Программа курса «Физика кондесированного состояния »
(1 семестр 2023-24 учебного года)

1. Теория металлов Друде.

Основные положения и недостатки модели Друде; вывод уравнения $d\vec{p}/dt + \vec{p}/\tau = \vec{f}$; статическая электропроводность металлов; высокочастотная проводимость металлов; диэлектрическая проницаемость; эффект Холла; продольные и поперечные волны в твердотельной плазме; нормальный и аномальный скин-эффект; тензор проводимости металла в магнитном поле; теплопроводность металлов: закон Видемана-Франца; электронная теплоемкость металла; средняя энергия, передаваемая электроном за одно столкновение.

2. Теория металлов Зоммерфельда

Распределения Максвелла-Больцмана, Ферми-Дирака, и Бозе-Эйнштейна (без вывода); фермионы и бозоны, принцип запрета Паули; вырожденный Ферми газ при T=0 (поверхность, скорость, импульс и энергия Ферми); граничные условии Борна-Кармана; плотность состояний (энергетических уровней), плотность состояний для свободных и невзаимодействующих электронов в 1D, 2D и 3D случаях; понятие химического потенциала, температурная зависимость хим. потенциала; теория проводимости в модели Зоммерфельда; средняя энергия вырожденного электронного газа; особенность Ван-Хова; теплоемкость вырожденного электронного газа .

3. Недостатки модели свободных электронов. Адиабатическое приближение Борна-Оппенгеймера.

4. Кристаллическая решетка

Условие дифракции Брэгга-Вульфа; Решетка Бравэ (элементарная ячейка, условно-элементарная ячейка, ячейка Вигнера-Зейтца); ПК, ОЦК, ГЦК – вид и базисы; обратная решетка (определение, построение и свойства); ячейка Бриллюэна, понятие атомной плоскости; условие дифракции Лауэ; эквивалентность условий дифракции Брэгга-Вульфа и Лауэ; понятие брегговской плоскости.

5. Основы зонной теории

Уравнение Шредингера для электрона в периодическом потенциале. Теорема Блоха. Доказательство теоремы Блоха. Общие свойства блоховских функций. Обобщенное граничное условие Борна-Кармана для периодического кристалла. Зона Бриллюэна и энергетические зоны. Энергетическая щель. Поверхность Ферми в кристалле. Приближение слабого периодического потенциала (метод слабой связи). Заполнение энергетических зон электронами. Металлы. Диэлектрики. Необходимое условие диэлектрического состояния. Приближение сильной связи. Функции Ванье. Волновые функции электрона в запрещенной зоне (состояния Тамма).

6. Полуклассическая модель динамики блоховских электронов:

Основные положения полуклассической модели. Электроны как волновые пакеты. Пределы применимости полуклассической модели. Инертность заполненных зон. Уравнения движения в постоянных электрическом и магнитном полях. Блоховские осцилляции. Электроны и дырки. Траектории для электронов и дырок. Эффективная масса. Эффективное число свободных электронов. Кинетическое уравнение Больцмана в τ – приближении. Расчет статической проводимости с помощью кинетического уравнения.

7. Движение частицы в магнитном поле:

Уравнение Шредингера в магнитном поле. Ферми поверхности в магнитном поле: открытые и замкнутые траектории. Описание движения электрона во внешнем постоянном магнитном поле с помощью полуклассической модели. Квантование орбит электрона во внешнем постоянном магнитном поле. Уровни Ландау для свободных электронов в магнитном поле. Вырождение уровней Ландау. Плотность состояний в магнитном поле. Циклотронная масса. Электронные и дырочные траектории.

7. Магнетизм электронного газа

Парамагнетизм Паули. Диамагнетизм Ландау. Понятие «трубки Ландау». Магнитная восприимчивость вырожденного электронного газа. Диамагнитные металлы. Эффект де Газа-ван Альфена.

8. Колебания кристаллической решетки. Фононы.

Гармоническое приближение. Классическая теория гармонического 3D кристалла. Нормальные моды одномерной моноатомной цепочки (один атом в элементарной ячейке). Нормальные моды одномерной двухатомной цепочки (два атома в элементарной ячейке). Колебания и волны в 3D кристаллической решетке с базисом (акустические и оптические моды). Понятие фонона. Законы дисперсии акустических и оптических фононов в длинноволновом пределе. Продольные и поперечные фононы. Удельная теплоемкость классического кристалла (закон Дюлонга и Пти). Фононная теплоемкость гармонического кристалла при низких температурах. Модель Дебая и интерполяционная формула теплоемкости Дебая. Модель Эйнштейна для теплоемкости гармонического кристалла. Электронная теплоемкость металлов и диэлектриков. Ангармонические эффекты в колебаниях кристаллической решетки и их описание.

