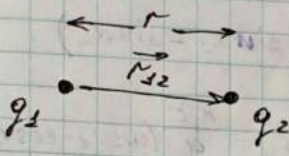
1.09.21

Закон Кулона. Принцип суперпозиции.



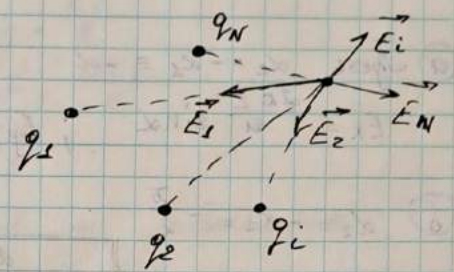
$$\vec{F} = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \qquad \left(\vec{F}_{12} = \frac{k\,q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r}\right)$$

$q_1 \equiv q$

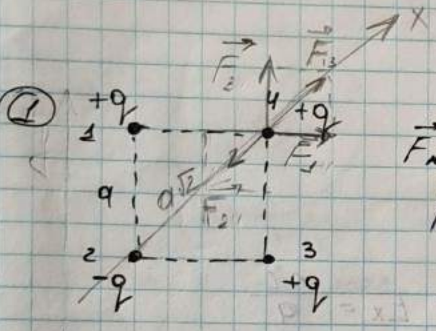
$q_2 = q_{пр.}$ (пробный заряд) $\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_{пр.}} = \frac{kq}{r^3}\cdot\vec{r}$

$k = \begin{cases} 1 \ (CGSE) \ (Св.) \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \ (SI) \ (Их родов) \end{cases}$

$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} E_i$



①



$\vec{F}_{на\ 4}$ - ?

$\vec{F}_{на\ 4} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_2$

$F_1 = F_3 = \frac{kq^2}{a^2}$

$F_2 = \frac{kq^2}{2a^2}$

$F_{(на\ 4)x} = F_{13} - F_2 = \frac{\sqrt{2}\,kq^2}{a^2} - \frac{kq^2}{2a^2} =$

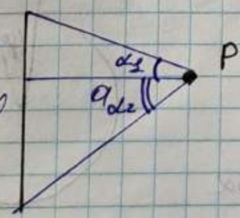
$= \frac{2\sqrt{2}kq^2 - kq^2}{2a^2} = \frac{kq^2}{a^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$

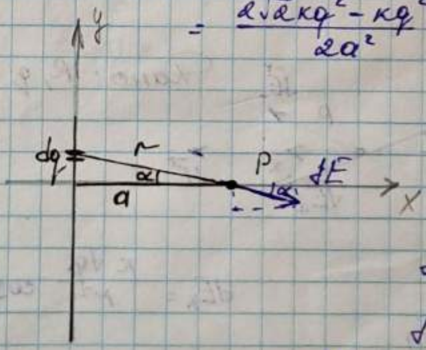
②

l, q

α_1, α_2

E_P - ?





$d\vec{E} = \frac{k\,dq}{r^3}\,\vec{r}$

$dE_x = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\alpha = dE\cos\alpha$

$dE_y = -dE\sin\alpha = -\frac{k\,dq}{r^2}\sin\alpha$

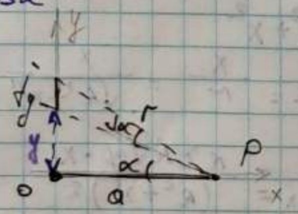
$r\cos\alpha = a \rightarrow r = \frac{a}{\cos\alpha}$

$d\vec{E} = \frac{k\,dq}{r^3}\,\vec{r}$

$\boxed{\tau = \frac{q}{l}}$ - плотность заряда

$dq = \tau \cdot dy$

$r = \frac{a}{\cos\alpha}$



$tg\alpha = \frac{y}{a}$

$y = a \cdot tg\alpha$

$dy = \frac{a}{\cos^2\alpha}\cdot d\alpha$

$\Rightarrow dE_x = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\alpha = \frac{k\tau \cdot a\,d\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot a^2}\cdot\cos\alpha = \frac{k\tau}{a}\cdot\cos\alpha\,d\alpha$

$$dE_y = -\frac{k\,dq}{r^2}\sin\alpha = -\frac{k\tau a\,d\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot a^2}\sin\alpha = -\frac{k\tau}{a}\sin\alpha \cdot d\alpha$$

$$E_x = \frac{k\tau}{a}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{k\tau}{a}\left(\sin\alpha\,\Big|_{\alpha_2}^{\alpha_1}\right) = \frac{k\tau}{a}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$

$$E_y = -\frac{k\tau}{a}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\sin\alpha\,d\alpha = -\frac{k\tau}{a}(-\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) = \frac{k\tau}{a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

$$E_p = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

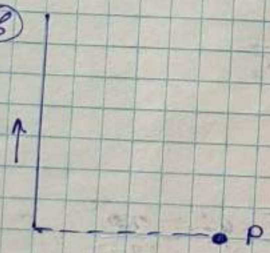
(а) Пусть $\alpha_2 = -\alpha_1 \equiv -\alpha$

$$E_x = \frac{2k\tau}{a}\sin\alpha \quad ; \quad E_y = 0$$

(б) $\alpha_2 = -\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$

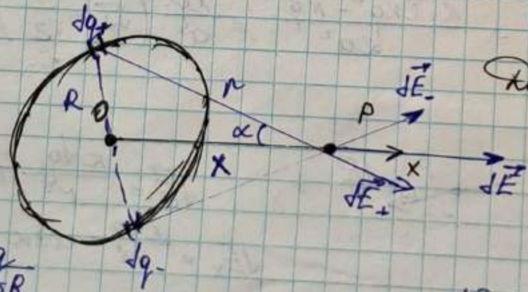
$$E_y = 0 \quad ; \quad \boxed{E_x = \frac{2k\tau}{a}}$$

(в)

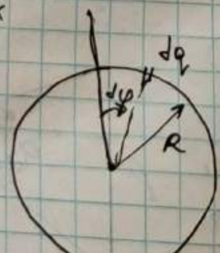


$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_2 = 0 \implies E_x = \frac{k\tau}{a}, \quad E_y = -\frac{k\tau}{a}$$

(3)



Дано: $R, q, OP = x$



$$\tau = \frac{q}{2\pi R}$$

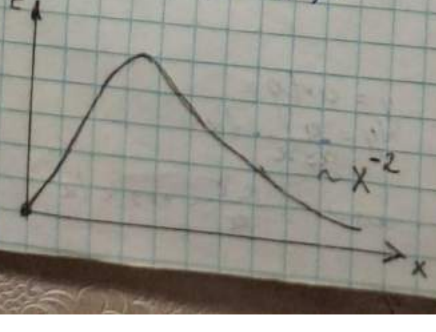
$$dE_x = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\alpha$$

$$dq = \tau \cdot dl = \tau \cdot R \cdot d\varphi$$

$$r^2 = R^2 + x^2$$

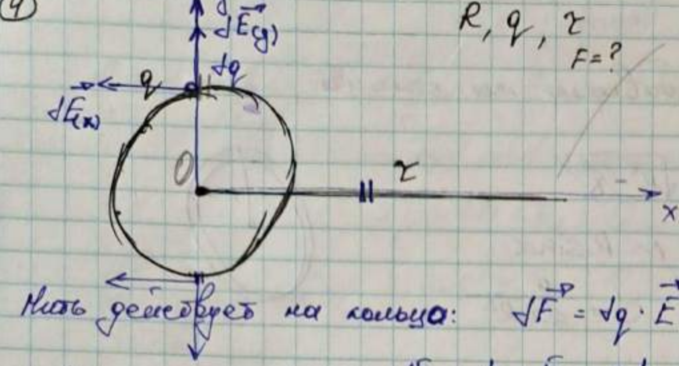
$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$\implies dE_x = \frac{k\tau R\,d\varphi \cdot x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \implies E = E_x = \frac{k \cdot 2\pi\tau R\,x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{kqx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$



$$x^2 \gg R^2 \implies E \sim \frac{1}{x^2}$$

④ R, q, τ полубеск. зар. нить.
$F = ?$



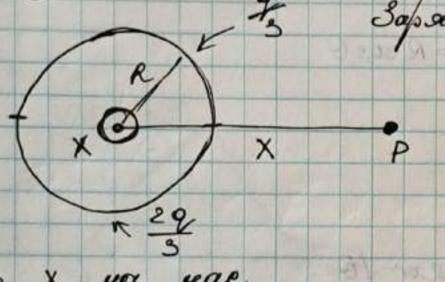
Нить действует на кольцо: $d\vec{F} = dq \cdot \vec{E}$

$$dF_x = dq \cdot E_x = -dq \cdot \frac{k\tau}{R}$$

$$F_x = -\frac{k\tau q}{R} \Rightarrow \underline{\underline{F}} = \frac{k\tau q}{R}$$

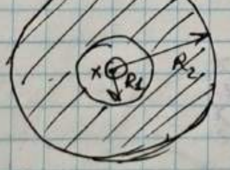
Д/З: ②

Заряжено не равномерно как в 3 задаче. $E = ?$



Ось X на нас.

③ Диск. Заряд равномерно распр. только в заштрих. области.



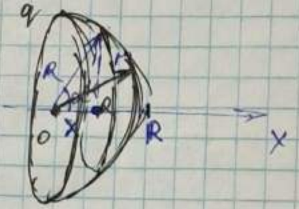
q, R_1, R_2, x

$E_p(x) = ?$

\+ предельные случаи
а) если $R_1 \to 0$
б) $R_1 = 0$ $R_2 >> x$
$R_2 << x$

6.09.21.

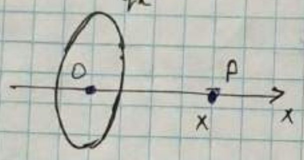
① $E_0 = ?$ Разбиваем на кольца



$r=\sqrt{R^2-x^2}$

$r = R\sin\alpha$

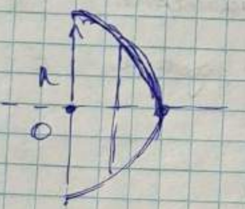
$\sigma = \frac{q}{2\pi R^2}$

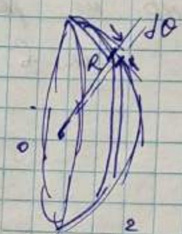


$E_x = \frac{kqx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$

$dq = \sigma dS = \sigma\cdot 2\pi r R\, d\theta$

$r = R\sin\theta$





$x = R\cos\theta$

$$dE = \frac{k\,dq\,x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{kR^2\cos\theta\cdot\sigma 2\pi r\,d\theta}{(R^2\sin^2\theta+R^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{k\cancel{R^2}\cos\theta\,\sigma\cdot 2\pi\cdot\cancel{R}\sin\theta\,d\theta}{\cancel{R^3}}$$

$$dE = 2\pi k\sigma\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

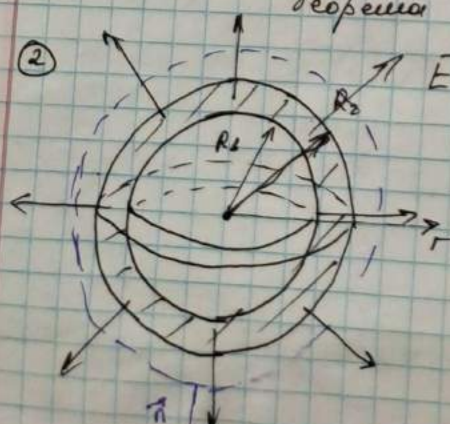
$$\cancel{E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi k\sigma \sin\theta\,(d\sin\theta) = 2\pi k\sigma\cdot\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}} =$$

$$\cancel{= \pi k\sigma\cdot (}\qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi k\sigma\cos\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= 2\pi k\sigma\cdot\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi k\sigma = \pi k\cdot\frac{q}{2\pi R^2} = \frac{kq}{2R^2}$$

Теорема Остроградского-Гаусса.

② $E(r)$ - ? ρ, R_1, R_2



1. Придумать как выгл. линии поля.
2. Какой может быть Гауссова поверхность

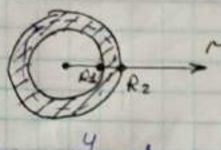
$$\oint_{(S)} E_n\,dS = k\cdot 4\pi Q_{int}$$

$E_n = E = const$ на (r)

$$\oint_{(S)} E_n dS = \oint_{(S)} E dS = E \oint_{(S)} dS = E \cdot 4\pi r^2$$

площадь поверхн. гаус. сф.

1) $0 < r < R_1$: $Q_{int} = 0 \Rightarrow E = 0$



2) $R_1 \le r < R_2$: $Q_{int} = \iiint_{(V)} \rho dV = \int_{R_1}^{r} \rho 4\pi r^2 dr =$

$$= \rho \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3)$$

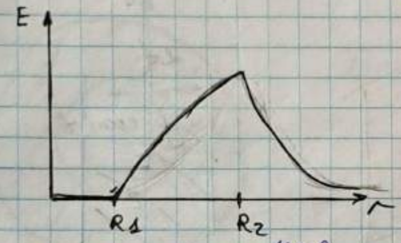
$V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3$

$dV = 4\pi r^2 dr$

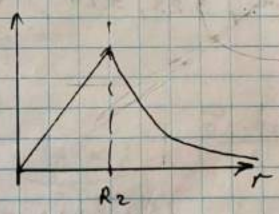
$$E = k \cdot 4\pi \cdot \frac{\rho}{3}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)$$

3) $r \ge R_2$: $Q_{int} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)$

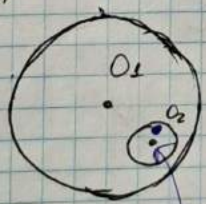
$$E = k \cdot 4\pi \frac{\rho}{3} \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r^2}$$



$R_1 = 0$: $E = k \cdot \frac{4\pi\rho}{3} r$



③ Шар с полостью



$O_1O_2 = a$; ρ

$E_{пол} = ?$

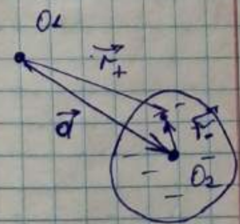
ρ_+, ρ_- (пусть есть полож. и отриц. зарядов)

$|\rho_-| = \rho$

$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

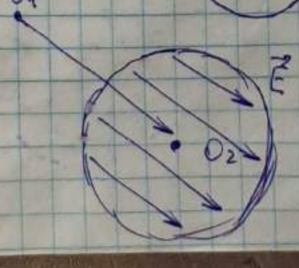
$\vec{E}_+ = k \cdot \frac{4\pi\rho}{3} \vec{r}_+$

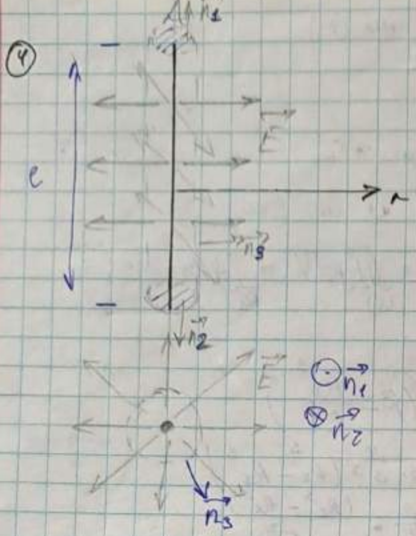
$\vec{E}_- = -k \cdot \frac{4\pi\rho}{3} \vec{r}_-$



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = k \cdot \frac{4\pi\rho}{3}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = k \cdot \frac{4\pi\rho}{3} \overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\vec{E} = k \cdot \frac{4\pi\rho}{3} \vec{a}$$



④ 

$\tau,$

$$\oint_{(S)} E_n\, dS = \iint_{(S_1)} \underbrace{E_{n_1}}_{=0} dS + \iint_{(S_2)} \underbrace{E_{n_2}}_{=0} dS + \iint_{(S_3)} \underbrace{E_{n_3}}_{E=const} dS =$$

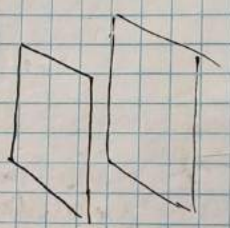
$$= E \cdot \iint_{(S_3)} dS = E \cdot 2\pi r l$$

