrm{tg}^2 x)\, dx.$$

5. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\operatorname{sh} \alpha x} dx.$$

6. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+p\cos x)}{\cos x}\, dx \qquad (|p|<1).$$

7. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty \exp\left(-a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}\right) dx.$$

8. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}(p\sqrt{1-x^2})\, \frac{dx}{1-x^2}\, .$$

9. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\, \frac{\sin^2 bx}{x}\, dx \qquad (a>0).$$

10. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} \sin^2 mx\, dx \qquad (a>0).$$

11. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{x}\right) \sin mx\, dx \qquad (a, m > 0).$$

12. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin\frac{\gamma^2}{x^2}\, dx.$$

13. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{p+q\sin x}{p-q\sin x}\right) \frac{dx}{\sin x} \quad (p>q>0).$$

14. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(1+a\sin^2 x\right) \cos^2 x\, dx \quad (a>-1).$$

15. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty \frac{xJ_0(bx)}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx,$$
где $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

1. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos kx}{x^{\alpha+1}}\, dx.$$

2. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\, dx.$$

3. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}.$$

4. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a\,\mathrm{tg} x)\sin^{\mu-1}(2x)\, dx.$$

5. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}\,(1-x)^{3/2}}{(1+x)^4}\, dx.$$

6. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_0^{\pi} x\sin^p x dx.$$

7. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\,\alpha x}{\mathrm{ch}\,\beta x}\, dx.$$

8. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{1} \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\, dx.$$

9. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)^{\cos 2\alpha} dx.$$

10. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} \ln x\, dx.$$

11. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{nx-re^x}\, dx.$$

12. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+a^2}\right)^p \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

13. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_0^{1} \frac{x(1-x)^6}{(1-3x+3x^2)^3}\, dx.$$

14. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^p x}{1+\cos x}\, dx.$$

15. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\infty} \cos(x^p)\, dx.$$