Список литературы

1. Н. Ашкрофт, Н. Мермин, Физика твердого тела, М.: "Мир", 1979 г. – это «базовая» книга.\

2. Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, М., 1978
3. А.А. Абрикосов, Основы теории металлов, М.: Наука, 1987.
4. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Курс теоретической физики, т. V, М.: Физматлит, 2001.
5. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Курс теоретической физики, т. III, М.: Физматлит, 2001.
6. Задачи по физике твердого тела, под ред. Г.~Дж.~Голдсмида, М.: "Наука", 1976 г.
7. Дж. Займан, Принципы теории твердого тела, М.: Мир, 1966.
8. О. Маделунг, Теория твердого тела, М.: Наука, 1980.
9. В. Л. Бонч-Бруевич, С. Г. Калашников, Физика полупроводников

Список «ключевых» вопросов

1. Теорема Блоха для электрона в периодическом потенциале.
2. Акустические и оптические фононы. Фононный спектр 3D кристаллической решетки с N-атомным базисом (N атомов в элементарной ячейке).
4. Теплоемкость металлов и диэлектриков как функция T. Поведение теплоемкости при низких и высоких температурах. Закон Дюлонга и Пти. Температура Дебая.
4. Распределение Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака.
5. Свойства вырожденного Ферми газа при T=0 (поверхность, скорость, импульс и энергия Ферми). Энергия Ферми и химический потенциал.
6. Решетка Бравэ. Прямая и обратная решетки. Элементарная, условно-элементарная ячейка, ячейка Вигнера-Зейтца. Зона Брюллюэна. Вектора основных трансляций для ПК, ОЦК, ГЦК решеток.
7. Условия Брэгга-Вульфа и Лауэ.

8. Модель Друде. Статическая удельная проводимость в модели Друде. Длина свободного пробега и время tau в модели Друде.
9. Закон Видемана-Франца.
10. Нормальный скин–эффект.
11. Плотность состояний. Зависимость плотности состояний от энергии в 1D, 2D и 3D случаях.
12. Поверхность Ферми.
13. Заполнение энергетических зон электронами. Металлы. Диэлектрики.
14 Граничное условие Борна-Кармана.
15. Фермионы и бозоны, принцип запрета Паули
16. Уравнение Шредингера.
17. Парамагнетизм и диамагнетизм. Магнитные свойства вырожденного электронного газа.

PS.

1. Список «ключевых» вопросов включает наиболее важные понятия и темы курса, которые необходимо знать и понимать.

2. Задачи, выделенные ~~шрифтом~~**,** не войдут в билеты.

Тема 1: Кристаллическая и обратная решетки

1.1 Доказать, что кристаллическая решетка может обладать поворотными осями симметрии 2, 3, 4 и 6 порядков. *Указание: Задача рассмотрена в [6], стр. 97.}*

1.2 Показать, что основные вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ обратной решетки $\mathbf{K} = l_1\mathbf{b}_1 + l_2\mathbf{b}_2 + l_3\mathbf{b}_3$ определяются следующими выражениями:

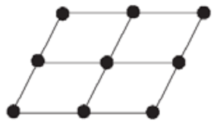
$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{2\pi}{V}\left[\boldsymbol{a}_2\ x\,\boldsymbol{a}_3\right],\ \ \boldsymbol{b}_2 = \frac{2\pi}{V}\left[\boldsymbol{a}_3\ x\,\boldsymbol{a}_1\right],\ \ \boldsymbol{b}_3 = \frac{2\pi}{V}\left[\boldsymbol{a}_1\ x\,\boldsymbol{a}_2\right]$$

где $V = \boldsymbol{a}_1\left[\boldsymbol{a}_2\ x\,\boldsymbol{a}_3\right]$ - объем элементарной ячейки прямой решетки.
Указание: Задача рассмотрена, например, в [1], стр. 96.

1.3 Показать, что решетка, обратная к обратной, совпадает с прямой решеткой.