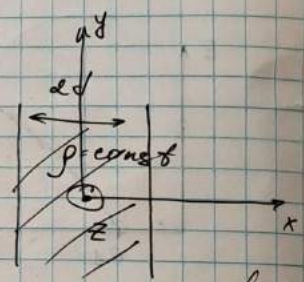
$$Q_{int} = \tau l$$

$$E \cdot \cancel{2}\cancel{\pi} r \cancel{l} = \overset{2}{\cancel{4}} \cancel{\pi} k \cdot \tau \cancel{l}$$

$$E = \frac{2k\tau}{r}$$

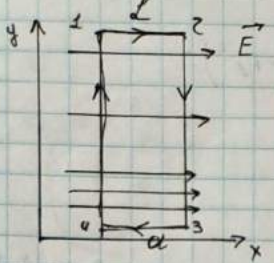
Д/З: ① Плоский слой (бесконечная толстая стенка)





+ Ир. 3.22, 3.23, 3.24

$E(x) = ?$ + постр. графика



$\vec{E} = E(y)\cdot\vec{i}$

13.09.21.

$$\oint_L E_l\,dl = \int_{(12)} E_l\,dl_{12} + \underbrace{\int_{(23)} E_l\,dl_{23}}_{=0} + \int_{(34)} E_l\,dl_{34} + \int_{(41)} \underbrace{E_l}_{=0}\,dl_{41} =$$

$$= E_{12}\cdot a - E_{34}\cdot a = 0$$

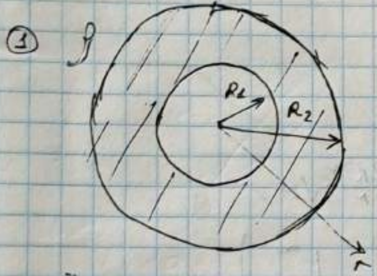
, т.е. не выполнена теорема о циркуляции $\Rightarrow$ <u>не может такого быть в электростатике.</u>

<u>Вычисление потенциала.</u>

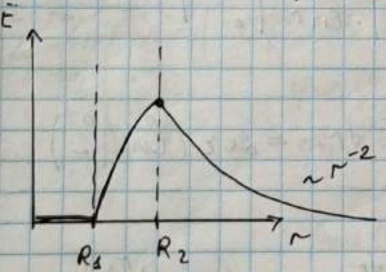
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E_l\,dl$$

$$\varphi_{т.з.} = \frac{kq}{r}$$

① ρ



$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ \frac{k\cdot 4\pi}{3}\rho\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right), & R_1 \le r < R_2 \\ \frac{k\cdot 4\pi\rho}{3}\cdot\frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r^2}, & r \ge R_2 \end{cases}$$



1) $\cancel{R_1 \le r < R_2 \quad \varphi(\infty) = 0}$

$\cancel{\varphi(r) - \varphi(\infty)}$

1) $r \ge R_2$.

$$\underbrace{\varphi(r) - \varphi(\infty)}_{=0} = \int_r^{\infty} \frac{k\cdot 4\pi\rho}{3}\cdot\frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{k\cdot 4\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3}\cdot\left(-\frac{1}{r}\Big|_r^{\infty}\right) =$$

$$= \frac{k\cdot 4\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3r}$$

2) $R_1 \le r < R_2$:

$\cancel{\varphi(r) = \int}$

$$\varphi(r) - \varphi(R_2) = \int_r^{R_2} \frac{k\cdot 4\pi\rho}{3}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)dr =$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \varphi(R_2) + \int_r^{R_2} \frac{k\cdot 4\pi\rho}{3}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)dr = \varphi(R_2) + \frac{k\cdot 4\pi\rho}{3}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\Big|_r^{R_2}\right) =$$

$$= \varphi(R_2) + \frac{k\cdot 4\pi\rho}{3}\left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2} - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r}\right)$$

$$\varphi(R_2) = \frac{k\cdot 4\pi\rho}{3}\,\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2}$$

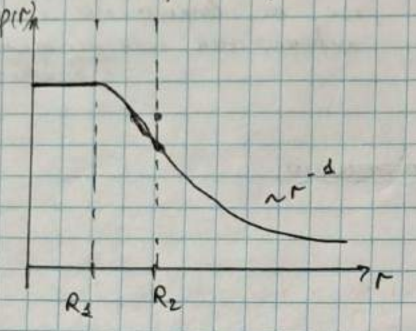
$$\varphi(r) = \frac{k\cdot 4\pi\rho}{3}\left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2} + \frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2} - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r}\right) = \frac{k\cdot 4\pi\rho}{3}\left(\frac{R_2^3}{R_2} + \frac{R_2^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r}\right) =$$

$$= \frac{k\cdot 4\pi\rho}{3}\left(\frac{3}{2}R_2^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r}\right)$$

3) $\varphi(R_1) = \frac{k\cdot 4\pi}{3}\rho\left(\frac{3}{2}R_2^2 - \frac{R_1^2}{2} - R_1^2\right) = k\cdot 2\pi\rho\left(R_2^2 - R_1^2\right)$

$r \le R_1$: $\varphi(r) - \varphi(R_1) = 0$

$\varphi(r) = \varphi(R_1) = k\cdot 2\pi\rho\left(R_2^2 - R_1^2\right)$

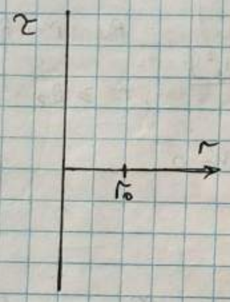


$\varphi(r) = k\cdot\frac{4\pi\rho}{3}\left(\frac{3}{2}R_2^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r}\right)$

$\varphi'(r) = -C\cdot r + 2\cdot C\frac{\rho}{r^2}$

$\varphi''(r) = -C - 4\cdot C\frac{\rho}{r^3} = 0$ при $r \ge 0$

②



$E(r) = \frac{2k\tau}{r}$

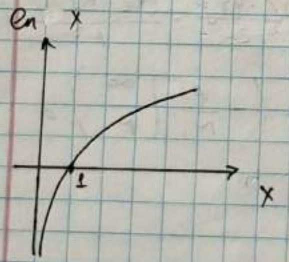
$\varphi(r) = ?$

$\varphi(r\to\infty) = 0$

$\varphi(r) - \varphi(r\to\infty) = \int_r^\infty \frac{2k\tau}{r}dr =$

$= 2k\tau\cdot\left(\ln r\Big|_0^\infty\right)$

$\varphi(0) = 0$



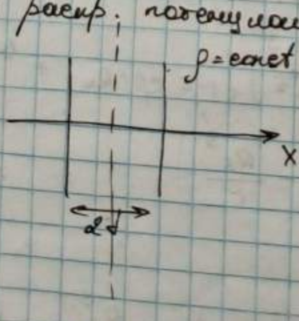
$\varphi(r) - \varphi(0) = \int_r^0 \frac{2k\tau}{r}dr = 2k\tau\left(\ln\Big|_r^0\right)$

$\varphi(r_0) = 0$

$\underline{\underline{\varphi(r)}} - \underbrace{\varphi(r_0)}_{=0} = \int_r^{r_0}\frac{2k\tau\, dr}{r} = 2k\tau\left(\ln r\Big|_r^{r_0}\right) =$

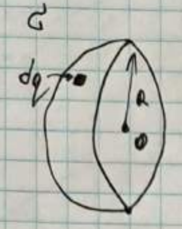
$= \underline{\underline{2k\tau\ln\frac{r_0}{r}}}$

Д/З: Найти распр. потенциалов зарядов для крошечной задачи под + построить график



$\varphi(x) = ?$

(3)



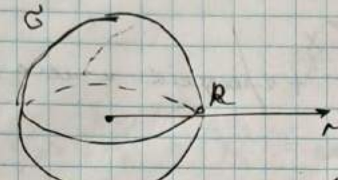
$\varphi(0) = ?$

$E_0 = \frac{kq}{2R^2}$

$$\varphi(0) = \int\limits_{(q)} d\varphi = \int\limits_{(q)} \frac{k\,dq}{R} = \frac{kq}{R} = \frac{k\cdot\sigma\cdot 2\pi R^2}{R} = 2\pi R\sigma\cdot k$$

$q = \sigma\cdot 2\pi R^2$

(3.1)

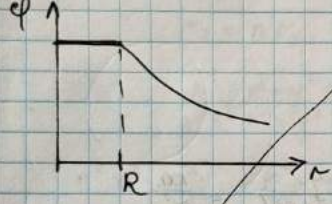


$q = \sigma\cdot 4\pi R^2$

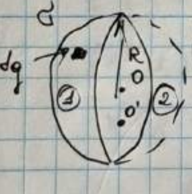
$\varphi(r) = ?$

1) $\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int\limits_r^{\infty} \frac{kq}{r^2}\,dr = \frac{kq}{r} \quad (r \geq R)$

2) $\varphi(r) = \frac{kq}{R}$ при $r < R$ (внутри сферы)



$\to \varphi(0) = \varphi(0')$



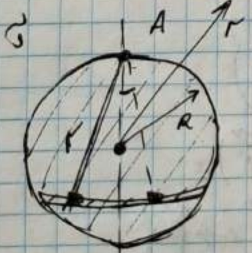
дорисовать до сферы

$\varphi_{сф.}(0) = \varphi_{сф_1}(0) + \varphi_{сф_2}(0) = 2\varphi_{сф_1}(0)$

$\varphi_{сф.}(0) = \frac{kq}{R}$

$$\varphi_{сф_1}(0) = \frac{kq}{2R} = \frac{k\cdot 4\pi\sigma R^2}{2R} = k\cdot 2\pi\sigma R$$

(4)

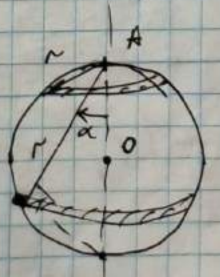


$\varphi_A = ?$

Разбиваем на полоски

$2R\cos\alpha = r$

$dq = \sigma\,dS = \sigma\cdot 2\alpha r\,dr$



$dS = r\cdot 2\alpha\cdot dr = 2\alpha r\,dr = 2\alpha\cdot 2R\cos\alpha\cdot 2R(-\sin\alpha)\,d\alpha$

$\varphi = \int \frac{k\,dq}{r} = \cancel{\frac{\sigma k\cdot 2\alpha r\,dr}{r}}$

$$d\varphi = \frac{k\,dq}{r} = \frac{k\sigma\cdot 2r\alpha\,dr}{r} = -k\cdot 4R\sigma\,\alpha\sin\alpha\,d\alpha$$

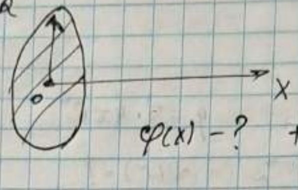
$$\varphi_A = -\int\limits_{\pi/2}^{0} k\sigma\cdot 4R\,\alpha\sin\alpha\,d\alpha = -k\sigma 4R\int\limits_{\pi/2}^{0}\alpha\sin\alpha\,d\alpha = \left\{\begin{array}{l} u = \alpha \to du = d\alpha \\ dv = \sin\alpha\,d\alpha \to v = -\cos\alpha \end{array}\right\} =$$

$= \left(-\alpha\cdot\cos\alpha\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\alpha\,d\alpha\right)\cdot(-k\sqrt{4R}) =$

$= \sin\alpha\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-k\sqrt{4R}) = k\cdot 4\sqrt{R}$

+ Д/з (прошлое) и + диск.

σ, R



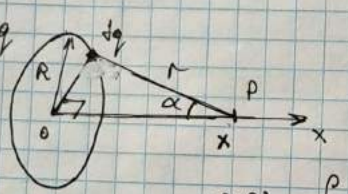
$\varphi(x)$ − ? + графики и иссл.

15.09.21.

Продолжение.

$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$

① q



$\varphi_P = ?$

$\vec{E}_P = ?$

$\varphi(P) = \int d\varphi = \int\limits_{(q)} \frac{k\,dq}{r} = \frac{kq}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{kq}{r}$

$r = \sqrt{x^2+R^2}$

$\vec{E}_P = -\left(-\frac{kq\cdot 2x}{2\,(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}\right) = \frac{kq\,x}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}$

②

$\varphi = a(x^2-y^2)$

$a = \text{const} > 0$

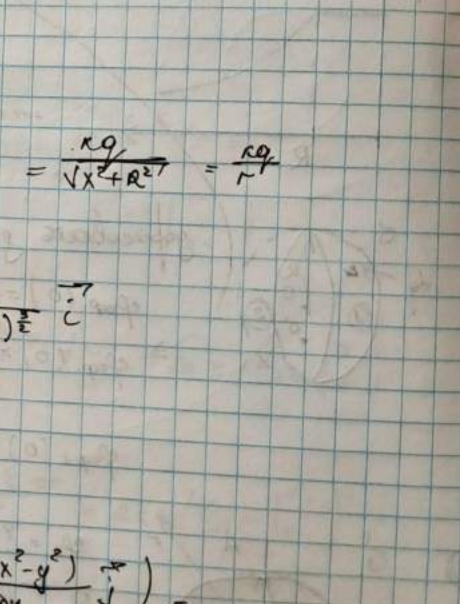
$\vec{E} = ?$ (нарисовать)

$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -a\left(\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}\vec{j}\right) =$

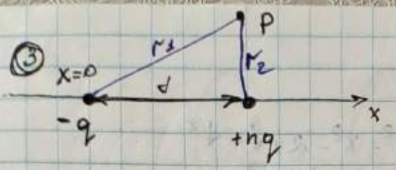
$= -a\left(2x\vec{i} - 2y\vec{j}\right) = -2a\left(x\cdot\vec{i} - y\cdot\vec{j}\right) =$

$= 2a\left(-x\vec{i} + y\vec{j}\right)$

$E = 2a\sqrt{x^2+y^2}$ (модуль)



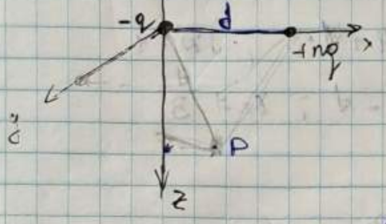
③



$n > 1.$

Док-ть, что поверхность $\varphi = 0$ - сфера.

