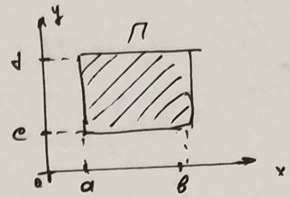
8.02.22.

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. — Основы мат. анализа, ч. II.
2. Кудрявцев Л.Д. — Курс мат. анализа, Том 2.
3. Фихтенгольц Г.М. — Курс дифф. и интегрального исчисления, том 2 ✓.
4. Дубков А.А., Агудов Н.В. (для 2-й части курса) ✓ — Преобразование Лапласа.

Глава 1. Интегралы, зависящие от параметров.

1.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра.



Понятие: Пусть в прямоугольнике $П=[a,b]\times[c,d]$ определена ф-я $f(x,y)$, которая интегрируема по x для $\forall y\in[c,d]$. Тогда:

$$\boxed{I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx}$$ — собственный интеграл, завис. от параметра "y".

Св-ва введенного интеграла:

① **Непрерывность**

Теорема (о непрерывности)

~ Если ф-я $f(x,y)$ непр. в прямоуг. П. ($f\in C(П)$), то $I(y)\in C([c,d])$

Док-во: составим приращение: $\Delta I(y)=I(y+\Delta y)-I(y)=\int_a^b f(x,y+\Delta y)-\int_a^b f(x,y)\,dx=$

$$=\int_a^b[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\,dx$$

Теорема Кантора

~ Если ф-я $f(x,y)$ — непрерывна на замкнутом мн-ве, то она и равномерно непрерывна на нём, т.е.:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):\ \forall y,\Delta y\in[c,d] \text{ и } \forall x\in[a,b]:\ |f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|<\varepsilon,\ \forall|\Delta y|<\delta$$

=> св-во выполняется для прямоугольника П:

$$|\Delta I(y)|=|I(y+\Delta y)-I(y)|\le\int_a^b|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|\,dx<\varepsilon(b-a)$$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \forall y,\Delta y:\ y\in[c,d],\ y+\Delta y\in[c,d],\ |\Delta y|<\delta:\ |\Delta I(y)|<\varepsilon(b-a)$

т.е. $\lim\limits_{\Delta y\to0}\Delta I(y)=0$; $\to \lim\limits_{\Delta y\to0}I(y+\Delta y)=I(y)$ ~ непрерывна, ч.т.д. ■

Следствие: $\lim\limits_{y\to y_0}I(y)=I(y_0)$ => $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b f(x,y_0)\,dx=\int_a^b\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)\,dx$

② **Теорема об интегрируемости** $I(y)$

~ Если $f(x,y)\in C(П)$, то $I(y)$ — инт-ма на отрезке $[c,d]$ справ-во равенство:

$$\int_c^d I(y)\,d(y)=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\cdot\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Док-во: по теореме о непрерывности $I(y)$ — непрер. на $[c,d]$ => из МА. $I(y)$ ~ интегрируема.

а) В силу непрерывности $f(x,y)$ $\exists\iint_П f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$. ч.т.д. ■

Интегрирование по параметру — основано на св-ве ②.

Пример: $\int_0^1\left(\frac{x^b-x^a}{\ln x}\right)dx,\quad 0<a<b$

$$\int_0^1\frac{x^y}{\ln x}\Big|_{y=a}^{y=b}=\int_0^1dx\int_a^b\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^y}{\ln x}\right)dy=\int_0^1dx\int_a^b x^y\,dy \circleddash \left\{f(x,y)=x^y \text{ — непр. в области } x\in[0,1],\ y\in[a,b]\right\}$$

$$\circleddash\int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx=\int_a^b\frac{x^{y+1}}{y+1}\,dy\Big|_{x=0}^{x=1}=\int_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln(y+1)\Big|_a^b=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

③ **Теорема о дифференцируемости** $I(y)$

~ Если $f(x,y)$ и её частная произв. $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в прям-ке П, то $I(y)$ дифф-ма в интервале (c,d) и спр-ва формула:

$$\boxed{\frac{dI}{dy}=\int_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx}$$

Док-во: Введём вспомогательную ф-ю: $\exists\, K(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ ~ по теореме по доказанной теореме $\Rightarrow$ $K(y)$ - интегр-ма на $[c, d]$

Рассм-м: $\int_c^t K(y)\,dy = \int_c^t dy \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx \overset{2}{=}$, $t \in [c, d]$

$\overset{2}{=} \int_a^b dx \int_c^t \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy = \int_a^b dx \cdot f(x,y)\Big|_{y=c}^{y=t} = \underbrace{\int_a^b f(x,t)\,dx}_{I(t)} - \underbrace{\int_a^b f(x,c)\,dx}_{I(c)}$

$\Rightarrow \int_c^t K(y)\,dy = I(t) - I(c)$, $\forall t \in [c, d]$

$\Rightarrow K(t) = \frac{dI(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dI(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx}$, ч.т.д. ■

Пример:

Дифференцирование по параметру ~ основано на св-ве 3.

$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 - \sin^2 x)\,dx \quad (a > 1)$

$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial a}\left[\ln(a^2 - \sin^2 x)\right]dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x}\,dx = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 - \sin^2 x} \overset{}{=} \{\operatorname{ctg} x = t\}$

$\frac{dx}{\sin^2 x\left(\frac{a^2}{\sin^2 x} - 1\right)} = \frac{-d(\operatorname{ctg} x)}{[a^2(1 + \operatorname{ctg}^2 x) - 1]} = -\frac{dt}{[a^2(1+t^2) - 1]}$

$= -2a \int_{+\infty}^0 \frac{dt}{a^2t^2 + a^2 - 1} = 2a \int_0^{+\infty} \frac{dt}{a^2t^2 + a^2 - 1} = 2a \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\underbrace{(a^2-1)}_{>0} + a^2t^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d(at)}{(a^2-1) + a^2t^2} =$

$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \int_0^{+\infty} \frac{d\frac{at}{\sqrt{a^2-1}}}{1 + \left(\frac{at}{\sqrt{a^2-1}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arctg}\left(\frac{at}{\sqrt{a^2-1}}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

$I(a) = \int I'(a)\,da = \int \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,da = \left\{\begin{array}{l} a = \operatorname{ch} u \\ da = \operatorname{sh} u\,du \end{array}\right\} = \pi \int \frac{\operatorname{sh} u\,du}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}} = \pi u + C = \pi \operatorname{arcch} a + C$

$a = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \Big| \cdot 2e^u$

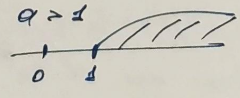
$e^{2u} + 1 = 2a\underbrace{e^u}_{z} \rightarrow z^2 - 2az + 1 = 0$

$z_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1} = e^u$

$\Rightarrow e^u = a + \sqrt{a^2-1} \rightarrow u = \ln(a + \sqrt{a^2-1})$

$\Rightarrow I(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + C$

$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x)\,dx \qquad a > 1$



$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[a^2\left(1 - \underbrace{\frac{\sin^2 x}{a^2}}_{0}\right)\right]dx \simeq \frac{\pi}{2} \ln a^2 = \pi \ln a$

$I(a) = \{\text{при } a \to \infty\} = \pi \ln\left(a + a\underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}}_{}\right) + C = \pi \ln 2a + C$

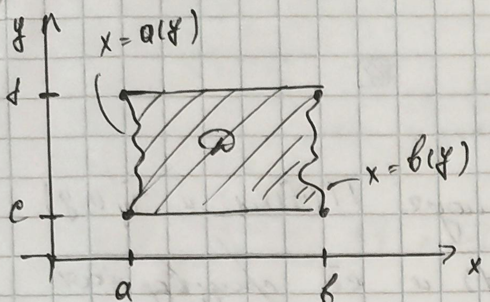
Но грубо!

$\underset{a \to \infty}{\pi \ln 2a + C = \pi \ln a} \Rightarrow C = \pi \ln \frac{1}{2}$

$\Rightarrow I(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + \pi \ln \frac{1}{2}$ ✓ $= \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2-1}}{2}$

Общий случай зависимости интеграла от параметра.

Пусть $f(x,y)$ - определ. в прямоуг. $\Pi = [a,b] \times [c,d]$, в котором лежит область $D = \{(x,y): a(y) \le x \le b(y),\ c \le y \le d\}$. Тогда при $\forall y \in [c,d]$ ф-я $f(x,y)$ инт-ма по x от $a(y)$ до $b(y)$, то



$$\boxed{I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx}$$ - назыв. собств. интегр. общего вида завис. от параметра y.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx.$$

Св-ва интеграла общего вида:

1) Теорема (о непрерывности $I(y)$.)

Пусть $f(x,y) \in C(\Pi)$, а $a(y), b(y) \in C([c,d])$.

Тогда $I(y)$ - непрерывна на $[c,d]$

Док-во: Зафиксируем $y_0 \in [c,d]$ и представим $I(y)$ в виде

$$I(y) = \underbrace{\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx}_{I_1(y)} + \underbrace{\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx}_{I_2(y)} + \underbrace{\int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x,y)\,dx}_{I_3(y)} \ominus$$

$$I_3(y) = -\int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx$$

$I_1(y)$ непрерыв. по теор. непрер. собств. интеграла $I_1(y) \in C([c,d])$

$$\lim_{y \to y_0} I_1(y) = I_1(y_0)$$

Сделаем оценки: $I_2(y)$ и $I_3(y)$

В силу непрерывности $f(x,y) \in C(\Pi)$ (замкн. мн-ве, то она ограничен. на нем).

$$\exists M > 0: \forall (x,y) \in \Pi: |f(x,y)| \le M.$$

$$|I_2(y)| = \left|\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\right| \le \left|\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\right| \le M\,|b(y) - b(y_0)|$$

не известно!
$b(y) > b(y_0)$ // $b(y_0) > b(y)$

$$0 \le |I_3(y)| \le M\,|a(y) - a(y_0)|$$

Из непрерывности $a(y)$ и $b(y)$ на $[c,d]$: $\lim\limits_{y \to y_0} a(y) = a(y_0)$, $\lim\limits_{y \to y_0} b(y) = b(y_0)$

$$\lim |I_2(y)| = 0, \quad \lim_{y\to y_0} |I_3(y)| = 0$$

И теперь $(1) = \lim_{y\to y_0} = \lim_{y\to y_0} I_1(y) + 0 - 0 = I_1(y_0) =$

$$= \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)\,dx = I(y_0) = \lim_{y\to y_0} I(y)$$

② Теорема (о дифф. $I(y)$)

Пусть $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непр. в прямоуг. Π ($f(x,y)$ и $f'_y(x,y) \in C(\Pi)$), а $a(y)$, $b(y)$ – дифф. в (c,d).

Тогда $I(y)$ дифф. в инт-ле (c,d) и её производная вычисл. по ф-ле:

$$\boxed{I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx + b'(y)\,f(b(y),y) - a'(y)\,f(a(y),y)}$$

– правило Лейбница.

Док-во: зафиксируем $y_0 \in (c,d)$ и

$$I(y) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx - \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx$$

– по т. о дифф. $\exists \frac{d}{dy}(I_1(y))$

$$\frac{d}{dy}\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f'_y(x,y)\,dx$$

$$\lim_{y\to y_0} \frac{1}{y-y_0}\left[\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx - 0\right] = \lim_{y\to y_0}\left[\frac{b(y)-b(y_0)}{y-y_0}\right]\cdot f(\xi,y) =$$

произв. в опр.

Применим формулу о среднем:

$$\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = f(\xi,y)\,[b(y)-b(y_0)]$$

$\xi \in (b(y_0), b(y))$ сжим. до точки.

$$= b'(y_0)\lim_{y\to y_0} f(\xi,y) = b'(y_0)\,f(b(y_0),y_0)$$

$\int\limits^{a(y)}$ с а. т.о. среднем.

$$\lim_{y\to y_0}\frac{1}{y-y_0}\int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx = a'(y_0)\,f(a(y_0),y_0)$$

$$I'(y_0) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f'_y(x,y_0)\,dx + b'(y_0)\, f(b(y_0),y_0) - a'(y_0)\, f(a(y_0),y_0)$$

(П) Формула Коши $\quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt, \quad n\in\mathbb{N}$

$f(t)$ - непрерыв.

$$\exists F'(x) = \int_0^x f(t)\,\frac{(n-1)\,(x-t)^{n-2}}{(n-2)!\,(n-1)}\,dt + 1\cdot f(x)\,\frac{(x-x)}{(n-1)!} = \int_0^x f(t)\cdot\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}\,dt$$

$$\int_0^x f(t)\,\frac{(x-t)^{n-3}}{(n-3)!}\,dt = \exists F''(x)$$

$$\exists F^{(n-1)}(x) = \int_0^x f(t)\,\frac{(x-t)^{(n-1)-(n-1)}}{((n-1)-(n-1))!}\,dt = \int_0^x f(t)\,\frac{1}{1}\,dt$$

$\exists F^{(n)}(x) = \int_0^x 0\,dt + f(x) + 0 = f(x)$ - диффур n-го порядка.

$$F^{(n-1)}(x) = \int F^{(n)}(x)\,dx = \int_0^x F^{(n)}(t)\,dt + C = \int_0^x f(t)\,dt + \underbrace{C_1}_{=0}$$

$$F^{(n-2)}(x) = \int_0^x F^{(n-1)}(t)\,dt + C_2 = \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2)\,dt_2 + C_2 =$$

$$= \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2)\,dt_2$$

$$F^{(n-2)}(0) = C_2 = 0$$

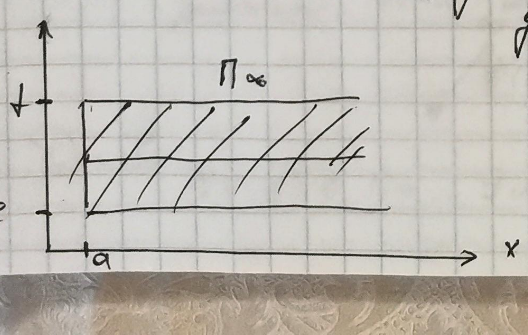
$$\boxed{F(x) = \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n.}$$

$$\int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n = \int_0^x f(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

Формула Коши

1.2. Несобственный интеграл, зависящий от параметра.

Опр Несобственный интеграл I рода - пусть в полуполосе $П_\infty = [a,\infty)\times[c,d]$ задана ф-я $f(x,y)$, интегр. от $a\le x\le\infty$ для $\forall y\in[c,d]$. Тогда на $[c,d]$ опр-на ф-я $G(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,dx$



Опр. Равномерная сходимость $G(y)$ - несоб. интегр. $G(y)$ наз-ся равномерно сход-ся относит. пар. y на отрезке $[c, d]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists A = A(\varepsilon) > a \ ; \ \forall R > A(\varepsilon) \text{ и } \forall y \in [c, d]:$$

$$\left| \int_R^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Интегр. и дифф. только равномер

нельзя!