1.4 Доказать соотношение $V_K = (2\pi)^n / V$, где V_K - объем элементарной ячейки обратной решетки, V - объем элементарной ячейки кристаллической решетки, n - число измерений. Рассмотреть случаи $n = 2, 3$. *Указание: Задача рассмотрена, например, в [1], стр. 96.*

1.5 Построить ячейку Вигнера-Зейтца для двумерной решетки Бравэ вида



1.6 Записать вектора основных трансляций для простой кубической (ПК), объемноцентрированной кубической (ОЦК) и гранецентрированной кубической (ГЦК) решеток. *Указание: Задача рассмотрена в [1], т.1, стр.97-98.*

1.7 Найти вектора обратной решетки для простой кубической (ПК), объемноцентрированной кубической (ОЦК) и гранецентрированной кубической (ГЦК) решеток. Использовать вектора основных трансляций для прямых решеток в виде:

ПК: $\boldsymbol{a}_1 = a\,\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{a}_2 = a\,\boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{a}_3 = a\,\boldsymbol{z}_0$;

ОЦК: $\boldsymbol{a}_1 = \frac{a}{2}(\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{z}_0 - \boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{a}_2 = \frac{a}{2}(\boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0)$, $\boldsymbol{a}_3 = \frac{a}{2}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{z}_0)$;

ГЦК: $\boldsymbol{a}_1 = \frac{a}{2}(\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{z}_0)$, $\boldsymbol{a}_2 = \frac{a}{2}(\boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{a}_3 = \frac{a}{2}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}_0)$;

где a - постоянная кристаллической решетки. Для указанных типов решетки найти вектора обратной решетки. *Указание: Задача рассмотрена в [1], т.1, стр.97-98.*

1.8 Построить обратную решетку и первые три зоны Бриллюэна для квадратной двумерной решетки ($a \times a$).

1.9 Построить обратную решетку и первые две зоны Бриллюэна для квадратной и прямоугольной (с соотношением сторон 1 : 2) двумерных решеток.

1.10 Рассматривая атомы, из которых построены кристаллические решётки, как твёрдые шары, найти плотность упаковки (т. е. заполненную часть элементарного куба) для ПК, ГЦК и ОЦК кубических решёток.

1.11 Показать, что для каждого семейства атомных плоскостей, отстоящих друг от друга на расстояние d, существует такие вектора обратной решетки, которые перпендикулярны к этим плоскостям, причем наименьший из них имеет длину $2\pi / d$.
Указание: Задача рассмотрена в [1], т.1, стр.99-101.

1.12 Доказать эквивалентность условия дифракции рентгеновских лучей Лауэ и условия Брегга-Вульфа: $2d \sin\theta = n\lambda$, где d - наименьшее расстояние между атомными плоскостями, θ - угол падения, λ -длина волны падающего излучения. *Указание: Задача рассмотрена в [1], т.1, стр.108-109.*

Список литературы

1. Н. Ашкрофт, Н. Мермин, Физика твердого тела, М.: "Мир", 1979 г. – это «базовая» книга.\
6. Задачи по физике твердого тела, под ред. Г.~Дж.~Голдсмида, М.: "Наука", 1976 г.

2. Термодинамические свойства газа свободных невзаимодействующих электронов.Теория металлов Зоммерфельда

~~2.1 Используя большое каноническое распределение Гиббса, получить функции распределения Бозе- Эйнштейна и Ферми- Дирака.~~
~~*Указание: Задача рассмотрена в [5] стр. 189-191.*~~

2.2 Определить радиус сферы Ферми k_F вырожденного газа свободных и независимых электронов с концентрацией $n = N/V$, где N - число электронов в объеме V .

2.3 Определить импульс Ферми p_F вырожденного газа свободных и независимых электронов с концентрацией $n = N/V$, где N - число электронов в объеме V .

2.4 Определить при $T = 0$ химический потенциал μ вырожденного газа свободных и независимых электронов с концентрацией $n = N/V$, где N - число электронов в объеме V .

2.4а Показать, что при $T = 0$ химический потенциал μ вырожденного газа свободных и независимых электронов с концентрацией $n = N/V$ (N - число электронов в объеме V) совпадает с энергией Ферми $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$.

2.5 Вычислить при $T = 0$ среднюю энергию газа вырожденного газа свободных и независимых электронов в расчете на одну частицу $\bar{\varepsilon}$.
Указание: Задача рассмотрена в [6] стр.282;

2.5а Показать, что при $T = 0$ средняя энергия газа свободных электронов, приходящаяся на одну частицу, равна $\bar{\varepsilon} = 3\varepsilon_F/5$.
Указание: Задача рассмотрена в [6] стр.282;

2.6 Вычислить плотность состояний $g(\varepsilon)$ для системы свободных невзаимодействующих электронов. Рассмотреть случаи одномерного, двумерного и трехмерного движения электронов.
Указание: Задача частично рассмотрена, например, в [1] стр.56-63.