$R = ?$ $x_c = ?$



$$\varphi_P = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{-kq}{r_1} + \frac{knq}{r_2}$$

$$r_1 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$r_2 =$$

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2$$

$$\varphi_P = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = kq\left(-\frac{1}{r_1}+\frac{n}{r_2}\right) = 0 \text{ (по усл)}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{n}{r_2} \quad \Big| \cdot r_1 r_2$$

$$r_2 = n r_1 \quad \to \quad r_2^2 = n^2 r_1^2$$

$$n^2(x^2+y^2+z^2) = (x-d)^2+y^2+z^2$$

$$n^2x^2+n^2y^2+n^2z^2 = x^2-2xd+d^2+y^2+z^2$$

$$n^2x^2+n^2y^2+n^2z^2-x^2+2xd-d^2-y^2-z^2=0$$

$$x^2(n^2-1)+2xd-d^2+y^2(n^2-1)+z^2(n^2-1)=0$$

$$(n^2-1)(x^2+y^2+z^2)+2xd = d^2$$

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2xd}{n^2-1} = \frac{d^2}{n^2-1}$$

$$\left(x+\frac{d}{n^2-1}\right)+y^2+z^2-\frac{d^2}{(n^2-1)^2} = \frac{d^2}{n^2-1}$$

$$\left(x+\frac{d}{n^2-1}\right)^2+y^2+z^2 = d^2\left(\frac{1}{(n^2-1)^2}+\frac{1}{n^2-1}\right) = d^2\left(\frac{1+n^2-1}{(n^2-1)^2}\right)$$

$$\left(x+\frac{d}{n^2-1}\right)^2+y^2+z^2 = \frac{d^2n^2}{(n^2-1)^2} = \left(\frac{dn}{(n^2-1)}\right)^2$$ ⇒ док-ли, что сфера.

$$\boxed{y_c = z_c = 0, \quad x_c = -\frac{d}{n^2-1}, \quad R = \frac{n\cdot d}{n^2-1}}$$

3.1 Пусть $n = 4$

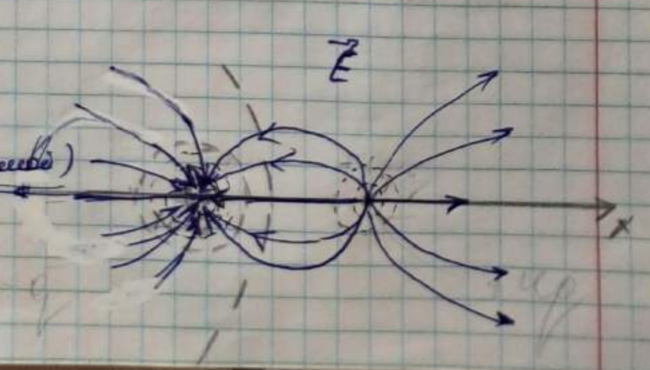
$$E_{т.з.} = \frac{kq}{r^2}$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E_1}+\vec{E_2} \\ \vec{E} = 0 \end{cases} \to \vec{E_1} = -\vec{E_2}$$

(т. е. равенство векторов на прямой) — на Ox!

$$E_1 = \frac{kq}{x^2}$$

$$E_2 = \frac{4kq}{(x-d)^2}$$



$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(x-d)^2}$

$(x-d)^2 = 4x^2$

$x - d = 2x$

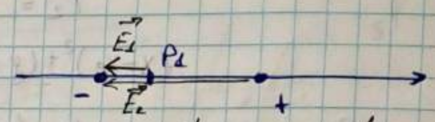
$\underline{x_1 = -d}$

$4x^2 = x^2 - 2xd + d^2$

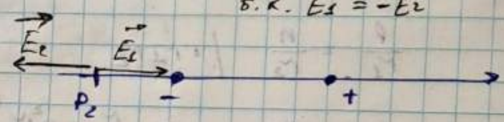
$3x^2 + 2xd - d^2 = 0$

$D = 4 + 4\cdot 3$; $\sqrt{D} = 4$

$x_1 = -d$; $x_2 = \frac{d}{3}$

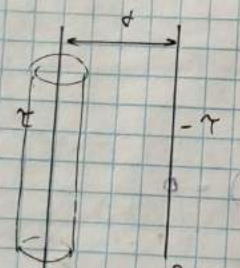


$\Rightarrow x_2 = \frac{d}{3}$ — пост. корень.
т.к. $\vec{E_1} = -\vec{E_2}$



A

(4)

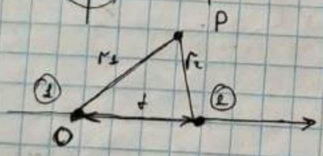


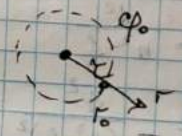
Док-ть: $\varphi = const$ — цилиндры (круговые)

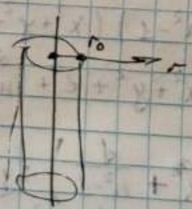
$E = \frac{2k\tau}{r}$

$\varphi(r) = 2k\tau \ln\frac{r_0}{r}$

φ_1







$\varphi(r) - \varphi_0 = \int_r^{r_0} E_r\, dr = 2k\tau \ln\frac{r_0}{r}$

$\varphi_P = \varphi_+ + \varphi_- = \varphi_{01} + 2k\tau\ln\frac{r_{01}}{r_1} + \varphi_{02} - 2k\tau\ln\frac{r_{02}}{r_2} =$

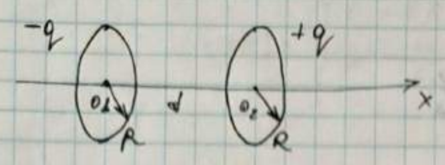
$= \underbrace{(\varphi_{01} + \varphi_{02})}_{\varphi_0 = const} + 2k\tau\ln\left(\frac{r_{01}}{r_{02}}\cdot\frac{r_2}{r_1}\right) = \varphi_0 + 2k\tau\ln\left(n\frac{r_2}{r_1}\right) = const$

$\frac{r_{01}}{r_{02}} \equiv n$

$\frac{n r_2}{r_1} = const \equiv C$

ч.т.док-ть

Д/з:



Два кольца, рассто-е между центрами $= d$

$d \ll R$

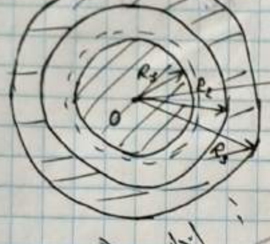
1) $\varphi_p(x) = ?$ + график

2) Зная $\varphi_p(x) \to E_x(x) = ?$ + график; исследовать при $x >> R$

Проводник в электростат. поле.

20.09.21.

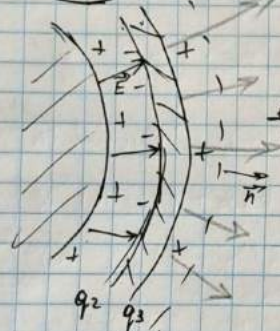
①



R_1, R_2, R_3; $q_{ш} = q_1$, $q_{об} = 0$

$E(r) = ?$

$\varphi(r) = ?$



$q_2 = -q_1$

$q_3 = q_1$

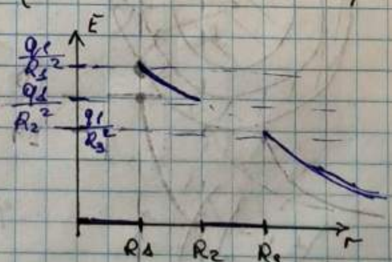
1) $r \in [R_1; R_2]$:

По т. Остр. Гаусса: $\oint_{(S)} E_n\, dS = k \cdot 4\pi Q_{int}$

$\oiint_{(S)} E_n dS = E \cdot 4\pi r^2$; $E_n = E = const$ на (S)

$$E \cdot 4\pi r^2 = k \cdot 4\pi \begin{cases} 0, & 0 \le r < R_1;\ R_2 \le r < R_3 \\ q_1, & R_1 \le r \le R_2,\ r \ge R_3, \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = \begin{cases} 0, & 0 \le r < R_1,\ R_2 \le r < R_3 \\ \frac{q_1}{r^2}, & R_1 \le r < R_2,\ r \ge R_3 \end{cases}$$



$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E_r\, dr$$

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \int_r^{r_0} E_r(r)\, dr$$

$$\varphi(r_0 \to \infty) = 0$$

1) $r \ge R_3$.

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \frac{kq_1}{r^2}\, dr = -\frac{kq_1}{r}\Big|_r^{\infty} = \frac{kq_1}{r}$$

$$\varphi(R_3) = \frac{kq_1}{R_3}$$

2) φ $r \in [R_2; R_3]$

$$\varphi(r) = \frac{kq}{R_3}$$

3) $r \in [R_1; R_2]$

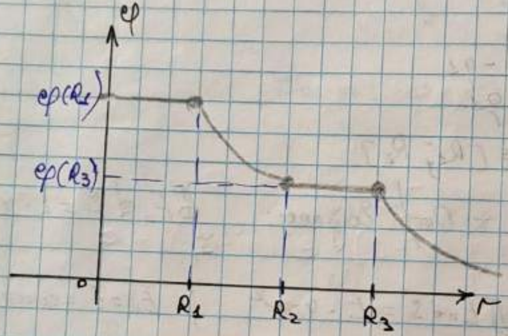
$$\varphi(r) - \varphi(R_2) = \int_r^{R_2} \frac{kq_1}{r^2}\,dr = -\frac{kq_1}{r}\Big|_r^{R_2} = \frac{kq_1}{r} - \frac{kq_1}{R_2}$$

$$\varphi(R_2) = \varphi(R_3) = \frac{kq_1}{R_3}$$

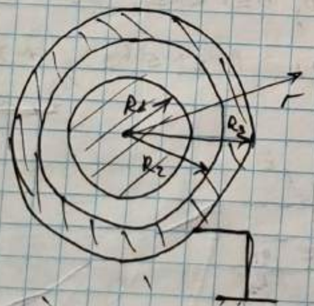
$$\varphi(r) = \varphi(R_2) + \frac{kq_1}{r} - \frac{kq_1}{R_2} = \frac{kq_1}{R_3} + \frac{kq_1}{r} - \frac{kq_1}{R_2} = kq_1\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$$

4) $r \in [0; R_1]$

$$\varphi(r) = \varphi(R_1) = kq_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$$



②

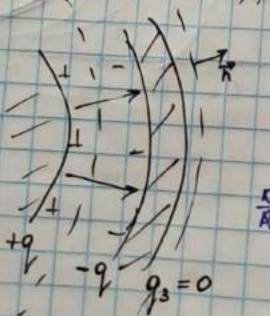


R_1, R_2, R_3

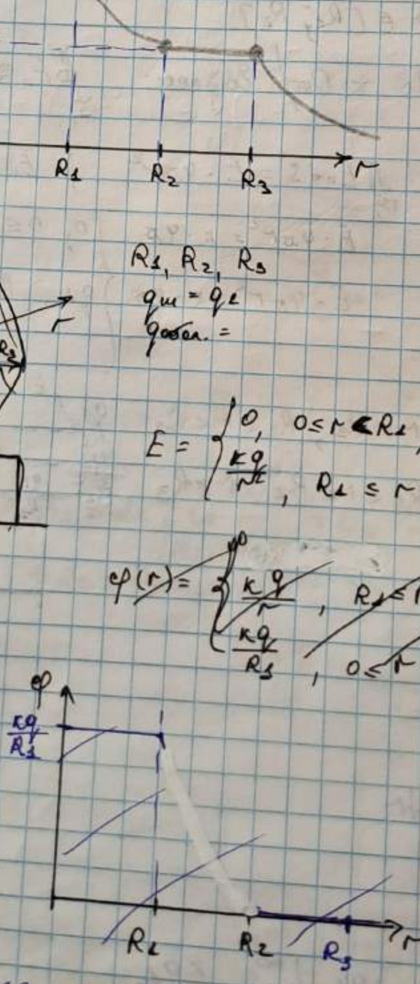
$q_{вн} = q_2$

$q_{общ.} =$

$$E = \begin{cases} 0, & 0 \le r < R_1,\ r \ge R_2 \\ \frac{kq}{r^2}, & R_1 \le r < R_2 \end{cases}$$

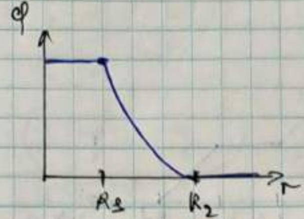


$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{kq}{r}, & R_1 \le r < R_2 \\ \frac{kq}{R_1}, & 0 \le r < R_1 \end{cases}$$



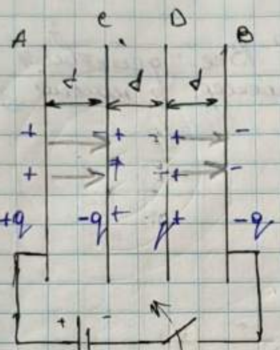
$$\varphi(r) - \varphi(R_2) = \int_r^{R_2} \frac{kq}{r^2}\,dr = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{R_2}$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & r \geq R_2 \\ \dfrac{kq}{r} - \dfrac{kq}{R_2}, & R_1 \leq r < R_2 \\ \dfrac{kq}{R_1} - \dfrac{kq}{R_2}, & 0 \leq r < R_1 \end{cases}$$



$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$

③



$E_{AC}, E_{CD}, E_{DB} = ?$

$\Delta\varphi_{AC}, \Delta\varphi_{CD}, \Delta\varphi_{DB} = ?$

$E_{AC} = E_{CD} = E_{DB}$ ~ из симметрии

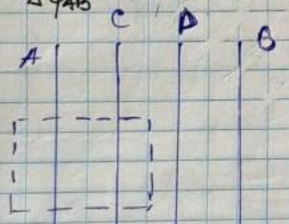
$\Delta\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_0^{3d} E_x\,dx =$

$= \int_0^{d} E_{AC}\,dx + \int_d^{2d} E_{CD}\,dx + \int_{2d}^{3d} E_{DB}\,dx =$

$= 3\int_0^{d} E_{ACx}\,dx = 3E_{AC}\cdot d$

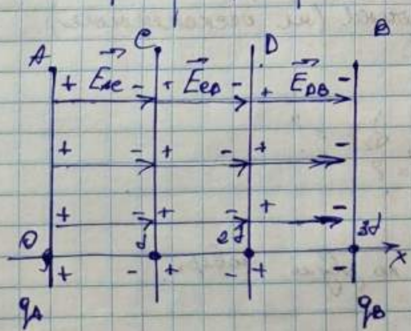
$\Rightarrow E_{AC} = E_{CD} = E_{DB} = \dfrac{\Delta\varphi_{AB}}{3d}$

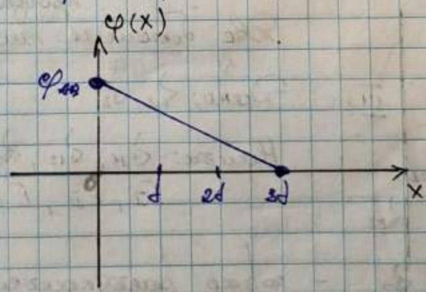
$d, \Delta\varphi_{AB}$



$\varphi_A - \varphi_B = (\varphi_A - \varphi_C) + (\varphi_C - \varphi_D) + (\varphi_D - \varphi_B)$

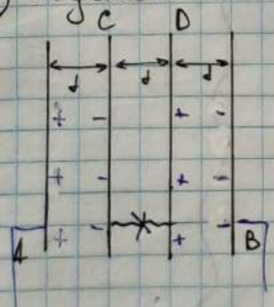
$\Delta\varphi_{AC} = \Delta\varphi_{CD} = \Delta\varphi_{DB} = \dfrac{\Delta\varphi_{AB}}{3}$

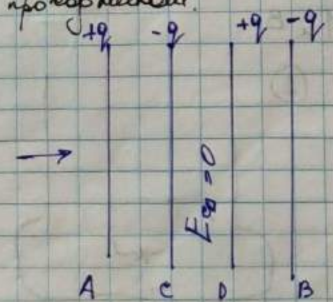




$\varphi(x = 3d) = 0$

④ Соединили C и D проводником





$E_{AC} = E_{DB} = \dfrac{\Delta\varphi_{AB}}{3d}$

$E_{CD} = 0$

$\Delta\varphi_{DB} = \int_{2d}^{3d} \dfrac{\Delta\varphi_{AB}}{3d}\,dx =$

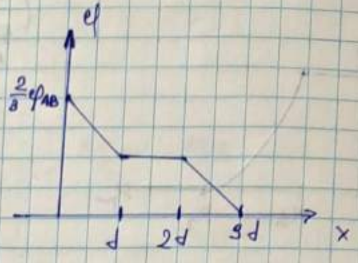
$= \dfrac{\Delta\varphi_{AB}}{3}$

$\Delta\varphi_{CD} = 0$; ~~$\Delta\varphi_{AC} = \int_0^{d} \dfrac{\Delta\varphi_{AB}}{3d}\,dx = \dfrac{\Delta\varphi_{AB}}{3}$~~

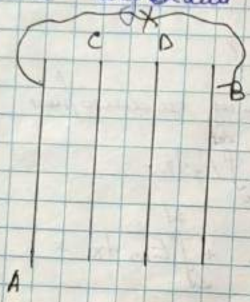
$\Delta\varphi_{CD} = 0$ $\left(\varphi_D = \varphi_C = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{3} \right)$

$\varphi_A = \frac{2\Delta\varphi_{AB}}{3}$

$\varphi_A - \varphi_C = \int_0^d E_{AC x}\, dx$



Дальше соединили A и B:



Что там будет? Все действия посл. с начала заряд.

