05.02.22.

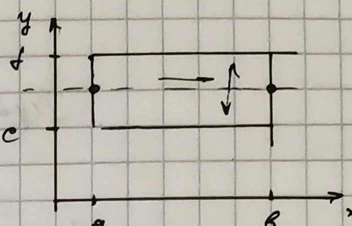
# Собственные интегралы, зависящие от параметра.

**Опр.** Пусть ф-я $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ и интегрируема по $x$ для $\forall y \in [c,d]$.

Тогда,

$$I(y) = \int_a^b f(x,\underline{\underline{y}})\,dx$$

— собственный инт-л, зависящий от параметра "$y$"




**Св-ва:**

① Если $f(x,y)$ — непрерывна в $\Pi$, то $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

② Если $f(x,y)$ — непрерывна в $\Pi$, то $I(y)$ — интегрируема на $[c,d]$ и спр-ва формула:

$$\exists \int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy \qquad (1)$$

③ Если $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ — непрерывны в $\Pi$, то $I(y)$ дифф-ма в инт-ле $(c,d)$ и справедлива ф-ла:

$$\boxed{I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx} \qquad (2)$$

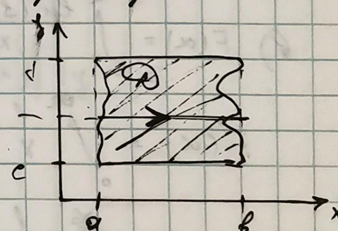
Из 1го св-ва:

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0), \quad \forall y_0 \in [c,d]$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx,} \qquad (3)$$

## Общий вид собственного интеграла, зависящего от параметра:

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,\underline{y})\,dx$$




Если $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ — непрерывны в $D \subset \Pi$, а $a(y)$ и $b(y)$ — дифф-мы в интервале $(c,d)$, то

$$\exists \boxed{I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx + b'(y)\cdot f(b(y),y) - a'(y)\cdot f(a(y),y)} \qquad (4.)$$

~ правило Лейбница

## Методы вычисления интегралов.

① Дифференцирование по параметру:

$$I(y) = \int_a^b f(x,\underline{y})\,dx$$

$$I'(y) = \int_a^b \underline{f'_y(x,y)}\,dx \to \text{вычисляем} = g(y)$$

$$I(y) = \int g(y)\,dy + C$$

Находим $y=y_0$, чтобы изначальный интеграл стал простым.

$$I(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)\,dx$$

$$I(y_0) = \int g(y)\,dy\Big|_{y=y_0} + C = A$$

$$\underbrace{I''(y) = \int_a^b f''_{yy}(x,y)\,dx}$$ — можно продолжить, но придётся искать две константы.

② Интегрирование по параметру.

$$\int_a^b [\underbrace{H(x,d) - H(x,c)}_{e^{-dx} - e^{-cx}}]\,dx = \int_a^b H(x,y)\Big|_{y=c}^{y=d} dx = \int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial H}{\partial y}\,dy = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial H}{\partial y}\,dx$$

№3718. (а, б)

а) $F(\alpha) = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $F'(\alpha)$ - ?

$$F'(\alpha) = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2}\cdot e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx - \sin\alpha\cdot e^{\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}} - \cos\alpha\cdot e^{\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}} =$$

$$= \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2}\cdot e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx - \sin\alpha\cdot e^{\alpha\cdot|\sin\alpha|} - \cos\alpha\cdot e^{\alpha|\cos\alpha|}$$

б) $F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$, $F'(\alpha)$ - ?

$$F'(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1+\alpha x}\,dx + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} - 0 =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cdot\ln(1+\alpha x)\Big|_0^\alpha + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} = \frac{2}{\alpha}\cdot\ln(1+\alpha^2)$$

№3720. $F(y) = \int_a^b f(x)\,|y-x|\,dx$, $F''(y) = ?$ ; $a<b$, $f(x)$ — непр. на $[a,b]$


$$F(y) = \begin{cases} \int_a^b f(x)\,(y-x)\,dx, & y>b \\ -\int_a^b f(x)\,(y-x)\,dx, & y<a \\ \int_a^y f(x)\,(y-x)\,dx + \int_y^b f(x)\,(x-y)\,dx, & y\in(a,b) \end{cases}$$

$$F'(y) = \begin{cases} \int_a^b f'(x)\,dx, & y > b \\ -\int_a^b F(x)\,dx, & y < a \\ *, & y \in [a, b] \end{cases}$$

$$* = \int_a^y f(x)\,dx + f(y)(y-y) - \int_y^b f(x)\,dx, \quad y \in [a, b]$$

$$F''(y) = \begin{cases} 0, & y > b \\ 0, & y < a \\ **, & y \in [a, b] \end{cases}$$

$$** = f(y) + f(y) = 2f(y), \quad y \in [a, b]$$

№3722.1.

Найти представление "n-ой" производной ф-ии $\frac{\sin x}{x}$ через интеграл, зав. от пар-ра и оценить её абс. значение.

$$\frac{\sin x}{x} \to \frac{\sin yx}{x}\Big|_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin yx}{x}\right)dy = \int_0^1 \cos yx\,dy = F$$

$$F' = -\int_0^1 y \cdot \sin yx\,dy = \int_0^1 y \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + yx\right)dy$$

$$\cancel{F'' = -\int_0^1 y^2 \cos yx\,dy}$$

$$\cancel{F''' = \int_0^1 y^3 \cos}$$

$$F'' = -\int_0^1 y^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + yx\right)dy = \int_0^1 y^2 \cdot \cos(\pi + yx)\,dy$$

$$\Rightarrow F^{(n)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(n)} = \int_0^1 y^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n + yx\right)dy \quad ✓$$

$$\left|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(n)}\right| = \left|\int_0^1 y^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n + yx\right)dy\right| \le \int_0^1 \left|y^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n + yx\right)\right|dy \le$$

$$\le \int_0^1 y^n \cdot 1\,dy = \frac{y^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

№3734.

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\,\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx$$

$$I'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{1+\alpha^2 \operatorname{tg}^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha^2 \operatorname{tg}^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \to t \to \infty \end{array} \right\}$$

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$dx = \cos^2 x\,dt$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\cancel{=}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\cancel{(t^2+1)}\,dt}{1+\alpha^2 t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(1+\alpha^2 t^2)} \circledcirc$$

$$f(t) = \frac{1}{(t^2+1)(1+\alpha^2 t^2)} = \frac{1}{\alpha^2 (t-i)(t+i)\left(t-\frac{i}{\alpha}\right)\left(t+\frac{i}{\alpha}\right)}$$

$t = i$ ; $t = \frac{i}{\alpha}$ – полюса 1го порядка, $\alpha > 0$, $g(\alpha)$ – нечётна.

$$\operatorname*{Res}_{t=i} f(t) = \lim_{t\to i} \frac{1}{\alpha^2 (t+i)\left(t^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)} = \frac{1}{2i(1+\alpha^2 i^2)} = \frac{1}{2i(1-\alpha^2)}$$

$$\operatorname*{Res}_{t=\frac{i}{\alpha}} f(t) = \lim_{t\to\frac{i}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^2 (t^2+1)\left(t+\frac{i}{\alpha}\right)} = \frac{\alpha}{\alpha^2 \cdot 2i\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{(\alpha^2-1)\,2i\alpha} = \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)\,2i}$$

$$\circledcirc\ 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2i(1-\alpha^2)} + \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)2i}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha^2} - \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha^2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha)}\right) = \underline{\frac{\pi}{2(1+\alpha)}}$$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\int \frac{d\alpha}{1+\alpha} + C = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha) + C$$

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx \quad \to \quad g(+0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{g = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha), & \alpha > 0 \\ +\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha), & \alpha < 0 \end{cases}}$$

$$g = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha), & \alpha > 0 \\ -\frac{\pi}{2}\ln(1-\alpha), & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$g = \frac{\pi}{2}\ln(1+|\alpha|)\cdot \operatorname{sgn}\alpha.$$

Домашняя работа 3721, 3726*, 3728, 3729, 3735, 3736, 3738(а)

3719 (б, д)

б) $F(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$

$\cancel{F'(\alpha) = +1 \cdot \frac{\sin a(b+\alpha)}{(b+\alpha)} - 1 \cdot \frac{\sin a(a+\alpha)}{(a+\alpha)}}$

$f'_\alpha(\alpha) = \frac{x}{x} \cdot \cos \alpha x = \cos \alpha x$

$F'(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \cos \alpha x \, dx + \frac{\sin \alpha (b+\alpha)}{b+\alpha} - \frac{\sin \alpha (a+\alpha)}{a+\alpha} =$

$= \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \Big|_{a+\alpha}^{b+\alpha} + \frac{\sin \alpha (b+\alpha)}{(b+\alpha)} - \frac{\sin \alpha (a+\alpha)}{a+\alpha} = \sin \alpha (b+\alpha) \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b+\alpha}\right] - \sin \alpha (a+\alpha) \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a+\alpha}\right]$

д) $F(\alpha) = \underbrace{\int\limits_0^{\alpha^2} dx}_{(2)} \underbrace{\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin (x^2+y^2-\alpha^2) dy}_{(1)}$

$F'(\alpha) = \{$от произведения$\} = 2\alpha \cdot \int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \sin (\alpha^4+y^2-\alpha^2) dy + \int\limits_0^{\alpha^2} dx \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin (x^2+y^2-\alpha^2) dy\right] =$

$= 2\alpha \int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \sin (\alpha^4+y^2-\alpha^2) dy + \int\limits_0^{\alpha^2} \Big\{ \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} (-2\alpha) \cos (x^2+y^2-\alpha^2) dy + 1 \cdot \sin (2x^2+2x\alpha) + 1 \cdot \sin (2x^2-2x\alpha) \Big\} dx$

$= 2\alpha \int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \sin (\alpha^4+y^2-\alpha^2) dy + \int\limits_0^{\alpha^2} \Big\{ \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} (-2\alpha) \cos (x^2+y^2-\alpha^2) dy + 2 \sin 2x^2 \cos 2x\alpha \Big\} dx =$

$= 2\alpha \int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \sin (\alpha^4+y^4-\alpha^2) dy + 2 \int\limits_0^{\alpha^2} \sin 2x^2 \cos 2x\alpha \, dx - 2\alpha \int\limits_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos (x^2+y^2-a^2) dy$

3721. 1. Найти $F''(x)$, если

$F(x) = \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h d\xi \int\limits_0^h f(x+\xi+\eta) d\eta \quad (h>0)$, где $f(x)$ – непр. ф-я.

$\cancel{F'(x) = 0 + \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h d\xi \left\{ \int\limits_0^h f'_x \, d\eta + 0 - 0 \right\}}$

$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x+\xi+\eta = u & \to d\eta = du \\ \cancel{x+\xi+h} & x+\xi+h = \end{array} \right\} = \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h d\xi \int\limits_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u) du$

$F'(x) = 0 + \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h d\xi \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u) du \right\} = \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h d\xi \left\{ \int\limits_{x+\xi}^{x+\xi+h} f'_u(u) du + 0 + 0 \right\} =$

$= \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h \left(f(x+\xi+h) - f(x+\xi)\right) d\xi = \left\{ \begin{array}{l} x+\xi = u \\ (x+2h) \\ x+h \end{array} \to d\xi = du \right\} =$

$= \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h f(x+\xi+h) d\xi - \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h f(x+\xi) d\xi = \frac{1}{h^2} \int\limits_{x+h}^{x+2h} f(u) du - \frac{1}{h^2} \int\limits_x^{x+h} f(u) du$

$F''(x) = \frac{1}{h^2} \cdot (f(x+2h) - f(x+h)) - \frac{1}{h^2} (f(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h^2} (f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x))$

**3721.2.** Найти $F^{(n)}(x)$, если

$$F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt \quad ?$$

**3735.**

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\,\frac{dx}{\cos x} \qquad (|a|<1)$$

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial a}\left[\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right]\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-a\cos x)}{(1+a\cos x)}\cdot\frac{\cos x\,(1-a\cos x)+\cos x\,(1+a\cos x)}{(1-a\cos x)^2}\,\frac{dx}{\cos x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cancel{a\cos x}+1+\cancel{a\cos x})}{(1+a\cos x)(1-a\cos x)}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\,dx}{1-a^2\cos^2 x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2\cos^2 x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2\cos^2 x}=\left\{\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,x=t \\ \frac{dx}{\cos^2 x}=dt \end{array}\right\} \circledcirc \quad \to \quad dx=\cos^2 x\,dt$$

$$1+\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\;;\qquad \cancel{1+\mathrm{tg}^2 x}\qquad \cos^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

$$\circledcirc \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-a^2\right)}=\int_0^{+\infty}\frac{\cancel{\cos^2 x}\,dt}{\cancel{\cos^2 x}\,(1+t^2-a^2)}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1-a^2)+t^2}=\{\text{т.к. } |a|<1\}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{1-a^2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}}+C$$

$$I'(a)=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

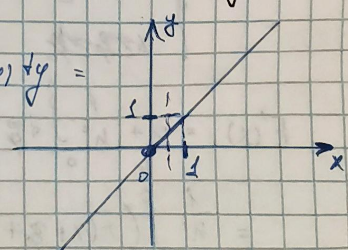
$$I(a)=\pi\int\frac{da}{\sqrt{1-a^2}}=\pi\cdot\arcsin a+C$$

$I(0)=0$ ; $\arcsin 0=0$ $\to$ $C=0$

$$\underline{I(a)=\pi\cdot\arcsin a}$$

**3728.**

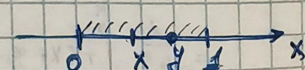
$$u(x)=\int_0^1 K(x,y)\,v(y)\,dy\,,\quad \text{где}\quad K(x,y)=\begin{cases} x(1-y), & \text{если } x\le y\\ y(1-x), & \text{если } x>y\end{cases}$$



$$u(x)=\int_0^1 K(x,y)\,v(y)\,dy=\int_0^x K(x,y)\,v(y)\,dy+\int_x^1 K(x,y)\,v(y)\,dy=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} 1:\ 0\le y\le x\\ 2:\ x\le y\le 1\end{array}\right|\Rightarrow K(x,y)\Bigg\}=$$

$$=\int_0^x y(1-x)\,v(y)\,dy+\int_x^1 x(1-y)\,v(y)\,dy$$



$0\le x\le 1.$

$$u'(x)=\int_0^x -y\,v(y)\,dy+1\cdot x(1-x)\,v(x)+0+$$

$$+\int_x^1(1-y)\,v(y)\,dy-1\cdot x(1-x)\,v(x)=$$

$$= -\int_0^x y\,v(y)\,dy + \int_x^1 (1-y)\,v(y)\,dy$$

$$u''(x) = -1\cdot x\,v(x) - 1\cdot(1-x)\,v(x) = -v(x) - x v(x) + x v(x) = -v(x)$$

$\Rightarrow \quad u''(x) = -v(x)$ $(x\in[0,1])$, что и треб. док-ть.