2.7 Определить температурную зависимость химического потенциала $\mu(T)$ вырожденного газа свободных невзаимодействующих электронов с фиксированным числом частиц,

2.7а Для системы с фиксированным числом частиц, определите температурную зависимость химического потенциала $\mu(T)$ для системы свободных невзаимодействующих электронов. Убедитесь, что

$$\mu(T) = \varepsilon_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\cdot\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2\right].$$

~~*Указание: Для решения можно использовать разложения Зоммерфельда(см. например, [3], т.1, стр.56-63) или приближенно вычислять интеграл по энергии с учетом распределения Ферми.*~~

2.8 Определить температурную зависимость средней энергии газа вырожденного газа свободных и независимых электронов в расчете на одну частицу $\bar{\varepsilon}(T)$.

2.8а Покажите, что при $T \neq 0$ средняя энергия газа свободных невзаимодействующих электронов может быть вычислена следующим образом:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{5}\varepsilon_F\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\cdot\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2\right] .$$

Указание: Задача рассмотрена в [6] стр. 282; [2] стр.215-224.

3. Транспортные свойства газа свободных невзаимодействующих электронов.

3.1 Вычислить удельную проводимость металла σ на постоянном токе в модели Друде.

3.2 Вычислить тензор проводимости металла в магнитном поле в модели Друде.

3.3 Вычислить высокочастотную проводимость металла $\sigma(\omega)$ в модели Друде.

3.4 Вычислить диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$ металла в модели Друде.

3.5 Вычислить электронную теплопроводность κ металла в модели Друде.

Указание: Задачи 3.1 – 3.5 рассмотрены в [1], т.1, стр.31-38.

3.6 Вычислить компоненты тензора проводимости σ_{ij} ($\boldsymbol{j} = \hat{\sigma}\boldsymbol{E}$)для кристалла в магнитном поле с учетом рассеяния (эффект Холла).
Указание: Задача рассмотрена в [9], стр.25-28.

3.7 Вычислить удельную проводимость металла, используя кинетическое уравнение Больцмана.
Указание: Задача рассмотрена в [3],стр.41-42.

3.8 Пусть металл, находящийся при постоянной температуре, помещен в однородное постоянное электрическое $\vec{E}$. Вычислить в модели Друде среднюю энергию, передаваемую движущимся электроном кристаллической решетке, за одно столкновение (τ - среднее время между столкновениями).

3.9 Пусть металл, находящийся при постоянной температуре, помещен в однородное постоянное электрическое $\vec{E}$. Вычислить в модели Друде среднюю потерю энергии всеми электронами в проводнике в 1 см^3 за 1 сек. (τ - среднее время между столкновениями).

Указание: Задачи 3.8 – 3.9 для решения следует использовать результат задачи (3.1)
Средняя энергия, передаваемая движущимся электроном кристаллической решетке, за одно столкновение равна $(eE\tau)^2/m$ *, где* τ *-среднее время между столкновениями. Средняя потеря энергии всеми электронами в проводнике в 1 см^3 за 1 сек равна* σE^2 *(* σ *-удельная проводимость).*

~~3.10 Вычислить удельную проводимость металла в слабом магнитном поле, используя кинетическое уравнение Больцмана (эффект Холла).~~
~~*Указание: Задача рассмотрена в [4],стр.76-78.*~~

4. Электрон в периодическом потенциале. Поверхность Ферми.

4.1 Пользуясь приближением слабой связи, найти зонный спектр для электрона в одномерной решетке с потенциалом $U(x) = U_0\left[3 + 2\cos(2\pi x/a)\right]$, $(U_0 << 1)$.

4.2 Пользуясь приближением слабой связи, найти волновые функции (включая состояния вблизи границы зоны Бриллюэна) для электрона в одномерной решетке с потенциалом
$U(x) = U_0\left[3 + 2\cos(2\pi x/a)\right]$, $(U_0 << 1)$.
Указание: Задача рассмотрена в [9] стр.158-166;

4.3 Используя приближение сильной связи для описания электронов в простой кубической (ПК) решетке с периодом a и функции s типа в качестве электронных атомных волновых функций, найти дисперсионную зависимость энергии $\varepsilon(k)$ от волнового числа k для нижней разрешенной зоны. Показать, что изоэнергетические поверхности имеют сферическую симметрию при $k \to 0$.

4.4 Используя приближение сильной связи для описания электронов в простой кубической (ПК) решетке с периодом a и функции s типа в качестве электронных атомных волновых функций, найти дисперсионную зависимость энергии $\varepsilon(k)$ от волнового числа k для нижней разрешенной зоны. Определить эффективную массу электронов при $k \to 0$.