$\Rightarrow \varphi_A = \varphi_B$

Д/З*: σ_{11} σ_{12}

I II III

σ_{21}

σ_{12} σ_{22}

σ_1 σ_2

Две большие проводящие пластины. (не бесконечные)

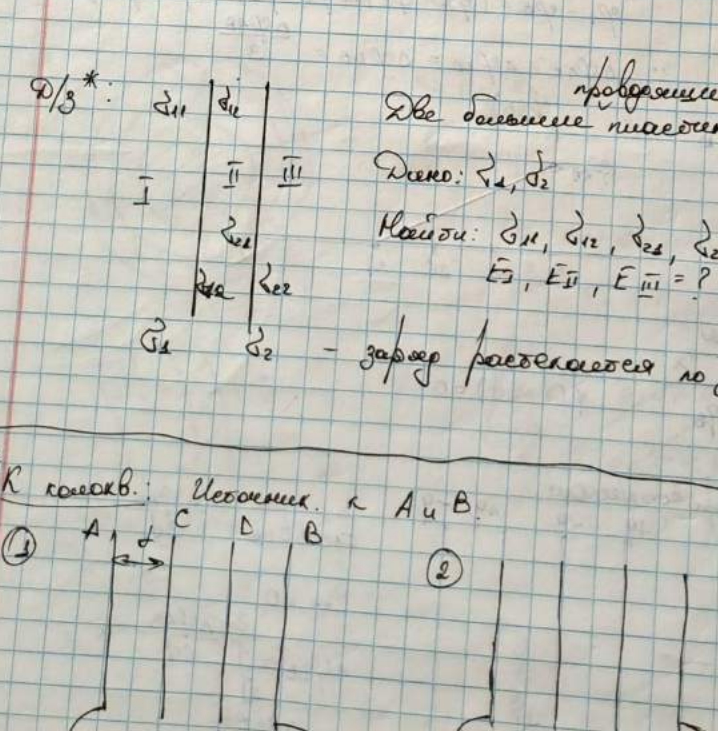
Дано: σ_1, σ_2

Найти: $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22} = ?$

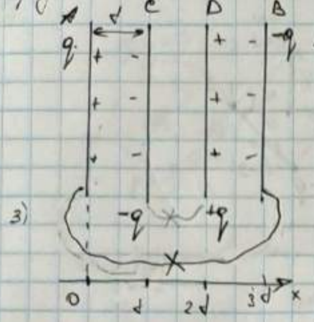
$E_I, E_{II}, E_{III} = ?$

– заряд растекается по двум поверх.

*К коллокв.: Источник к A и B.



Продолжение:



1) $\Delta\varphi_{AB} \to \Delta\varphi_{AC} = \Delta\varphi_{CD} = \Delta\varphi_{DB} = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{3}$

$E_{AC} = E_{CD} = E_{DB} = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{3d}$

2) $E_{CD} = 0$, $\Delta\varphi_{CD} = 0$; $E_{AC} = E_{DB} = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{3d}$

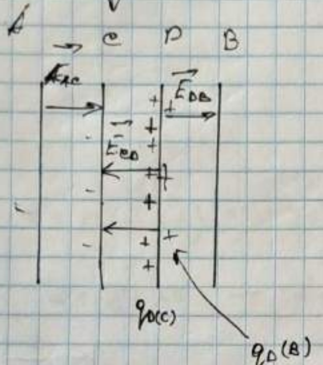
3) $\Delta\varphi_{AB} = 0 = (\varphi_A - \varphi_C) + (\varphi_C - \varphi_D) + (\varphi_D - \varphi_B) =$

$= \int_0^d E_x^{AC}\,dx + \int_d^{2d} E_x^{CD}\,dx + \int_{2d}^{3d} E_x^{DB}\,dx =$

$= \underline{E_x^{AC}\cdot d} + E_x^{CD}\cdot d + \underline{E_x^{DB}\cdot d} = 2E_x^{AC}\cdot d + E_x^{CD}\cdot d$

$2E_x^{AC} + E_x^{CD} = 0 \Rightarrow \vec{E}^{AC} \uparrow\downarrow \vec{E}^{CD}$

$2E^{DB} = 2E^{AC} = E^{CD}$



$$\begin{cases} q_D(C) + q_{D(B)} = q \\ \frac{q_{D(C)}}{q_{D(B)}} = 2 \end{cases}$$

$q_{D(B)} = \frac{q}{3}$; $q_{D(C)} = \frac{2}{3}q$

$\Rightarrow q_B = -\frac{q}{3}$

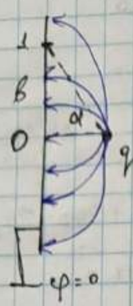
$q_A = +\frac{q}{3}$

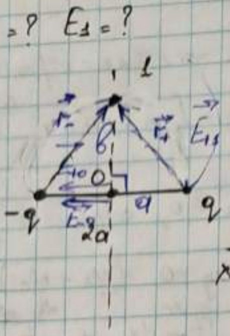
$\Delta\varphi_{AC} = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{9} \longleftarrow E_{AC}^{нов} = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{9d}$ (будет в 3 раза меньше начального)

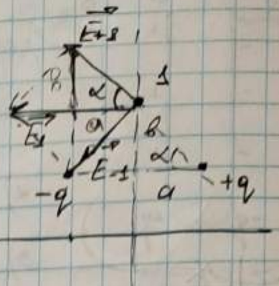
$E_{CD}^{нов} = \frac{2\Delta\varphi_{AB}}{9D}$

① Плоскость:

1) $E_0 = ?$ $E_1 = ?$







По принципу суперпозиции: $\vec{E_0} = \vec{E_+} + \vec{E_-} = 2\vec{E_+}$

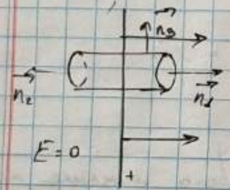
$$E_0 = \frac{2kq}{a^2}$$

E_1: $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$E_1 = 2E_{+1}\cdot\cos\alpha = \frac{2kqa}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

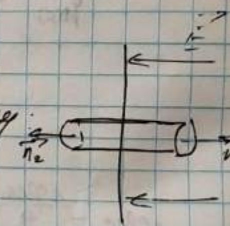
$$E_{+1} = \frac{kq}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2) $\sigma_0 = ?$ $\sigma_1 = ?$ $\qquad E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 4k\pi\sigma$



$E = k\cdot 4\pi\sigma$

Но $\vec{E}$ смотрит в другую сторону:



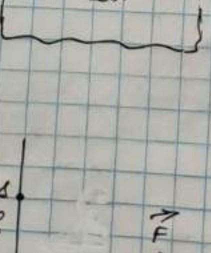
$$\Rightarrow E_0 = \frac{2kq}{a^2} = -k\cdot 4\pi\sigma_0$$

$$\Rightarrow \sigma_0 = -\frac{q}{2\pi a^2}$$

$$E_1 = \frac{2kqa}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = -4k\pi\sigma_1$$

Со стороны q:

$$\Rightarrow \sigma_1 = -\frac{qa}{2\pi(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$dq_{инд} = \sigma_1\cdot 2\pi b\, db$$

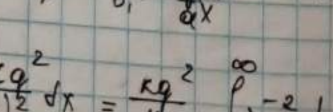
$$q_{инд} = -\int_0^\infty \frac{qa\cdot \cancel{2\pi} b}{\cancel{2\pi}(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\,db = -\frac{qa}{2}\int_0^\infty \frac{d(b^2+a^2)}{(b^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= +qa\,\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}\Big|_0^\infty = -q$$

3)

$A - ?$

$a \to \infty$

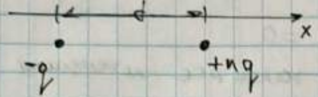


$$A = \int_a^\infty F_x\,dx = \int_a^\infty \frac{kq^2}{(2x)^2}\,dx = \frac{kq^2}{4}\int_a^\infty x^{-2}\,dx =$$

$$= -\frac{kq^2}{4}\cdot\frac{1}{x}\Big|_a^\infty = \frac{kq^2}{4a}$$

② $F = ?$ (с какой силой заряд притягивается к шару?)

Заземлили → потенциал шара = 0



$n = ?$

$d = ?$

$$R = r = \frac{nd}{n^2-1}$$

$$x_c = -\frac{d}{n^2-1}$$

$$b = d + |x_c| = d + \frac{d}{n^2-1} = \frac{n^2 d}{n^2-1}$$

$$n = \frac{b}{r}$$

$$b = \frac{b^2 d}{r^2\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)} = \frac{b^2 d \cancel{r^2}}{\cancel{r^2}(b^2-r^2)}$$

$$1 = \frac{bd}{b^2-r^2} \rightarrow d = \frac{b^2-r^2}{b}$$

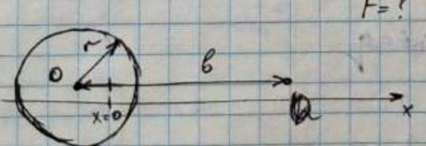
$$Q = nq \Rightarrow F = \frac{kq\cdot Q}{d^2} = \frac{k\cdot rQ^2\cdot b^2}{b(b^2-r^2)^2} = \frac{krQ^2 b}{(b^2-r^2)^2}$$

$$q = \frac{Q}{n} = \frac{rQ}{b}$$

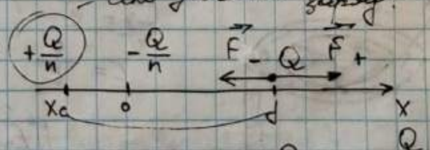
или: $F_x = -\frac{kQ^2}{nd^2} = -\frac{k\, rbQ^2}{(b^2-r^2)^2}$

29.09.21

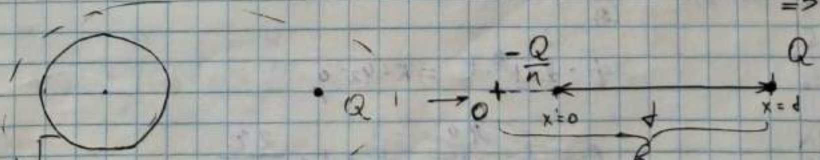
① $F = ?$ $Q_{эф} = ?$



Если добавим ещё этот заряд.



$$\Rightarrow Q_{эф} = -\frac{Q}{n} + \frac{Q}{n} = 0$$



$$\varphi_{эф} = \frac{kQ}{nr}$$

$$\cancel{F = |F_2 - F_1| = \left|\frac{kQ^2}{n(d+x_c)^2} - \frac{kQ^2}{nd^2}\right| =}$$

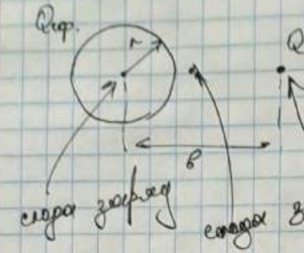
$\cancel{\vec F = \vec F_1 + \vec F_2}$

$\cancel{F_x = F_{1x} + F_{2x}}$

$$\vec F = \vec F_- + \vec F_+$$

$x:\quad F_x = F_+ - F_- = \frac{kQ^2}{n b^2} - \frac{kQ^2}{n d^2}$

Д/з: $Q_{сф.}$



На сфере есть заряд!

$\varphi_{сф.} = ?\quad \varphi(\infty) = 0$

делает потенц. $= 0$

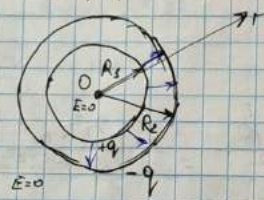
сюда заряд

сюда заряд, чтобы был такой же потенциал

Электроёмкость. Конденсатор.

$C = \frac{q}{\varphi}$ ~ проводник ; $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ ~ конденсатор.

① Две сферы:

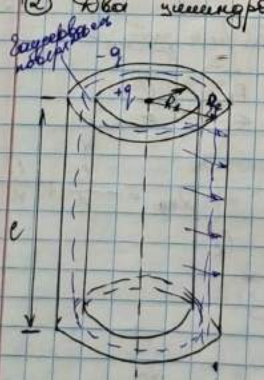


$$E(r) = \frac{kq}{r^2},\quad R_1 \le r < R_2.$$

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E_r\,dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{kq}{r^2}\,dr = kq\cdot\left(-\frac{1}{r}\Big|_{R_1}^{R_2}\right) = kq\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) = kq\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{k\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)}$$

② Два цилиндра:



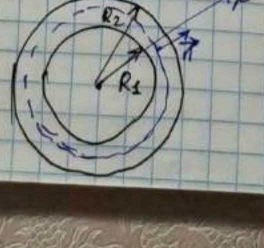
$C_1 = \frac{C}{l} = ?$; $Q_{int} = q$

$\tau = \frac{q}{l}$

$$\oint_{(S)} E_n\,dS = k\cdot 4\pi Q_{int}$$

$$E\cdot 2\pi r\cdot l = k\cdot 4\pi q$$

$$E = k\cdot\frac{2\tau}{r}$$

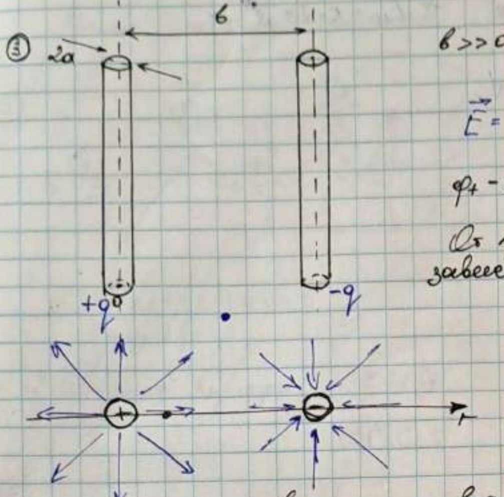


$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} 2k\tau\cdot\frac{dr}{r} = 2k\tau\cdot \ln r\Big|_{R_1}^{R_2} = 2k\tau\cdot\left(\ln\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{2k\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$C_1 = \frac{C}{\ell} = \frac{q}{\ell \cdot \Delta\varphi} = \frac{\tau}{\Delta\varphi}$$

③



$b \gg a$; $C_1 = \frac{C}{\ell} = ?$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_{(+)}^{(-)} E_\ell \, d\ell$$

От пути интегрирования ничего не зависит.

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_a^{b-a} E_r \, dr$$

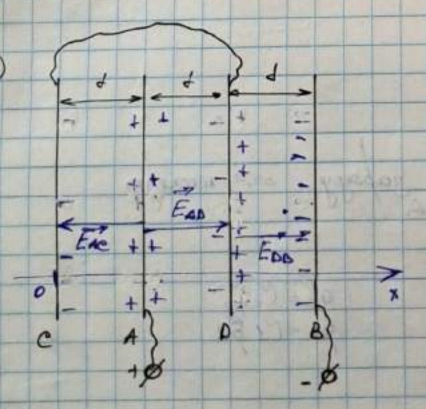
$$E_r = E = E_+ + E_- = \frac{2k\tau}{r} + \underbrace{\frac{2k\tau}{b-r}}_{\text{сдвинем ось}}$$ ← из прошлой задачи

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_a^{b-a} \frac{2k\tau}{r}\, dr - \int_a^{b-a} \frac{2k\tau}{r-b}\, d(r-b) =$$

$$= 2k\tau \left(\ln\left(\frac{b-a}{a}\right) - \ln\left(\frac{b-a-b}{a-b}\right) \right) \approx 4k\tau \ln\frac{b}{a}$$

$$= 2k\tau \left(\ln\frac{(b-a)(-a)}{-a(b-a)} \right) \qquad C_1 = \frac{1}{4k \ln\frac{b}{a}}$$

④



$S, d, \; C_{AB} = ?$

$$\Delta\varphi_{CD} = 0 = -\int_0^d E_{AC}\, dx + \int_d^{2d} E_{AD}\, dx$$

$$E_{AC} = E_{AD}$$

$$|q_B| = q_A = q_{A(C)} + q_{A(D)}$$

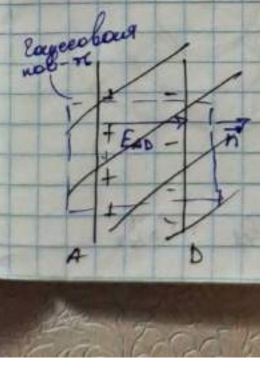
$$q_{A(C)} = q_{A(D)} = \frac{q_A}{2}$$

$$q_C + q_D = -q_{A(C)} - q_{A(D)} + (-q_B) = -\frac{q}{2} - \frac{q}{2} + q = 0$$

$$\Delta\varphi_{AB} = \int_d^{2d} E_{AD}\, dx + \int_{2d}^{3d} E_{DB}\, dx = d(E_{AD} + E_{DB}) = 3E_{AD} \cdot d$$

$$E_{DB} = 2E_{AD}$$

Гауссова пов-ть

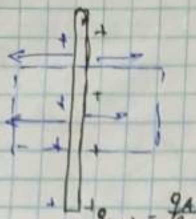


$\cancel{q}\; E_{AD} \cdot S = \cancel{4\pi \cdot 2q}$

...енциал

$\frac{P}{R_1} \Big) =$

=



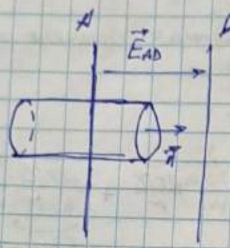
$q_{1}(0) = \frac{q_A}{2}$

$$\oint E_n\, dS = 2ES_т$$

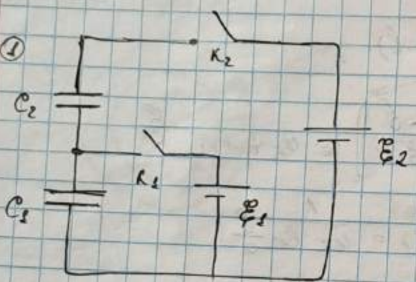
$$2\pi k \sigma S_т = 2ES_т \quad \Rightarrow E_{AD} = k \cdot 2\pi \frac{q_A}{S}$$

$$\Delta\varphi_{AB} = 6\pi k \cdot \frac{q_A}{S} d$$

$$C_{AB} = \frac{S}{6\pi k \cdot d}$$



4.10.21. ①



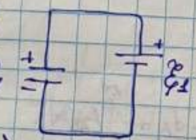
В начале: $q_1(0) = q_2(0) = 0$

1) $K_1\downarrow$, $K_1\uparrow$

2) $K_2\downarrow$

$\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2 = ?$

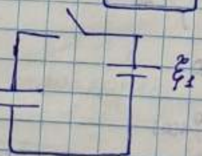
1а) $K_1\downarrow$



$\Delta\varphi_1^{(1)} = \mathcal{E}_1$

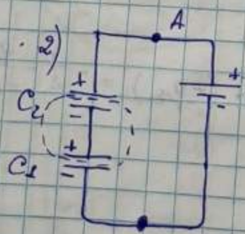
$q_1^{(1)} = C_1 \cdot \mathcal{E}_1$

1б)



Некуда уходить заряду => ничего не изменится.