П) $\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x}\,dx = G(y) \rightarrow G'(y) = \int_0^{\infty} \cos yx\,dx$ - расх.

Необходимый и достаточный критерий Коши равном. сх-ти интеграла (несобств. инт. 1го рода)

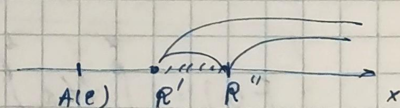
Теорема - Для равномерной сх-ти н.и. $G(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ относит-но "y" на $[c, d]$ необх. и достаточно

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A = A(\varepsilon) \geq a : \forall R', R'' > A(\varepsilon) \text{ и } \forall y \in [c, d]:$$

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

Д-во: ($\Rightarrow$) необходимость.

$$\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx = \int_{R'}^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_{R''}^{\infty} f(x,y)\,dx$$



$G(y)$ - р-но сх-ся относит. "y" на $[c, d]$

Из опр-я равномерной сх-ти:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A = A(\varepsilon) \geq a : \forall R > A(\varepsilon) \text{ и } \forall y \in [c, d]: \left| \int_R^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \int_{R'}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \left| \int_{R''}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx \right| \leq \left| \int_{R'}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| + \left| \int_{R''}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < 2\varepsilon$$

($\Leftarrow$) достаточность:

Из критерия Коши: $\left| \int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$

$\forall R', R'' > A(\varepsilon)$ $\quad R'' \to +\infty$

$$\Rightarrow \left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \;\to\; \left|\int_{R'}^{\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$ ~ само усл. равном. сх-ти.

☑

Критерий неравн. сх-ти $G(y)$ ~ отриц. признака Коши.

$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall A = A(\varepsilon) \geq a, \; \exists R_0', R_0'' > A(\varepsilon) \quad (R_0'' > R_0'),$
$\exists y_0 \in [c, d]$:
$$\left|\int_{R_0'}^{R_0''} f(x,y)\,dx\right| \geq \varepsilon_0$$

Достаточные признаки равномерной сходимости

1. **Признак Вейерштрасса**

Если во всех точках полуполосы $\Pi_\infty = [a, \infty) \times [c, d]$, выполняется нер-во:
$|f(x,y)| \leq g(x)$ и интеграл $\int_a^\infty g(x)\,dx$ – сх-ся, то
$G(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ – сх-ая равномерно отн-но "y" на $[c, d]$.

Док-во: по критерию Коши сх-ти н. и. $\int_a^\infty g(x)\,dx$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A = A(\varepsilon) \geq a \;;\; \forall R', R'' > A(\varepsilon) \quad (R'' > R')$:
$$\left|\int_{R'}^{R''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon \to \int_{R'}^{R''} g(x)\,dx < \varepsilon. \qquad (g(x) \geq 0)$$

Тогда справедлива оценка $\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx\right| \leq \int_{R'}^{R''} |f(x,y)|\,dx \leq \int_{R'}^{R''} g(x)\,dx < \varepsilon.$

$\forall y \in [c, d]$
~ пришли к критерию Коши.

☑

Следствие:
– Пусть ф-я $\varphi(x,y)$ определена в Π_∞, ограничена в ней и при $\forall y \in [c, d]$ инт-ма по x от a до R $(R > a)$.
Тогда из абсолютной сх-ти $\int_a^\infty h(x)\,dx$ вытекает равномерн. сх-ть отн-но "y" на $[c, d]$ интегр.
$$\int_a^\infty \varphi(x,y)\,h(x)\,dx$$

Док-во:
$\forall (x, y) \in \Pi_\infty : \exists M > 0 : |\varphi(x,y)| \leq M$ ~ ограниченность

Тогда, $|\varphi(x,y)\, h(x)| = |\varphi(x,y)| \cdot |h(x)| \le \underbrace{M\,|h(x)|}_{g(x)}$

$\int\limits_a^\infty M\,|h(x)|\,dx = M\int\limits_a^\infty |h(x)|\,dx < \infty$ => работает по признаку Вейерштрасса.

2. Признак Дирихле.

~ Пусть ф-я $f(x,y)$ опр-на в Π_∞ и непр-на по x на отрезке $[a, R]$ $(\forall R > a)$ для $\forall y \in [c,d]$, а её первообразная равномерно ограничена, т. е.:

$$\exists M > 0: \left|\int\limits_a^R f(x,y)\,dx\right| \le M \text{ для } \forall R > a \text{ и } \forall y \in [c,d]$$

Пусть также $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ монотонно.

Тогда: $\int\limits_a^\infty f(x,y)\, g(x)\,dx$ – сх-ся равномерно отн "y" на $[c,d]$

~ без док-ва.

3. Признак Абеля.

~ Если несобств. интеграл 1го рода $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ – сх-ся, а ф-я $g(x,y)$, определённая в Π_∞, равномерно ограничена в нём:

$$\exists M > 0: |g(x,y)| \le M \text{ для } \forall (x,y) \in \Pi_\infty$$

и монотонная по x. Тогда

$\int\limits_a^\infty f(x)\, g(x,y)\,dx$ ~ равн-но сх-ся отн-но "y" на $[c,d]$

Док-во: Из сх-ти $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ по критерию Коши

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A = A(\varepsilon) \ge a: \forall R', R'' > A(\varepsilon) \quad (R' < R'')$

$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

Рассмотрим $\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\, g(x,y)\,dx \overset{\text{2-ая теор. о среднем}}{=} g(R',y)\int\limits_{R'}^{\xi} f(x)\,dx + g(R'',y)\int\limits_{\xi}^{R''} f(x)\,dx$,

– вторая теорема о среднем.

где $\xi \in (R', R'')$

Оценка интеграла:

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\, g(x,y)\,dx\right| \le M \cdot \underbrace{\left|\int\limits_{R'}^{\xi} f(x)\,dx\right|}_{<\varepsilon} + M \underbrace{\left|\int\limits_{\xi}^{R''} f(x)\,dx\right|}_{<\varepsilon} < 2M\varepsilon$$

$\forall y \in [c,d]$

~ равном. сх-ся по критерию Коши.

$=> I(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + \pi \ln 2$

Св-ва интеграла $G(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$

Теорема о непрерывности

Пусть ф-ия $f(x,y) \in C(\Pi_\infty)$, а интеграл $G(y)$ равномерно сх-ся отн-но "у" на $[c,d]$.

Тогда $G(y) \in C([c,d])$

Док-во: Рассмотрим последовательность ф-ий $\{G_n(y)\}$, где

$$G_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx, \quad n \in N$$

По теореме о собств. интеграле зав. от параметра "у" $\to$ все ф-ии $G_n(y) \in C[c,d]$

Из равномерной сх-ти $G(y)$ следует равномерная сх-ть пос-ти $\{G_n(y)\} \to$ по теореме МА.

$$\lim_{n\to\infty} G_n(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = G(y) \in C([c,d])$$

Функц. пос-ть $\{G_n(y)\}$ назыв. равном. сх-ся к $G(y)$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall y \in [c,d]: |G(y) - G_n(y)| < \varepsilon$.

Отсюда

$$\left| \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx - \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx \right| = \left| \int_{a+n}^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_R^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A = A(\varepsilon) \geq a: \forall R > A(\varepsilon)$
$\forall y \in [c,d]$

$R = a + n \Rightarrow a + n > A(\varepsilon) \Rightarrow n > A(\varepsilon) - a$

$n > [A(\varepsilon) - a]$ - целая часть

$N(\varepsilon) = [A(\varepsilon) - a]$

Следствие 1: Док-во неравномерной сходимости:

Если $F(x,y) \in C\,\Pi_\infty$, а $G(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ - имеет точки разрыва на $[c,d]$, то $G(y)$ - сх-ся неравномерно отн-но "у" на $[c,d]$

Док-во (от противного): Пусть $G(y)$ сх-ся равномерно отн-но "у" на $[c,d]$

$\Rightarrow$ По теореме о непрерывности $G(y) \in C([c,d])$ $\to$ приводит к противоречию, т.к. имеет точки разрыва

Следствие 2:

Пусть $f(x,y) \in C(\Pi_\infty)$ и $G(y) \in C([c,d])$.

Будет ли $G(y)$ сх-ся равномерно?

В общем случае нет!

④ Признак Дини

~ Пусть $f(x,y) \in C(\Pi_\infty)$ и неотрицательна в нем: $\forall (x,y) \in \Pi_\infty : f(x,y) \geq 0$,

а $G(y) \in C([c,d])$, тогда $G(y)$ - равномерно сх-ся относит-но "y" на $[c,d]$. ~без док-ва.

Следствие 3: Из непрерывности вытекает:

$$\lim_{y\to y_0} G(y) = G(y_0), \quad y_0 \in [c,d], \text{ тогда}$$

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty f(x,y_0)\,dx = \int_a^\infty \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$$

Теорема о дифференцируемости несобств. сх-сти

~Пусть:

1) Ф-я $f(x,y)$ и $f_y'(x,y)$ - непрерывны в Π_∞.

2) Интеграл $G(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ сх-ся при некотором $y_0 \in [c,d]$

3) $\int_a^\infty f_y'(x,y)\,dx$ - равном-но сх-ся отн "y" на $[c,d]$

Тогда $\exists G'(y) = \int_a^\infty f'(x,y)\,dx$ для $\forall y \in (c,d)$

Док-во: 1) рассмотрим функц. посл-ть $G_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx$, $n \in N$

~функциональная посл-ть.

Собств. инт-л зав. от пар-ра "y"

Из теоремы о собств. интеграл зав. от пар-ра "y"

$$\exists G_n'(y) = \int_a^{a+n} f_y'(x,y)\,dx$$

$$\{G_n'(y)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^\infty f_y'(x,y)\,dx$$

(2°)

1° $\{G_n(y_0)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^\infty f(x,y_0)\,dx$ - имеет предел.

2° Посл-ть $\{G_n'(y)\}$ - равн-но сх-ся отн-но "y" на $[c,d]$, а её элементы существуют (3°)

По теореме о функц. посл-тях

$\Rightarrow I(a) = \ldots$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} G_n'(y) = \frac{d}{dy}\left[\lim\limits_{n\to\infty} G_n(y)\right] = \frac{d}{dy}\int_a f(x,y)\,dx$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty f_y'(x,y)\,dx$ ■

Теорема об интегрируемости несобственного интеграла

Пусть ф-я $f(x,y) \in C(\Pi_\infty)$, а $G(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ – равн-но сх-ся относит-но "y" на $[c,d]$.

Тогда ф-я $G(y)$ интегрируема на $[c,d]$ и справедлива формула:

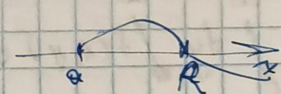
$$\int_c^d G(y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

Док-во: по условиям исходной теоремы $f(x,y) \in C(\Pi_\infty)$ и $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ равномерно сх-ся $\Rightarrow$ по теореме о непр-ти

$G(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ – непр-на на $[c,d]$

Непрерывная ф-я интегрируема $\Rightarrow \exists \int_c^d G(y)\,dy =$

$$= \int_c^d dy\left[\int_a^R f(x,y)\,dx \quad \int_R f(x,y)\,dx\right] =$$



$$= \int_c^d dy\int_a^R f(x,y)\,dx + \int_c^d dy\int_R^\infty f(x,y)\,dx \underset{\text{т. об интегр. с. ч.}}{=} \int_a^R dx\int_c^d f(x,y)\,dy + \int_c^d dy\int_R^\infty f(x,y)\,dx$$

$$\left|\int_c^d G(y)\,dy - \int_a^R dx\int_c^d f(x,y)\,dy\right| = \left|\int_c^d dy\int_R^\infty f(x,y)\,dx\right| \le \int_c^d dy\left|\int_R^\infty f(x,y)\,dx\right| <$$

По опр-ю равном-ой сх-ти $G(y) = \int f(x,y)\,dx$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists A = A(\varepsilon) \ge a$:

$\forall R > A(\varepsilon)$ и $y \in [c,d]$: $\left|\int_R^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$.

$< \underbrace{\varepsilon(d-c)}_{\varepsilon'}$

$\Rightarrow$ по опр-ю ~~предел~~ $\exists \lim\limits_{R\to\infty}\int_a^R dx\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d G(y)\,dy$

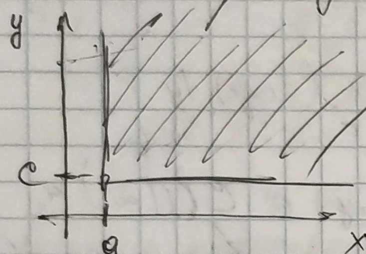
$$\Rightarrow \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx. \quad \blacksquare$$

Замечание: Ф-ла справедлива и для:

$$\int_c^d G(y)\,dy, \quad \forall y \in [c, d]$$

Теорема 1.

Пусть ф-я $f(x,y)$ опр-на и непр-на при $x \geq a$ и $y \geq c$, т.е. в прямоугольнике; и несобств. интегралы $G(y)$



$$G(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$ — сх-ся равномерно относительно "y" в области $y \geq c$

$$K(x) = \int_c^\infty f(x,y)\,dy$$ — сх-ся равномерно отн-но "x" в обл. $x \geq a$.

Тогда из сх-ти одного из интегралов

$\int_c^\infty G(y)\,dy$ и $\int_a^\infty K(x)\,dx$ вытекает сх-ть другого и их равенство.

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)\,dy$$

~без док-ва.

Теорема 2 (Дини)

Пусть ф-я $f(x,y)$ — непр-на в беск. прямоугольнике $x \geq a$, $y \geq c$ и неотрицательна в нём: $f(x,y) \geq 0$.

Пусть несобств. интегралы $G(y)$ и $K(x)$ (см. предыд. теорему) непр-ны соответственно при $y \geq c$ и $x \geq a$.

Тогда из сх-ти одного из интегралов

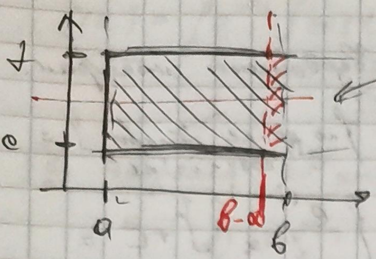
$\int_c^\infty G(y)\,dy$ и $\int_a^\infty K(x)\,dx$ вытекает сх-ть другого и их рав-во.

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)\,dy$$

Опр. (несобств. инт. 2-го рода зав. от параметра)

Пусть $f(x,y)$ задана в открытом прямоугольнике $П_0$ и неогр-на при $x = b$ для $\forall y \in [c, d]$.

Предположение, что $\int_a^b f(x,y)\,dx \equiv M(y)$ — сх-ся $\forall y \in [c, d]$



отрезок Тогда $H(y)$ называв. несобств. интегралом 2-го рода, зав. от пар-ра y.