4.5 Используя приближение сильной связи для описания электронов в гранецентрированной кубической (ГЦК) решетке с периодом a и функции s типа в качестве электронных атомных волновых функций, найти дисперсионную зависимость энергии $\varepsilon(k)$ от волнового числа k для нижней разрешенной зоны. Показать, что изоэнергетические поверхности имеют сферическую симметрию при $k \to 0$.

4.6 Используя приближение сильной связи для описания электронов в гранецентрированной кубической (ГЦК) решетке с периодом a и функции s типа в качестве электронных атомных волновых функций, найти дисперсионную зависимость энергии $\varepsilon(k)$ от волнового числа k для нижней разрешенной зоны. Определить эффективную массу электронов при $k \to 0$.

4.7 Используя приближение сильной связи для описания электронов в объемноцентрированной кубической (ОЦК) решетке с периодом a и функции s типа в качестве электронных атомных волновых функций, найти дисперсионную зависимость энергии $\varepsilon(k)$ от волнового числа k для нижней разрешенной зоны. Показать, что изоэнергетические поверхности имеют сферическую симметрию при $k \to 0$.

4.8 Используя приближение сильной связи для описания электронов в объемноцентрированной кубической (ОЦК) решетке с периодом a и функции s типа в качестве электронных атомных волновых функций, найти дисперсионную зависимость энергии $\varepsilon(k)$ от волнового числа k для нижней разрешенной зоны. Определить эффективную массу электронов при $k \to 0$.

Указание: Задачи 4.3 – 4.8 частично решены в [9] стр.308-309; [6] т.1 стр.186-187.

4.9 Рассмотрим одномерную периодическую структуру. Пусть вблизи границы зоны Бриллюэна в энергия частицы может быть записана в следующем виде:

$$\varepsilon(k) = \sqrt{\Delta^2 + \left[k^2 - (k-K)^2\right]^2} ,$$

где k - квазиимпульс, K - вектор обратной решетки. Какой вид имеют волновые функции электрона при $|\varepsilon| < \Delta$, когда его энергия выбрана в запрещенной зоне?

~~4.10 Получить выражение для скорости и эффективной массы «блоховского» электрона на уровне энергии En(k).~~

~~4.11 Рассмотреть энергетические уровни в одномерной решетке с периодом d, где потенциальная энергия имеет вид~~

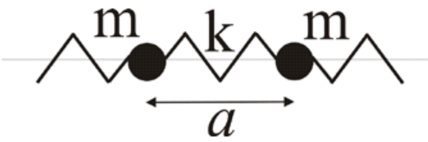
$$V = \begin{cases} V_0\ , & -b \le x \le 0 \\ 0\ , & 0 \le x \le d-b \end{cases}, \quad V(x+d) = V(x)\,.$$

~~Рассмотреть случай, когда $V_0 \to \infty$, $b \to 0$, но $V_0 b = \mathrm{const}$ (модель Кронига-Пенни).~~

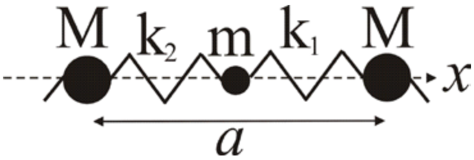
~~*Указание: Решение задачи приведено в [3] стр.152-155; [6] зад №12.5 (решение стр.301)*~~

Тема 6: Колебания кристаллической решетки. Фононы.

6.1 Получите закон дисперсии фононов в одномерной одноатомной цепочке атомов с массой m периодом a и с взаимодействием только между ближайшими соседями, описываемом коэффициентом упругости k .



6.2 Получите закон дисперсии фононов в одномерной двухатомной цепочке атомов с массами m и M периодом a и с взаимодействием только между ближайшими соседями, описываемом коэффициентами упругости k_1 и k_2. (как вариант $m = M$, $k_1 \neq k_2$; $m \neq M$, $k_1 = k_2$)



6.3 Вычислить фононную теплоемкость кристалла при высоких температурах.

Тема 7: Магнетизм электронного газа

7.1 Вычислить парамагнитную восприимчивость вырожденного газа свободных невзаимодействующих электронов.

~~7.2 Вычислить диамагнитную восприимчивость вырожденного газа свободных невзаимодействующих электронов.~~

~~*Указание: Задачи 7.1, 7.2 рассмотрены в [4] стр. 152; [5] стр.204*~~