2)



$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \mathcal{E}_2 \\ -q_2 + q_1 = q_1^{(1)} \end{cases}$$

$q_2 = C_2\mathcal{E}_2$

$q_1 = C_1\mathcal{E}_2$

~~$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \mathcal{E}_2$~~

~~$C_2\mathcal{E}_2 + C_1\mathcal{E}_2 = C_1\mathcal{E}_1$~~

$$\Delta\varphi_1 = \mathcal{E}_2 - \Delta\varphi_2 = \mathcal{E}_2 - \frac{q_2}{C_2}$$

$$-\Delta\varphi_2 C_2 + C_1\Delta\varphi_1 = C_1\mathcal{E}_1$$

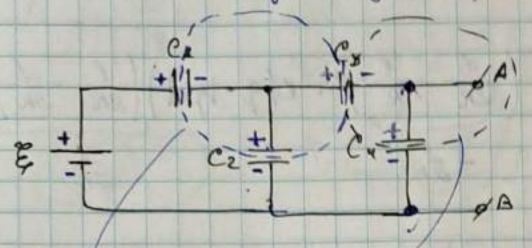
$$\Delta\varphi_2 = \frac{C_1\Delta\varphi_1 - C_1\mathcal{E}_1}{C_2}$$

$$C_2\Delta\varphi_1 + C_1\Delta\varphi_1 - C_1\mathcal{E}_1 = C_2\mathcal{E}_2 \quad , \quad \Delta\varphi_1(C_1 + C_2) = C_1\mathcal{E}_1 + C_2\mathcal{E}_2$$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{C_1\mathcal{E}_1 + C_2\mathcal{E}_2}{C_1+C_2}$$

Решая систему получим: $\Delta\varphi_2 = \dfrac{C_1(\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2)}{C_1+C_2}$

(2)



$C_1 = C_3 = C$
$C_2 = C_4 = 2C$

$\Delta\varphi_{AB} = ? = \Delta\varphi_4$

$-q_1+q_2+q_3=0$
$-q_3+q_4=0$

2 правило Кирхгофа: $\mathcal{E}C_1C_2$: $\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_2=\mathcal{E}$

$C_2C_3C_4$: $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_3+\Delta\varphi_4$

$-q_1+q_2+q_3=0$

$-q_3+q_4=0$

$\Rightarrow -C_1\Delta\varphi_1 + C_2\Delta\varphi_2 + C_3\Delta\varphi_3 = 0$
$-C_3\Delta\varphi_3 + C_4\Delta\varphi_4 = 0$

$-C\Delta\varphi_1 + 2C\Delta\varphi_2 + C\Delta\varphi_3 = 0$
$-C\Delta\varphi_3 + 2C\Delta\varphi_4 = 0$ $\Big\} \Rightarrow$ $-\Delta\varphi_1 + 2\Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 = 0$
$-\Delta\varphi_3 + 2\Delta\varphi_4 = 0$
$\Delta\varphi_3 = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_4$

$\Delta\varphi_2 = \mathcal{E} - \Delta\varphi_1$

$\Rightarrow$ $\Delta\varphi_3 = \mathcal{E} - 2\Delta\varphi_1$.

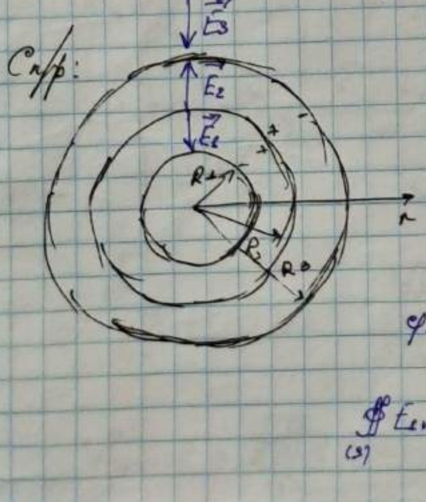
$\Delta\varphi_3 = 2\Delta\varphi_4$
$\Delta\varphi_2 = 3\Delta\varphi_4$
$\Delta\varphi_1 = \mathcal{E} - \Delta\varphi_2 = \mathcal{E} - 3\Delta\varphi_4$

$-\mathcal{E} + 3\Delta\varphi_4 + 6\Delta\varphi_4 + 2\Delta\varphi_4 = 0$

$11\Delta\varphi_4 = \mathcal{E}$

$\rightarrow \Delta\varphi_{AB} = \Delta\varphi_4 = \dfrac{\mathcal{E}}{11}$

Сл/р:

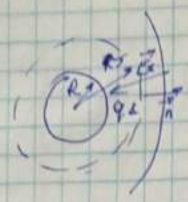


$R_1 = R$
$R_2 = 2R$
$R_3 = 3R$
$q_2 = q > 0$
$E(r) = ?$

$r<R \rightarrow E=0$

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \int_R^{2R} E_{1r}\,dr + \int_{2R}^{3R} E_{2r}\,dr = -\int_R^{2R} E_1\,dr + \int_{2R}^{3R} E_2\,dr$$

$$\oint_{(S)} E_{1n}\,dS = 4\pi\,q_1$$



$$E_1 = \frac{k \cdot |q_1|}{r^2}$$

$$E_2 = \frac{k(q - |q_1|)}{r^2}$$

$$\cancel{k|q_1|} + k|q_1|\underbrace{\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right)}_{-\frac{1}{2R}} + k(q - |q_1|)\underbrace{\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right)}_{\frac{1}{6R}}$$

$$= 0$$

$$\frac{|q_1|}{2} = \frac{q - |q_1|}{6}$$

$$6|q_1| = 2q - 2|q_1| \rightarrow |q_1| = \frac{1}{4}q$$

$$q_1 = -\frac{1}{4}q$$

$$q_3 = -\frac{3q}{4}$$

$$E_3 = 0$$

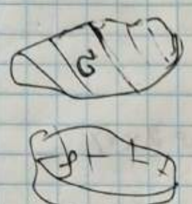
Доп. не заземлять, а соединить 1-3, тогда?

Работа и энергия в электростатике.

q_i q_j

$$W_{вз.} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} k\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (i \neq j)$$

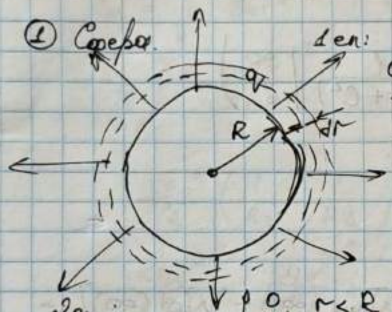
$$W_{собств.} = \frac{1}{2}\oint_{(S)} \sigma\varphi\, dS$$ (φ – потенц. в той точке поля, в которой берём σ)



$$W_{собств} = \frac{1}{2}\int_{(V)} \rho\varphi\, dV$$

$$w_{эл} = \frac{E^2}{k\cdot 8\pi} \rightarrow W = \int_{(V)} w\, dV$$

① Сфера.



1сп: $\varphi(R) = \frac{kq}{R}$; $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$

$$W = \frac{1}{2}\oint_{(S)} \frac{kq}{R}\cdot\frac{q}{4\pi R^2}\, dS = \frac{kq^2}{8\pi R^3}\cdot 4\pi R^2 = \frac{kq^2}{2R}$$

2сп.:

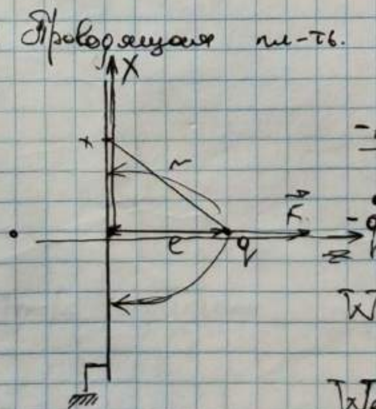
$$E = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{kq}{r^2} & r \geq R \end{cases}$$

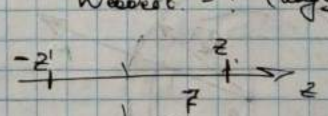
$$w_{эл} = \frac{k^2 q^2}{k\cdot 8\pi r^4} = \frac{k q^2}{8\pi r^4}$$

$$W = \cancel{\int \frac{kq^2}{8\pi r^4} dV} = \int_R^\infty \frac{kq^2}{8\pi r^4}\cdot 4\pi r^2\, dr = \frac{kq^2}{2R}$$

$dV = 4\pi r^2 dr$

② Проводящая пл-ть. $W_{вз.} = ?$
$W_{собств.} = ?$ (индуц. зарядов.)





$$W_{вз} = \frac{1}{2}\cdot$$

$$W_{вз.} = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot \varphi_+ q_- = -\frac{kq^2}{2\ell}$$

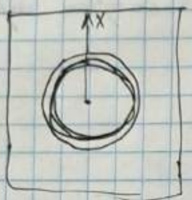
$$W_{вз.} = \frac{1}{2}(\varphi_+ q_- + \varphi_- q_+) = -\frac{kq^2}{2\ell}$$

$$W_{собств} = \frac{1}{2}\iint_{(S)} \sigma\varphi\, dS$$

$$\sigma = -\frac{ql}{2\pi(l^2+x^2)^{3/2}}$$

φ – потенциал зарядов!

$$\varphi_{пл} = 0 = \varphi_q + \varphi_{инд} \rightarrow \varphi_{инд} = -\varphi_q = -\frac{kq}{r} = -\frac{kq}{\sqrt{l^2+x^2}}$$



Разбиваем на кольца:

$$dS = 2\pi x\, dx \qquad d(x^2) = 2x\, dx$$

$$\Rightarrow W_{собств.} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{kq^2 l \cdot 2\pi x\, dx}{\sqrt{l^2+x^2}\, 2\pi (l^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= kq^2 l \int_0^\infty \frac{d(x^2+l^2)}{4(x^2+l^2)^2} = \frac{kq^2 l}{4}\left(-\frac{1}{(x^2+l^2)}\Bigg|_0^\infty\right) =$$

$$= kq^2 l \cdot \frac{1}{4l^2} = \frac{kq^2}{4l}$$

2 способ:

$$A_F = W_{кон} - W_{нач.} = [\underbrace{W_q(\infty)}_{} + W_{\substack{инд\\собств}}(\infty) + \underbrace{W_{вз.}(\infty)}_{=0}] -$$

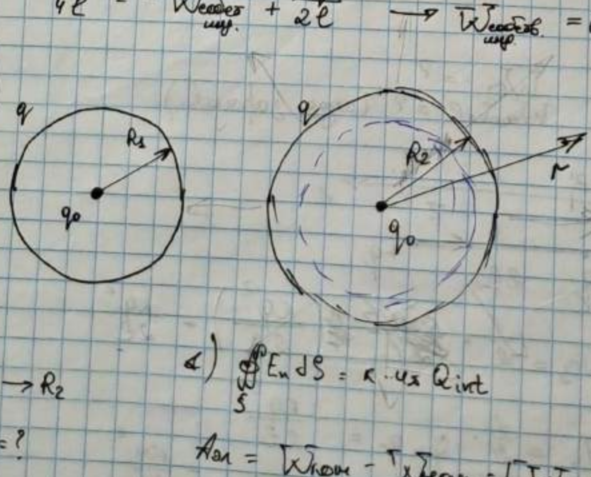
$$- [\underbrace{W_q(l)}_{=0} + W_{\substack{инд\\собств.}}(l) + W_{вз.}(l)] =$$

$$= -W_{\substack{инд\\собств.}}(l) - W_{вз.}(l) \qquad \left(W_{вз} = -\frac{kq^2}{2l}\right)$$

$$A_F = q\int_l^\infty E_z\, dz = \int_l^\infty F_z\, dz = \int_l^\infty \frac{kq^2}{4z^2}\, dz = \frac{kq^2}{4l}$$

$$\frac{kq^2}{4l} = -W_{\substack{собств\\инд.}} + \frac{kq^2}{2l} \rightarrow W_{\substack{собств.\\инд.}} = \frac{kq^2}{4l}$$

③



$R_1 \rightarrow R_2$

$A_{эл} = ?$

а) $\oint_S E_n\, dS = k \cdot 4\pi Q_{int}$

$$A_{эл} = W_{кон} - W_{нач.} = [W_{q_0}(R_2) + W_q(R_2) + W_{вз}(R_2)] -$$

$$- [W_{q_0}(R_1) + W_q(R_1) + W_{вз}(R_1)] =$$

$$= \ldots =$$

1 способ:

$$A_{эл.} = W_{нач} - W_{кон} = \left[\cancel{W_{q_0}(R_1)} + W_q(R_1) + W_{вз}(R_1)\right] -$$
$$- \left[\cancel{W_{q_0}(R_2)} + W_q(R_2) + W_{вз}(R_2)\right] =$$
$$= \frac{kq^2}{2R_1} - \frac{kq^2}{2R_2} + \frac{kqq_0}{R_1} - \frac{kqq_0}{R_2}$$

2 способ.

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{kq_0}{r^2}, & r < R_{сф.} \\ \dfrac{k(q_0+q)}{r^2}, & r \geq R_{сф.} \end{cases}$$

$$w(r) = \frac{E^2}{k \cdot 8\pi} = \begin{cases} \dfrac{kq_0^2}{8\pi r^4}, & r < R_{сф.} \\ \dfrac{k(q_0+q)^2}{8\pi r^4}, & r \geq R_{сф.} \end{cases}$$

$$A_{эл} = \int_0^{R_1} \frac{kq_0^2}{8\pi r^4} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_{R_1}^{\infty} \frac{k(q_0+q)^2}{8\pi r^4} \cdot 4\pi r^2 dr - \int_0^{R_2} \frac{kq_0^2}{8\pi r^4} \cdot 4\pi r^2 dr -$$
$$- \int_{R_2}^{\infty} \frac{k(q_0+q)^2}{8\pi r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = + \int_{R_2}^{R_1} \frac{kq_0^2}{2r^2} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{k(q_0+q)^2}{2r^2} dr =$$
$$= \frac{kq_0^2}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{k(q_0+q)^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) =$$
$$= \cancel{\frac{kq_0^2}{2R_2}} - \cancel{\frac{kq_0^2}{2R_1}} + \cancel{\frac{kq_0^2}{2R_1}} + \frac{kqq_0}{R_1} + \frac{kq^2}{2R_1} - \cancel{\frac{kq_0^2}{2R_2}} - \frac{kqq_0}{R_2} - \frac{kq^2}{2R_2} =$$
$$= \frac{kq^2}{2R_1} - \frac{kq^2}{2R_2} + \frac{kqq_0}{R_1} - \frac{kqq_0}{R_2}$$

Энергия конденсатора.