Для инт. 2 рода справедливы все теоремы о дифф-ти, интегр. при условии сходимости.

Опр-е (равном. сх-ти)
Интеграл $H(y)$ наз-ся равн-но сх-ся отн-но "y" на $[c, d]$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \alpha : 0 < \alpha < \delta(\varepsilon)$ и $\forall y \in [c, d]$:

$$\left| \int_{b-\alpha}^{b} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$$

Замена $t = \frac{1}{b-x} \to b - x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{t^2}$

$$\Rightarrow \boxed{H(y) = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}, y\right) \frac{dt}{t^2}}$$ ~ интеграл 1-го рода.

15.03.22.

1.3. Применение теории интегралов, зависящих от параметра к вычислению именных несобств. интегралов.

(а) Интеграл Дирихле.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

абс. сходимость $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$; $\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$

по признаку сравнения $\int_0^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2x}\, dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2x}{2x}\, dx + \int_1^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2x}\, dx$
$< \infty$ ⇐ расход.

$$\Rightarrow \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x}}_{\text{расход.}} - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{dx}\, dx}_{< \infty}$$

По Дирихле $\left| \int_1^R \cos 2x\, dx \right| = \left| \frac{\sin 2x}{2} \Big|_1^R \right| = \left| \frac{\sin 2R - \sin 2}{2} \right| \leq 1$

$\frac{1}{2x} \to 0$ при $x \to \infty$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx \sim \text{расходится.}$$

Условная сх-ть:

$f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x} \to 0$, $x \to \infty$

$\left| \int_0^R \sin x\, dx \right| = \left| -\cos x \Big|_0^R \right| = |1 - \cos R| \leq 2$ по пр-ку Дирихле.

$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx$, $\alpha\geq 0$ — несобств. зависящий интеграл.

Доказываем сходимость по опр-но $\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx=\{$по ф-ле Эйлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x\}=$

$$=\int e^{-\alpha x}\,\mathrm{Im}(e^{ix})\,dx=\mathrm{Im}\left\{\int e^{(i-\alpha)x}\,dx\right\}=\mathrm{Im}\left\{\frac{e^{(i-\alpha)x}}{i-\alpha}\right\}+C=$$

$$=-\mathrm{Im}\left\{\frac{e^{-\alpha x}(\cos x+i\sin x)(\alpha+i)}{\alpha^2+1}\right\}+C=\frac{-e^{-\alpha x}}{\alpha^2+1}(\cos x+\alpha\sin x)+C=$$

$$=\Phi(x,\alpha)+C$$

$$\cos x+\alpha\sin x=\sqrt{1+\alpha^2}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}}_{\cos\varphi_0}\cos x+\underbrace{\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}_{\sin\varphi_0}\sin x\Big)=\sqrt{1+\alpha^2}\,\cos(x-\varphi_0)$$

Амплитуда фаза

$$\Phi(x,\alpha)=-\frac{e^{-\alpha x}\cos(x-\varphi_0)}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$|\Phi(x,\alpha)|=\left|\frac{e^{-\alpha x}\cos(x-\varphi_0)}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\leq 1$$

$$\left|\int_A^\infty\frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx\right|\sim ?$$

по частям.

$$\int_A^\infty\frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx=\left\{\begin{array}{ll}u=\frac{1}{x} & du=-\frac{dx}{x^2}\\ e^{-\alpha x}\sin x=dv & v=\Phi(x,\alpha)\end{array}\right\}=\underbrace{\frac{\Phi(x,\alpha)}{x}\Big|_A^\infty}_{-\frac{\Phi(A,\alpha)}{A}}+\int_A^\infty\Phi(x,\alpha)\frac{dx}{x^2}=$$

$$=-\frac{\Phi(A,\alpha)}{A}+\int_A^\infty\frac{\Phi(x,\alpha)}{x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow\left|\int_A^\infty\frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx\right|\leq\frac{|\Phi(A,\alpha)|}{A}+\int_A^\infty\frac{|\Phi(x,\alpha)|}{x^2}\,dx\leq\frac{1}{A}-\frac{1}{x}\Big|_A^\infty=\frac{2}{A}$$

Проверяем равномерн. сходимость: по определению:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists A=A(\varepsilon)>0;\ \forall R>A(\varepsilon)\ \text{и}\ \forall\alpha\geq 0:\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|<\varepsilon$$

$$\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|\leq\frac{2}{R}<\frac{2}{A}=\varepsilon,\ \text{т.к.}\ R>A$$

$$\Rightarrow A=A(\varepsilon)=\frac{2}{\varepsilon}$$

Удовлетв.

$\Rightarrow I(\alpha)$ сходится по опр-но

По теореме о непрерывности.

1) $f(x,\alpha)=e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}$ — непр., при $x\geq 0$ и $\alpha\geq 0$

2) $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx$ равном.-но сх-ся отн. α, в области $\alpha\geq 0$

$\Rightarrow I(\alpha)$ — непр. в области $\alpha\geq 0$

$$\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha)=\lim_{\alpha\to+0}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^\infty\lim_{\alpha\to+0}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx$$

$J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \underbrace{\int_0^1 \cos tx \, dt}_{= \frac{\sin x}{x}} \overset{?}{=}$ меняем местами $= \int_0^1 dt \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos tx \, dx$

(2) Теорема об интегрировании

1) $f(x, t) = e^{-\alpha x} \cos tx$ — непр-на при $x \ge 0$, $0 \le t \le 1$

2) $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos tx \, dx$ — равномерно сх-ся (отн. пар-ра t) в области $0 \le t \le 1$.

По Вейерштрассу: $|e^{-\alpha x} \cos tx| \le e^{-\alpha x}$

$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} < \infty$ — док-но.

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos tx \, dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{Re}\{e^{itx}\} dx = \operatorname{Re}\left\{\int_0^\infty e^{(it-\alpha)x} dx\right\} =$$

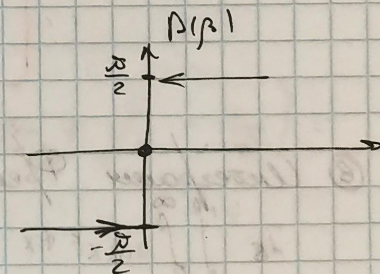
$$= \operatorname{Re}\left\{ \frac{e^{(it-\alpha)x}}{it-\alpha} \Big|_0^\infty \right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\alpha - it}\right\} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2}$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \int_0^1 \cos tx \, dt = \int_0^1 dt \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos tx \, dx = \int_0^1 \frac{\alpha \, dt}{\alpha^2 + t^2} = \int_0^1 \frac{d(t/\alpha)}{1 + (t/\alpha)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\alpha \to 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$



$$D(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & \beta > 0 \\ 0, & \beta = 0 \\ -\pi/2, & \beta < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta$$

— разрывный множитель Дирихле.

Вывод: $\boxed{\operatorname{sgn} \beta = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx}$ — разрывн. ф-ю можно представить в виде интеграла.

(6) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ — интеграл Пуассона.

— интеграл абсол. сходящ.

Замена переменного: $x = \alpha t$, $dx = \alpha \, dt$, где α — параметр, $\alpha > 0$

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$I = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} dt \quad \Big/ \cdot e^{-\alpha^2}$$

$$\underbrace{\int_0^\infty e^{-\alpha^2} I \, d\alpha}_{=\,I^2} = \int_0^\infty \alpha \cdot e^{-\alpha^2} d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} dt \overset{?}{=} \int_0^\infty dt \underline{\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha}$$

(?) По теореме Дини: 1) $f(\alpha, t) = \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} \geq 0$

2) $J(\alpha) = \int_0^\infty f(\alpha, t)\, dt$, $\quad K(t) = \int_0^\infty f(\alpha, t)\, d\alpha$

являются ли непр. ф-ми?

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)} \alpha\, dt = \alpha e^{-\alpha^2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} dt = \{\alpha t = x\} =$$

$$= e^{-\alpha^2} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2} dx}_{=\,I}$$ непр. при $\alpha > 0$

$$K(t) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)} d(\alpha^2) = \frac{1}{2(1+t^2)}$$

ф-я непр. по $t \geq 0$.

$\to$ работает теорема Дини.

$$\Rightarrow \quad I^2 = \int_0^\infty K(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

$$I^2 = \frac{\pi}{4} \quad \to \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

(6) Интегралы Френеля:

$$\begin{cases} I_s & \int_0^\infty \sin x^2\, dx \\ I_c & \int_0^\infty \cos x^2\, dx \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt$$

Заменой $x^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

условно сходится по Дирихле.

$$I_s = \left\{ \begin{matrix} x^2 = t \\ x = \sqrt{t} \to dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

$$I_c = \{\text{аналогично}\} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$$

$f(t) = \sin t \quad \longrightarrow \left| \int_0^R \sin t\, dt \right| = |1 - \cos R| \leq 2$

$g = \frac{1}{\sqrt{t}} \to 0$ при $t \to \infty$

условно сходится по Дирихле.

Воспользуемся формулой Пуассона: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Вспомогательный интеграл: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-Ax^2}dx = \left\{ \begin{aligned} Ax^2 &= t^2 \\ x &= \frac{t}{\sqrt{A}} \\ dx &= \frac{dt}{\sqrt{A}} \end{aligned} \right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{A}}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{A}}$

замена

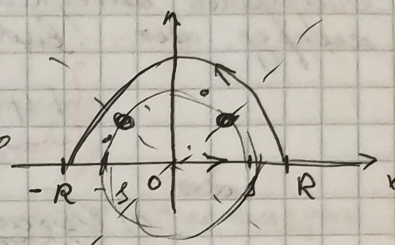
$$I_s = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dt\int_0^\infty \sin t\, e^{-tx^2}dx \overset{?}{=} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tx^2}dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\int_0^\infty \sin t\cdot e^{-tx^2}dt$$

$$\int_0^\infty \sin t\cdot e^{-tx^2}dt = \int_0^\infty Im\{e^{it}\}e^{-tx^2}dt = Im\left\{\int_0^\infty e^{(i-x^2)t}dt\right\} =$$

$$= Im\left\{\frac{1}{x^2-i}\right\} = Im\left\{\frac{x^2+i}{x^4+1}\right\} = \frac{1}{x^4+1}$$

$$I_s = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4} \ominus \{\text{с помощью теории вычетов}\}$$



$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} \to z^4 = -1 = e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$\boxed{z_k = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}},\ k = 0, 1, 2, 3.$$

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ } → простые полюса

$$\underset{z=z_0}{Res} f(z) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_0} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4}$$

$$\underset{z=z_1}{Res} f(z) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_1} = \frac{e^{-i\frac{9\pi}{4}}}{4} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4}$$

$$I_s \ominus \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot 2\pi i\left(\frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}i}{4}\left(-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{i}{\sqrt{2}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$$I_c = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dt\int_0^\infty \cos t\cdot e^{-tx^2}dx \overset{?}{=} \{\text{тех шагов за все самая}\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\int_0^\infty \cos t\cdot e^{-tx^2}dt \ominus$$

Отдельно: $\displaystyle\int_0^\infty \cos t\cdot e^{-tx^2}dt = \int_0^\infty Re\{e^{it}\}e^{-tx^2}dt = Re\left\{\frac{1}{x^2-i}\right\} = \frac{x^2}{x^4+1}$

$$\ominus \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \left\{x = \frac{1}{u}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\infty^0 \frac{\frac{1}{u^2}}{1+\frac{1}{u^4}}\cdot\frac{du}{u^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} =$$

$$= \{\text{из прошлого}\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

1.4. Интегралы Эйлера.

Опр. Эйлеровым интегралом 1-го рода или бета-функцией называется несобств. инт. вида

$$\boxed{B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx} \qquad \begin{matrix} p<1 \\ q<1 \end{matrix}$$

Опр. Эйлеровым интегралом 2-го рода или гамма-функцией называется несобствен. инт. вида

$$\boxed{\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx}$$

а) Область существования гамма- и бета-функций.

$$B(p,q) = \underbrace{\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}_{J_1} + \underbrace{\int_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}_{J_2}$$

любая

В областях $\begin{matrix} p \geq 1 \\ q \geq 1 \end{matrix} \to B(p,q)$ ~ собственный интеграл (нет особенностей)

$$J_1: \ x^{p-1}(1-x)^{q-1} \underset{x\to+0}{\sim} x^{p-1} \to \int_0^{1/2} x^{p-1}\,dx = \frac{x^p}{p}\Big|_0^{1/2} < \infty$$

при $p>0$, $\forall q$

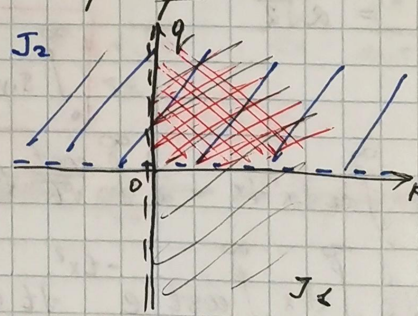
$\Rightarrow J_1$ ~ сходится по по признаку сравнения в области $p>0$, $\forall q$

$$J_2: \ x^{p-1}(1-x)^{q-1} \underset{x\to1-0}{\sim} (1-x)^{q-1} \to \int_{1/2}^{1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{(1-x)^q}{-q}\Big|_{1/2}^{1} < \infty$$

при $q>0$, $\forall p$

$\Rightarrow J_2$ ~ сходится при $q>0$ и $\forall p$.

$\Rightarrow B(p,q)$ опр-на в области $p>0$ и $q>0$



$$\Gamma(p) = \underbrace{\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx}_{G_1} + \underbrace{\int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx}_{G_2}$$

$$G_1: \ x^{p-1}e^{-x} \underset{x\to+0}{\sim} x^{p-1} - \int_0^1 x^{p-1}\,dx < \infty \Rightarrow \text{при } p>0$$

$\Rightarrow G_1$ ~ сходится при $p>0$

C_2: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{p-1} e^{-x}}{1/x^r} \to \int_1^\infty \dfrac{dx}{x^r} = \dfrac{x^{1-r}}{1-r}\Big|_1^\infty < \infty$

При $1-r<0 \to r>1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p-1} e^{-x}}{1/x^r} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p+r-1}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \{\text{по Лопиталю} \to 0\} = 0$$

$p+r-1>0 \to \forall p, r$

$\Rightarrow$ C_2 - сходится при $\forall p$

$\Rightarrow$ $\Gamma(p)$ определена в области $p>0$

б) Доказательство непрерывности бета- и гамма-функций.

Теорема (о непр-ти несобст. инт., завис. от параметра) ~ используем.