**3729.** $F(x,y) = \int_{x/y}^{xy} (x-yz)\,f(z)\,dz$, где $f(z)$ – дифференцируемая ф-я.

Найти $F''_{xy}(x,y)$ – ?

$$F'_x = \int_{x/y}^{xy} f(z)\,dz + y(x-xy^2)f(xy) - \frac{1}{y}\underbrace{(x-x)}_{=0}f\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$= (xy)(1-y^2)f(xy) + \int_{x/y}^{xy} f(z)\,dz = (xy-xy^3)f(xy) + \int_{x/y}^{xy} f(z)\,dz$$

$$F''_{xy} = x(1-y^2)f(xy) + xy\cdot f(xy)\cdot(-2y) + xy(1-y^2)f'(xy)\cdot x +$$

$$+ x\cdot f(xy) + \frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right) = f(xy)\cdot(x-xy^2-2xy^2) + x^2y(1-y^2)f'(xy) +$$

$$+ x\cdot f(xy) + \frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$= (x-3xy^2)f(xy) + x^2y(1-y^2)f'(xy) + x\cdot f(xy) + \frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)$$

**3736.** Пользуясь формулой $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$ вычислить.

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2} = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$ $y$ – параметр.

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} yx}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\cos t = 1 \to t = 0$

$$I'_y = \int_0^1 \frac{1}{\cancel{x}\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\cancel{x}\,dx}{1+y^2x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+y^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \left\{\begin{array}{l} x = \cos t \\ dx = -\sin t\,dt \end{array}\right\} =$$

$\cos t = 0 \to t = \frac{\pi}{2}$

$0 \le x \le 1 \to \sin t > 0$

$$= \int_{\pi/2}^0 \frac{-\sin t\,dt}{(1+y^2\cos^2 t)\sin t} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1+y^2\cos^2 t)} = \{u = \operatorname{tg} t\} =$$

$u=0 \quad t=0$

$t=\frac{\pi}{2} \quad u=\infty$

$1+\operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ ; $du = \frac{dt}{\cos^2 t} \to dt = du\cdot\cos^2 t$

$$= \int_0^\infty \frac{\cos^2 t\,du}{\cos^2 t\left(\frac{1}{\cos^2 t}+y^2\right)} = \int_0^\infty \frac{du}{(1+y^2+u^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1+y^2}}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$$

$$I(y) = \frac{\pi}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2}\ln\left(|y+\sqrt{y^2+1}|\right) + C$$

$$I(0) = 0 \quad \to \quad C = 0$$

$$\underset{\sim}{I} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2}\ln\left(|y+\sqrt{y^2+1}|\right)\Big|_0^1 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$$

Ответ: $I = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

**3738 (а).** $I = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$ ?

$$e^{b} < e^{ax}$$

$$bx < ax \qquad b < a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(\cos 2\alpha + 1)\right) =$$

$$= \sin\left(\cancel{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\cos 2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos 2\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot(2\cos^2\alpha - 1)\right) =$$

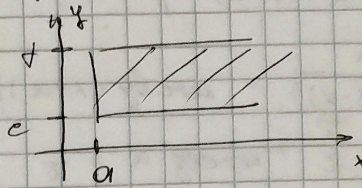
$$= \cos\left(\pi\cos^2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi\cos^2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

## Равномерная сходимость несобственных интегралов.

Опр. Пусть ф-я $f(x,y)$ опред. в бесконечн. полуполос. в $\Pi_\infty = [a, \infty] \times [c, d]$ и интегр. эта ф-я от $a$ до $+\infty$ для $\forall y \in [c, d]$, тогда



$$G(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$ – несобств. интегр, зав. от пар. $y$.

Опр. Равномерн. сходимость.
Несобств. инт. 1 го рода $G(y)$ наз-ся равномерно сход. относит. $y \in [c, d]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A = A(\varepsilon) \geq a : \ \forall R > A(\varepsilon) : \left| \int_R^\infty f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Признаки достаточности равномерной сходимости:

1) Признак Вейерштрасса:
Если в $\Pi_\infty$ выполняется неравенство

$$|f(x,y)| \leq g(x) \text{ и } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ – сходится, то}$$

$$G(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dy \text{ – равн. сход.}$$

2) Признак Дини:
Если ф-я $f(x,y) \geq 0$ и непрерывна в $\Pi_\infty$, а $G(y) \in C(c, d)$, то интегр. $G(y)$ равн. сх-ся на $[c, d]$

3) Признак Дирихле:
Если ф-я $f(x,y)$ интегр по $x$ от $a$ до $R$, $R > a$ для $\forall y \in [c, d]$ и имеет огр. первообразную, то есть

$$\exists M > 0 : \left| \int_a^R f(x,y)\,dx \right| < M \text{ для } \forall R > a \text{ и } \forall y \in [c, d],$$

$g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то интеграл

$$\int_a^\infty f(x,y)\, g(x)\,dx \text{ равном. сх. отн } y \text{ на } [c, d].$$

4) Признак Абеля:
Пусть $\int_a^\infty f(x)\,dx$ – сх-ся, а ф-я $g(x,y)$ равном-огр. в $\Pi_\infty$:

$\exists M > 0 \ |g(x,y)| \leq M$ для $\forall (x,y) \in \Pi_\infty$.

Тогда $$\int_a^\infty f(x)\, g(x,y)\,dx \text{ равн. сх. отн. } y \text{ на } [c, d]$$

Проверка неравном. сходимости:
Если $f(x,y) \in C(\Pi_\infty)$ и $G(y)$ – равномерно сх-ся отн-но $y$ на $[c, d]$, то $G(y) \in C([c, d])$
Пусть $G(y)$ имеет т. разр. на $[c, d]$, то нарушаем теорему.

3456 $$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \cdot dx \qquad (0 < \alpha_0 \leq \alpha = \infty)$$

...

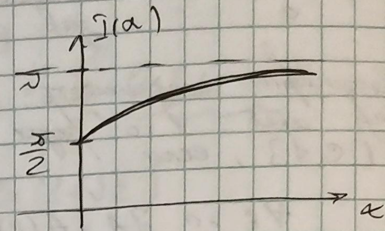
№3750

$$I(\alpha)=\int_0^\infty \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \qquad 0\le\alpha\le\infty$$

$$\left|\frac{1}{1+(x-\alpha)^2}\right|\le 1.$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+(x-\alpha)^2} = \operatorname{arctg}(x-\alpha)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\alpha.$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\alpha = \pi$$

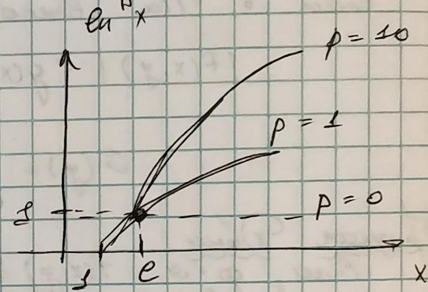



$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{1+(x-\alpha)^2} = \pi\\ &\int_0^\infty \lim_{\alpha\to\infty}\frac{dx}{1+(x-\alpha)^2} = 0\end{aligned}\right\}$$ неравномерн. сх-ть

№3760(б)

$$I(p)=\int_1^{+\infty}\frac{\ln^p x}{x\sqrt x}\,dx \qquad 0\le p\le 10$$

$$\left|\frac{\ln^p x}{x\sqrt x}\right| \le \frac{1}{x\sqrt x}\cdot \begin{cases}1, & 1\le x\le e.\\ \ln^{10}x, & x>e\end{cases}$$




$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt x} + \int_e^\infty \frac{\ln^{10}x}{x\sqrt x}\,dx$$

сх-ся равном. по пр. Вейерштрасса.

$\ln x \le x^\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\ln^{10}x}{x^\varepsilon} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=0$$

№3764(б)

$$I(p)=\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{1+x^p} \qquad (p\ge0)$$ равн-но сход. по Абелю.

$f(x)=\sin x^2$

$g(x)=(1+x^p)^{-1}$

$$|g(x,p)| = \left|\frac{1}{1+x^p}\right| \le 1$$

$\int_0^\infty \sin x^2\,dx$, $x^2=t$ $\quad dt=2x\,dx \to dx=\frac{dt}{2\sqrt t}$

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt t}\,dt$$ $\to$ сх-ся по Дирихле.

Д/З: ~~3751~~, ~~3758~~, ~~3761~~, 3763, 3764, 3768*, ~~3769~~, 3770*

3758.

3768.

3789.

# Домашняя работа.

**3758.** $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx \qquad -\infty < \alpha < \infty$

$f(x,\alpha) = \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}$

$\cos \alpha x \in [0, 1]$

$\Rightarrow \left| \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right| \le \frac{1}{1+x^2} = g(x)$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$

$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ – сх-ся.

$\Rightarrow I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx$ – сх-ся по Вейерштрассу

**3761.** $I(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \frac{\cos x}{x^p}\,dx \qquad (0 \le \alpha < +\infty)$, а $p > 0$ – фиксир.

$g(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{x^p}$ при $x \to +\infty \Rightarrow g(x) \to 0$

$\Rightarrow I(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} \cdot \cos x}{x^p}\,dx = \int\limits_{1}^{+\infty} f(\alpha, x)\, g(x)\,dx$

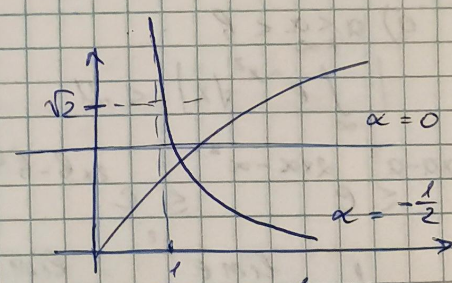
$f(x,\alpha)$ – огр.

$I(\alpha)$ – сх-ся по Дирихле.

**3769.** $\int\limits_0^2 \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \qquad \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right) \to -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$

$\int\limits_0^2 \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} = \int\limits_0^{1/2} \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} + \int\limits_{1/2}^{1} \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} + \int\limits_{1}^{3/2} \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} +$

$+ \int\limits_{3/2}^{2} \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$




$x = 1,\ x = 2$ – особые точки.

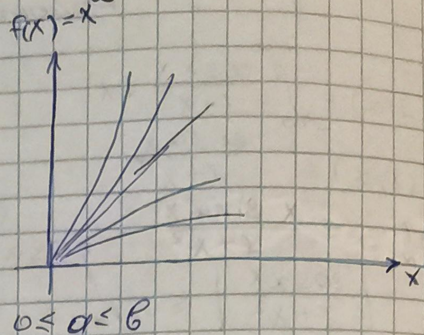
$\left| \frac{x^\alpha}{(x-1)^{1/3}(x-2)^{2/3}} \right| \le \frac{\sqrt{2}}{(x-1)^{1/3}(x-2)^{2/3}}$

$\left| \frac{x^\alpha}{(x-1)^{1/3}(x-2)^{2/3}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)^{1/3}(x-2)^{2/3}}$

$\frac{1}{2} < x < 1$

$-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$

**3757.** $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx \qquad (a\le\alpha\le b)$




$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}\,dx$

$0\le x^a e^{-x}\le x^b e^{-x}$

$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$

$\int\limits_0^\infty x^b\,dx=\frac{x^{b+1}}{b+1}\Big|_0^\infty$ ~ расх.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-x}\le\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^b}{e^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b\,x^{b-1}}{e^x}=\ldots=0$

X $\int\limits_0^{+\infty}x^\alpha e^{-x}\,dx=\left\{\begin{matrix}u=x^\alpha\to du=\alpha\cdot x^{\alpha-1}dx\\ dv=e^{-x}dx\to v=-e^{-x}\end{matrix}\right\}=$

$=\underbrace{-e^{-x}\cdot x^\alpha\Big|_0^\infty}_{\to 0}+\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}\,dx$

$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}x^\alpha e^{-x}\,dx\le\int\limits_0^{+\infty}x^b e^{-x}\,dx$

$f(x,y)=x^\alpha\ \geqslant 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

$\left|\int\limits_0^R x^\alpha\,dx\right|=\left|\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^R\right|=\left|\frac{x^{R+1}}{R+1}\right|\le M.$

~ сходится по Дирихле.