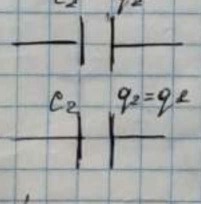
13.10.21

$$W_{эл.} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

$$F_{эл.x} = -\frac{dW_{эл}}{dx}\bigg|_{q=const} = -\frac{q^2}{2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{q^2}{2C^2} \cdot \frac{dC}{dx} = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{dC}{dx} = \frac{dW_{эл}}{dx}\bigg|_{U=const}$$

$C = C(x)$ если $q = const$

①



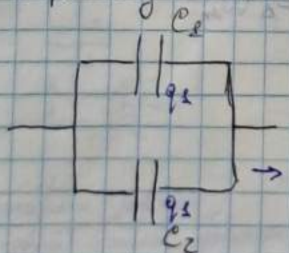
$\rightarrow W_1 = \dfrac{q_1^2}{2C_1}$

$\rightarrow W_2 = \dfrac{q_1^2}{2C_2}$

$W_\Sigma = \dfrac{q_1^2}{2}\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)$

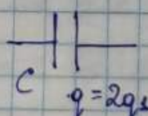
Теперь соединим:

$W = ?$



$\rightarrow$

$C = C_1 + C_2$;



$$\rightarrow W = \frac{4q_1^2}{2(C_1+C_2)} = \frac{2q_1^2}{2(C_1+C_2)}$$

$$W - W_2 = \frac{q_1^2}{2}\left(\frac{4}{C_1+C_2} - \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) = \frac{q_1^2}{2}\left(\frac{4C_1C_2 - C_2C_1 - C_2^2 - C_1^2 - C_1C_2}{C_1C_2(C_1+C_2)}\right)$$

$$= -\frac{q_1^2}{2}\left(\frac{C_1^2 - 2C_1C_2 + C_2^2}{C_1C_2(C_1+C_2)}\right) = -\frac{q_1^2}{2}\frac{(C_1-C_2)^2}{C_1C_2(C_1+C_2)} < 0$$

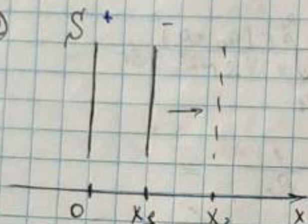
$$\begin{cases} \dfrac{q_1'}{C_1} = \dfrac{q_2'}{C_2} \\ q_1' + q_2' = 2q_1 \end{cases} \Rightarrow \quad q_1' = \frac{C_1}{C_2}q_2' \rightarrow \frac{C_1}{C_2}\cdot\frac{2C_2 q_1}{(C_1+C_2)} = \frac{2C_1 q_1}{C_1+C_2}$$

$$\frac{C_1}{C_2}q_2' + q_2' = 2q_1$$

$$q_2'\left(\frac{C_1}{C_2} + 1\right) = 2q_1$$

$$q_2'\left(\frac{C_1+C_2}{C_2}\right) = 2q_1 \rightarrow q_2' = \frac{2C_2 q_1}{C_1+C_2}$$

2



Зарядим, отключим от ист., откл. и передвинули обкладку.

$q,\ x_1 \rightarrow x_2$

$A' = ?$

$\Delta W_{эл.} = ?$

$$C_1 = \frac{S}{k\cdot 4\pi x_1};\quad C_2 = \frac{S}{k\cdot 4\pi x_2};\quad W_{эл.} = \frac{q^2}{2C}$$

$$W_{эл.1} = \frac{q^2}{2C_1} = \frac{q^2 k\cdot 4\pi x_1}{2S} = k\cdot\frac{2\pi x_1 q^2}{S}$$

$$W_{эл.2} = \frac{q^2}{2C_2} = \frac{q^2\cdot k\cdot 4\pi x_2}{2S} = k\cdot\frac{2\pi x_2 q^2}{S}$$

$q = const$

$$\Delta W_{эл.} = W_{эл.2} - W_{эл.1} = \frac{2\pi k}{S}q^2(x_2 - x_1)$$

$$F_{эл.x} = -\frac{dW_{эл.}}{dx}\Big|_{q=const}$$

$$dA = F_{эл.x}\cdot dx;\quad W_{эл.}(x) = k\cdot\frac{2\pi x q^2}{S}$$

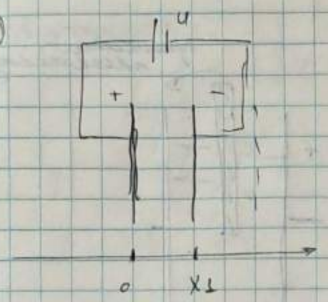
$$dA = -dW_{эл.}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{эл.x}\,dx = -\int_{W_{эл.1}}^{W_{эл.2}} dW_{эл.}$$

$$A_{эл} = -W_{эл.кон} + W_{эл.нач} = \frac{2\pi k q^2}{S}(x_1 - x_2) = -\Delta W_{эл}$$

$$A' = -A_{эл} = \Delta W_{эл} = \frac{2\pi k q^2}{S}(x_2 - x_1)$$

③



$U = const$

$x_1 \to x_2$

$W_{эл} = \dfrac{CU^2}{2}$

$C_1 = \dfrac{S}{k \cdot 4\pi x_1}$; $C_2 = \dfrac{S}{k \cdot 4\pi x_2}$

$\Delta W_{эл} = \dfrac{U^2}{2}(C_2 - C_1) = \dfrac{U^2 \cdot S}{2 \cdot k \cdot 4\pi}\left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}\right) =$

$= \dfrac{U^2 \cdot S}{k \cdot 8\pi}\left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}\right) < 0$

$F_{эл.x} = \dfrac{dW_{эл}}{dx}\Big|_{U=const}$ $\qquad A_{эл.} = \Delta W_{эл.}$

$\int_{x_1}^{x_2} F_{эл.x}\, dx = \int_{W_1}^{W_2} dW_{эл} \to$ $\cancel{A = \Delta W_{эл} = \dfrac{U^2 S}{k \cdot 8\pi}\left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}\right)}$

$\cancel{A' = -\Delta W_{эл} = \dfrac{U^2 S}{k \cdot 8\pi}\left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right)}$

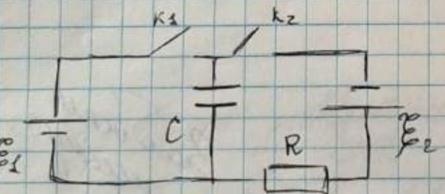
$A_{эл} = \Delta W_{эл.}$; $A' = -\Delta W_{эл.}$

$\Delta W_{эл} = A^{\Sigma}_{стор} = A_{ист} + A'$

$A_{ист} = \Delta W_{эл} - A' = 2\Delta W_{эл} < 0$

$q = CU \qquad C\downarrow \to q\downarrow$

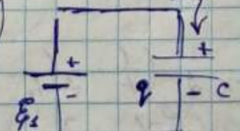
③



1) $K_1 \downarrow$
2) $K_1 \uparrow$
3) $K_2 \downarrow$

$Q_{тепл} = ?$

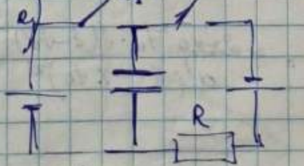
1)



$W_{эл.1} = \dfrac{C\mathcal{E}_1^2}{2}$; $W_1 = \dfrac{C\mathcal{E}_1^2}{2}$

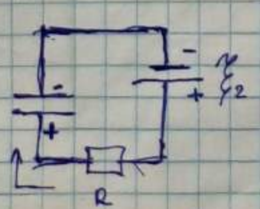
$C = \dfrac{q_1}{\mathcal{E}_1} \to q_1 = C \cdot \mathcal{E}_1.$

2)



$\cancel{C = \dfrac{q_2}{\mathcal{E}_2}}$

3)



Перезарядка! $C = \dfrac{q_2}{\mathcal{E}_2} \to q_2 = C\mathcal{E}_2$

$W_2 = \dfrac{C\mathcal{E}_2^2}{2}$

$A_{ист.} = \Delta W_{эл} + Q_{тепл.}$

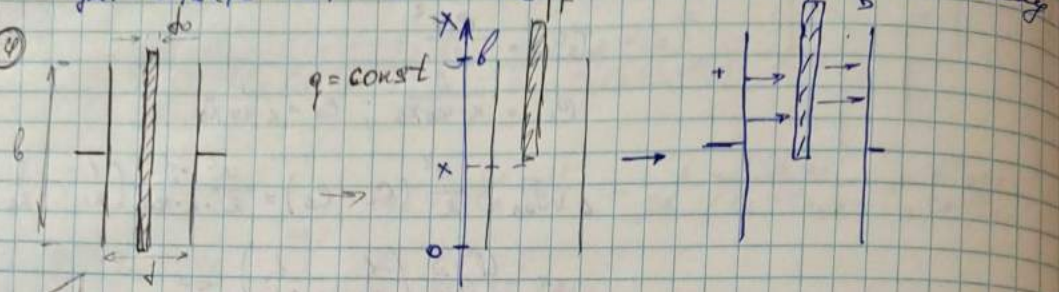
$A_{ист} = \mathcal{E}_2(\underbrace{q_{кон}}_{q_2} - \underbrace{q_{нач.}}_{-q_1}) = \mathcal{E}_2(C\mathcal{E}_2 + C\mathcal{E}_1) =$

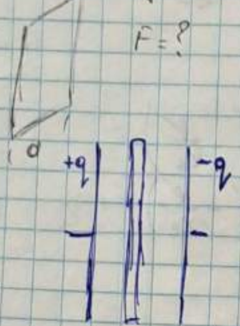
Смотрим заряд на одной обкладке.

$= C\mathcal{E}_2(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1)$

$$Q_{дж.} = C\mathcal{E}_2(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2) - \frac{C\mathcal{E}_2^2}{2} + \frac{C\mathcal{E}_1^2}{2}$$

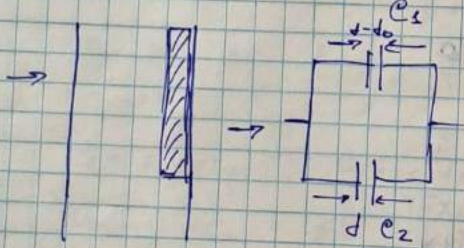
(4)





$$F_{эл.x} = -\frac{dW_{эл.}}{dx}$$

$$F_x = -F_{эл.x} = \left.\frac{dW_{эл.}}{dx}\right|_q = \frac{q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx}$$



$$C = C_1 + C_2 = \frac{S_1}{4\pi k(d-d_0)} + \frac{S_2}{4\pi k d}$$

$$S_1 = a\cdot(b-x)$$
$$S_2 = a x$$

$$C = \frac{a}{4\pi k}\left(\frac{b-x}{d-d_0} + \frac{x}{d}\right)$$

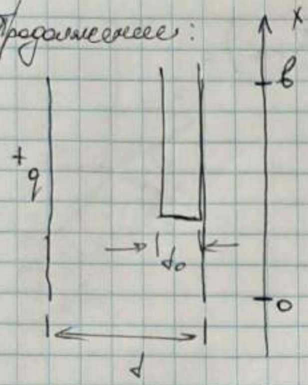
$$\frac{dC}{dx} = \frac{a}{4\pi k}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d-d_0}\right)$$

Забыли минус.

$$F_x = \frac{q^2\cdot \cancel{16}\pi^{\cancel{2}}k^{\cancel{2}}\cdot \cancel{a}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d-d_0}\right)}{\cancel{2}a^{\cancel{2}}\left(\frac{b-x}{d-d_0}+\frac{x}{d}\right)^2\cdot \cancel{4\pi k}} = \frac{q^2\pi k\, 2\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d-d_0}\right)}{a\left(\frac{b-x}{d-d_0}+\frac{x}{d}\right)^2} =$$

$$= \frac{-2\pi k q^2 \cdot d_0}{a\left(\frac{b-x}{d-d_0}+\frac{x}{d}\right)^2 d(d-d_0)} = -\frac{2\pi k q^2 d_0 d^2(d-d_0)^2}{a\,(bd-xd_0)^2 d(d-d_0)} = -\frac{2\pi k q^2 d_0\cdot d(d-d_0)}{a\,(bd-xd_0)^2}$$

④ Продолжение:



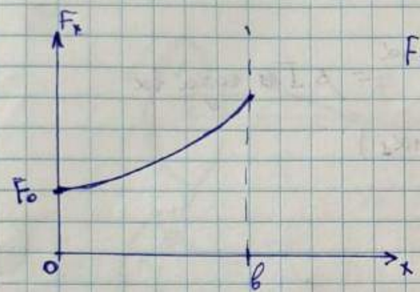
$$F_x = -F_{эл.x} =$$

$$F_{эл.x} = -\frac{dW_{эл.}}{dx}\Big|_q = -\frac{d}{dx}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx}$$

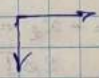
$$C = \frac{a}{k\cdot 4\pi}\left(\frac{b-x}{d-d_0} + \frac{x}{d}\right)$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{a}{k\cdot 4\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d-d_0}\right)$$

$$F_x = \frac{2\pi k q^2 d_0 d(d-d_0)}{a(db - xd_0)^2} = \frac{q^2 d_0 (d-d_0)\, d}{2\varepsilon_0 a (db - d_0 x)^2}$$



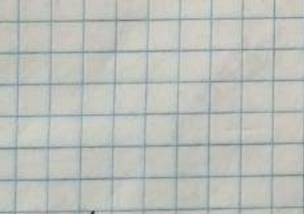
Чем дальше вдвигаем пластинку, тем сильнее сила. Почему?
Поле однородно только внутри. Есть краевые эффекты.



~ компоненты $\vec{E}$. Поле в пластинах, пытается удержать в пластинке.

18.10.21.

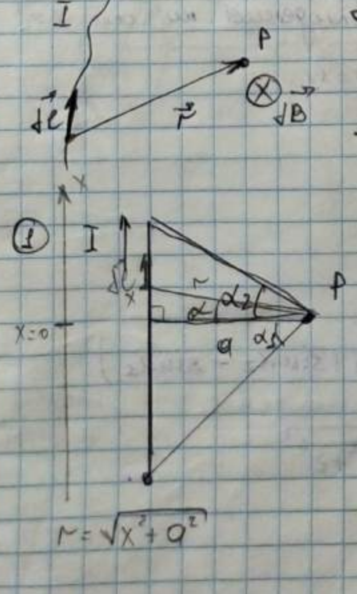
Магнитное поле в вакууме. Закон Био-Савара-Лапласа.



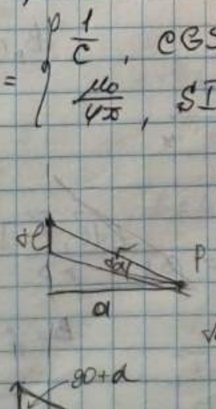
$$d\vec{B} = \beta I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{c}, & CGSM \\ \frac{\mu_0}{4\pi}, & SI \end{cases}$$

①



$r = \sqrt{x^2 + a^2}$

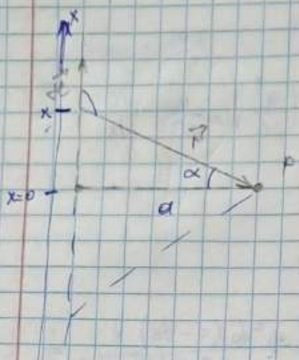


$$d\vec{B} = \beta I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} =$$

$$= dB = \beta I \frac{dl\cdot r\cdot \sin\alpha}{r^3}$$

$$dl = r\, d\alpha$$

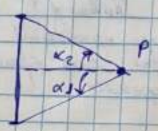
$$dB = \beta I \frac{r^2 \sin\alpha\, d\alpha}{r^3}$$



$$dB = \beta I \frac{dl \cdot r}{r^3} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$$
$$= \beta I \frac{dl \cdot \cos\alpha}{r^2}$$

$$\frac{x}{a} = tg\alpha$$
$$r = \frac{a}{\cos\alpha}$$
$$x = a\,tg\alpha$$
$$dx = dl = \frac{a\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$dB = \beta I \frac{\cancel{a}\,d\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot a \cdot \cos\alpha}{a^2 \cdot \cos^2\alpha} = \beta I \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{a}$$
$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \beta I \frac{1}{a} \cos\alpha\, d\alpha = \beta \frac{I}{a}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

1)



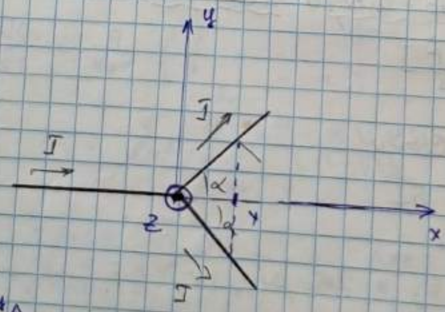
$\alpha_1 = -\alpha_2$
$$B = \frac{2\beta I}{a}\sin\alpha$$

2)

$\alpha_1 = -\alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$
$$B_\infty = \frac{2\beta I}{a}$$

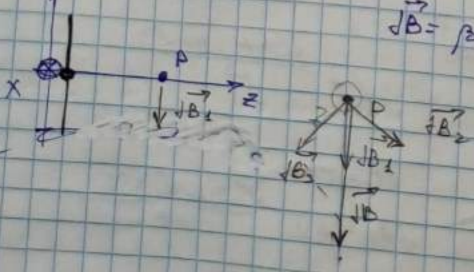
беск. пр.