$B(p,q)$: 1) $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ ~ непрерывна при $0<x<1$

2) равном. сх-ть $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ при $p>0$ и $q>0$

Берём $0<p_0\le p<\infty$ и $0<q_0\le q<\infty$

Критерий Вейерштрасса. $|x^{p-1}(1-x)^{q-1}| \le x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$

$\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1} = B(p_0,q_0) < \infty \Rightarrow$

$B(p,q)$ - непрерывна в области $p>0$, $q>0$.

$\Gamma(p)$: 1) $x^{p-1}e^{-x}$ ~ непрер. при $0<x<\infty$

2) равном. сх-ть $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ в области $p>0$ $(0<p<\infty)$

$$0<\underbrace{p_0\le p\le p_1}<\infty$$

Применяем признак Вейерштрасса:

$$|x^{p-1}| = x^{p-1} \le \begin{cases} x^{p_0-1}, & 0<x<1 \\ x^{p_1-1}, & x>1 \end{cases}$$

$$|x^{p-1}e^{-x}| \le e^{-x}(x^{p_0-1}+x^{p_1-1}), \quad 0<x<\infty$$

$$\int_0^\infty e^{-x}(x^{p_0-1}+x^{p_1-1})dx = \Gamma(p_0)+\Gamma(p_1) < \infty$$

$\Rightarrow$ $\Gamma(p)$ ~ непрерывно в области $p>0$

в) Свойства гамма-функции.

1) Формула приведения.

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)}$$

$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = \{$по частям $\to$ $u = x^p$, $dv = e^{-x}dx$ $\to$ $du = p x^{p-1}dx$, $v = -e^{-x}\} =$

$= \underbrace{-x^p e^{-x}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty p x^{p-1} e^{-x}\,dx = p\,\Gamma(p)$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p(p-1)\Gamma(p-1) = \ldots = p(p-1)\ldots(p-[p])\cdot \Gamma(p-[p])$$

$\Rightarrow \Gamma(p) \to 0<p\le 1 \rightsquigarrow$ остальные значения можно найти по формуле приведения.

Пусть $p = n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 1\,\Gamma(1) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

$\to$ В случае не целых. $p! = \Gamma(p+1)$

2) Существование производных любого порядка.

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx \quad (p>0)$$

$$\Gamma'(p) \overset{?}{=} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \ln x\,dx$$

По теореме о дифф-ии:

✓ 1) $x^{p-1}e^{-x}$, $x^{p-1}e^{-x}\ln x$ — непрерывны при $x>0$.

✓ 2) $\exists\,\Gamma(p_0)$, $p_0>0$

3) Равномерная сходимость $\Gamma'(p)$ отн-но p в обл-ти $p>0$.

Признак Вейерштрасса

$$|x^{p-1}e^{-x}\ln x| \le e^{-x}|\ln x|(x^{p_0-1} + x^{p_1-1}), \text{ где } 0<p_0\le p\le p_1<\infty$$

$$\int_0^\infty e^{-x}|\ln x|\cdot(x^{p_0-1} + x^{p_1-1})\,dx < \infty ?$$

Разбиваем на два:

$$\int_0^\infty e^{-x}|\ln x|(x^{p_0-1}+x^{p_1-1})\,dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x}(-\ln x)(x^{p_0-1}+x^{p_1-1})\,dx}_{G_1} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-x}\ln x\,(x^{p_0-1}+x^{p_1-1})\,dx}_{G_2}$$

Сравниваем с эталонными интегралами. $\int_0^1 \frac{dx}{x^r} = \frac{x^{1-r}}{1-r}\Big|_0^1 < \infty$ при $r<1$.

$G_1: \lim_{x\to+0} \frac{e^{-x}(-\ln x)(x^{p_0-1}+x^{p-1})}{1/x^r} = \lim_{x\to+0}$

$= \lim_{x\to+0} \frac{(-\ln x)\, x^{p_0-1}(1+x^{p_1-p_0})}{1/x^r} = -\lim_{x\to+0} x^{r+p_0-1}\ln x = -\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{1-r-p_0}} =$

$= \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \{\text{при } 1-r-p_0<0\} = -\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{(1-r-p_0)x^{-r-p_0}} = 0$

$1 > r > 1-p_0$

$\Rightarrow G_1$ сходится

$G_2: \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}\ln x\,(x^{p_0-1}+x^{p_1-1})}{1/x^r} = \left\{\int_1^\infty \frac{dx}{x^r} \text{ — ехся при } r>1\right\} =$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\ln x\cdot x^{p_1-1}(1+x^{p_0-p_1})}{1/x^r} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{r+p_1-1}\ln x}{e^x} = 0$ при $\forall r, p_1$.

$\Rightarrow G_2$ сходится $\Rightarrow G$ — сходится и выполнены все усл-я теоремы Γ — сх-ся.

$\Gamma''(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx > 0$ док-во аналогично с 1й производной и т.д.

$$\boxed{\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln^n x\,dx}, \quad n\in\mathbb{N}$$

8) Построение графика. $\Gamma(p)$

$\Gamma(p) > 0, \quad p > 0$

$\Gamma''(p) > 0$ — выпуклость вниз.

$\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(1) = 0! = 1$

$\Gamma(2) = 1! = 1.$ $\Rightarrow$ По теореме Ролля имеется минимум при $1<p<2$.

Асимптоты:

$p=0$; теорема приведения:

$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \frac{1}{p} \to \infty$ при $p\to+0$

$ap+b$ — накл. асимптота

$a = \lim_{p\to+\infty}\frac{\Gamma(p)}{p} = \lim_{p\to+\infty}\frac{(p-1)\Gamma(p-1)}{p} = \infty$

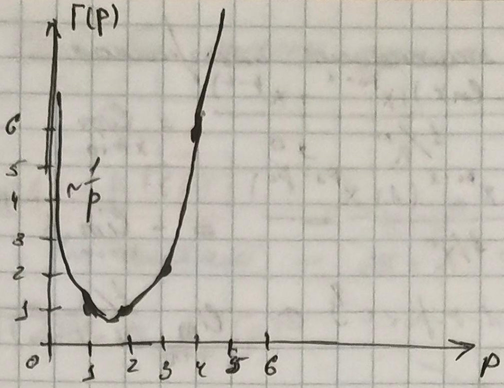
$\Gamma(3) = 2! = 2$

$\Gamma(4) = 3! = 6$

$\Gamma(5) = 4! = 24$

$p_{min} \approx 1,4616$

$\Gamma(p_{min}) = 0,8856$



Свойства бета-функции $(B(p,q))$

1) Формула симметрии.

$$B(p,q) = B(q,p)$$

Док-во: $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \left\{ \begin{array}{l} 1-x=t \\ x = 1-t \\ dx = -dt \end{array} \right\} = -\int_1^0 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt =$

$$= \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt = B(q,p)$$

2) Формулы приведения: $(B(p+1,q),\ B(p,q+1))$

$$B(p,q+1) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(1-x)dx =$$

$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx - \int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx = B(p,q) - B(p+1,q)$$

$$B(p,q+1) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \left\{ \begin{array}{l} u = (1-x)^q \\ dv = x^{p-1}dx \\ du = -q(1-x)^{q-1} \\ v = \frac{x^p}{p} \end{array} \right\} =$$

$$= \underbrace{\frac{x^p}{p}(1-x)^q \Big|_0^1}_{=0} + \frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx = \frac{q}{p}B(p+1,q)$$

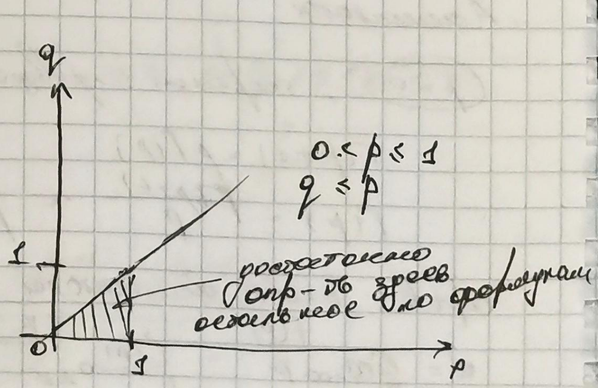
$$\begin{cases} B(p,q+1) = B(p,q) - B(p+1,q) \\ B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p+1,q) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$B(p,q) - B(p+1,q) = \frac{q}{p}B(p+1,q)$$

$$\boxed{B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)}$$

$$\boxed{B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q)}$$



3) Различные представления бета-функции.

а) Тригонометрическое представление:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \;\ominus$$

$x = \sin^2 t$

$1-x = \cos^2 t$

$dx = 2\sin t\cos t\,dt$

$$\ominus\; 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-2} t\cdot\cos^{2q-2} t\cdot \sin t\cdot\cos t\,dt = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1} t\cdot\cos^{2q-1} t\,dt$$

~ тригонометр. представл.

$B(1/2, 1/2) = \pi$ (легко вычисляется)

б) Заменой $x = \frac{1}{1+t}$ → к предельному виду.

$$1-x = 1-\frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$$

$$dx = -\frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$B(p,q) = -\int_\infty^0 \frac{1}{(1+t)^{p-1}}\cdot\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{q-1}}\cdot\frac{dt}{(1+t)^2} = \int_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}}$$

$1-p-1$

$B(p,q) = B(q,p)$

$$B(p, 1-p) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx \;\to\; 1+z^{2n}=0$$ ~ беск. много корней (зав. от n.)

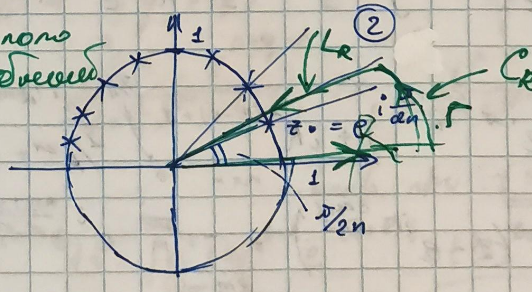
$m, n \in \mathbb{N}$

$m<n$

$$z^{2n} = -1 = e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$z_k = e^{\frac{i}{2n}(\pi+2\pi k)} = e^{\frac{\pi i}{2n}+\frac{i\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$$

Выбираем не всю верхн. полуплоскость, а опр-ный, удобный нам сектор.



$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^R f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{L_R} f(z)\,dz$$

L_R: (луч на угле $\frac{\pi}{n}$) $\Rightarrow z = \rho\cdot e^{i\frac{\pi}{n}}$

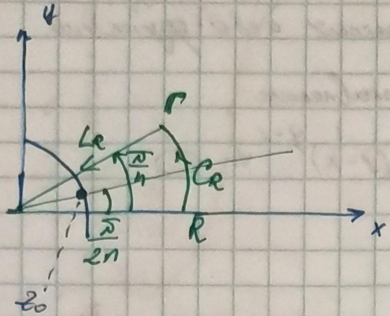
$$dz = e^{i\frac{\pi}{n}}\,d\rho$$

$$\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_R^0 \frac{\rho^{2m}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^{2m}}{1+\rho^{2n}\underbrace{\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^{2n}}_{=1}}\,e^{i\frac{\pi}{n}}\,d\rho = -\int_0^R \frac{\rho^{2m}}{1+\rho^{2n}}\,d\rho\cdot e^{i\pi\frac{2m+1}{n}}$$

5.04.22 продолжение:

$$G = \int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}$$

$m, n \in \mathbb{N}$



$$\oint_\Gamma \frac{z^{2m}dz}{1+z^{2n}}$$

$1+z^{2n}=0$

$z^{2n} = -1 = e^{i(\pi+2\pi k)} \to z_k = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{2n}}$, $k = 0, 1, \dots, 2n-1$

В область попадает один корень $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2n}}$

$$\oint_\Gamma \frac{z^{2m}dz}{1+z^{2n}} = \underbrace{\int_0^R \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}}_{I} + \int_{C_R} \frac{z^{2m}dz}{1+z^{2n}} + \underbrace{\int_{L_R} \frac{z^{2m}dz}{1+z^{2n}}}_{} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) =$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{z_0}{2n z_0^{2n-1}} = \frac{1}{2n} z_0^{2m+1-2n} = \frac{1}{2n} e^{i\frac{\pi}{2n}(2m+1-2n)} = -\frac{1}{2n} e^{i\frac{\pi(2m+1)}{2n}}$$

простой полюс

$$= -\frac{\pi i}{n} e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

L_R: $z = \rho e^{i\frac{\pi}{n}}$, $0 \le \rho \le R \to dz = e^{i\frac{\pi}{n}} d\rho$

$$\Rightarrow \int_{L_R} \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}dz = \int_R^0 \frac{\rho^{2m} e^{i\frac{\pi 2m}{n}} e^{i\frac{\pi}{n}}}{1+\rho^{2n}\underbrace{e^{2\pi i}}_{=1}} d\rho = -e^{i\pi\frac{(2m+1)}{n}} \cdot I$$

C_R: $z = R\cdot e^{i\varphi}$; $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{n} \to dz = R i e^{i\varphi} d\varphi$

$$\int_{C_R} \frac{z^{2m}dz}{1+z^{2n}} = \int_0^{\pi/n} \frac{R^{2m} e^{2im\varphi} R i e^{i\varphi} d\varphi}{1+R^{2n}e^{i2n\varphi}} = \frac{R^{2m+1}}{R^{2n}} \int_0^{\pi/n} \frac{e^{i(2m+1)\varphi}}{1/R^{2n}+e^{2in\varphi}} d\varphi$$

$$I\left(1-e^{i\pi\frac{2m+1}{n}}\right) + i\underset{m<n}{R^{2(m-n)+1}} \int_0^{\pi/n} \frac{e^{i(2m+1)\varphi}}{1/R^{2n}+e^{i2n\varphi}} d\varphi = -\frac{\pi i}{n} e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

$R\to\infty$: $G\left(1-e^{i\pi\frac{2m+1}{n}}\right) = -\frac{\pi i}{n} e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}$

$$G = -\frac{\pi i}{n} \cdot \frac{e^{i\pi\frac{2m+1}{2n}}}{1-e^{i\pi\frac{2m+1}{n}}} = -\frac{\pi i}{n} \frac{1}{e^{-i\pi\frac{2m+1}{2n}} + e^{i\pi\frac{2m+1}{2n}}} = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\sin \pi\frac{2m+1}{2n}}$$

$$\Rightarrow G = \int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\sin\pi\frac{2m+1}{2n}}$$

$$B(p, 1-p) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}dt \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{2n} = t \\ x = t^{1/2n} \\ dx = \frac{1}{2n} \cdot t^{1/2n - 1} dt \end{array} \right\} \Rightarrow G = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t}dt \cdot \frac{1}{2n}$$

$\Rightarrow I(a) = \pi \ln(a+\sqrt{a^2-1}) + \pi \ln 2$

Из теорем имеем $(0<p<1) \Rightarrow \frac{2m+1}{2n} \to p$.

$$\lim_{\frac{2m+1}{2n}\to p} \text{в } \cancel{-\frac{1}{2n}} \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\sin \pi p}$$

Предел можно занести внутрь, беск-ф-я непр.

$$\boxed{B(p,1-p) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}}$$

в) Связь эйлеровых интегралов:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x = (1+t)y \\ t>0 \\ dx = (1+t)\,dy \end{array}\right\} = (1+t)^p \int_0^\infty y^{p-1} e^{-(1+t)y}\,dy$$

$$\frac{\Gamma(p)}{(1+t)^p} = \int_0^\infty y^{p-1} e^{-(1+t)y}\,dy$$

$p \to p+q$

$$t^{p-1} \times \left| \frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^\infty y^{p+q-1} \cdot e^{-(1+t)y}\,dy \right.$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\Gamma(p+q)\,dt = \int_0^\infty t^{p-1}\,dt \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+t)y}\,dy$$

$$\Gamma(p+q)B(p,q) = \int_0^\infty dt \int_0^\infty y^q (ty)^{p-1} \cdot e^{-(1+t)y}\,dy \overset{?}{=}$$

? $f(t,y) = y^q (ty)^{p-1} e^{-(1+t)y} \geq 0$ ~ по т. Дини.