**3763.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\cdot e^{(2x\alpha-\alpha^2)}\,dx$

а) $a<\alpha<b$

$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\right|<M$

$e^{2xa-a^2}\le e^{2x\alpha-\alpha^2}\le e^{2xb-b^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x^2}=0$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx}_{I_2}=$

$=I_1+I_2$

$I_1=\left\{x=-t\quad dx=-dt\right\}=\int\limits_{+\infty}^{0}e^{-(-t-\alpha)^2}\,(-dt)=\int\limits_0^\infty e^{-(t+\alpha)^2}\,dt$

т. е. для $I_1$ и $I_2$ всё будет аналогично.

$$\left|\int_0^R e^{-\alpha^2}\cdot e^{2x\alpha}\,dx\right| = \left|e^{-\alpha^2}\cdot\frac{e^{2x\alpha}}{2\alpha}\right|_0^R\right| \le M \quad \text{- огр. т.к. } \alpha \text{ огр.}$$

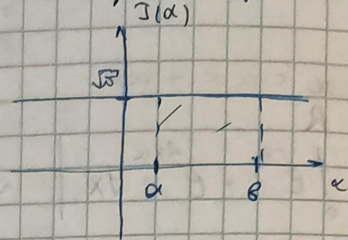
=> сходится по Дирихле.

б) $-\infty < \alpha < +\infty$

№3763. $I(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\alpha)^2}dx$

а) $a<\alpha<b$

б) $I(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\alpha)^2} = \left\{ \begin{array}{l} x-\alpha=t \\ dx=dt \end{array}\right\} \overset{\alpha - \text{конечно}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ ~ интеграл Пуассона.




а) $\Rightarrow$ $a<\alpha<b$

Равномерная сходимость по Дини.

б) $-\infty<\alpha<+\infty$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\alpha\to+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}dx = 0$$

Неравномерная сходимость.

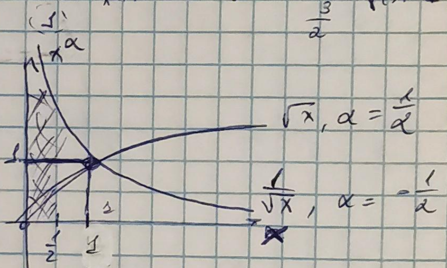
№3769. $I(\alpha)=\int\limits_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$ $\left(|\alpha|<\frac{1}{2}\right)$

Особые точки: $x=0$; $x=1$; $x=2$

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{1/2}\frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}+\int\limits_{1/2}^{1}\frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}+\int\limits_{1}^{3/2}\frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}+\int\limits_{3/2}^{2}\frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$$

$0\le x\le\frac{1}{2}$:

$$\left|\frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\right| \le \frac{1/\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}}=g(x)$$




$$\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}}$$

$x\to+0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{4}}$

$$\int\limits_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$\Rightarrow$ Сходится по Вейерштрассу равном.

Остальные аналогично.

05.03.22.

## Вычисление несобств. интегралов дифф-ем и интегрированием по параметру.

**Теорема** (о дифф-ии по параметру)
Если:

1°. $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ – непр-ны в $\Pi_\infty = [a,\infty)\times[c,d]$

2°. При некот. $y_0 \in [c,d]$ $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ – сх-ся

3°. $\int\limits_a^\infty f'_y(x,y)\,dx$ – рав-но сх-ся отн-но "y" на $[c,d]$,

то $\exists\ \frac{d}{dy}\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty f'_y(x,y)\,dx$ (1)

**Теорема** (об интегрировании по параметру).
Если:

1°. $f(x,y) \in C(\Pi_\infty)$ – непр. в полуполосе,

2°. $\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ – равн-но сх-ся отн-но "y" на $[c,d]$, то

Ф-я $G(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ инт-ма на $[c,d]$ и спр-ва ф-ла:

$$\int\limits_c^d G(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \quad (2)$$

№84. Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n} \quad (n>0)$$

вычислить:

$$I = \int\limits_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx, \quad m\in\mathbb{N}$$

$$I'(n) \overset{?}{=} \int\limits_0^1 \ln x\cdot x^{n-1}\,dx$$

$$\Rightarrow I^{(m)}(n) = \int\limits_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx = G(m,n)$$

$$I^{(m)}(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{(m)} = \frac{(-1)^m\cdot m!}{n^{m+1}}$$ – справедливо, если

$$\int\limits_0^1 \ln x\cdot x^{n-1}\,dx =$$ – сх-ся равномерно?

$$= -\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right) x^{n-1}\,dx = -\frac{1}{n^2}$$ – сх-ся равномерно по Дини.

№3793. $$I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx, \quad \alpha,\beta>0$$

$$I'_\alpha \overset{?}{=} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x}\cdot(-x^2)\cdot e^{-\alpha x^2} = -\int\limits_0^{+\infty} x\cdot e^{-\alpha x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,d(x^2) =$$

$$= \frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha}\Bigg|_0^{\infty} = -\frac{1}{2\alpha}$$

$$I(\alpha,\beta) = -\int \frac{1}{\alpha\alpha} d\alpha = -\frac{1}{\alpha}\ln\alpha + C(\beta)$$

$$I(\beta,\beta) = 0 = -\frac{1}{\alpha}\ln\beta + C(\beta) \quad \to \quad C(\beta) = \frac{1}{\alpha}\ln\beta$$

$$\Rightarrow I(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha}(\ln\beta - \ln\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

2 способ:

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-tx^2}\Big|_{t=\beta}^{t=\alpha} = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_\beta^\alpha (-x^2) e^{-tx^2} dt =$$

$$= \int_0^\infty x\,dx \int_\alpha^\beta e^{-tx^2} dt = \int_\alpha^\infty dt \int^\beta \frac{1}{\alpha} e^{-tx^2} d(x^2) \overset{?}{=}$$

$$= \int_\alpha^\beta dt \int_0^\infty x\,dx\, e^{-tx^2} \overset{?}{=}$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

~ равномерно сх-ся по Дини.

№3794.

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx \quad ; \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$$

сх-ся равн. по

$$I'_\alpha(\alpha,\beta) \overset{?}{=} \int_0^\infty 2\left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)\left(-\frac{x}{x}\right) e^{-\alpha x} dx = 2\int_0^\infty \frac{-e^{-2\alpha x} + e^{-x(\alpha+\beta)}}{x} dx =$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{1}{x} dx\, e^{-tx}\Big|_{2\alpha}^{\alpha+\beta} = 2\int_0^\infty \frac{1}{x} dx \int_{2\alpha}^{\alpha+\beta} e^{-tx} \cdot dt \cdot (-x) =$$

$$= +2\int_0^\infty dx \int_{\alpha+\beta}^{2\alpha} e^{-tx} dt \overset{?}{=}$$

сходится по Дини

$$= 2\int_{\alpha+\beta}^{2\alpha} dt \int_0^\infty e^{-tx} dx = 2\int_{\alpha+\beta}^{2\alpha} \frac{dt}{t} = 2\ln\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$I(\alpha,\beta) = \int 2\ln\frac{2\alpha}{\alpha+\beta} d\alpha = \int 2\ln 2\alpha\, d\alpha - \int 2\ln(\alpha+\beta)\, d\alpha \ominus$$

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\ominus\ 2\alpha(\ln 2\alpha - 1) - 2(\alpha+\beta)(\ln(\alpha+\beta) - 1) + C(\beta)$$

$$I(\beta,\beta) = 0 = 2\beta(\ln 2\beta - 1) - 4\beta(\ln 2\beta - 1) + C(\beta)$$

$$C(\beta) = 2\beta(\ln 2\beta - 1)$$

$$\checkmark \Rightarrow I(\alpha,\beta) = 2\alpha(\ln 2\alpha - 1) - 2(\alpha+\beta)(\ln(\alpha+\beta) - 1) + 2\beta(\ln 2\beta - 1) =$$

$$= \ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$$

## Домашняя работа.

№ ~~3785~~, ~~3788~~, ~~3795~~, ~~3796 (2 сп.)~~, 3797, ~~3799~~, 3800, 3802 — можно доделать

интегралы

**3785.** Пользуясь $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ $(a>0)$ вычислить

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$$

$$G'(a)=\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}\ ;\quad G''(a)=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^3}$$

$\dots$

$$G^{(n)}(a)=+\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n\,dx}{(x^2+a)^{n+1}}\cdot n!=(-1)^n\cdot n!\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$$

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}$ ~ сходится равномерно?

$a>0 \Rightarrow \frac{1}{x^2+a}\geq 0$ непр. $\Rightarrow$ сходится по Дини.

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{\pi}{2}a^{-\frac12}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\pi}{2}\cdot a^{-\frac12}\right)=-\frac12\cdot\frac{\pi}{2}\cdot a^{-\frac32}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\pi}{2}\cdot a^{-\frac12}\right)=+\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot a^{-\frac52}$$

$\dots$

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{\pi}{2}\cdot a^{-\frac12}\right)=\frac{(-1)^n(2n-1)!!\,\pi}{2^{n+1}}\,a^{-(n+\frac12)}=(-1)^n\cdot n!\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}=\frac{(2n-1)!!\ a^{-(n+\frac12)}}{\underbrace{2^n\,n!}_{(2n)!}\ \cancel{(-1)^n}}\cdot\cancel{(-1)^n}\cdot\frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\,a^{-(n+\frac12)}$$

**3788.** Исходя из равенства $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}\,dy$ вычислить

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \qquad (a>0,\ b>0)$$

$$I\overset{?}{=}\int_0^{+\infty}dx\cdot\int_a^b e^{-xy}\,dy\overset{?}{=}\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}\,dx =$$

$\int_0^{+\infty}e^{-xy}\,dx$ ~ сходится? ; $0<y<+\infty$

$0<e^{-xy}\in C$ $\Rightarrow$ сходится по Дини.

$$=\int_a^b dy\cdot\frac{1}{(-y)}\cdot e^{-xy}\Big|_0^{+\infty}=-\int_a^b\frac{dy}{y}\cdot(0-1)=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln y\Big|_a^b=\ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow I=\ln\frac{b}{a}$$

**3795.** $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx \qquad (\alpha>0,\ \beta>0)$

$m\neq 0 \quad \to$ Если $m=0 \quad \to I=0$

$$I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx.$$

$$I'_\alpha(\alpha)\overset{?}{=}\int\limits_0^{+\infty}\frac{-\cancel{x}e^{-\alpha x}}{\cancel{x}}\cdot\sin mx\,dx=-\int\limits_0^{\infty}\sin mx\cdot e^{-\alpha x}\,dx=\left\{\begin{array}{l}u=\sin mx\\ dv=e^{-\alpha x}dx\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}du=m\cdot\cos mx\cdot dx\\ v=-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\end{array}\right\}=+\underbrace{\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\cdot\sin mx\Big|_0^{\infty}}_{=0}-\frac{m}{\alpha}\int\limits_0^{\infty}\cos mx\cdot e^{-\alpha x}\,dx=$$

$$=-\frac{m}{\alpha}\int\limits_0^{\infty}\cos mx\cdot e^{-\alpha x}\,dx=\left\{\begin{array}{l}u=\cos mx\to du=-m\sin x\,dx\\ dv=e^{-\alpha x}dx\to v=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{m}{\alpha}\left(-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\cdot\cos mx\Big|_0^{\infty}-\int\limits_0^{\infty}\frac{m}{\alpha}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{m}{\alpha}\left(-0+\frac{1}{\alpha}-\frac{m}{\alpha}\int\limits_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cdot\sin mx\,dx\right)=-\frac{m}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\alpha^2}\int\limits_0^{\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx$$

$$\Rightarrow\ \frac{m}{\alpha^2}=\int\limits_0^{\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx\cdot\left(\frac{m^2}{\alpha^2}+1\right)\ \to$$

$$\to\ \int\limits_0^{\infty}e^{-\alpha x}\sin mx\,dx=\frac{m\cdot\cancel{\alpha^2}}{\cancel{\alpha^2}(m^2+\alpha^2)}=\frac{m}{m^2+\alpha^2}$$

$$\Rightarrow\ I'_\alpha(\alpha)=-\frac{m}{m^2+\alpha^2}$$

? $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cdot\sin mx\,dx$ ~ сх-ся равномерно-?