②



Тоска наблюдения на оси z=?

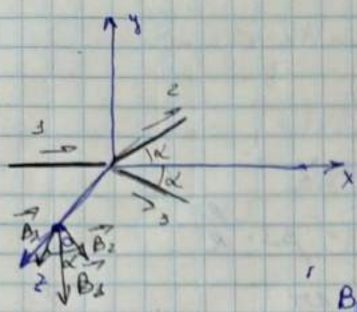
$B_P(z) = ?$



$$d\vec{B} = \beta I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$B = \beta \frac{I}{a}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



$$\vec B_p = \vec B_1 + \vec B_2 + \vec B_3$$

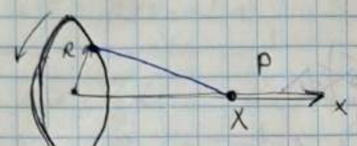
$$B_p = B_1 + 2B_2\cos\alpha$$

$$B_1 = \frac{2\beta I}{z}$$

$$B_2 = B_3 = \frac{\beta I}{z}$$

$$B_p = \frac{2\beta I}{z}(1+\cos\alpha)$$

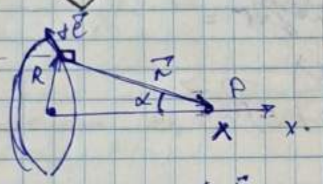
③

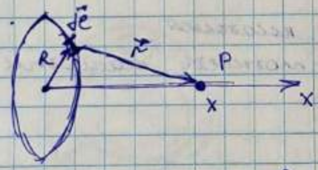


$$B_p = ?$$

$$d\vec B = \beta I \frac{[d\vec l, \vec r\,]}{r^3}$$

$$\cancel{dB = \beta I \frac{dl \cdot r}{r^3}}$$

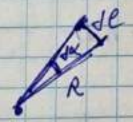


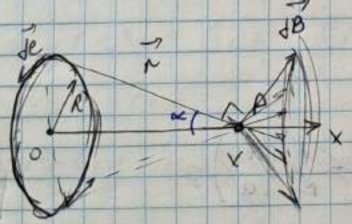


$$B = B_x$$

$$\cancel{dB_x = \beta I} \quad ; \quad d\vec l \perp \vec r$$

$$dB_x = \beta I \cdot \frac{dl \cdot r}{r^3}\sin\alpha = \beta I \cdot \frac{dl}{r^2}\sin\alpha$$

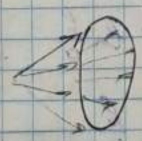




$$\sin\alpha = \frac{R}{r}$$

$$dB_x = \beta I \cdot \frac{dl \cdot R}{r^3}$$

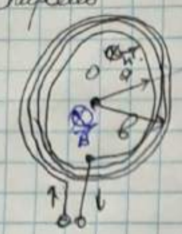
$$r^3 = (R^2+x^2)^{3/2}$$



$$B = \beta \cdot I \cdot \frac{R}{r^3}\oint_{(l)} dl = \beta \cdot I \cdot \frac{2\pi R^2}{r^3} =$$

$$= \beta \cdot I \cdot \frac{2\pi R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

④ Спираль $\quad I, N, a, b$



$B_0 = ?$ (в центре)

$$B_p(x) = \beta \cdot I \cdot \frac{2\pi R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$B_p(0) = \beta \cdot I \cdot \frac{2\pi R^2}{R^3} = \beta I \cdot \frac{2\pi}{R}$$

$$B_0 = \sum_{i=1}^{N} B_i = \sum_{i=1}^{N} \beta I \cdot \frac{2\pi}{r_i}$$

$$B_i = \frac{\beta I \cdot 2\pi}{r_i}$$

$\cancel{N = \rho \cdot r}$

$dN = \rho \cdot dr$

$$\cancel{dB = \beta I \cdot 2\pi \left(-\frac{1}{r^2}\right) dr}$$

$$\cancel{B_0 = N \beta I \cdot 2\pi \int_a^b \left(-\frac{1}{r^2}\right) dr} =$$

$$= N\beta I \cdot 2\pi \cancel{\left(\frac{1}{r}\Big|_a^b\right)} = \cancel{N\beta I}$$

$$B_1 = \beta I \cdot \frac{2\pi r^2}{r^3}$$

Намотка плотная, пусть n – плотность намотки.

$$n = \frac{N}{b-a}$$

кусочек кольца.

$$n = \frac{N}{b-a} \;; \quad dN = n\, dr$$

$$dB = B_1 \cdot dN = \cancel{B_1} \cdot$$

$$= \beta I \cdot \frac{2\pi}{r^2} \cdot \frac{N}{b-a} \cdot dr$$

$$B = \int_a^b \beta I \cdot \frac{2\pi}{r} \cdot \frac{N}{b-a} \cdot dr = \frac{\beta I \cdot 2\pi N}{b-a} \cancel{\left(-\frac{1}{r}\Big|_a^b\right)} =$$

$$= \cancel{\frac{\beta I \cdot 2\pi N}{b-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \quad \frac{\beta I \cdot 2\pi N}{b-a} \ln\frac{b}{a}$$

$$B = \beta I \cdot \frac{2\pi N}{b-a} \ln\frac{b}{a}$$

$\vec{p}_m = f I S \vec{n}$ – магнитный дипольный момент.

$\cancel{S = \pi a^2}$; $\cancel{p = fI\pi a^2}$

$\cancel{S_1 =}$ $\quad p_{m_1} = f I \cdot \pi r^2$

$$dN = n\, dr = \frac{N}{b-a}\, dr$$

$$dp_m = p_1 \cdot dN = f I \pi r^2 \cdot \frac{N}{b-a}\, dr$$

$$p_m = \int_a^b f I \frac{\pi N}{(b-a)} \cdot r^2 dr = f I \frac{\pi N}{3(b-a)} (b^3 - a^3) =$$

$$= f I \cdot \frac{\pi N}{3} (b^2 + ab + a^2)$$

Циркуляция магнитного поля

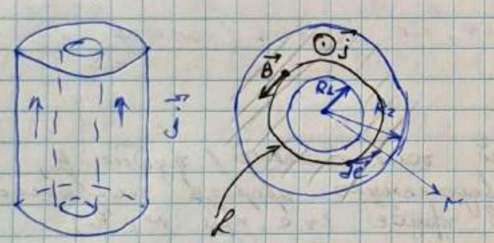
25.10.21.

$$\boxed{\oint_L B_l\, dl = \beta \cdot 4\pi \cdot I_{int}} \qquad \beta = \begin{cases} 1/c, & CGSM \\ \mu_0/4\pi, & SI \end{cases}$$

$I_{int} = \sum_{i=1}^{N} I_i$ для тонких проводников

$I_{int} = \iint_{(S)} j_n\, dS$ для распределённых токов

① Ток течёт по бесконечно длинной трубе кругового сечения с радиусами R_1, R_2. Плотность тока $\vec{j}$ постоянна по сечению. Найти $B(r)$



Из симметрии: линии $\vec{B}$ — окружности, концентричные стенкам. Контур L совпадает с одной из линий $\vec{B}$.

$\Rightarrow B_l = const = B$ на L

$$\oint_{(L)} B_l\, dl = B \oint_{(L)} dl = B \cdot 2\pi r \qquad (\forall r)$$

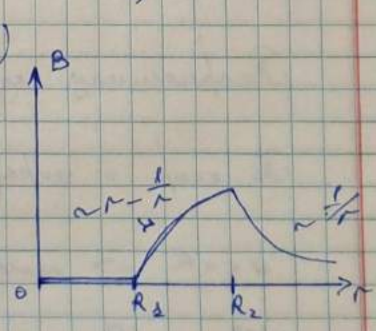
1) $0 \le r < R_1$: $I_{int} = 0$

2) $R_1 \le r < R_2$: $I_{int} = \iint_{(S)} j_n dS = j \cdot \int_{R_1}^{r} 2\pi r' dr' = j \pi (r^2 - R_1^2)$

(т.к. $j_n = j$, $dS = 2\pi r\, dr$ — тонкие колечки.)

3) $r \ge R_2$: $I_{int} = \int_{R_1}^{R_2} j \cdot 2\pi r' dr' = j\pi (R_2^2 - R_1^2)$

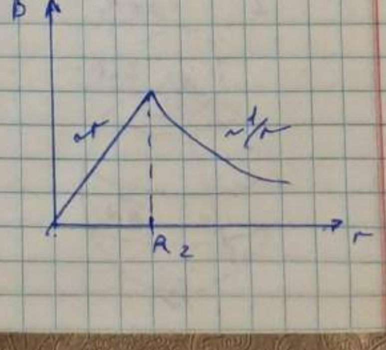
$$B(r) = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ \beta \cdot 2\pi j \dfrac{r^2 - R_1^2}{r}, & R_1 \le r < R_2 \\ \beta \cdot 2\pi j \dfrac{R_2^2 - R_1^2}{r} & \end{cases}$$



Частные случаи:

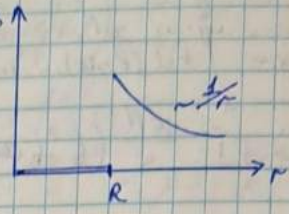
а) $R_1 = 0$

$$B(r) = \begin{cases} \beta \cdot 2\pi j r, & r < R_2 \\ \beta \cdot 2\pi j\, R_2^2 / r, & r \ge R_2 \end{cases}$$

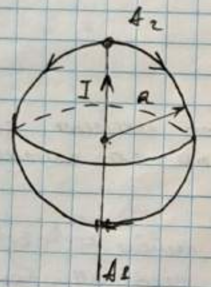


б) $R_1 \to R_2 \equiv R$, при этом $j\pi(R_2^2 - R_1^2) \to I$ (полный ток по стенке трубы)

$$B(r) = \begin{cases} 0, & 0 \le r < R \\ \dfrac{2\beta I}{r}, & r \ge R \end{cases}$$



② Внутри однородной проводящей сферы большого радиуса R от точки A_1 к точке A_2 по диаметру большого круга проходит проводник с током I. В точке A_2 ток растекается по сфере и возвращается к A_1.
Найти индукцию магнитного поля внутри и вне сферы.

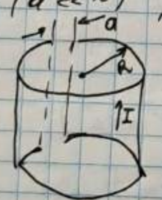


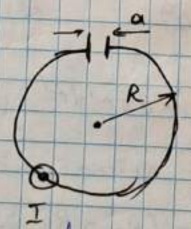
Линии $\vec{B}$ всегда замкнуты. Распределение тока симметричное => $\vec{B}$ симметрично. Из симметрии линии $\vec{B}$ - окружности.

1) $r < R$: $B(r) = \dfrac{2\beta I}{r}$ как для бесконечного длинного провода.

2) $r > R$: $B = 0$, т.к. $I_{int} = 0$ (контур вне всей сферы)

③ Ток I течёт вдоль длинной тонкостенной трубы R, имеющей по всей длине продольную прорезь шириной a ($a \ll R$). Найти $B(r)$ в трубе (т.е. при $r < R$).





Заменим прорезь проводящим куском с токами $+I$ и $-I$ => получим целую трубу с током I и узкую полосу с током $-I$.

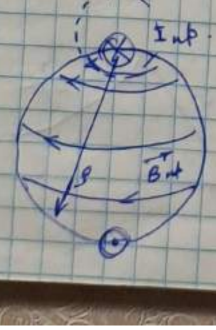
По принципу суперпозиции: $\vec{B} = \vec{B}_{тр} + \vec{B}_{пр}$
от трубы, от полосы.

По теор. о циркуляции:

$$\vec{B}_{тр} = 0, \text{ при } r < R$$

$a \ll R$ => полоса - тонкий проводник с током $I_{пр}$:

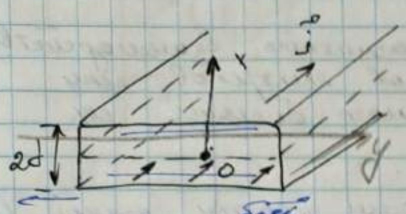
$$\frac{I_{пр.}}{I} = \frac{a}{2\pi R} \Rightarrow I_{пр.} = I\,\frac{a}{2\pi R}$$



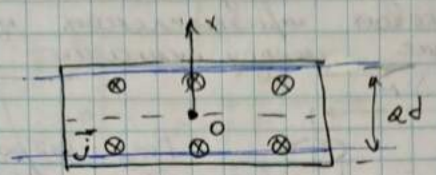
$$B = B_{пр} = \frac{2\beta I_{пр}}{\rho} = \frac{\beta I a}{\pi R \rho}$$

ось ρ начинается на прорези!

(4) Однородный ток плотности $\vec{j}$ течёт внутри неограниченной пластины толщиной $2d$ параллельно её поверхности.
Найти индукцию магнитного поля $B(x)$, где x – расстояние, отсчитываемое от средней плоскости пластины.

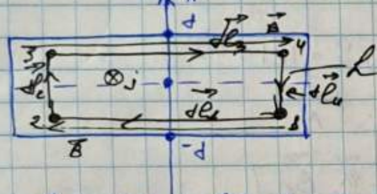


бок.



$\vec{j}$ – вектор плотности тока (ток на ед. площади)

Из симметрии линии $\vec{B}$ направлены вдоль граничной грани.



Контур L – прямоугольный, $\vec{dl}_{1,3} \parallel \vec{B}$
$\vec{dl}_{2,4} \perp \vec{B}$, ширина контура $2|x|$, длина l.

$$\oint\limits_{(L)} B_l\, dl = \int\limits_{(12)} B_l\, dl_1 + \int\limits_{(23)} \underbrace{B_l}_{=0} dl_2 + \int\limits_{(3,4)} B_l\, dl_3 + \int\limits_{(41)} \underbrace{B_l}_{=0} dl_4 = 2Bl \;(\forall x)$$

1) $|x| < d$ $\qquad I_{int} = \iint\limits_{(S)} j_n\, dS = jS = j \cdot l \cdot 2|x|$

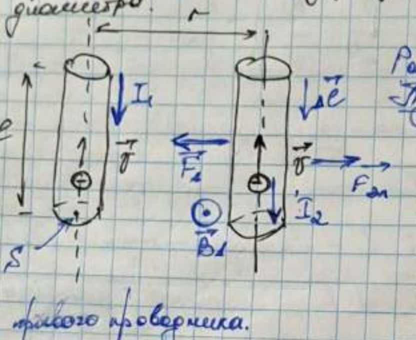
2) $|x| \geq d$ $\qquad I_{int} = \iint\limits_{S} j_n\, dS = jl \cdot 2d$

$$B(x) = \begin{cases} \beta \cdot 4\pi j|x|, & 0 < |x| < d \\ \beta \cdot 4\pi jd, & |x| \geq d \end{cases}$$

1.11.21. Закон Ампера.

$\vec{F}_A = f I [\Delta \vec{l}, \vec{B}]$ Если B неоднородно, то Δl — тот кусок, где B постоянно.

① Сравнить силы электрического и магнитного взаимодействия двух одинаковых параллельных пучков электронов, если расстояние между пучками много больше их диаметра.



Отн. правого проводника.

Рассматриваем участки длиной l. Пусть S - площадь сечения, n - концентрация в пучке, $l >> r >> d$ (d - диаметр пучка)

1) $F_A = ?$

$I_1 = I_2 = jS = |e| n v S$

$B_1 = \beta \cdot \frac{2 I_1}{r}$

$\vec{F}_л = f e [\vec{v}, \vec{B}_1]$

В куске длиной l много электронов $N = nSl$

$\Rightarrow F_A = F_л \cdot N = f|e| \cdot v B_1 N = f|e| v \cdot \beta \cdot \frac{2I_1}{r} \cdot nSl = f \cdot \beta \cdot \frac{2e^2 n^2 v^2 S^2 l}{r}$

2) Нужно найти напряжённость для нити (провода) — через т. О.Г.