~ непр-на при $p>0$ и $q>0$

$$K(t) = \int_0^\infty f(t,y)\,dy = \int_0^\infty y^q (ty)^{p-1} e^{-(1+t)y}\,dy =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} (1+t)y = x \\ dy = \frac{dx}{1+t} \end{array}\right\} = \int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{t^{p-1} \cdot x^{p+q-1}}{(1+t)^{p+q-1+1}} \cdot dx = \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\Gamma(p+q)$$

~ непр. при $\underline{\underline{t>0}}$.

$$I(y) = \int_0^\infty f(t,y)\,dt = \int_0^\infty y^q (ty)^{p-1} e^{-(1+t)y}\,dt = \int_0^\infty y^q (ty)^{p-1} e^{-(1+t)y}\,dt =$$

$$= y^q e^{-y} \int_0^\infty (ty)^{p-1} e^{-ty}\,dt = \{yt = z\} = y^{q-1} e^{-y} \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z}\,dz = y^{q-1} e^{-y}\Gamma(p)$$

– непр.

$$\Gamma(p+q)B(p,q) = \int_0^\infty dt \int_0^\infty f(t,y)\,dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty f(t,y)\,dt = \int_0^\infty I(y)\,dy =$$

$$= \int_0^\infty y^{q-1} e^{-y}\,dy \cdot \Gamma(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$ – формула связи

Следствие:

① $B(m+1, n+1) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m+2)} = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} = \frac{1}{m+n+1}\cdot\frac{1}{\frac{(m+n)!}{m!\,n!}} = \frac{1}{(m+n+1)\,C_{m+n}^{m}}$

② Формула дополнения для $\Gamma(p)$

$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin\pi p}, \quad 0<p<1$

$q = 1-p \rightarrow \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\pi p}$

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin\pi p}, \quad 0<p<1}$$

$\Gamma^2(1/2) = \pi \rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$0! = 1.$

$\int_0^\infty x^{1/2-1} e^{-x}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x}\,d\sqrt{x} = \underbrace{2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy}_{\text{инт. Пуассона}} = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$

$E_n = \Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\frac{n-1}{n}) = \quad , \quad n\in\mathbb{N}$

$= \Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(1-\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\Gamma(1-\frac{2}{n})\ldots$? последнему пара при $n:2\mathbb{N}$ а $n \not\vdots 2\mathbb{N}$

$E_n^2 = \underbrace{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\ldots\Gamma(1-\frac{1}{n})}_{E_n}\underbrace{\Gamma(1-\frac{1}{n})\ldots\Gamma(\frac{2}{n})\Gamma(\frac{1}{n})}_{E_n}$

$E_n^2 = \prod_{k=1}^{n-1}\Gamma(\frac{k}{n})\Gamma(1-\frac{k}{n}) = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi k}{n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}}$

$z^n = 1 = e^{i2\pi k} \rightarrow z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$

$z_0 = 1$

$z^n - 1 = (z-z_0)\prod_{k=1}^{n-1}(z-z_k) = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-e^{i\frac{2\pi k}{n}})$

$\frac{z^n-1}{z-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(z-e^{i\frac{2\pi k}{n}})$ $\quad |n| = n = \prod_{k=1}^{n-1}|1-e^{i\frac{2\pi k}{n}}| \ominus$

$z \to 1$ $\quad \boxed{n = \prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{i\frac{2\pi k}{n}})}$ $\quad \ominus \prod_{k=1}^{n-1}|1-\cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}| \ominus$

$\ominus \prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{(1-\cos\frac{2\pi k}{n})^2 + \sin^2(\frac{2\pi k}{n})} = \prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi k}{n}} = \prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{\pi k}{n}} =$

$= \{k<n\} \rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{\pi k}{n} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n} = n$

$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

$E_n^2 = \frac{\pi^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{n} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$

$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}}$

$\Rightarrow I(a) = \pi\ln(a+\sqrt{a^2-1}) + \ldots 2$

12.04.22.

$$\boxed{\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}}$$ ~ формула дополнения

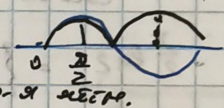
$$\boxed{2^{2p-1}\,\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2p)}$$ ~ формула дублирования

Если $p = n \in N$ $\Rightarrow$ $$\boxed{\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}}$$

1.5. Вычисление несобств. интегралов с помощью эйлеровых.

① $$\int_0^{\infty} x^{1/4}(1+x)^{-2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} p-1=\frac{1}{4} \\ p+q=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} p=\frac{5}{4} \\ q=\frac{3}{4} \end{array} \right\} = B\left(\tfrac{5}{4},\tfrac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4}+\frac{3}{4})} =$$
$\Gamma(2)=1$

$$= \frac{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(1-\frac{1}{4})}{1} = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

② $$\int_0^{2\pi} \sin^6 x\cos^4 x\,dx = \left\{ B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}x\cos^{2q-1} \right.$$  $\Big\} =$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\cdot\cos^4 x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} 2p-1=6 \\ 2q-1=4 \end{array} \Rightarrow p=\tfrac{7}{2},\ q=\tfrac{5}{2} \right\} = 2B\left(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2}\right) =$$

$$= 2\,\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(6)} = \frac{2}{5!}\Gamma^2\left(\tfrac{5}{2}\right)\cdot\frac{5}{2} = \frac{\Gamma^2(\frac{5}{2})}{4!} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2\cdot\Gamma^2\left(\tfrac{3}{2}\right)\frac{1}{4!} =$$

$$= \frac{3}{32}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\underbrace{\Gamma^2\left(\tfrac{1}{2}\right)}_{=\pi} = \frac{3\pi}{128}$$

③ Интеграл Раабе $(a \geq 0)$

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx$$

Случай $a>0$ → интеграл собственный, не имеет особенностей; $\ln\Gamma(x)$ - непр-на.

Диф-м по правилу Лейбница:

$$R'(a) = (a+1)'\ln\Gamma(a+1) - a'\ln\Gamma(a) = \ln\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \ln a$$

$$R(a) = \int \ln a\,da = \left\{ \begin{array}{l} u=\ln a \to du=\frac{da}{a} \\ dv=da \to v=a \end{array} \right\} = a\ln a - \int da = \underline{\underline{a(\ln a - 1)}}$$

$\Rightarrow R(a) = a(\ln a+1) + C$ → $a \to +0$ $\Rightarrow R(+0) = C$

теперь

$R(a)$ - непр. в обл-ти $a \geq 0$

$$R(+0) = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx \Rightarrow C = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$$

$$C = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{замена} \\ x \to 1-x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$C = \int_1^0 \ln\Gamma(1-x)(-dx) = \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,dx$ сложим

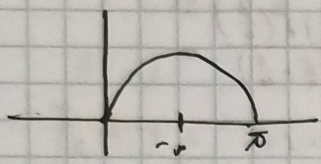
$$2C = \int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\,dx = \int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\,dx =$$

ф-ла дополнения

$$= \ln\pi - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,dx$$

$$J = \int_0^1 \ln\sin\pi x\,dx = \left\{\begin{matrix}\pi x = y\\ dx = \frac{1}{\pi}dy\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln\sin y\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\sin y\,dy = G$$

интеграл Эйлера.



Замена $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$G = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx$$

Снова сложим: $2G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin y\cos y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin 2y}{2}\,dy =$

$$= \int_0^{\pi/2}\ln\sin 2y\,dy - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \{2y = t\} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln\sin t\,dt - \frac{\pi}{2}\ln 2 = G - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\Rightarrow 2G = G - \frac{\pi}{2}\ln 2. \quad \Rightarrow G = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin y\,dy = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$2C = \ln\pi - \frac{2}{\pi}G = \ln\pi + \ln 2 = \ln 2\pi \quad \Rightarrow C = \frac{\ln 2\pi}{2}$$

$$\Rightarrow R(a) = a(\ln a - 1) + \ln\sqrt{2\pi}$$

2. Операционное исчисление.

Немного истории

(p) - символ → символическое исчисление

Хевисайд.

|| Бромвич, Карсон → $p = s + i\sigma$ → Преобразование Лапласа

2.1. Преобразование Лапласа. Область существования изображения.

Опр. Изображением по Лапласу комплексно-значной ф-ей $f(t)$ называют ф-ю компл. переменной $p = s + i\sigma$, опр. соотношением

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt \quad (*)$$

$f(t) \risingdotseq F(p)$, $F(p) \fallingdotseq f(t)$ — обозначения, $f(t)$ - оригинал, $F(p)$ - изображение

Условия на оригинал:

а) $f(t)=0$ для $t<0$

б) Условие гладкости (условие Липшица-Гёльдера)
~ За исключением отдельных точек с разрывом 1-го рода приращение $|f(t+\tau)-f(t)| \le A|\tau|^{\alpha}$,
где $A>0$, $0<\alpha\le 1$, и $|\tau|\le\tau_0$, $\tau_0>0$

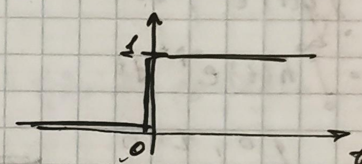
в) Ограничение на рост.
~ Для $\forall t>0$: $|f(t)|< Be^{s_0 t}$. Наим. из s_0 – показатель роста

$s_0=0$ – когда $f(t)$ – ограничено

$f(t)$ – непр.-дифф., $\exists f'(t)$

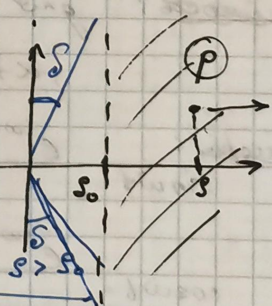
$$|f(t+\tau)-f(t)| = |f'(\theta)\tau| = \underbrace{|f'(\theta)|}_{A}|\tau|$$

$$\eta(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \sim \text{ф-я Хевисайда}$$



$\eta(t)\cdot\sin\omega t$ ~ оригинал
$\eta(t)\cdot e^{\alpha t}$ ~ оригинал
$\eta(t)\cos\omega t$ ~ оригинал

Теорема (об области существования изображения)
~ Для $\forall$ оригинала $f(t)$ изображение по Лапласу $F(p)$ опр-но в области $\mathrm{Re}\,p>s_0$ и является в этой области аналит-ой функцией



Док-во: 1) сущ-е

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty |f(t)|\cdot|e^{-pt}|dt \le$$
$$\le \int_0^\infty Be^{s_0 t}e^{-st}dt = \frac{B}{s-s_0} \ (<\infty)$$
→ сх-ся при $s>s_0$

$$|e^{-pt}| = |e^{-(s+i\sigma)t}| = |e^{-st}\cdot e^{-i\sigma t}| = e^{-st}$$

⇒ $\mathrm{Re}\,p>s_0$

2) аналитичность. $F'(p) \overset{?}{=} \int_0^\infty -t f(t)e^{-pt}dt$
непрер.
равн. сх-ся в области $\mathrm{Re}\,p>s_0$

По признаку Вейерштрасса: $\mathrm{Re}\,p = s > s_0$

$$s \ge s_1 > s_0$$

$$|-tf(t)e^{-pt}| = t|f(t)|\cdot e^{-st} \le \underbrace{tBe^{s_0 t}e^{-s_1 t}}$$
не содержит параметра.

$$B\int_0^\infty te^{-(s_1-s_0)t}dt = \frac{B}{(s_1-s_0)^2}$$ ~ конечное число ⇒ сх-ся

$\Rightarrow \exists F'(p)$, ч.т.д. $\to$ ф-я аналитическая.

1. Замечание: в области нет особых точек $F(p)$

2 Замечание: $\lim\limits_{s\to\infty} F(p) = \{$можем устремлять лишь внутри сектора, лежащ. по углом $\pi - 2\delta\}$

$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty} F(p) = 0$$
$$-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg p < \pi/2 - \delta$$

$$0 \le |F(p)| = \left|\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt\right| \le \frac{\beta}{s - s_0} \to 0, \text{ при } s \to \infty$$

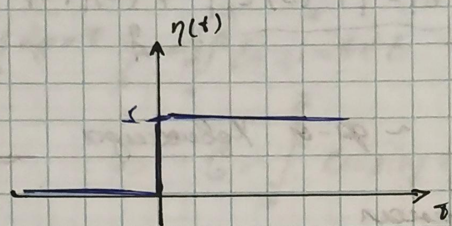
19.04.21.

2.2. Св-ва преобразований Лапласа.