$|e^{-\alpha x}\cdot\sin mx|\le e^{-\alpha_0 x}$ (т.е. подберём такое $\alpha_0$ отличное от $\alpha$, что $e^{-\alpha_0 x}$ будет больше)

$\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}\,dx=-\frac{1}{\alpha_0}e^{-\alpha_0 x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\alpha_0}$ ~ сх-ся по Вейерштрассу.

$$\Rightarrow\ I(\alpha)=-\int\frac{m\,d\alpha}{m^2+\alpha^2}=-m\cdot\frac{1}{m}\,\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{m}+C=-\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{m}+C$$

$$I(\beta,\beta)=0=-\mathrm{arctg}\frac{\beta}{m}+C\ \to\ C=\mathrm{arctg}\frac{\beta}{m}.$$

$$\Rightarrow\ I=\mathrm{arctg}\frac{\beta}{m}-\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{m}$$

**3796.** (2 сп.) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx \qquad (\alpha>0,\ \beta>0)$

1 способ:

$mx\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$$I'_\alpha(\alpha)\overset{?}{=}\int\limits_0^{+\infty}\frac{-xe^{-\alpha x}}{x}\cdot\cos mx\,dx=-\int\limits_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cos mx\,dx$$

? $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx\,dx$ – сходится?

$e^{-\alpha x}\cos mx \le e^{-\alpha x}$

$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}$ → сх-ся по Вейерштрассу.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx\,dx = \left\{\begin{matrix} u=\cos mx & \to du=-m\sin mx\,dx \\ dv=e^{-\alpha x}dx & \to v=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\cos mx\Big|_0^{+\infty} - \frac{m}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin mx\,dx = \left\{\begin{matrix} u=\sin mx & \to du=m\cos mx\,dx \\ dv=e^{-\alpha x}dx & \to v=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{m}{\alpha}\Big(\underbrace{-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\sin mx\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{m}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx\,dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{m^2}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx\,dx\cdot\Big(1+\frac{m^2}{\alpha^2}\Big) = \frac{1}{\alpha}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx\,dx = \frac{1\cdot\alpha^2}{\alpha(m^2+\alpha^2)} = \frac{\alpha}{m^2+\alpha^2}$$

$$\Rightarrow I'_\alpha(\alpha) = -\frac{\alpha}{m^2+\alpha^2}$$

$$I(\alpha) = -\frac{1}{2}\int\frac{d(\alpha^2)}{m^2+\alpha^2} = -\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+m^2)+C.$$

$$I(\beta,\beta) = 0 = -\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2)+C$$

$$C = \frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2)$$

$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$$ ✓

2 способ:

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{x}\,dx\cdot e^{-tx}\Big|_{t=\beta}^{t=\alpha} =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{x}\,dx\int_\beta^\alpha -\frac{1}{x}e^{-tx}\,dt = \int_0^{+\infty}\cos mx\,dx\int_\alpha^\beta e^{-tx}\,dt \overset{?}{=}$$

$$= \int_\alpha^\beta dt\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos mx\,dx = \int_\alpha^\beta\frac{t\,dt}{m^2+t^2} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{d(t^2)}{m^2+t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$$ ✓

? $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cdot\cos mx\,dx$ – сходится по Вейерштрассу (док-во выше)

$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$$

**3797.** $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (|\alpha|\le 1)$

$$I'_\alpha \overset{?}{=} \int_0^1\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{2\alpha x^2}{(1-\alpha^2x^2)}\,dx = \int_0^1\frac{2\alpha\,dx}{\sqrt{1-x^2}(1-\alpha^2x^2)} = 2\alpha\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1-\alpha^2x^2)}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1-\alpha^2x^2)} = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t \to dx = \cos t \cdot dt \\ 1 = \sin t \to \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \, dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}\,(1-\alpha^2\sin^2 t)} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-\alpha^2\sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1-\alpha\sin t)(1+\alpha\sin t)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{1+\alpha\sin t} + \frac{1}{1-\alpha\sin t} \right) dt = \text{отдельно}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\alpha\sin t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \frac{\alpha\, 2\,tg\frac{t}{2}}{1+tg\left(\frac{t}{2}\right)^2}}$$

3799 $I=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$\alpha>0$ $I'_\alpha \overset{?}{=} \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx\cdot x}{(1+\alpha^2x^2)\cdot x^2\sqrt{x^2-1}} = \left\{t=\frac{1}{x};\ dx=\frac{dt}{t^2}\right\} = \int\limits_0^1\frac{t^2\,dt}{(t^2+\alpha^2)\sqrt{1-t^2}} = \{t=\sin u\} =$

$=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2u\cdot\cos u\,du}{(\sin^2u+\alpha^2)\cos u} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\left(1+\frac{\alpha^2}{\sin^2u}\right)} = \left\{\begin{matrix}z=\operatorname{ctg}u\\ du=-\frac{dz}{1+z^2}\end{matrix};\ \frac{1}{\sin^2u}=1+z^2\right\}=$

$=\int\limits_0^\infty\frac{dz}{(1+z^2)(1+\alpha^2+\alpha^2z^2)} = \int\limits_0^\infty\frac{dz}{1+z^2} - \int\limits_0^\infty\frac{\alpha^2dz}{1+\alpha^2+\alpha^2z^2} = \operatorname{arctg}z\Big|_0^\infty - \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}\operatorname{arctg}\frac{\alpha z}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Big|_0^\infty =$

$=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cdot\frac{\pi}{2}$

$I'_\alpha = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right) \to I(\alpha)=\int\frac{\pi}{2}d\alpha - \frac{\pi}{2\cdot2}\int\frac{d(\alpha^2)}{\sqrt{\alpha^2+1}} = \frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha^2+1}+C=$

$=\frac{\pi}{2}(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1})+C.$

$I(0)=-\frac{\pi}{2}+C=0 \to C=\frac{\pi}{2}.$

$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2})$, $\alpha\geq0$

$\alpha<0$ $I'_\alpha = -\int\limits_1^{+\infty}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{пусть возьмём } \alpha>0\\ \to \alpha<0 \text{ запишем как } -|\alpha|\end{matrix}\right\} =$

$=-\int\limits_1^{+\infty}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right) \Rightarrow -\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1})+C.$

$I(0)=\frac{\pi}{2}+C=0 \to C=-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2})$ ✓

? $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$ — сходится?

$\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\,x(1+\alpha^2x^2)}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(|x+\sqrt{x^2-1}|)\Big|_1^{+\infty} \to +\infty$

Если $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\,x(1+\alpha^2x^2)}\right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \{x=\operatorname{ch}t \quad dx=\operatorname{sh}t\,dt\} = \int\limits_0^{\operatorname{arcch}(+\infty)}\frac{\operatorname{sh}t\,dt}{\operatorname{ch}t\cdot\operatorname{sh}t} = \int\limits_0^{\operatorname{arcch}(+\infty)}\frac{dt}{\operatorname{ch}t}$ ?

Исп. формулу: $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\cdot\operatorname{asec}\left(\frac{|x|}{a}\right)$

$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{asec}(|x|)\Big|_1^{+\infty} = \left\{\operatorname{asec}x = \arcsin\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\} =$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{|x|} - \arcsin0 = \frac{\pi}{2}$ — сходится по Вейерштрассу.

Ответ: $I = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\alpha \left(1 + |\alpha| - \sqrt{1+\alpha^2}\right).$

**3800.** $I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$

$(\alpha>0,\ \beta>0)$

$I'_\alpha \overset{?}{=} \int\limits_0^{\infty}\frac{2\alpha\, dx}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)} = \{$через теорию вычетов$\} = \alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)} \ominus$

$f(z)=\frac{1}{(\alpha^2+z^2)(\beta^2+z^2)} \to z_{1,2}=\pm i\alpha,\ z_{3,4}=\pm i\beta$ — $z_1=i\alpha,\ z_3=i\beta$ — полюса 1го порядка.

$\operatorname*{Res}_{z=i\alpha} f(z)=\frac{1}{2z(\beta^2+z^2)+2z\underbrace{(\alpha^2+z^2)}_{0}}\Big|_{z=i\alpha}=\frac{1}{2i\alpha(\beta^2-\alpha^2)}$

$\operatorname*{Res}_{z=i\beta} f(z)=\frac{1}{2i\beta(\alpha^2-\beta^2)}$

$\ominus\ 2\pi i\alpha\left(\frac{1}{2i\alpha(\beta^2-\alpha^2)}+\frac{1}{2i\beta(\alpha^2-\beta^2)}\right)=\frac{\pi\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\pi}{\beta(\alpha+\beta)}$

? Сходится равномерно по Дини.

$I(\alpha,\beta)=\int\frac{\pi}{\beta(\alpha+\beta)}d\alpha=\frac{\pi}{\beta}(\alpha+\beta)+C(\beta)=\{\alpha\to+\infty\}=$

$\alpha^2=|\alpha|^2$ $\qquad =\frac{\pi}{\beta}\ln\alpha\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)+C(\beta)=$

$=\frac{\pi}{\beta}\ln\alpha+\frac{\pi}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)+C(\beta)$

$I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln\alpha^2\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)}{x^2+\beta^2}dx=\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln\alpha^2}{x^2+\beta^2}dx+\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)}{x^2+\beta^2}dx=$

$=2\ln\alpha\cdot\frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{x}{\beta}\Big|_0^{\infty}+\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)}{x^2+\beta^2}dx=$

$=\frac{\pi}{\beta}\cancel{\ln\alpha}+\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)}{x^2+\beta^2}dx=\frac{\pi}{\beta}\cancel{\ln\alpha}+\frac{\pi}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)+C(\beta)$

$\alpha\to\infty:\quad 0=0+C(\beta)\quad\longrightarrow\quad C(\beta)=0$

$\Rightarrow I(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)\quad,\ \beta\neq0$

**3802.** $I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx$, пусть пока $(\alpha>0,\ \beta>0)$

$I'_\alpha=\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln(1+\beta^2x^2)}{(1+\alpha^2x^2)}\cdot\frac{2\alpha x^2}{x^4}dx=\int\limits_0^{\infty}\frac{2\alpha\ln(1+\beta^2x^2)}{(1+\alpha^2x^2)x^2}dx$

$I''_{\alpha\beta}=4\alpha\beta\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}=\frac{4\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\Big(\underbrace{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha'^2}+x^2\Big)\Big(\underbrace{\frac{1}{\beta^2}}_{\beta'^2}+x^2\Big)}=\left\{\begin{matrix}\text{уже разобрались}\\ \text{№ 3800}\end{matrix}\right\}=$

$=\frac{4}{\alpha\beta}\cdot\frac{\pi}{\alpha'\beta'(\alpha'+\beta')}=\frac{4}{\alpha\beta}\cdot\frac{\pi}{\frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}=\frac{4\pi\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}$

$I'_\alpha=\int\frac{4\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}d\beta+C(\alpha)\ \ldots$

19.03.22.

# Вычисление несобственных интегралов с помощью известных. Теорема Фруллани.

① Интеграл Дирихле: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$

② Интеграл Пуассона:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-Ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{A}} \quad (A>0)$$

③ Интегралы Френеля:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty \sin x^2\,dx \\ \displaystyle\int_0^\infty \cos x^2\,dx \end{array}\right. = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

④ Интегралы Фрулла́ни.

$$\Phi(a,b) = \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx, \quad (a>0,\ b>0)$$

Теорема 1.
Если: $1^\circ$ $f(x)$ – опр-на и непрерывна при $x \geq 0$
$2^\circ$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty) < \infty$, то

$$\Phi(a,b) = [f(0) - f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$$

Теорема 2.
Если: $1^\circ$ $f(x)$ – опр-на и непрерывна при $x \geq 0$
$2^\circ$ $\exists \displaystyle\int_A^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ при $\forall A>0$, то

$$\Phi(a,b) = f(0)\ln\frac{b}{a}$$

Теорема 3.
Если: $1^\circ$ $\exists \displaystyle\int_0^A \frac{f(x)}{x}\,dx$ для $\forall A>0$

$2^\circ$ ; $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty) < \infty$, то

$$\Phi(a,b) = f(+\infty)\ln\frac{a}{b}$$

№3789. Док-ть вторую теорему Фруллани.

$$\Phi(a,b) = \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$

рассмотрим $\displaystyle\int_A^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx \overset{2^\circ}{=} \int_A^\infty \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_A^\infty \frac{f(bx)}{x}\,dx =$

$= \left\{ \begin{array}{l}\text{применим формулу замены} \\ ax=y \qquad bx=y\end{array} \right\} = \displaystyle\int_{aA}^\infty \frac{f(y)}{y}\,dy - \int_{bA}^\infty \frac{f(y)}{y}\,dy =$

$$= \int_{aA}^{bA} \frac{f(y)}{y}\,dy = \{\text{Теорема о среднем}\} =$$

$$= f(\xi)\int_{aA}^{bA}\frac{dy}{y} = f(\xi)\ln y\Big|_{aA}^{bA} = f(\xi)\ln\frac{b}{a} =$$

$\xi \in (aA, bA)$

$$\lim_{A\to+0}\int_A^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \lim_{A\to+0} f(\xi)\ln\frac{b}{a} = \underline{f(0)\ln\frac{b}{a}}$$, ч.т.д.

**№3790.** $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx \quad (a>0, b>0)$

$f(x) = \cos x \quad \to \nexists \lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$

$f(x) = \cos x$ - непр.

$\exists \int_A^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$

$\cos x$ - огр. $\quad g(x) = \frac{1}{x}$, при $x\to\infty \quad g(x)\to 0$

$\Rightarrow$ сходится по Дирихле.

$$\left|\int_A^R \cos x\,dx\right| < M$$

$$\left|\ \sin x\Big|_A^R\right| = \left|\sin R - \sin A\right| \le 2$$

$\Rightarrow \underline{I = 1\cdot\ln\frac{b}{a}}$ ✓

**№3792.** $I = \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(ax)-\operatorname{arctg}(bx)}{x}\,dx \quad (a>0, b>0)$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$ ~ опр-на и непр.

$\Rightarrow$ по теореме $\int$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

$$I = [\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(+\infty)]\ln\frac{b}{a} = \underline{-\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$$

**№3818.** $I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 dx =$

$\alpha\in\mathbb{R}$

$$I'_\alpha \overset{?}{=} 3\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x^3}\right)^2\cdot x\cdot\cos\alpha x\,dx = 3\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\alpha x\,\cos\alpha x}{x^2}\,dx =$$

$$= 3\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x\cdot\sin 2\alpha x}{2x^2}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x - \cos 3\alpha x}{x^2}\,dx$$

$$I''_{\alpha\alpha} = \frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{-x\cdot\sin\alpha x + 3x\sin 3\alpha x}{x^2}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{3\sin 3\alpha x - \sin\alpha x}{x}\,dx =$$

$$= \frac{9}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(3\alpha) - \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha = \frac{3\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$$

$$I'_\alpha = \int \frac{3}{4}\pi \,\mathrm{sgn}\,\alpha \, d\alpha = \frac{3\pi}{4}\begin{cases} \alpha, & \alpha > 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases} = \frac{3\pi}{4}|\alpha| + C_1$$

$$I'_\alpha(\alpha=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$I(\alpha) = \int \frac{3\pi}{4}|\alpha|\,d\alpha = \frac{3\pi}{8}\cdot\begin{cases} \alpha^2, & \alpha > 0 \\ -\alpha^2, & \alpha < 0 \end{cases} = \frac{3\pi}{8}\alpha^2\cdot \mathrm{sgn}\,\alpha = \frac{3\pi}{8}\alpha\cdot|\alpha| + C_2$$

$$I(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$$

Домашняя работа.

Д/з: ~~3791~~, ~~3814~~, ~~3816~~, ~~3813~~, ~~3817~~, ~~3819~~, ~~3821~~, ~~3823~~.

**3791.**
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\,dx \quad (a>0,\ b>0)$$

$f(x) = \sin x$ – непрер.

$$\int_A^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

$\Rightarrow$ сходится по Дирихле.

$$\left|\int_A^R \sin x\,dx\right| = \left|-\cos x\Big|_A^R\right| \le \left|-\cos R + \cos A\right| \le 2$$

По 2й теореме Фруллани:

$$I = f(0)\ln\frac{b}{a} = 0$$

Ответ: $I = 0$

**3814.**
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x \cdot \sin\beta x}{x}\,dx \quad (|\alpha| \ne |\beta|)$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x}{x}\,dx$$

$f(x) = \cos x$ – непрер.

$$\int_A^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$$ – сходится по Дирихле см. № 3790

$$\left|\int_A^R \cos x\,dx\right| = \left|\sin R - \sin A\right| \le 2.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$$

Ответ: $I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$

**3816.**
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x}\,dx$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \rightarrow \sin^3 ax = \frac{1}{4}(3\sin ax - \sin 3ax)$$

$$I=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{3\sin ax-\sin 3ax}{x}dx=\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3ax}{x}dx=$$

$$=\{\text{по инт. Дирихле}\}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a-\frac{1}{4}\operatorname{sgn}a\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}a$$

Ответ: $I=\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}a$

3817.

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx$$

$$I'_\alpha\overset{?}{=}\int_0^{+\infty}2\cdot\frac{\sin\alpha x}{x^2}\cdot\cos\alpha x\cdot x\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\alpha$$

(?) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}dx$ – сходится?

$g(x)=\frac{1}{x}$, при $x\to\infty$ $g(x)\to 0$

$\left|\int_0^R\sin 2\alpha x\,dx\right|=\left|-\frac{\cos 2\alpha x}{2\alpha}\Big|_0^R\right|\leq 2$ => сходится по Дирихле.

1) $\alpha>0$ => $I'_\alpha=\frac{\pi}{2}$

$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\alpha+C$

$I(0)=0\to C=0$

2) $\alpha<0$ => $I(\alpha)=-\frac{\pi}{2}\alpha+C$ ; $C=0$

=> $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}|\alpha|$

Ответ: $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}|\alpha|$

3813.

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx\quad(\alpha>0)$$

$$I'_\alpha\overset{?}{=}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot(-x^2)\cdot e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^{+\infty}-e^{-\alpha x^2}dx=-\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\{\text{инт. Пуассона}\}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(?) $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx$ – сходится? → сходится по Дини (док-во в лекциях).

$$I(\alpha)=-\int\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\alpha^{-\frac{1}{2}}d\alpha=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sqrt{\alpha}}{1/2}+C(\beta)=-\sqrt{\pi\alpha}+C(\beta)$$

$$I(\alpha=0)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\beta x}{x^2}dx$$

$$I'_\beta\overset{?}{=}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x\cdot x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta$$

(?) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ – сходится условно по Дирихле.
(интеграл Дирихле, док-во в лекции)

По аналогии с 3817 => $I(\alpha=0,\beta)=\frac{\pi}{2}|\beta|$

=> $C(\beta)=\frac{\pi}{2}|\beta|$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}|\beta| - \sqrt{\pi a}$$

Ответ: $I = \frac{\pi}{2}|\beta| - \sqrt{\pi a}$

**3821.** $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{t} \to x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \to dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $I = \frac{\pi}{4}$

**3819.** $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin^4 x \to du = 4\sin^3 x \cos x \\ dv = x^{-2}\,dx \to v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{x}\sin^4 x \Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{4\sin^3 x \cos x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{(3\sin x - \sin 3x)\cos x}{x}\,dx =$$

$$= 3\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x \cos x}{x}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 4x + \sin 2x}{x}\,dx = \{ I_1 + I_2 \}$$

посчитаем отдельно:

$$I_1 = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx = \{\text{инт. Дирихле}\} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $I = \frac{\pi}{4}$

**3823.** Найти разрывный множитель Дирихле

$$D(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin\lambda \cos\lambda x \,\frac{d\lambda}{\lambda}$$

для различных значений $x$. Построить график ф-ии $y = D(x)$

$$D(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda(1+x) + \sin\lambda(1-x)}{\lambda}\,d\lambda$$

$$D(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+x)\lambda}{\lambda}\,d\lambda + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-x)\lambda}{\lambda}\,d\lambda$$

1) $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} x > -1 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow |x| < 1.$

$$\Rightarrow D(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

2) $x = \pm 1$

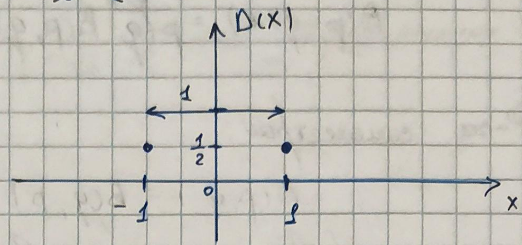
$$\Rightarrow D(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

3) $\begin{cases} 1+x<0 \\ 1-x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow |x|>1$

$D(x) = +\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 0$ В зависимости от знака $(1+x)$ и $(1-x)$

или $D(x) = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 0$

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 1/2, & x=\pm 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$$




02.04.22.

## Зан. 5. Вычисление несобств. интегралов с помощью Эйлеровых.

### 1. Гамма-функция

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx$$ ~ Эйлеров интеграл 2го рода.

Св-ва:

1) $\Gamma(p)$ опр-на и непр-на в области $p>0$

2) Формула приведения:

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$$

Если $p=n \in \mathbb{N}$ $\Gamma(n+1) = n!$

3) Формула дополнения:

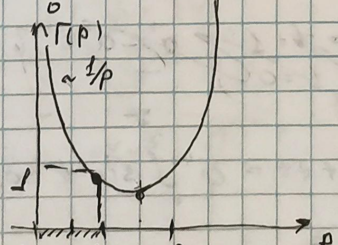
$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \quad (0<p<1)$$

Если $p=\frac{1}{2} \to \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

4) $\exists$ производные любого порядка

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \ln^n x\, e^{-x}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}$$

5) График: $\Gamma(p)$




### 2. Бета-функция

(1) $$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$ ~ Эйлеров интеграл 1го рода.

Св-ва:

1) $B(p,q)$ опр-на и непр-на в области $p>0,\ q>0$

2) Формула приведения

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q)$$

$$B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)\ ,\quad 0<p,q\le 1.$$

3) Ф-ла симметрии:

$$B(p,q)=B(q,p)$$

4) Связь Эйлеровых интегралов:

$$\boxed{B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

Если $p=m\in\mathbb{N}$, $q=n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow B(m+1,n+1)=\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}=\frac{1}{m+n+1}\cdot\frac{1}{C_{m+n}^{m}}$$

$$B\left(\tfrac12,\tfrac12\right)=\frac{\Gamma^2\left(\frac12\right)}{\Gamma(1)}=\pi$$

5) Формула представления бета-функции

(2) $$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}t\,\cos^{2q-1}t\,dt$$

(3) $$B(p,q)=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$$

**№3843**

$$I=\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx=\int_0^1(x-x^2)^{\frac12}dx=\int_0^1x^{\frac12}(1-x)^{\frac12}dx=B\left(\tfrac32;\tfrac32\right)=\frac{\frac12}{\frac12+\frac12}B\left(\tfrac12;\tfrac32\right)=$$

$$=\frac14\cdot\frac{\frac12}{\frac12+\frac12}B\left(\tfrac12;\tfrac12\right)=\frac{\pi}{8}$$

**№3844.**

$$I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left\{\begin{array}{l}t=\frac{x}{a}\\ dx=a\,dt\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}x=a\sin t\\ dx=a\cos t\,dt\end{array}\right\}=$$

$$=\int_0^{\pi/2}a^2\sin^2t\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}\cdot a\cos t\,dt=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\,dt=\frac{a^4}{2}B\left(\tfrac32;\tfrac32\right)=$$

$$=\frac{a^4\pi}{16}$$

**№3847.**

$$\int_0^\infty\frac{x^2dx}{1+x^4}=\left\{\begin{array}{l}x^4=t;\quad 4x^3dx=dt\to dx=\frac{dt}{4x^3}=\frac{dt}{4t^{\frac34}}\\ x=t^{\frac14};\end{array}\right\}=$$

$$=\int_0^\infty\frac{t^{\frac12}}{(1+t)}\cdot\frac{dt}{4t^{3/4}}=\frac14\int_0^\infty\frac{t^{-\frac14}}{(1+t)}\,dt=\left\{\begin{array}{l}p-1=-\frac14\to p=\frac34\\ p+q=1\to q=\frac14\end{array}\right\}=$$

$$= \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Опр-ть область существования и выразить через Эйлеровы.

**№ 3855.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \quad (m>0)$

Область сущ-я: $(1-x^m)^{-\frac{1}{n}} \underset{x\to 1-0}{\sim} (1-(1-y)^m)^{-\frac{1}{n}} \sim$ в ряд раскладываем.