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{F(p) = f(t)}$$

$$G(p) = \int_0^\infty g(t) e^{-pt} dt$$

$$H(p) = \int_0^\infty h(t) e^{-pt} dt$$



$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \eta(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \quad \to \quad \boxed{\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}}$$

$$e^{p_0 t}\eta(t),\ p_0 \in \mathbb{C} \quad ; \quad \boxed{e^{p_0 t}\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p - p_0}}$$

① Линейность: для $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\{\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)\}$$

Примеры:

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{\omega^2 + p^2}$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{\omega^2 + p^2}$$

$$\operatorname{sh}\alpha t = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - \alpha} - \frac{1}{p + \alpha}\right) = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$$

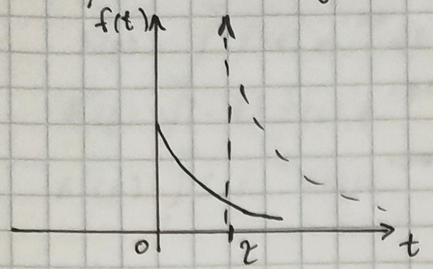
$$\operatorname{ch}\alpha t \risingdotseq \frac{p}{p^2 - \alpha^2}$$

② Теорема подобия: для $\forall \alpha > 0$:

$$\boxed{f(t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)}$$

Док-во: $$\int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt = \left\{ \begin{matrix} \alpha t = \tau \\ t = \frac{\tau}{\alpha} \end{matrix} \quad dt = \frac{d\tau}{\alpha} \right\} = \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

③ Теорема запаздывания:

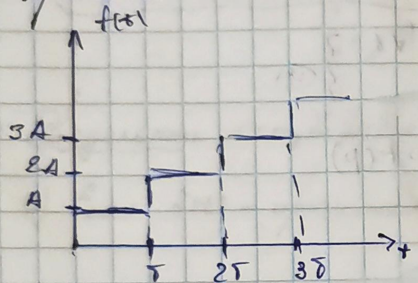


для $\forall \tau > 0$

$$\boxed{f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)}$$

Док-во:
$$\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \left\{ \begin{array}{l} t-\tau=\theta \\ t=\tau+\theta \end{array} \to dt=d\theta \right\} =$$
$$= \int_0^\infty f(\theta)e^{-p(\tau+\theta)}d\theta = e^{-p\tau}F(p) \quad ■$$

Пример:



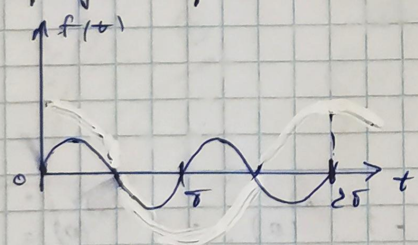
"лестница в небо"

$$f(t) = A\eta(t) + A\eta(t-T) + A\eta(t-2T) + \dots + A\eta(t-nT) + \dots$$

$$F(p) \risingdotseq Ae^{-pT}\frac{1}{p} + \frac{A}{p} + \dots = \frac{A}{p}(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots)$$ (?)

$$q = e^{-pT}; \quad |q| = |e^{-pT}| = |e^{-(s+i\sigma)T}| = e^{-\sigma T} < e^{-s_0 T} < 1$$

Периодич. ф-ция:



$$g(t) = \begin{cases} f(t), & 0<t<T \\ 0, & t>T \end{cases}$$

$$f(t) = g(t) + g(t-T) + \dots + g(t-nT) + \dots$$
$$F(p) \overset{①}{\underset{②}{=}} G(p)e^{-pT} + G(p) + \dots = \left\{ G(p) = \int_0 f(t)e^{-pt}dt \right\} =$$
$$= G(p)[1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots] = \frac{G(p)}{1-e^{-pT}}$$

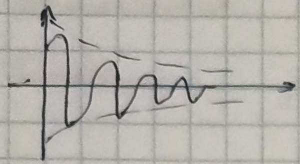
④ Теорема смещения: для $\forall p_0 \in \mathbb{C}$

$$\boxed{e^{p_0 t}\cdot f(t) \risingdotseq F(p-p_0)}$$

Док-во: $\int_0^\infty e^{p_0 t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = F(p-p_0)$

Пример:

$$e^{-\lambda t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}, \quad (\lambda>0)$$



$$p_0=-\lambda$$

$$e^{-\lambda t}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$$

⑤ **Дифференцирование оригинала:**

если $f(t)$ – непрер. при $t>0$, и $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ явл-ся оригиналами, тогда:

$$\boxed{\begin{aligned} &f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0)\\ &\dots\\ &f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\dots f^{(n-1)}(0).\end{aligned}}$$

Док-во:

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \left\{\begin{matrix} u=e^{-pt} & \Rightarrow du=-pe^{-pt}dt\\ dv=f'(t)dt & v=f(t)\end{matrix}\right\} \ominus$$

$$\ominus\ f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt}_{=F(p)} = -f(0)+pF(p)$$

$$0\le|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-pt} < Me^{-(s+p_0)t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$$\quad \text{''}\ Me^{s_0t}$$

$$s_1>s_0$$

$$f''(t) = [\underbrace{g(t)}_{=f'(t)}]' \risingdotseq pG(p)-g(0) = p[pF(p)-G(0)]-f'(0) = p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{x\to0} f^{(k)}(x)$

по ММИ:

$$f^{(n-1)}(t) \risingdotseq p^{n-1}F(p)-p^{(n-2)}f(0)-\dots-f^{(n-2)}(0)$$

$$f^{(n)}(t) = [f^{(n-1)}(t)]' = p[p^{n-1}F(p)-p^{n-2}f(0)-f^{(n-2)}(0)]-f^{(n-1)}(0) =$$

$$= p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-\dots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

При нулевых н.у.!

$$\left\{\begin{aligned} &f'(t)=pF(p)\\ &f^{(n)}(t)=p^nF(p)\end{aligned}\right. \quad \Bigg|\ p\sim\frac{d}{dt}$$

⑥ **Дифференцирование изображения:**

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n\cdot f(t), \quad \text{где } n\in N$$

Док-во:

$F(p)$ – аналит. ф-я в обл. $\operatorname{Re} p > s_0$ $\Rightarrow \exists F^{(n)}(p)$ для $\forall n \in \mathbb{N}$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$F'(p) = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt$$

$$F''(p) = \int_0^{\infty} (-t)^2 f(t) e^{-pt} dt$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow F^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} (-t)^n f(t) e^{-pt} dt$$

Пример: t^n; $\frac{1}{p} \risingdotseq \eta(t)$

$$\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{p^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}} \risingdotseq (-t)^n \eta(t)$$

$$\rightarrow t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$t^n e^{p_0 t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$$

7) Предельные (тауберовы) теоремы:

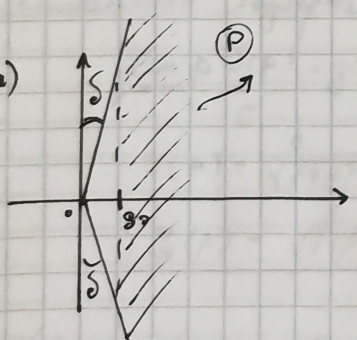
а) Если $f(t)$ – оригинал вместе с $f'(t)$, то $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(0)$

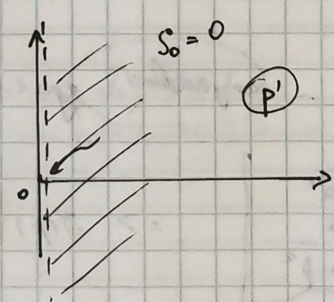
$|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$, $(\delta > 0)$

б) Если $f(t)$ – оригинал вместе с $f'(t)$ и $\exists \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) < \infty$, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty)$$

$$|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta, \quad (\delta > 0)$$

а) 

б) 

26.04.22.

Теорема 1. Если $f(t)$ - оригинал вместе с $f'(t)$, то $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(0)$

$|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$ $(\forall \delta > 0)$

Док-во: по св-ву 6

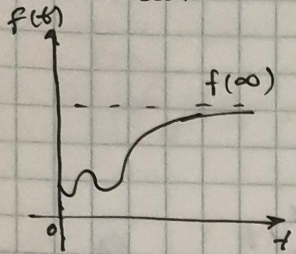
$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$$

По св-ву изображения: $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ |\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta}} [pF(p) - f(0)] = 0$

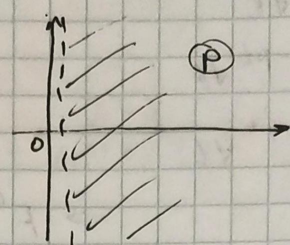
■

Теорема 2.

Если $f(t)$ является оригиналом вместе с $f'(t)$ и $\exists \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$



$\Rightarrow s_0 = 0$



Док-во: $pF(p) - f(0) = \int\limits_0^\infty f'(t) e^{-pt}\, dt$

$p \to 0$: $\lim\limits_{p\to 0}[pF(p)] - f(0) \overset{?}{=} \int\limits_0^\infty \lim\limits_{p \to 0} f'(t) e^{-pt}\, dt = \int\limits_0^\infty f'(t)\, dt = f(t)\Big|_0^\infty$

? Равн. сх-ть $\int\limits_0^\infty f'(t) e^{-pt}\, dt$ отн-но p в области $\operatorname{Re} p = s > 0$

$0 < s_1 \le s$

по Вейерштрассу:

$|f'(t) e^{-pt}| = |f'(t) e^{-st}| = |f'(t)| e^{-st} \le N e^{s_0 t} e^{-s_1 t}$

$\int\limits_0^\infty N \cdot e^{-s_1 t}\, ds = \frac{N}{s_1}$ ■

Примеры.

1) Явление резонанса.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = A \cos \omega t$$

Вынужденное решение (то что даёт внешняя сила)

$y(t) \risingdotseq Y(p)$

$\frac{d^2 y}{dt^2} \risingdotseq p^2 Y(p)$ — нач. условия нулевые

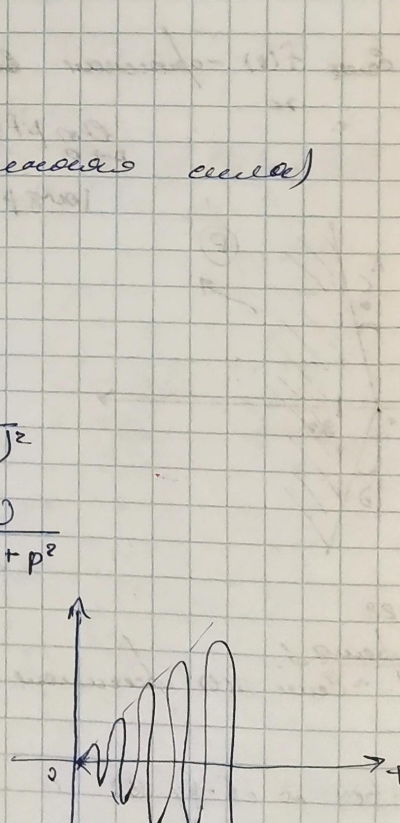
$\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{\omega^2 + p^2}$

$p^2 Y + \omega^2 Y = \frac{Ap}{\omega^2 + p^2}$ $\Rightarrow Y(p) = \frac{Ap}{(p^2+\omega^2)^2}$

$\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{\omega^2 + p^2}$

$\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right) = -\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2} \overset{(6)}{\risingdotseq} (-t)\cdot \sin \omega t$

$Y(p) = \frac{Ap}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{A}{2\omega} \cdot \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{At}{2\omega} \sin \omega t$



2) Уравнение Бесселя

0 порядка: $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + y = 0$

$\Rightarrow I(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + \pi \ln 2$

$y(t) = c_1 J_0(t) + c_2 N_0(t)$ ← ф-я Неймана.

Бессель

$$\left(t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(t\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(t\frac{dy}{dt}\right) + ty = 0}$$

$$y(t) \risingdotseq Y(p) \quad \rightarrow \quad ty = (-t)(-y) \overset{6}{\risingdotseq} -Y'(p)$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(t\frac{dy}{dt}\right)}_{z} \risingdotseq p Z(p) - \underbrace{z(0)}_{0}$$

$$z(t) = (-t)\left(-\frac{dy}{dt}\right) \overset{5\text{-в}}{\risingdotseq} -\frac{d}{dp}\left(pY(p) - y(0)\right) = -Y(p) - p\frac{dY}{dp} = Z(p)$$

$$\frac{d}{dt}\left(t\frac{dy}{dt}\right) \risingdotseq -pY(p) - p^2\frac{dY}{dp}$$

$$pY(p) + p^2\frac{dY}{dp} + \frac{dY}{dp} = 0$$ ~ понизили порядок.

$$(1+p^2)\frac{dY}{dp} = -pY(p)$$

$$\int\frac{dY}{Y} = \int -\frac{p}{1+p^2}\,dp$$

$$\ln Y = -\frac{1}{2}\ln(1+p^2) + \ln c = \ln\frac{c}{\sqrt{1+p^2}} \Rightarrow \boxed{Y(p) = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}}}$$

Применяем Тауберову теорему

$$\lim_{p\to\infty} p\underbrace{Y(p)}_{C} = y(0) = 1.$$

$J_0(0) = 1$

$$Y(p) = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$Y_0(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \risingdotseq J_0(t)$$

Другое ур-е: $\frac{d^2y}{dt^2} - ty = 0$ ~ в акустике. → уже не всё так просто.

$y(t)$ – ф-я Эйри.

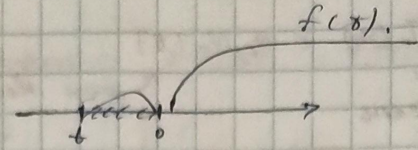
(8) **Интегрирование оригинала.**

~ Интегр-е оригинала св-ся к делению образ-я на p:

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$$

Док-во: проверим, явл-ся $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ – оригиналом?

$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$



а) $g(t) = 0$ для $t<0$

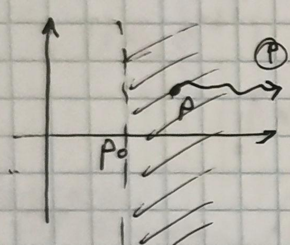
б) $g'(t) = f(t)$ — по ф-ле Лейбница → вып. усл-е гладкости.

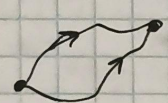
в) $|g(t)| \le \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau \le \int_0^t M e^{s_0\tau}\,d\tau = \underbrace{\frac{M}{s_0}}_{=N}\left(e^{s_0 t} - 1\right) \le N e^{s_0 t}$ → вып. все 3 св-ва

$\Rightarrow \exists G(p) \risingdotseq g(t)$

$p\,G(p) - \underbrace{g(0)}_{=0} \overset{⑤}{=} F(p) \Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{p}$ ■

⑨ **Интегрирование изображения**: Если интеграл $\int_p^\infty F(q)\,dq$ сх-ся, то $\boxed{\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(q)\,dq.}$





$F(p)$ - аналит. ф-я.

Док-во: $\int_p^\infty F(q)\,dq = \int_p^\infty dq \underbrace{\int_0^\infty f(t)\,e^{-qt}\,dt}_{=F(q)} \overset{?}{=} \int_0^\infty dt \int_p^\infty f(t)\,e^{-qt}\,dq = \int_0^\infty f(t)\,dt \left(\frac{e^{-qt}}{t}\right)\Big|_\infty^p =$

$= \int_0^\infty \underbrace{\frac{f(t)}{t}}_{\text{оригинал. ф-ия}} e^{-pt}\,dt$

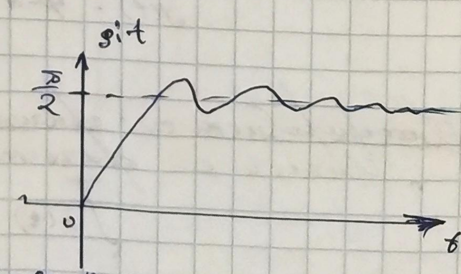
? — по признаку Вейерштрасса. ■

Примеры:

① Найдем изображение: $e^{bt} - e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a}$

$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \overset{⑨}{\risingdotseq} \int_p^\infty \left[\frac{1}{q-b} - \frac{1}{q-a}\right] dq = \ln\frac{q-b}{q-a}\Big|_p^\infty = \ln\frac{p-a}{p-b}$

② Изображение интегрального синуса.



$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$

$\frac{\sin t}{t} \overset{⑨}{\risingdotseq} \int_p^\infty \frac{1}{1+q^2}\,dq = \operatorname{arctg} q\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$

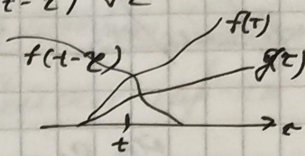
$$\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \overset{(8)}{\risingdotseq} \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p}{p} = \frac{1}{p}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p\right]$$

✓ $\mathrm{si}\,t \risingdotseq \frac{1}{p}\operatorname{arcctg}p.$

(10) Теорема о свёртке:

Опр. Свёрткой двух ф-ий $f(t)$ и $g(t)$ называется интеграл:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$



Для оригиналов:

$g(\tau)=0$ для $\tau<0$
$f(t-\tau)=0$ для $t-\tau<0$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau}$

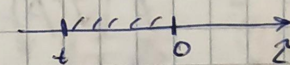
Теорема ~ Свёртке оригиналов соответствует произведение изображений:

$$\boxed{f(t) * g(t) \risingdotseq F(p)\,G(p)}$$

Док-во:

03.05.22.

а) $f(t) * g(t) = 0$ для $t<0$



$f(\tau)=0,\quad \tau<0$

б) Условие гладкости

$f(t) * g(t)$ ~ уд-ет условию Липшица-Гельдера.

в) Пок-м, что растёт не быстрее некоторой экспоненты

$$|F(t) * g(t)| \le \int_0^t |f(\tau)|\,|g(t-\tau)|\,d\tau < MN\int_0^t e^{\beta\tau}e^{\beta(t-\tau)}\,d\tau = MNt\cdot e^{\beta t} \le Qe^{(\beta+\varepsilon)t}$$ для $\forall\varepsilon>0$

$|f(t)| < Me^{s_0 t} < Me^{\beta t}$

$|g(t)| < Me^{s_1 t} \le Ne^{\beta t}$, где $\beta = \max\{s_0, s_1\}$

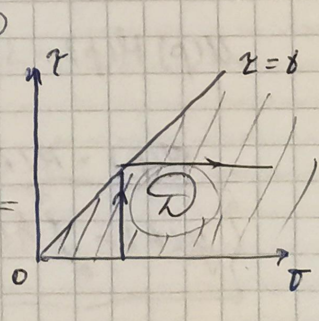
Рассмотрим изображение интеграла.

$$\int_0^\infty [f(t) * g(t)]e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \circleddash$$

$$\circleddash \iint_{D(t)} f(\tau)g(t-\tau)e^{-pt}\,d\tau\,dt = \int_0^\infty d\tau\int_\tau^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-pt}\,dt =$$

$$= \{t-\tau=\theta;\ dt=d\theta\} = \int_0^\infty d\tau\int_0^\infty f(\tau)g(\theta)e^{-p(\tau+\theta)}\,d\theta =$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,dt}_{=F(p)}\cdot\underbrace{\int_0^\infty g(\theta)e^{-p\theta}\,d\theta}_{G(p)} = F(p)\cdot G(p)$$



Теорема Эфроса (обобщ. теорема о свёртке.)

~ Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и ф-ии $\Phi(p)$ и $q(p)$ - аналит., такие что

$$e^{-\tau q(p)}\Phi(p) \risingdotseq \varphi(t,\tau)$$, где τ - любой положит. параметр ($\tau > 0$)

то $$\boxed{F[q(p)]\Phi(p) = \int_0^\infty f(\tau)\,\varphi(t,\tau)\,d\tau}$$

Если $q(p) = p$.

=> по св-ву ⑧ $e^{-\tau p}\Phi(p) \risingdotseq \varphi(t-\tau)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$

Пример: $$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = f(t)$$, $n \in \mathbb{N}$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Частное решение можно найти с исп. ф-ий Грина

Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$

$f(t) \risingdotseq F(p)$

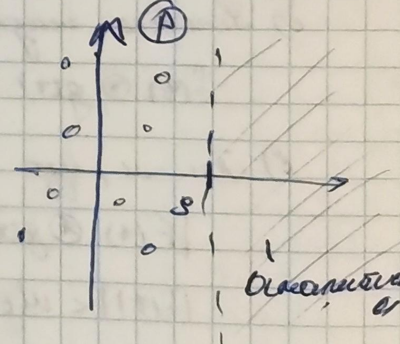
$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$

$$\frac{d^k y}{dt^k} \overset{⑤}{\risingdotseq} p^k Y(p)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n)}_{M(p)} Y = F(p) \Rightarrow \boxed{Y(p) = \frac{1}{M(p)}F(p)}$$

$\frac{1}{M(p)} \risingdotseq ?$ ~ б) при $p \to \infty$ $\frac{1}{M(p)} \to 0$

а) $M(p) = 0$



$$\frac{d^n h}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}h}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{dh}{dt} + a_n h = 0$$

но нужно подправить нач. усл.

$h(0) = h'(0) = \dots = h^{(n-2)}(0) = 0$, $h^{(n-1)}(0) = 1$.

$\boxed{h(t) \risingdotseq H(p)}$ => $\frac{d^n h}{dt^n} \overset{⑤}{\risingdotseq} p^n H - 1$ ~ из нач. усл.-я

$M(p)H(p) - 1 = 0$ => $H(p) = \frac{1}{M(p)}$ т.е. знаем какая ф-я удовлетворяет

$Y(p) = H(p)F(p)$

$$\boxed{y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau}$$, а $h(t)$ - ф-я Грина

① Пример: ур-е осциллятора.

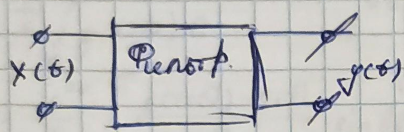
$$y'' + \omega^2 y = f(t)$$

$h'' + \omega^2 h = 0$; $h(0) = 0$; $h'(0) = 1$.

$$p^2 H - 1 + \omega^2 H = 0 \to H = \frac{1}{p^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \risingdotseq \frac{\sin\omega t}{\omega} = h(t)$$

$$y_{вын}(t) = \int_0^t \frac{\sin\omega(t-\tau)}{\omega} f(\tau)\,d\tau$$

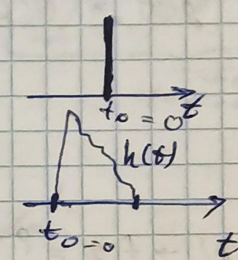
②



$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau$ — интеграл Дюамеля

$h(t)$ — импульсная переходная хар-ка.

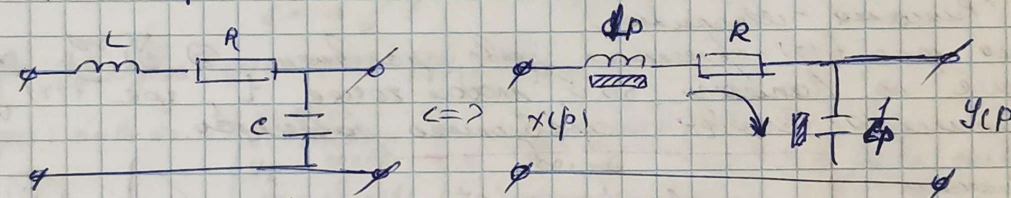
$h(t)$ — ? Подаём на вход короткий импульс



$$Y(p) = K(p)\,X(p)$$

$y(t) \risingdotseq Y(p)$; $x(t) \risingdotseq X(p)$

$h(t) \risingdotseq K(p)$

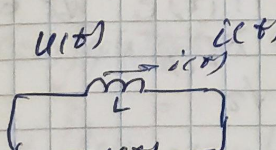


$K(p)$ — коэф-т передачи

$$Y(p) = I\cdot\frac{1}{Cp}$$

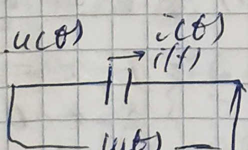
$$X(p) = I\left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right)$$

$$K = \frac{Y}{X} = \frac{1/Cp}{Lp + R + 1/Cp} = \frac{1}{p^2LC + RCp + 1}$$



$$u(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$U(p) = Lp\cdot I(p) \to R_L(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = Lp$$



$$u(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

$$\to U(p) = \frac{1}{C}\frac{I(p)}{p}$$

$$\frac{U(p)}{I(p)} = R_C(p) = \frac{1}{pC}$$

③ Решение интегр. уравнений.

Ур-я Вольтера 2-го рода.

$$\underbrace{y(t) + \lambda \int_0^t g(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = f(t)}$$

$f(t)$ и $g(t)$ - заданные ф-ции - оригиналы.

$\lambda \in \mathbb{R}$

$y(t) = ?$

$y(0) = f(0)$

$y(t) \risingdotseq Y(p)$

$f(t) \risingdotseq F(p)$

$g(t) \risingdotseq G(p)$

$\Rightarrow Y(p) + \lambda G(p) \cdot Y(p) = F(p)$

$$\boxed{Y(p) = \frac{F(p)}{1 + \lambda G(p)}}$$

2.3. Обращение преобразования Лапласа. Формула Римана-Меллина.

$F(p) \to f(t) = ?$

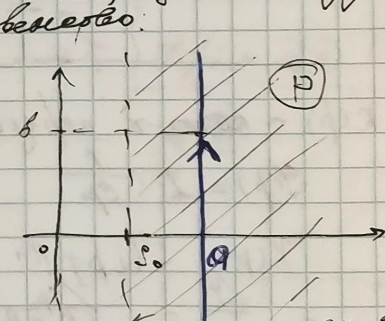
Теорема (Римана-Меллина)

Если ф-я $f(t)$ - оригинал, удовл. условиям а, б, в, а $F(p)$ - изображение по Лапласу, то в любой точке t, где $f(t)$ уд-ет усл.-ю Липшица-Гёльдера справедливо равенство:

ф-ла Римана-Меллина

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp},$$

где $a > s_0$.



$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt} dp = \lim_{b\to+\infty} \int_{a-ib}^{a+ib} F(p)\, e^{pt} dp.$$ - в смысле Коши, ex-ся разд. по Вейерштр.

Док-во: Рассм-м интеграл $\int_{a-ib}^{a+ib} F(p)\, e^{pt} dp = \int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} dp \underbrace{\int_0^\infty f(\tau)\, e^{-p\tau} d\tau}_{F(p)} \ominus$

$$\ominus \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_{a-ib}^{a+ib} e^{p(t-\tau)} dp = \int_0^\infty f(\tau) \left.\frac{e^{p(t-\tau)}}{t-\tau}\right|_{a-ib}^{a+ib} d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f(\tau) \frac{e^{a(t-\tau)}}{t-\tau} \left[e^{ib(t-\tau)} - e^{-ib(t-\tau)}\right] \ominus 2i \int_0^\infty f(\tau) \frac{e^{a(t-\tau)}}{t-\tau} \cdot \sin b(t-\tau)\, d\tau$$

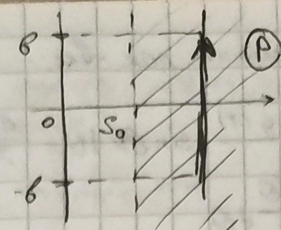
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} F(p)\, e^{pt} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\tau) \frac{e^{a(t-\tau)}}{t-\tau} \cdot \sin b(t-\tau)\, d\tau = \left\{ \tau - t = \theta \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-t}^\infty f(\theta + t) \frac{e^{-a\theta}}{-\theta} \sin(-b\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\theta} f(t+\theta) \frac{\sin b\theta}{\theta}\, d\theta$$

$f(\theta + t) = 0$; $\theta + t < 0$

17.05.22.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp$$



Док-во (продолжение)

$$f_b(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-t}^{\infty} f(t+\theta)\, e^{-a\theta}\frac{\sin b\theta}{\theta}\, d\theta =$$

$$g(t) = f(t)\, e^{-at}$$

$f(t+\theta) = 0$ для $t+\theta < 0$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t+\theta)\, e^{+a(t+\theta)}\, e^{-a\theta}\frac{\sin b\theta}{\theta}\, d\theta = \frac{e^{at}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t+\theta)\frac{\sin b\theta}{\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{e^{at}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\, d\theta + \frac{e^{at}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\frac{\sin b\theta}{\theta}\, d\theta = \underline{f(t)} + \underbrace{\frac{e^{at}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\, d\theta}_{\to 0 \text{ при } b\to\infty}$$

$$\frac{g(t)\, e^{at}}{\pi}\overset{\parallel}{\int_{-\infty}^{\infty}}\frac{\sin b\theta}{\theta}\, d\theta$$

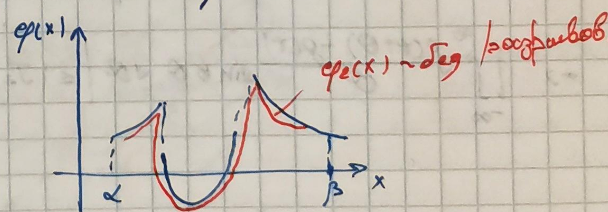
Лемма. Для $\forall \varphi(x)$, интегр. на $[\alpha, \beta]$, спр-во равенство:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\sin bx\, dx = 0$$

Док-во: (а) Пусть $\varphi(x) \in C^1([\alpha,\beta])$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\sin bx\, dx = \left\{\begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ dv = \sin bx\, dx \\ v = -\frac{\cos bx}{b} \\ du = \varphi'(x)\, dx\end{array}\right\} = \underbrace{-\frac{\varphi(x)\cos bx}{b}\Big|_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{b}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi'(x)\cos bx\, dx}_{\to 0 \text{ при } b\to\infty}$$

(б) Пусть $\nexists\, \varphi(x)$ ~ интегр. на $[\alpha,\beta]$



$\exists\, \varphi_\varepsilon(x) \in C^1([\alpha,\beta])$, что для $\forall\varepsilon > 0$

$$\int_{\alpha}^{\beta}|\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon$$

$$0 \le \left|\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\sin bx\, dx\right| = \left|\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)]\sin bx\, dx + \int_{\alpha}^{\beta}\varphi_\varepsilon(x)\sin bx\, dx\right| \le$$

$$\le \int_{\alpha}^{\beta}|\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx + \left|\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_\varepsilon(x)\sin bx\, dx\right| < \varepsilon + \left|\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_\varepsilon(x)\sin bx\, dx\right| < 2\varepsilon$$

из док-ва (а)

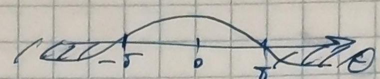
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, b_0 = b_0(\varepsilon): \quad \forall b > b_0(\varepsilon):$