$y = 1-x$

$y \to +0$

$(1-y)^m \simeq 1 - my$

$$\Rightarrow (1-x^m)^{-\frac{1}{n}} \sim (1-(1-y)^m)^{-\frac{1}{n}} \sim (my)^{-\frac{1}{n}} \underset{x\to 1-0}{\sim} m^{-\frac{1}{n}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{n}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/n}} < \infty \Rightarrow \frac{1}{n} < 1.$$

$\Rightarrow$ О.С: $\begin{cases} m>0 \\ \frac{1}{n} < 1 \end{cases}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} = \begin{cases} x^m = t & \to x = t^{\frac{1}{m}} \\ m x^{m-1} dx = dt & \to dx = \frac{dt}{m\, t^{\frac{m-1}{m}}} \end{cases} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{m\, t^{\frac{m-1}{m}} (1-t)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{m} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{m}-1}}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} dt = \cancel{\begin{cases} p-1 = \frac{1}{m} - 1 & \to p = \frac{1}{m} \\ p+q = \frac{1}{n} & \to q = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \end{cases}} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{m} \int_0^1 t^{\frac{1}{m}-1} \cdot (1-t)^{-\frac{1}{n}} dt = \left\{ p = \frac{1}{m};\ q = 1 - \frac{1}{n} \right\} =$$

$$= \frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

1) $\begin{cases} n>0 \\ n>1 \end{cases} \to \underline{\underline{n>1}}$

$\begin{cases} n<0 \\ n<1 \end{cases} \to n<0$

**№ 3876.** $I = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^m} dx =$

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx = \begin{Bmatrix} x = yt \\ dx = t\,dy \end{Bmatrix} \text{ t - параметр} = \int_0^\infty (yt)^{m-1} e^{-yt}\, t\,dy =$$

$$= t^m \int_0^\infty y^{m-1} e^{-ty} dy$$

$$\boxed{\frac{1}{t^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty y^{m-1} e^{-ty} dy}$$

$$= \int_0^\infty \cos ax \cdot \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty y^{m-1} e^{-xy} dy \overset{?}{=} \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty y^{m-1} dy \int e^{-xy} \cdot \cos ax\, dx =$$

$$\int_0^\infty e^{-xy} \cos ax\, dx = \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-xy} e^{iax} dx = \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{x(-y+ia)} dx = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{y - ia} \right\} =$$

$$= \frac{y}{y^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \frac{y^m}{a^2+y^2}\,dy = \left\{ \begin{array}{l} y^2 = a^2 t \\ y = a\sqrt{t} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2y\,dy = a^2 dt \\ dy = \dfrac{a^2 dt}{2a\sqrt{t}} \end{array} \right\} =$$ Без огр-я общности $a>0$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \frac{a^m t^{\frac{m}{2}}}{a^2(1+t)} \cdot \frac{a^2 dt}{2\sqrt{t}} = \frac{a^{m-1}}{2\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{m}{2}-\frac{1}{2}}}{1+t}\,dt = \left\{ \begin{array}{l} p-1 = \frac{m}{2}-\frac{1}{2} \\ p+q = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{a^{m-1}}{2\Gamma(m)} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1-m}{2}\right) = \frac{a^{m-1}}{2\Gamma(m)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{a^{m-1}}{2\Gamma(m)} \cdot \frac{\pi}{\sin \pi\left(\frac{1-m}{2}\right)} =$$

$$= \frac{a^{m-1}}{2\Gamma(m)} \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{\pi m}{2}}$$

$$\begin{cases} \frac{m+1}{2} > 0 \\ \frac{1-m}{2} > 0 \\ m > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m > -1 \\ m < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{О.С. } m \in (0, 1)$$

~~3846~~, ~~3849~~, ~~3850~~, ~~3851~~, 3853*,
~~3854~~, ~~3857~~, ~~(3863)~~, 3847*

## Домашняя работа

**3846.** $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \left\{ \begin{array}{ll} x^3 = t & \to x = t^{\frac{1}{3}} \\ 3x^2 dx = dt & \to dx = \dfrac{dt}{3t^{\frac{2}{3}}} \end{array} \right\} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{3t^{\frac{2}{3}}(1+t)} = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}\,dt}{(1+t)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} p-1 = -\frac{2}{3} & \to p = \frac{1}{3} \\ p+q = 1 & \to q = \frac{2}{3} \end{array} \right\} = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\, 2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

**3849.** $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}} = \left\{ \begin{array}{ll} x^n = t & \to x = t^{\frac{1}{n}} \\ n x^{n-1} dx = dt & \to dx = \dfrac{dt}{n t^{\frac{n-1}{n}}} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{n t^{\frac{n-1}{n}} (1-t)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} \cdot (1-t)^{-\frac{1}{n}}\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} p-1 = \frac{1}{n}-1 & \to p = \frac{1}{n} \\ q-1 = -\frac{1}{n} & \to q = -\frac{1}{n}+1 \end{array} \right\} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+1\right)} = \cancel{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n\left(\frac{2}{n}+1\right)} \cdot B} = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$\frac{m-1}{n} - \frac{n-1}{n} = \frac{m-1-n+1}{n} = \frac{m-n}{n}$$

**3851.** $$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx \quad (n>0)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} x^n = t & x = t^{\frac{1}{n}} \\ n x^{n-1} dx = dt & \to dx = \dfrac{dt}{n t^{\frac{n-1}{n}}} \end{array} \right\} = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-1}{n}} \cdot dt}{t^{\frac{n-1}{n}} (1+t)} =$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{(1+t)}\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} p-1 = \frac{m}{n}-1 & \to p = \frac{m}{n} \\ p+q = 1 & \to q = 1-\frac{m}{n} \end{array} \right\} = \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin\frac{m\pi}{n}}$$

Область опр-я: $\begin{cases} p>0 \\ q>0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{m}{n} > 0 \\ 1-\frac{m}{n} > 0 \end{cases} \to \begin{cases} m>0 \\ n-m>0 \end{cases} \Rightarrow 0<m<n$

**3850.** $$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx \quad (n \text{ - целое положительное})$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx = \left\{ x^2 = t \to x = t^{\frac{1}{2}} \to dx = \frac{dt}{2t^{1/2}} \right\} = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cdot \frac{dt}{2t^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt = \left\{p-1 = n-\frac{1}{2} \to p = n+\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}$$

**3854.** $$\int_0^{\pi/2} tg^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^{-n} x\,dx = \begin{cases} 2p-1 = n & \to p = \frac{n+1}{2} \\ 2q-1 = -n & \to q = \frac{1-n}{2} \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1-n}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1-n}{2}\right) = \frac{\pi}{2\cdot \sin\frac{(n+1)\pi}{2}}$$

Область опр-я: $\begin{cases} p>0 \\ q>0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{n+1}{2} > 0 \\ \frac{1-n}{2} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} n > -1 \\ n < 1 \end{cases}$ $\to$ $-1 < n < 1$

**3863.** $$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx$$

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx$$

$$\left(\frac{x^{p-1}}{1+x}\right)'_p = \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}$$

$$\Rightarrow J(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \begin{cases} p-1 = p-1 \\ p+q = 1 \to q = 1-p \end{cases} = B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

$$\Rightarrow I(p) = J'(p) = \frac{-\pi^2\cdot\cos\pi p}{\sin^2\pi p}. \longrightarrow I(p) = -\frac{\pi^2\cos\pi p}{\sin^2\pi p}$$

Область опр-я: $\begin{cases} p>0 \\ q = 1-p > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $0 < p < 1$

16.04.22.

**3859.** $$\int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\,dx = \begin{cases} y = \frac{x-a}{b-a} \\ dx = (b-a)\,dy \end{cases} = \int_0^1 \frac{(b-a)^m y^m (b-a)^n (1-y)^n}{(a+c+(b-a)y)^{m+n+2}}\cdot(b-a)\,dy =$$

$$= (b-a)^{m+n+1}\int_0^1 \frac{y^m(1-y)^n\,dy}{(a+c+(b-a)y)^{m+n+2}} = \begin{cases} \frac{1}{y}-1 = t & dy = -\frac{dt}{(t+1)^2}; \; 1-y = 1-\frac{1}{t+1} = \frac{t}{1+t} \\ y = \frac{1}{t+1} \end{cases} =$$

$$= -(b-a)^{m+n+1}\int_\infty^0 \frac{\frac{1}{(t+1)^m}\cdot\frac{t^n}{(1+t)^n}\,dt}{(t+1)^2\left(a+c+(b-a)\frac{1}{t+1}\right)^{m+n+2}} = (b-a)^{m+n+1}\int_0^\infty \frac{dt}{(t+1)^{m+n+2}\left(a+c+\frac{b-a}{t+1}\right)^{m+n+2}}$$

$$= (b-a)^{m+n+1}\int_0^\infty \frac{t^n\,dt}{((a+c)(t+1)+(b-a))^{m+n+2}} = (b-a)^{m+n+1}\int_0^\infty \frac{t^n\,dt}{((a+c)t+c+b)^{m+n+2}} =$$

$$= \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+n+2}}\int_0^\infty \frac{t^n\,dt}{\left(1+\frac{a+c}{b+c}t\right)^{m+n+2}} = \left\{\frac{a+c}{b+c}t = z \to dt = \frac{b+c}{a+c}\,dz\right\} =$$

$$= \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+n+2}}\int_0^\infty \frac{(b+c)^n z^n (b+c)\,dz}{(a+c)^n(a+c)(1+z)^{m+n+2}} = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}\int_0^\infty \frac{z^n\,dz}{(1+z)^{m+n+2}} =$$

$$= \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}\cdot B(n+1, m+1)$$

Обл. сущ-я: $\begin{cases} n+1>0 \\ m+1>0 \end{cases} \to \begin{cases} n>-1 \\ m>-1 \end{cases}$

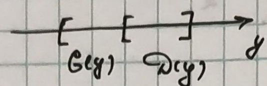
## Определение области сходимости несобственных интегралов и вычисление их через Эйлера.

$$J(y)=\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

1) Абсолютная сходимость: $\int_a^{\infty} |f(x,y)|\,dx < \infty \to D(y)$

2) Если $\int_a^{\infty} |f(x,y)|\,dx$ - расходится, а $\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ - сх-ся, то интеграл сходится условно $\to C(y)$.

Область сходимости:




## Достаточные признаки абсолютной сходимости.

а) Общий признак сравнения:

если при $x \geq a$: $|f(x,y)| \leq g(x,y)$, $\int_a^{\infty} g(x,y)\,dx < \infty$, то $\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ - сх-ся абс-но

б) Частный признак сравнения:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x,y)|}{1/x^{\alpha}} = C_0(y) \geq 0 \quad \text{при } \alpha > 1.$$

сравн. с инт $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} < \infty$, $\alpha > 1$

Эквивалентность:

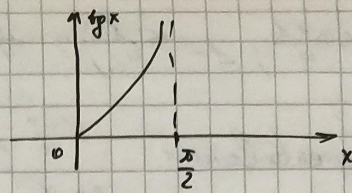
$$|f(x,y)| \underset{x\to\infty}{\sim} h(x,y)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x,y)|}{h(x,y)} = 1$$

в) Достаточный признак Дирихле и Абеля:

№3857

$$I=\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x\,dx$$




Область существования: особые точки т. 0
(при $n<0$)

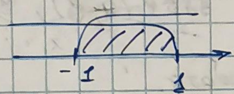
$$I=\underbrace{\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^n x\,dx}_{J_1}+\underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2}\operatorname{tg}^n x\,dx}_{J_2}=$$

$$J_1:\ \operatorname{tg}^n x \underset{x\to+0}{\sim} x^n \to \int_0^{\pi/4} x^n\,dx=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^{\pi/4}<\infty$$

$\Rightarrow$ сх-ся при $n+1>0 \to \boxed{n>-1}$

$$J_2:\ \operatorname{tg}^n x \underset{x\to\frac{\pi}{2}-0}{=} \operatorname{ctg}^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sim\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^n$$

$$\to \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^n}<\infty, \text{ при } n<1.$$

$\Rightarrow$ Обл. сущ-я:  $\to |n|<1$



$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n x}{\cos^n x}\,dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2};\ \frac{1-n}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi(n+1)}{2}}=\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi n}{2}}$$

№3860.

$$\int_0^\infty x^m e^{-x^n}\,dx=\left\{x^n=t\to x=\sqrt[n]{t};\ dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt\right\}=$$

$$=\int_0^\infty t^{\frac{m}{n}}e^{-t}\cdot\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt=\frac{1}{n}\int_0^\infty t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}\,dt \ \circeq \qquad n>0$$

$$\circeq\ \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \text{ при } n>0$$

$$I=-\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \text{ при } \begin{matrix} n<0 \\ m+1<0\to m<-1\end{matrix}$$

при $n=0$:

$$\int_0^\infty \lim_{n\to0} x^m e^{-x^n}\,dx=\int_0^\infty x^m e^{-1}\,dx=\left.\frac{x^{m+1}}{(m+1)e}\right|_0^\infty$$, в любом случае интеграл расх.

$$I=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\operatorname{sgn} n=\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right),\ n\neq0$$

Обл. сущ-я: $\frac{m+1}{n}>0 \to \left[\begin{matrix} n>0,\ m>-1 \\ n<0,\ m<-1\end{matrix}\right.$

3864(в)

$$I=\int_0^\infty\frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx;\qquad J(\alpha)=\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{1+x^4}\,dx$$

$$J''(\alpha)=\int_0^\infty\frac{x^\alpha\ln^2 x}{1+x^4}\,dx.$$

$$I=J''(0)$$

$$J(\alpha)=\left\{\begin{matrix}x^4=t\\ x=\sqrt[4]{t}\end{matrix}\to dx=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt\right\}=\int_0^\infty\frac{t^{\frac{\alpha}{4}}\cdot\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt}{1+t}=\frac{1}{4}\int_0^\infty\frac{t^{\frac{\alpha-3}{4}}dt}{1+t}=$$

$$= \frac{1}{4} B\left(\frac{\alpha+1}{4}; 1-\frac{\alpha-1}{4}\right) = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi(\alpha+1)}{4}}$$

Обл. существования: $\begin{cases} \frac{\alpha+1}{4} > 0 \to \alpha > -1 \\ \frac{3-\alpha}{4} \to \alpha < 3 \end{cases}$

$$J'_\alpha = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)' = \frac{\pi}{4}(-1)\frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi^2}{16}\frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$J''_\alpha = -\frac{\pi^2}{16}\left(\frac{-\sin^3\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4} - 2\sin\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4}}{\sin^4\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}\right) =$$

$$= \frac{\pi^3}{64}\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi^3}{64}\frac{1+\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(\frac{\alpha\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= (\alpha=0) = \frac{\pi^3}{64}\cdot\frac{1+\cos^2\frac{\pi}{4}}{\sin^3\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64}\frac{1+\frac{2}{4}}{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3} = \frac{3\pi^3}{32\sqrt2}.$$

$$\Rightarrow I = \frac{3\pi^3}{32\sqrt2}$$

~~Д/З~~: ~~3858*~~, ~~3859~~, ~~3861~~, ~~3862~~, ~~3864 (а, б)~~, ~~3865~~ 3863

Домашняя работа.