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_\varepsilon(x)\sin bx\, dx\right| < \varepsilon = -\frac{\varphi(x)\cos bx}{b}\Big|_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{b}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi'(x)\cos bx\, dx$$

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\sin bx\, dx\right| < 2\varepsilon$$

Продолжение прошлого док-ва:

$$\frac{e^{at}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\,d\theta = \underbrace{\frac{e^{at}}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{g(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\,d\theta}_{J_1} + \underbrace{\frac{e^{at}}{\pi}\int_{|\theta|>T}\frac{g(t+\theta)}{\theta}\sin b\theta\,d\theta}_{J_2} - \underbrace{\frac{e^{at}}{\pi}\int_{|\theta|>T} g(t)\frac{\sin b\theta}{\theta}\,d\theta}_{J_3}$$



$$|g(t+\theta)| = |f(t+\theta)|e^{-a(t+\theta)} \le M e^{s_0(t+\theta)}e^{-a(t+\theta)} = Me^{-(a-s_0)(t+\theta)} \le M$$

$$\boxed{\int_{|\theta|>T}\frac{\sin b\theta}{\theta}\,d\theta < \infty}$$

J_2: $\forall \varepsilon>0$: $\exists T_0 = T_0(\varepsilon)$ $\forall T > T_0(\varepsilon)$: $\left|\int_{|\theta|>T} g(t+\theta)\frac{\sin b\theta}{\theta}\,d\theta\right| < \varepsilon$

J_3: $\forall \varepsilon>0$: $\exists T_1 = T_1(\varepsilon)$: $\left|\int_{|\theta|>T} g(t)\frac{\sin b\theta}{\theta}\,d\theta\right| < \varepsilon$, $\forall T > T_1(\varepsilon)$

Берём $T_2 = \max\{T_0, T_1\}$

J_1: $|g(t+\theta)-g(t)| \le \frac{A|\theta|^{\alpha}}{|\theta|} = A|\theta|^{\alpha-1}$ где $0<\alpha\le 1$

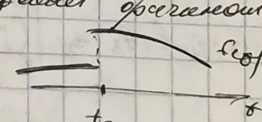
По док. леммы

J_1: $\forall\varepsilon>0$: $\exists b_0 = b_0(\varepsilon)$
$\forall b > b_0(\varepsilon)$ и $\forall T$: $\left|\int_{-T}^{T}\underbrace{\frac{g(t+\theta)-g(t)}{\theta}}_{\to 0}\sin b\theta\,d\theta\right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\,d\theta\right| \le |J_1| + |J_2| + |J_3| < 3\varepsilon \quad \text{для } \forall b > b_0(\varepsilon)$$

$$\Leftarrow \lim_{b\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\,d\theta = 0$$

Замечание: Изображение $F(p)$ однозначно определяет оригинал $f(t)$ лишь в точках непрерывности $f(t)$



2.4. Теоремы разложения

Первая теорема.

Если $F(p)$ аналитична в полупл-ти $\operatorname{Re} p > s_0 \ge 0$, стремится к 0 при $|p|\to\infty$ равномерно отн-но $\arg p$ и интеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,dp$ сх-ся в абс. смысле, то $F(p)$ явл-ся изображением ф-ии $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp$$

Теорема о разложении в ряд Лорана.

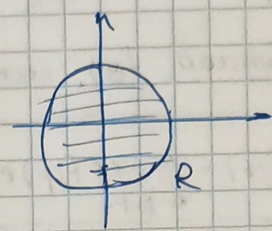
Если $F(p)$ – аналитическая в окр-ти $p=\infty$, т.е вне круга: $|p|\geq R$ и имеет разложение ~~ряда~~ в ряд Лорана

$$F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{p^n},$$ то оригинал $f(t)$, соответ. изображ. $F(p)$ вычисляется как

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)!}t^{n-1}, \quad t>0$$

Док-во:

$$q=\frac{1}{p}, \quad p=\infty \to q=0$$



$$F\left(\frac{1}{q}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n q^n, \quad |q|<\frac{1}{R}$$

Сп-во неравенство Коши: $|c_n|<MR^n$ (из ТФКП)

$$|f(t)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)!}t^{n-1}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c_n|}{(n-1)!}t^{n-1}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{MR^n}{(n-1)!}t^{n-1}=MR\sum\frac{(Rt)^{n-1}}{(n-1)!}=$$

$t>0$

$$=MRe^{Rt}$$

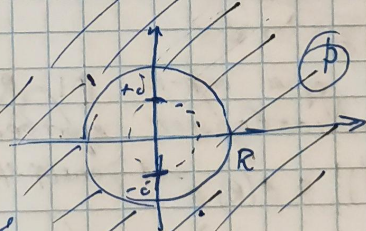
$$F(p)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt$$

Теорема о почленном интегрировании ряда

$$\mathcal{L}[f(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{L}\left[\frac{c_n}{(n-1)!}t^{n-1}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)!}\underbrace{\mathcal{L}[t^{n-1}]}_{=\frac{(n-1)!}{p^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{p^n}$$

Пример (ф-я Бесселя)

$$J_0(t) \risingdotseq \mathcal{J}_0(p)=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$



Особые точки $p=\pm i$

$$p=\frac{1}{q}; \quad \mathcal{J}_0\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{q^2}}}=q(1+q^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad |q|<\frac{1}{R}$$

$$(1+z)^{\alpha}=1+\sum\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n \quad |z|<1$$

$$\mathcal{J}_0\left(\frac{1}{q}\right)=q\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}q^{2n}\right]$$

$$\mathcal{J}_0(p)=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1))}{2^n n!}\cdot\frac{1}{p^{2n+1}}=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{p^{2n+1}}$$

$$J_0=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{\underbrace{(2n)!!}_{=2^n n!}}\cdot\frac{t^{2n}}{\underbrace{(2n)!}_{=(2n)!!(2n-1)!!}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

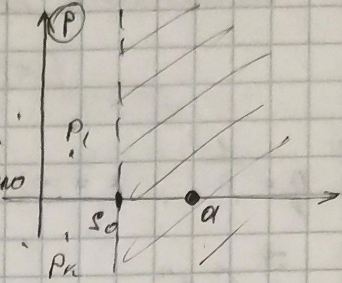
Вторая теорема разложения:

Пусть ф-я $F(p)$ обладает свойствами:

1° Аналитична в полупл-ти $Re\, p > s_0 \geq 0$

2. $\exists$ система окружностей $|p| = R_n$, $R_1 < R_2 < R_3 < \ldots < R_n < \ldots$, на которых $F(p) \to 0$ при $R_n \to \infty$ равномерно отн-но $\arg p$

3° Для $\forall a > s_0$ абс. но сх-ся $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, dp$, .



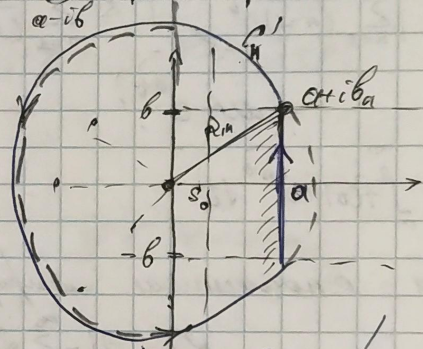
Тогда оригиналом $f(t)$, соотв. изображению $F(p)$ является:

$$\boxed{f(t) = \sum_k \operatorname*{res}_{p=p_k} F(p) e^{pt}}, \quad t > 0$$

Док-во:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to\infty} \int\limits_{a-ib}^{a+ib} F(p) e^{pt}\, dp$$

Γ из $C_n' + [a - ib_n, a + ib_n]$



$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma F(p) e^{pt}\, dp \overset{\text{ТВКП}}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum_k \operatorname*{res}_{\substack{p=p_k \\ |p_k| < R_n}} F(p) e^{pt}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma F(p) e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-ib_n}^{a+ib_n} F(p)\, dp + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n'} F(p) e^{pt}\, dp \to 0 \quad (*)$$

Лемма Жордана:

Пусть Γ_R дуга окр-ти $|p| = R : |\arg p - \varphi_0| \leq \frac{\pi}{2\nu}$, а ф-я $G(p)$ на этой дуге удовлетворяет неравенству

$$|G(Re^{i\varphi})| \leq \varepsilon(R)\, e^{-\alpha R^\nu \cos(\nu(\varphi - \varphi_0))}, \quad \text{где } \alpha > 0$$

Тогда, если $\varepsilon(R) R^{1-\nu} \to 0$ при $R \to \infty$, то $\boxed{\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} G(p)\, dp = 0}$

без док-ва.

Продолжаем док-во:

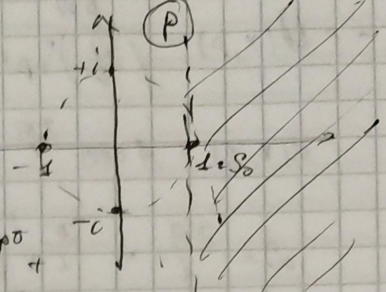
$$|F(Re^{i\varphi}) e^{Re^{i\varphi} t}| = |F(R_n e^{i\varphi})|\, |e^{R_n t \cos\varphi + i R_n t \sin\varphi}| =$$

$$= |F(R_n e^{i\varphi})|\, e^{R_n t \cos\varphi} \leq \varepsilon(R_n)\, e^{-R_n t \cos(\pi - \varphi)}$$

$\varepsilon \to 0$ при $R_n \to \infty$, $\nu = 1$, $\varphi_0 = \pi$ $(*)$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = \sum_k \operatorname*{res}_{p=p_k} F(p) e^{pt}}$$

Пример: $F(p) = \frac{1}{p^4-1} \to f(t) - ?$



$(p^2-1)(p^2+1)=0$

$p_{1,2} = \pm 1$
$p_{3,4} = \pm i$

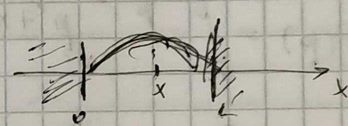
$f(t) = \operatorname{res}_{p=1} \frac{1}{p^4-1} e^{pt} + \operatorname{res}_{p=-1} \frac{1}{p^4-1} e^{pt} + \operatorname{res}_{p=i} \frac{1}{p^4-1} e^{pt} +$

$+ \operatorname{res}_{p=-i} \frac{1}{p^4-1} e^{pt} = \lim_{p\to 1} \frac{e^{pt}}{4p^3} + \ldots = \frac{e^t}{4} - \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{it}}{-4i} + \frac{e^{-it}}{4i} =$

$= \frac{sh\,t}{2} - \frac{\sin t}{2}$

2.5. Другие приложения операционного исчисления

① Приложение к задачам мат. физики.



$u_{tt} = a^2 u_{xx}$

н.у. $\begin{cases} u(x,0) = A\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$

гр.у. $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

t - время, $t \geq 0$

$f(t) = u(x,t) \risingdotseq F(p) = U(x,p)$

$\frac{\pi}{2\sin(\pi\cos^2 x)}$

$p^2 U(x,p) - p\,u(x,0) - u_t(x,0) = a^2 U_{xx}(x,p)$

$p A \sin\frac{\pi x}{L}$; 0

$\begin{cases} U(0,p) = 0 \\ U(L,p) = 0 \end{cases} \to U_{xx} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{pA\sin\frac{\pi x}{L}}{a^2}$

$\lambda^2 - \frac{p^2}{a^2} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{p}{a}, \lambda_2 = -\frac{p}{a}$

$U(x,p) = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x} + \frac{pA}{\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 + p^2} \sin\frac{\pi x}{L}$

$U_{xx} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{pA}{a^2}\sin\frac{\pi x}{L} \to B\sin\frac{\pi x}{L}$

$B = + \frac{pA}{a^2} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{p}{a}\right)^2} \longrightarrow \begin{cases} U(0,p) = 0 \\ U(L,p) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\frac{p}{a}L} + C_2 e^{-\frac{p}{a}L} = 0 \end{cases} \to C_1 = C_2 = 0$

$$\to U(x,p) = \frac{pA}{\left(\frac{\pi L}{a}\right)^2 + p^2}\sin\frac{\pi}{L}x$$

$$u(x,t) = A\cos\frac{\pi a}{L}t\,\sin\frac{\pi x}{L}$$

$$\omega = \frac{\pi a}{L} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

② Вычисление интегралов:

$$\int_a^\infty g(x,t)\,dx = (t>0) = f(t) \risingdotseq F(p)$$

$$F(p) = \int_a^\infty G(x,p)\,dx \risingdotseq f(t)$$

Пример: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos tx}{x^2}\,dx = f(t)$

$$F(p) = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+x^2}}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cancel{p^2}+x^2-\cancel{p^2}}{\cancel{x^2}\,p(p^2+x^2)}\,dx = \frac{1}{p^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{p}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{\pi}{2p^2} \risingdotseq \frac{\pi}{2}|t|$$

③ Вычисление интеграла с помощью ф-лы Парсеваля

Формула Парсеваля: если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $g(t) \risingdotseq G(p)$, то

$$\int_0^\infty F(x)\,G(x)\,dx = \int_0^\infty g(x)\,F(x)\,dx$$

Док-во: $$\int_0^\infty f(x)\,dx\underbrace{\int_0^\infty g(t)e^{-xt}\,dt}_{G(x)} = \int_0^\infty g(t)\,dt\underbrace{\int_0^\infty f(x)e^{-xt}\,dx}_{F(t)}$$

Пример: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^m}\,dx \quad (a>0)$

$$f(t) = \sin at \risingdotseq F(p) = \frac{a}{a^2+p^2} \qquad t^n \risingdotseq \frac{\overset{\Gamma(n+1)}{n!}}{p^{n+1}}$$

$$G(p) = \frac{1}{p^m} \risingdotseq \frac{t^{m-1}}{\Gamma(m)} = g(t) \qquad \left\{\frac{1}{p^{n+1}} \risingdotseq \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^m}\,dx = \int_0^\infty \frac{a}{a^2+x^2}\cdot\frac{x^{m-1}}{\Gamma(m)}\,dx = \left\{\frac{x^2}{a^2} = t\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)\,a}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \left\{\frac{x^2}{a^2} = t \quad x = a\sqrt{t} \quad dx = \frac{a\,dt}{2\sqrt{t}}\right\} = \frac{1}{a\,\Gamma(m)}\int_0^\infty \frac{a^{m-1}t^{\frac{m-1}{2}}}{1+t}\,\frac{a\,dt}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{a^{m-1}}{2\,\Gamma(m)}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{m}{2}-1}}{1+t}\,dt = \left\{p+q=1 \quad p = \frac{m}{2}\right\} = \frac{a^{m-1}}{2\,\Gamma(m)}\,B\left(\frac{m}{2}, 1-\frac{m}{2}\right) =$$