**3859.** $$\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = \left\{\begin{matrix} x^n = t \to x = t^{\frac1n} \\ dx = \frac1n t^{\frac1n - 1}dt\end{matrix}\right\} = \frac1n\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{\frac1n-1}dt = \left\{\begin{matrix} p-1 = \frac1n - 1 \\ p = \frac1n\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac1n\Gamma\left(\frac1n\right); \quad \begin{cases} n>0 \\ \frac1n > 0\end{cases} \Rightarrow n>0$$

**3861.** $$\int_0^1\left(\ln\frac1x\right)^p dx = \left\{\begin{matrix}\ln\frac1x = t \to \frac1x = e^t \to x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t}dt\end{matrix}\right\} =$$

$$= -\int_{+\infty}^0 t^p e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^p dt = \left\{\begin{matrix} p'-1 = p \\ p' = p+1\end{matrix}\right\} = \Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

$$p' > 0 \Rightarrow p+1>0 \Rightarrow p > -1$$

**3862.** $$\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax}\ln x\,dx = I \quad (a>0)$$

$$I = \left\{ x = \frac{t}{a} \to dx = \frac1a dt\right\} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{a^p}t^p e^{-t}\ln\left(\frac{t}{a}\right)\cdot\frac1a dt =$$

$$= \frac{1}{a^{p+1}}\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}[\ln t - \ln a]dt = \frac{1}{a^{p+1}}\left[\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\ln t\,dt - \int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\ln a\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{a^{p+1}}\left[-\ln a\cdot p\Gamma(p) + \int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\ln t\,dt\right] \ominus$$

Отдельно: $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\ln t\,dt = I'(p)$

$$I(p) = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t}dt \to I'_p = \int_0^{+\infty} t^p\cdot\ln t\cdot e^{-t}dt$$

т.к. $I(p) = p\Gamma(p) \to I'_p = (\Gamma(p) + p\Gamma'(p))$

$$= \frac{1}{a^{p+1}}\left[-\ln a \cdot p\Gamma(p) + \Gamma(p) + p\Gamma'(p)\right] =$$
$$= \frac{1}{a^{p+1}}\left(\Gamma(p) + p\Gamma'(p) - \ln a \cdot p\Gamma(p)\right), \quad p > -1$$

№3863. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx = I(p)$

$$\left(\frac{x^{p-1}}{1+x}\right)'_p = \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}$$
$$\Rightarrow J(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \begin{cases} p-1 = p-1 \\ p+q = 1 \end{cases} \to q = 1-p = B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$
$$\Rightarrow I(p) = J'(p) = \frac{-\pi^2 \cdot \cos \pi p}{\sin^2 \pi p} \to I(p) = \frac{-\pi^2 \cos \pi p}{\sin^2 \pi p}$$

Обл. сход-я: $\begin{cases} p > 0 \\ q = 1-p > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < p < 1$

3864

a) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}dx = I(p)$

$$\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{x^{p-1}}{1+x}\right) = \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}$$

Из №3863. $\to J'(p) = \frac{-\pi^2 \cos \pi p}{\sin^2 \pi p}$

$$I(p) = J''(p) = -\pi^2\left(\frac{\cos \pi p}{\sin^2 \pi p}\right)'_p = -\pi^2 \cdot \frac{-\pi \sin \pi p \cdot \sin^2 \pi p - \cos \pi p \cdot 2\sin \pi p \cdot \pi \cos \pi p}{\sin^4 \pi p}$$
$$= \pi^3 \frac{\sin \pi p(\sin^2 \pi p + 2\cos^2 \pi p)}{\sin^4 \pi p} = \pi^3 \frac{(1 - \cos^2 \pi p + 2\cos^2 \pi p)}{\sin^3 \pi p} =$$
$$= \pi^3 \cdot \frac{(1+\cos^2 \pi p)}{\sin^3 \pi p}$$

Аналогично с №3863 $\to 0 < p < 1$

б) $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3}dx$

$$J(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^3}dx \to J'(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{1+x^3}dx$$
$$J(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^3} = \begin{cases} x^3 = t \\ x = t^{1/3} \end{cases} dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{\alpha}{3}}}{t^{2/3}(1+t)}dt =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-2}{3}}}{(1+t)}dt = \frac{1}{3}B\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{3}, \frac{2}{3}-\frac{\alpha}{3}\right) = \frac{1}{3\sin\frac{\alpha+1}{3}\pi}$$
$$\begin{cases} p+q = 1 \\ p-1 = \frac{\alpha-2}{3} \end{cases} \quad p = \frac{\alpha-2+3}{3} = \frac{\alpha+1}{3} \to q = 1-p = \frac{3-\alpha-1}{3} = \frac{2-\alpha}{3}$$
$$\Rightarrow J'(\alpha) = \left(\frac{1}{3\sin\left(\frac{\pi\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}\right)'_\alpha = \frac{-3\cos\frac{\alpha+1}{3}\pi \cdot \frac{\pi}{3}}{9\sin^2\left(\frac{\alpha+1}{3}\pi\right)} = \frac{-\pi\cos\frac{\alpha+1}{3}\pi}{9\sin^2\left(\frac{\alpha+1}{3}\pi\right)}$$
$$J'(1) = -\frac{\pi\cos\frac{2}{3}\pi}{9\sin^2\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{-\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4}{9\cdot 3} = \frac{2\pi}{27}$$

**3858*.** $\int_0^\pi \frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx = \quad (0<|k|<1)$

$= \left\{ tg\frac{x}{2}=t;\quad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2tg\frac x2}{1+tg^2\frac x2};\quad x=2\,arctg\,t;\quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac x2}{1+tg^2\frac x2};\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right\} =$

$= \int_0^\infty \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{n-1}}{\left(1+k\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^n}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = 2^n\int_0^\infty \frac{t^{n-1}dt}{(1+t^2+k-kt^2)^n} = 2^n\frac{1}{(1+k)^n}\int_0^\infty\frac{t^{n-1}dt}{\left(1+\frac{1-k}{1+k}t^2\right)^n}=$

$=\left\{\frac{1-k}{1+k}t^2=y \Rightarrow t^2=\frac{1+k}{1-k}y \Rightarrow t=\sqrt y\cdot\sqrt{\frac{1+k}{1-k}};\quad dt=\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\frac{dy}{2\sqrt y}\right\}=$

$=2^n\cdot\frac{1}{(1+k)^n}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^n\int_0^\infty \frac{y^{\frac{n-1}{2}}}{2\sqrt y}\frac{dy}{(1+y)^n} = \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{n/2}}\int_0^\infty\frac{y^{\frac n2-1}}{(1+y)^n}dy=$

$=\left\{\begin{matrix}p-1=\frac n2-1\\ p+q=n\end{matrix} \Rightarrow p=q=\frac n2\right\} = \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{n/2}}B\left(\frac n2,\frac n2\right)$

Обл. сх.: $n>0$

**3865.** $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx =$

$\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x} = \frac{x^{t-1}}{\ln x}\Big|_{t=q}^{t=p} = \int_q^p x^{t-1}dt$

$= \int_0^\infty\frac{dx}{1+x}\int_q^p x^{t-1}dt = \int_q^p dt\int_0^\infty\frac{x^{t-1}}{1+x}dx = \left\{\begin{matrix}p'-1=t-1\\ p'+q'=1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}p'=t\\ q'=1-t\end{matrix}\right\}=$

$=\int_q^p B(t,1-t)dt = \int_q^p\frac{\pi}{\sin\pi t}dt =$

Обл. сход-сти: $\begin{cases}t>0\\1-t>0\end{cases} \Rightarrow 0<t<1 \Rightarrow 0<p,q<1$

$= \int_q^p \frac{\pi dt}{2\sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2}} = \int_q^p\frac{dt}{tg\frac{\pi t}{2}\cos^2\frac{\pi t}{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \int_q^p\frac{d\,tg\frac{\pi t}{2}}{tg\frac{\pi t}{2}} = \ln\left|\frac{tg\frac{\pi p}{2}}{tg\frac{\pi q}{2}}\right|$

30.04.22.

## 7. Простейшие задачи операционного исчисления.

Опр. Преобразованием Лапласа компл. значн. ф-ии явл. интеграл:

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \iff f(t) \risingdotseq F(p)$$

$t\in\mathbb{R}$

$p\in\mathbb{C}$

$f(t)$ – оригинал

$F(p)$ – изображение

пр-е Лапласа.

Условия на оригинал:

а) $f(t) = 0$ для $t < 0$

б) Условие Липшица - Гёльдера:
- На интервалах $(t, t+\tau)$ без скачков $f(t)$:

$$|f(t+\tau) - f(t)| \le A|\tau|^{\alpha}$$

для $\forall \tau$: $|\tau| \le \tau_0$, $A > 0$, $0 < \alpha \le 1$, $\tau_0 > 0$

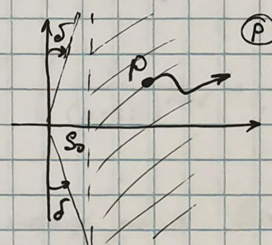
в) $|f(t)| \le M e^{s_0 t}$, где $s_0$ - пок-ль роста.

$s_0 = 0$ - если роста нет.

Условия на изображения:

а) $F(p)$ - сущ-т в области $\operatorname{Re} p > s_0$ и она аналитична в ней

б) $\lim\limits_{\substack{p \to \infty \\ |\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta}} F(p) = 0$




Св-ва преобразования Лапласа:

1) Линейность

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

2) Теорема подобия

Для $\forall \alpha > 0$: $f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F(p/\alpha)$

3) Теорема запаздывания

Для $\forall \tau > 0$: $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$

4) Теорема смещения

Для $\forall p_0 \in \mathbb{C}$: $e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p - p_0)$

5) Дифференцирование оригинала

Если $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ явл-ся оригиналами, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$ где

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \to +0} f^{(k)}(t)$$

При нулевых нач. условиях: $\frac{d}{dt} \sim p$.

⑥ Дифф-е изображения

Для $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(-t)^n f(t) \fallingdotseq F^{(n)}(p)$$

⑦ Предельные (тауберовы) теоремы.

Если $f'(t)$ явл-ся оригиналом, то

$$\lim_{\substack{p \to \infty \\ |\arg p| < \pi/2 - \delta}} pF(p) = f(0)$$

Если $f'(t)$ - явл. оригиналом и $\exists \lim\limits_{t \to \infty} f(t) = f(\infty) < \infty$ $(s_0 = 0)$

то $$\lim_{\substack{p \to 0 \\ |\arg p| < \pi/2 - \delta}} pF(p) = f(\infty)$$

⑧ Интегрирование оригинала:

$$\exists \int_0^t f(\tau)\,d\tau \fallingdotseq \frac{F(p)}{p}$$

⑨ Интегрирование изображения:

$$\frac{f(t)}{t} \fallingdotseq \int_p^\infty F(q)\,dq$$

⑩ Теорема о свёртке:

$$\underbrace{f(t) \circledast g(t)}_{\text{свёртка}} = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{f(t) \circledast g(t) \fallingdotseq F(p) \cdot G(p)}$$

| $f(t)$ | $F(p)$ | $f(t)$ | $F(p)$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1/p$ | $e^{p_0 t}$ | $\frac{1}{p-p_0}$ |
| $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{\omega^2+p^2}$ | $\cos \omega t$ | $\frac{p}{\omega^2+p^2}$ |
| $\operatorname{sh} \alpha t$ | $\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$ | $\operatorname{ch} \alpha t$ | $\frac{p}{p^2-\alpha^2}$ |
| $t^n$, $n \in \mathbb{N}$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ | $\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$ | $\ln \frac{p-a}{p-b}$ |

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha\sqrt{p}}$$

Задачи.
1. $f(t)$ - дано $F(p) = ?$
2. Решить д.у.
3. Решить интегр. ур-е.

№1. $t^m \cos\omega t = f(t)$ , $m \in \mathbb{N}$

$F(p) - ?$

$t^m \cos\omega t = (-1)^m \cdot (-1)^m \cdot t^m \cos\omega t = (-t)^m (-1)^m \cos\omega t = (-1)^m (-t)^m \cos\omega t \risingdotseq$

$\risingdotseq (-1)^m F^{(m)}(p) = (-1)^m \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^m \cdot m!}{(p-i\omega)^{m+1}} + \frac{(-1)^m m!}{(p+i\omega)^{m+1}}\right)$

$F(p) = \frac{p}{\omega^2+p^2} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{2}\frac{(p+i\omega-i\omega+p)}{(p-i\omega)(p+i\omega)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right)$

$p = \pm i\omega$

$\left(\frac{1}{p-i\omega}\right)' = -\frac{1}{(p-i\omega)^2}$ ; $\left(\frac{1}{p-i\omega}\right)'' = +\frac{(-1)(-2)}{(p-i\omega)^3}$

$\left(\frac{1}{p-i\omega}\right)^{(m)} = \frac{(-1)^m \cdot m!}{(p-i\omega)^{m+1}}$

$\Rightarrow t^m \cos\omega t = \frac{m!}{2}\left(\frac{1}{(p-i\omega)^{m+1}} + \frac{1}{(p+i\omega)^{m+1}}\right)$

№2. Найти решение интегр. ур-я Вольтерра.

$y(t) = \sin t + \underbrace{\int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau}_{t * y(t)} \Rightarrow y(0) = 0$

$y(t) \risingdotseq Y(p)$

$Y(p) = \frac{1}{1+p^2} + \frac{1}{p^2} Y(p)$

$Y(p) \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{1+p^2}$ , $Y(p)\frac{(p^2-1)}{p^2} = \frac{1}{1+p^2}$

$Y(p) = \frac{p^2}{p^4-1} = \frac{p \cdot p}{(p^2+1)(p^2-1)} =$

$Y(p) = \frac{A}{p^2-1} + \frac{B}{p^2+1} = \frac{Ap^2 + A + Bp^2 - B}{(p^2-1)(p^2+1)}$

$\begin{cases} A+B = 1 \\ A-B = 0 \end{cases} \rightarrow A = \frac{1}{2}$ ; $B = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2-1}\right)$

$y(t) = \frac{1}{2}(\sin t + \operatorname{sh} t)$

Д/з: ~~①~~ $\cancel{f(t) = \cos^4 t} \rightarrow F(p) = ?$

② $f(t) = \sqrt{t}\,\sin\omega t \rightarrow F(p) - ?$

~~③~~ $y''' + y'' = t$ , $y(0) = -3$ , $y'(0) = 1$ , $y''(0) = 0$ — решение д/у.

~~④~~ $y(t) = t - \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$ — реш. инт. ур-е

№1. $f(t)=\cos^4 t \qquad F(p)-?$

$$f'(t) = -4\cos^3 t\sin t = -2\cos^2 t\,\sin 2t = -2\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\sin 2t = -\sin 2t\,(1+\cos 2t) =$$

$$= -\sin 2t - \sin 2t\cdot\cos 2t = -\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t$$

$$f'(t) \risingdotseq -\frac{2}{4+p^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{16+p^2} = pF(p) - f(0) = pF(p) - 1$$

$$\Rightarrow pF(p) = 1 - \frac{2}{4+p^2} - \frac{2}{16+p^2} = \frac{(4+p^2)(16+p^2) - 2(16+p^2) - 8 - 2p^2}{(4+p^2)(16+p^2)} =$$

$$= \frac{64 + 4p^2 + 16p^2 + p^4 - 32 - 2p^2 - 8 - 2p^2}{(4+p^2)(16+p^2)} = \frac{p^4 + 16p^2 + 24}{(4+p^2)(16+p^2)}$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$$

№3 $y''' + y'' = t \qquad , \quad y(0) = -3 \;, \; y'(0) = 1 \;, \; y''(0) = 0 \qquad$ ~ решить ДУ

$y(t) \risingdotseq Y(p)$

$f(t) = t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2} \longrightarrow f(t) = t \to f'(t) = 1$

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p} = pF(p) + 0 \to F(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$y''(t) \risingdotseq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) + 3p - 1$$

$$y'''(t) \risingdotseq p^3 Y(p) - p^2 y(0) - py'(0) - y''(0) = p^3 Y(p) + 3p^2 - p$$

$$p^3 Y(p) + 3p^2 - p + p^2 Y(p) + 3p - 1 = \frac{1}{p^2}$$

$$p^3 Y(p) + p^2 Y(p) + 3p^2 + 2p - 1 = \frac{1}{p^2}$$

$$p^2 Y(p)\cdot(p+1) + 3p^2 + 2p - 1 = \frac{1}{p^2}$$

$$Y = \frac{1 - 3p^4 - 2p^3 - p^2}{p^4(p+1)} = \frac{Bp^3 + Cp^2 + Dp + K}{p^4} + \frac{N}{p+1} =$$

$$= \frac{Bp^4 + Cp^3 + Dp^2 + Kp + Bp^3 + Cp^2 + Dp + K + Np^4}{p^4(p+1)} =$$

$$= \frac{p^4(B+N) + p^3(C+B) + p^2(D+C) + p(K+D) + K}{p^4(p+1)}$$

$$\begin{cases} B+N = -3 \\ C+B = -2 \\ D+C = -1 \\ K+D = 0 \\ K = 1 \end{cases} \to K=1,\; D=-1,\; C=0,\; B=-2,\; N=-1$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{-2p^3 - p + 1}{p^4} - \frac{1}{p+1}$$

$$\frac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-t}$$

$$Y(p) = -\frac{2}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p+1}$$

Из интегр. оригинала: $\quad 1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$

$$\int_0^t 1\cdot d\tau = \frac{1}{p\cdot p} \to t = \frac{1}{p^2} \to \frac{t^2}{2} = \frac{1}{p^3}$$

и т.д.

$$\Rightarrow f(t)=\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}-e^{-t}-2$$

Ответ: $f(t)=\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}-e^{-t}-2$

№4. Решить интегральное уравнение:

$$y(t)=t-\underbrace{\int_0^t sh(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau}_{sh\,t\,*\,y(t)} \quad \to y(0)=0$$

$y(t) \risingdotseq Y(p)$

$$Y(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2-1}\cdot Y(p)$$

$$Y(p)\left(1+\frac{1}{p^2-1}\right)=\frac{1}{p^2} \quad ; \quad Y(p)\,\frac{p^2}{p^2-1}=\frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac{p^2-1}{p^4}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^4}$$

$$y(t)=t-\frac{t^3}{6}$$

Ответ: $y(t)=t-\frac{t^3}{6}$

14.05.22

Зан. 8. Применение операционных методов к вычислению интегралов, решение систем д.у. и к задачам м.ф.

$f(t)\to F(p)$?

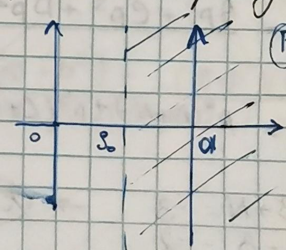
$F(p)\to f(t)$?

Теорема (Римана - Меллина.)

- Если $f(t)$ - оригинал, соотв. изображению $F(p)$, то справедливо равенство:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)\,e^{pt}\,dp,$$

в смысле Коши.




$a>s_0$

Теорема разложения:

Первая теорема:

- Если $F(p)$ - прав. в окр-ти $p=\infty$ и справедливо её разложение в ряд Лорана в окр-ти $|p|\geq R$

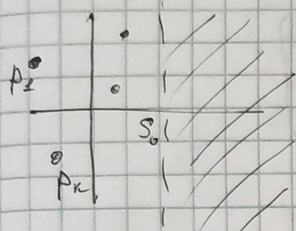
$$F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{p^n},$$ тогда оригинал:

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n t^{n-1}}{(n-1)!}} \quad (t>0)$$

Вторая теорема:

- Если ф-я $F(p)$ обладает св-вами:
  1° Аналитична в полупл-ти $\operatorname{Re} p > S_0 \geq 0$
  2° Существует система окружностей $C_n$: $|p| = R_n$, таких что $R_1 < R_2 < R_3 < \ldots$
  на которых $F(p) \to 0$ при $R_n \to \infty$, равномерно отн-но аргумента $p$.
  3° Для $\forall a > S_0$ абсол-но сх-ся $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,dp$. $\Rightarrow F(p)$ - из обр. оригинала

то оригинал находится по формуле:




$$\boxed{f(t) = \sum_k \operatorname*{res}_{p=p_k} F(p)\, e^{pt}}$$ $p_k$ - особые точки $F(p)$

Теорема Эфроса (обобщение теоремы о свертке)

- Если $f(t) \mathrel{{}_{\bullet}\!=^{\circ}} F(p)$ и $\Phi(p)$, $q(p)$ - аналитические ф-ии, такие что

$$\Phi(p)\, e^{-\tau q(p)} \mathrel{{}^{\circ}\!=_{\bullet}} \varphi(t, \tau) \qquad (\tau > 0), \text{ то}$$

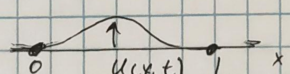
$$\boxed{F[q(p)]\,\Phi(p) \mathrel{{}^{\circ}\!=_{\bullet}} \int_0^\infty f(\tau)\, \varphi(t, \tau)\, d\tau}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \mathrel{{}_{\bullet}\!=^{\circ}} \frac{1}{\sqrt{p}}\, e^{-\alpha\sqrt{p}}$$

$$\int_a^\infty f(x,t)\,dx \mathrel{{}_{\bullet}\!=^{\circ}} \int_a^\infty F(x,p)\,dx \mathrel{{}^{\circ}\!=_{\bullet}} g(t)$$

$t > 0 \Rightarrow f(x,t) \mathrel{{}_{\bullet}\!=^{\circ}} F(x,p)$

① $u_{tt} = a^2 u_{xx}$




н.у.: $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$

г.у.: $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

$u(x,t) \mathrel{{}_{\bullet}\!=^{\circ}} U(x,p)$

$p^2 U - p\, u(x,0) - u_t(x,0) = a^2 U_{xx}$

$\begin{cases} a^2 U_{xx} - p^2 U = -p\varphi(x) - \psi(x) \end{cases}$ - свели к обычному дифф ур-ю.

гр.у. $\begin{cases} U(0,p) = 0 \\ U(L,p) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ найдём $U(x,p)$ - перейти к оригиналу.

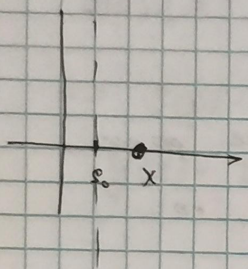
② $\begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = 3x + z \\ \dot{z} = 3x + y \end{cases}$ $\quad x(t) = ?,\ y(t) = ?,\ z(t) = ?$ $\quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$

→ переходим к изображению $X(p),\ Y(p),\ Z(p)$ ...

Равенство Парсеваля:

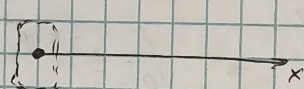
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,G(x)\,dx$$

$$\left\| \begin{matrix} f(t) \risingdotseq F(p) \\ G(p) \risingdotseq g(t) \end{matrix} \right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_0^{\infty} f(x)\,G(x)\,dx = \int_0^{\infty} g(y)\,F(y)\,dy}$$




③ Ур-е мат. физики

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < \infty,\ t > 0)$$




н.у. $u(x,0) = u_0$

г.у. $u(0,t) = u_1$

$U(x,p) = ?$, где $u(x,t) \risingdotseq U(x,p)$

$$p\,U(x,p) - u(x,0) = a^2 U_{xx}(x,p)$$

$$p\,U(x,p) - u_0 = a^2 U_{xx}(x,p)$$

$$U_{xx} - \frac{p}{a^2} U = -\frac{u_0}{a^2}$$

гр.у. $U(0,p) = u_1 \cdot \frac{1}{p}$

(г) $|U(x,p)| \le M$ — температ. не может беск. расти

$$\lambda^2 - \frac{p}{a^2} = 0 \quad \to \quad \lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{p}}{a}$$

$$U(x,p) = \underbrace{C_1 \cdot e^{\frac{\sqrt{p}}{a} x}}_{\to \infty} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x} + \underbrace{\frac{u_0}{p}}_{\text{частн. реш.}}$$

$\operatorname{Re} p > s_0 \ge 0 \;\Rightarrow$ из (г) усл. $C_1 = 0$

$$\frac{u_1}{p} = C_2 + \frac{u_0}{p} \quad \to \quad C_2 = \frac{u_1 - u_0}{p}$$

$$U(x,p) = \frac{u_1 - u_0}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + \frac{u_0}{p}$$

Из тауберовых теорем: $\lim\limits_{p \to 0} p\, U(x,p) = u(x,\infty) = u_1$

По Эфросу $\frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}} \risingdotseq ?$

$$\Phi(p)\, e^{-t q(p)} \risingdotseq \varphi(t,\tau)$$

$$q(p) = \sqrt{p}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} = \Phi(p)\, e^{-\tau\sqrt{p}} \risingdotseq \varphi(t,\tau) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}} = F[\overbrace{q(p)}^{=\sqrt{p}}]\,\underbrace{\Phi(p)}_{=\frac{1}{\sqrt{p}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$$

$$F[\sqrt{p}] = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha\sqrt{p}} \to F(p) = \frac{1}{p} e^{-\alpha p} \risingdotseq \eta(t-\alpha)$$

$$\cancel{\Rightarrow u(x,t) = u_0 + (u_1 - u_0)\int_0^{\infty} \eta(t-\tau)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\, d\tau}$$

$(\frac{x}{a})^2$, $\frac{x}{a}$

$$\frac{x}{a} = \alpha$$

~~решение~~

$$u(x,t) = u_0 + (u_1 - u_0)\int_0^{\infty} \eta\left(\tau - \frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(\frac{x}{a})^2}{4\tau}}\, d\tau$$

решение.

ф-я Хевисайда