$F_{эл} = ?$ Заряд на единицу длины: $\tau = \frac{\Delta q}{l} = \frac{\tilde{e} N}{l} = \tilde{e} n S$

$E_1 = k \cdot \frac{2|\tau|}{r} = k \cdot \frac{2|\tilde{e}| n S}{r}$

$\vec{F}_{эл} = \tilde{e} \cdot \vec{E}_1 \cdot N$ $\Rightarrow F_{эл} = k \cdot \frac{2\tilde{e}^2 n^2 S^2 l}{r}$

3) $\frac{F_A}{F_{эл}} = \frac{f \beta}{k} \cdot v^2$

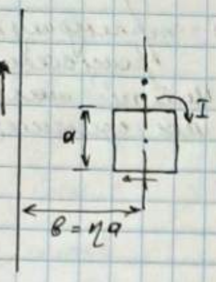
CGS: $k = 1$, $f = \beta = \frac{1}{c}$ $\Rightarrow \frac{F_A}{F_{эл}} = \frac{v^2}{c^2}$

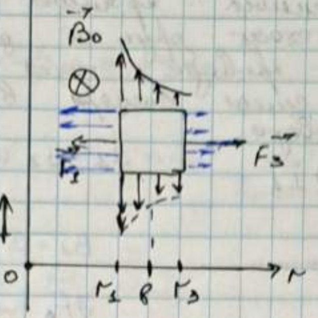
SI: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\beta = \frac{\mu_0}{4\pi}$, $f = 1$ $\Rightarrow \frac{F_A}{F_{эл}} = \varepsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}$

$(\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2)$

② Квадратная рамка с током I лежит в одной пл-ти с длинным прямым проводом, по которому течёт ток I_0. Сторона рамки a. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстояние ηa ($\eta > 1$). Найти силу Ампера, действующую на рамку.

Что изменится, если ток в рамке течёт в другую сторону.





Из симметрии: $\vec F_{A\Sigma} = \vec F_1 + \vec F_3$

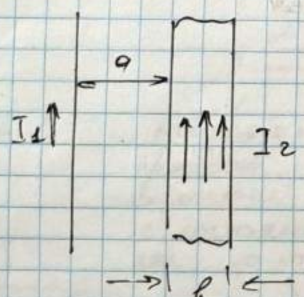
$$\vec F_1 = f I [\vec l_1, \vec B_0(r_1)], \quad \vec F_3 = f I [\vec l_3, \vec B_0(r_3)]$$

$$l_1 = l_3 = a$$

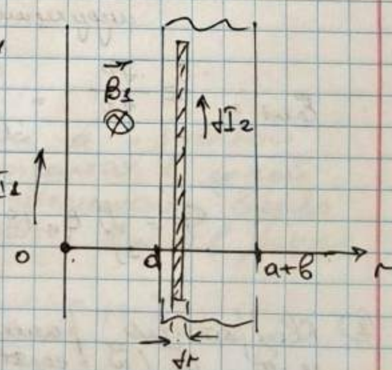
$$B_0 = \frac{2\beta I_0}{r}; \quad r_{1,3} = b \mp \frac{a}{2} = a\left(\eta \mp \frac{1}{2}\right)$$

$$r: \underbrace{F_{Ar}}_{\text{проекция рез. силы}} = F_3 - F_1 = 2f\beta I_0 I a \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1}\right) = \boxed{-8f\beta \frac{I_0 I}{4\eta^2 - 1}}$$

③ Два длинных проводника лежат в одной пл-ти и параллельны друг другу. Расстояние между проводниками a, ширина правого проводника b. Токи в проводниках I_1, I_2, найти силу магнитного взаим-я проводников в расчёте на единицу длины.



Разбиваем на тонкие проводники



$$d\vec F_A(\vec r) = f\, dI_2 [\Delta \vec l_2, \vec B_1(\vec r)]$$

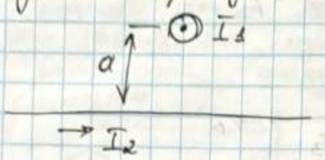
$$\left.\begin{aligned} dI_2 &= \frac{I_2}{b}\, dr \\ B_1(r) &= \frac{2\beta I_1}{r} \end{aligned}\right| \Rightarrow dF_A = 2f\beta \frac{I_1 I_2 \Delta l}{b r}\, dr$$

$$F_A = \int_a^{a+b} 2f\beta \frac{I_1 I_2 \Delta l}{b r}\, dr = 2f\beta \frac{I_1 I_2}{b} \Delta l \ln\frac{a+b}{a}$$

$$F_{A(1)} = \frac{F_A}{\Delta l} = 2f\beta \frac{I_1 I_2}{b} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$ — на ед. длины.

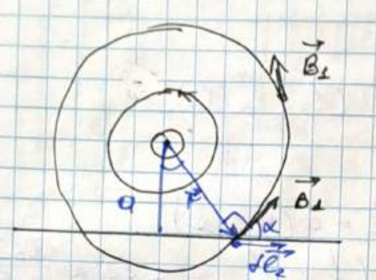
④ Два длинных прямых взаимно перпендикулярных провода отстоят друг от друга на расстояние a. В каждом проводе течёт ток I. Найти максимальное значение силы Ампера в расчёте на единицу длины провода.

$I_1 = I_2 \equiv I$



$B_1 = \beta \cdot \frac{2I_1}{r}$

$d\vec{F}_A = f I_2 [d\vec{l}_2, \vec{B}_1]$



$dF_A = f I_2 dl_2 B_1 \sin\alpha =$

$= 2f\beta \frac{I^2}{r} dl_2 \sin\alpha =$

$= 2f\beta \frac{I^2}{r} dl_2 \sin\alpha =$

$= f\beta \frac{I^2 dl_2}{a} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = f\beta \frac{I^2 dl_2}{a} \sin 2\alpha$

$r = \frac{a}{\cos\alpha}$

$F_{A(1)} = \frac{dF_A}{dl_2} = f\beta \frac{I^2}{a} \sin 2\alpha$ – max при $\sin 2\alpha = 1$

$$\boxed{F_{A\,max} = f\beta \frac{I^2}{a}}$$

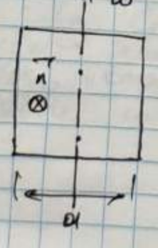
Закон электромагнитной индукции (индукция в движущихся проводниках).

$$\mathcal{E}_{ind} = -f\frac{d\Phi}{dt} = \begin{cases} -\frac{d\Phi}{dt} & (SI) \\ -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} & (CGSM) \end{cases}$$

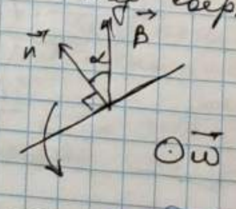
$$\Phi = \iint\limits_{(S)} B_n dS.$$

① Квадратная рамка со стороной a вращается с угловой ск-тью $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}$ = const) в однородном магнитном поле $\vec{B}$ = const вокруг оси симметрии, $\vec{\omega} \perp \vec{B}$. В начальный момент нормаль к плоскости рамки $\vec{n} \parallel \vec{B}$. Сопротивление рамки R. Найти I_{ind} и момент сил, вращающих рамку.

Вид спереди, $t=0$



Вид сверху, $t>0$



ω = const $\Rightarrow$ $\alpha = \omega t$

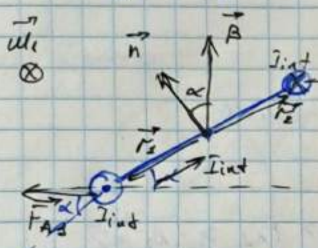
$$B_n = B\cos\alpha = B\cos(\omega t)$$

1) $\Phi = \iint\limits_{(S)} B_n\,dS = \iint\limits_{(S)} B\cos(\omega t)\,dS = B\cdot\cos(\omega t)\cdot a^2$

$$\mathcal{E}_{ind} = -f\frac{d\Phi}{dt} = +fBa^2\omega\sin\omega t \Rightarrow \boxed{I_{ind} = \frac{fBa^2\omega}{R}\cdot|\sin\omega t|}$$

2) 1-й способ

Вид сверху, $t > 0$ $\left(t \in [0; \frac{\pi}{\omega}]\right)$



$$\vec{F}_A = f\,I_{ind}[\vec{a}, \vec{B}]$$

($\vec{a}$ – вдоль вертикальной стороны)

$$F_A = f^2\frac{B^2a^3\omega}{R}|\sin\omega t|$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{r}_1, \vec{F}_{A1}] + [\vec{r}_2, \vec{F}_{A2}] = 2[\vec{r}_1, \vec{F}_{A1}]$$

$$M = 2\cdot\frac{a}{2}\cdot F_{A1}\cdot|\sin\alpha| = a\cdot F_{A1}\cdot|\sin\omega t|$$

$$|\vec{r}_1| = \frac{a}{2} \Rightarrow M = f^2\frac{B^2a^4\omega}{R}\sin^2\omega t$$

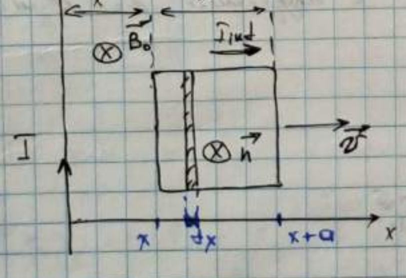
2 способ:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$$

$$\vec{p}_m = f\,I_{ind}\,S\,\vec{n} = f^2\frac{Ba^4\omega}{R}\sin\omega t\,\vec{n}$$

$$\boxed{M = f^2\frac{B^2a^4\omega}{R}\sin^2\omega t}$$

(2) Ир. 3.309. Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости. Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью v. Найти $\mathcal{E}_{ind}$ в рамке как ф-ю расст-я x.



1 способ: Пусть $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}_0$

$B_0 = 2\beta\cdot\frac{I_0}{x}$ (см. теорему о циркуляции)

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} B_n\,dS = 2\beta I_0\int\limits_x^{x+a}\frac{a\,dx'}{x'} =$$

$$= 2\beta I_0\,a\ln\frac{x+a}{x}, \quad x = vt + x_0$$

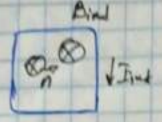
от неё [illegible]

$$\mathcal{E}_{ind} = -f\frac{d\Phi}{dt} = -f\left(2\beta I_0 a\ln\left(1 + \frac{a}{vt + x_0}\right)\right)'_t =$$

$$= -2f\beta I_0 a\frac{x}{x+a}\frac{d}{dt}\left(\frac{x+a}{x}\right) = +2f\beta I_0 a^2\frac{v}{(x_0 + a + vt)(x_0 + vt)} > 0$$

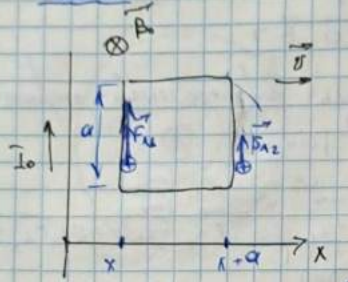
$\Rightarrow I_{ind} > 0$

– т.е. просто угадали напр. $\vec{n}$ (от нас), ток течёт по час. стрелке:



$\vec{B}_{ind} \uparrow\uparrow \vec{B}_0$

2 способ:



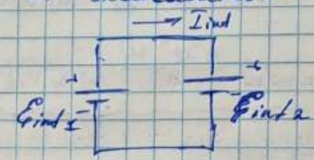
$F_{л1} > F_{л2}$

$\vec{F}_{л1}, \vec{F}_{л2}$ – сторонние силы.

$\vec{F}_л = fq[\vec{v}, \vec{B}_0]$

$B_0(x) > B_0(x+a) \Rightarrow F_{л1} > F_{л2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ эквивалентная схема:



$\mathcal{E}_{ind1} > \mathcal{E}_{ind2}$

$\mathcal{E}_{ind} = \frac{A_{стор}}{q}$

Через работу

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{ind} = \frac{fqvB_0(x)\cdot a - fqvB_0(x+a)\cdot a}{q} = 2f\beta v I_0 a\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right) =$$

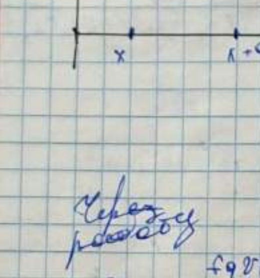
$$= 2f\beta v I_0 \frac{a^2}{(vt+x_0)(vt+x_0+a)}$$

③ Ир. 3.301.

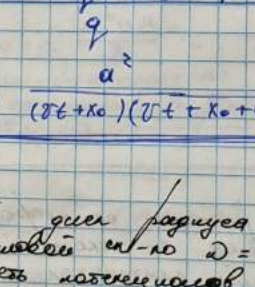
Металлический диск радиуса $a = 25$ см вращают с постоянной угловой ск-ю $\omega = 130$ рад/с вокруг его оси. Найти разность потенциалов между центром и ободом диска, если:

а) внешнего $\vec{B}$ нет.

б) имеется перпенд. к диску внешнее однородное магнитное поле с индукцией $B = 5{,}0$ мТл



Вид сверху:



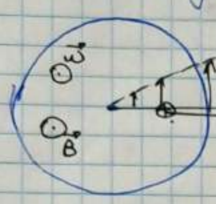
1) $\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{стор} = \vec{F}_{in}^{цб} = m\omega^2\vec{r}$

$$U = \frac{A_{in}}{q} = \frac{1}{q}\int_0^a m\omega^2 r\,dr = \frac{m\omega^2 a^2}{2q}$$

2) $\vec{B} \neq 0$

1 способ

Вид сверху

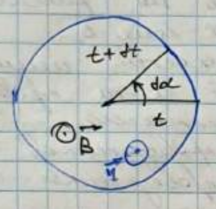


$\vec{F}_{стор} = \vec{F}_Л = fq[\vec{v},\vec{B}]$, $\vec{v} = [\vec{\omega},\vec{r}]$

$F_Л = fqvB = fq\omega r B$

$U = \frac{A_Л}{q} = \frac{1}{q}\int_0^a fq\omega r B\,dr = f\omega B\frac{a^2}{2}$

2 способ:



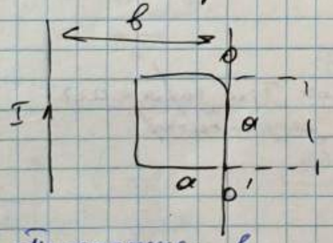
Отрезок вдоль радиуса за время dt проходит угол dα. Поток через сектор dα:

$d\Phi = B_n dS = B\cdot\frac{1}{2}a^2 d\alpha$

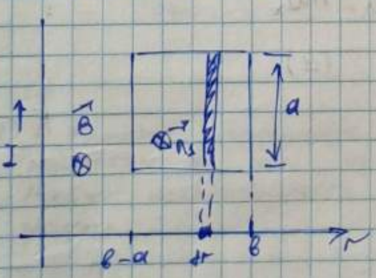
$U = \left|-f\frac{d\Phi}{dt}\right| = fB\frac{a^2}{2}\frac{d\alpha}{dt} = fB\omega\frac{a^2}{2}$

④ Ир. 3.309.

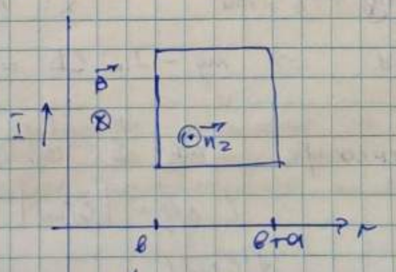
Квадратная проволочная рамка со стороной a и прямой проводник с постоянным током I лежат в одной плоскости. Сопротивление рамки R. Её повернули на 180° вокруг оси OO', отстоящей от проводника с током на расстояние b. Найти кол-во электричества (q), протекшее в рамке.



Положение 1



Положение 2



$q = \int_0^{\Delta t} I_{инд}\,dt = \int_0^{\Delta t}\left|\frac{\mathcal{E}_{инд}}{R}\right| dt = \frac{1}{R}\int_0^{\Delta t} f\cdot\left|-\frac{d\Phi}{dt}\right| dt = \frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} f\,|d\Phi| =$

$= f\,\frac{|\Phi_2 - \Phi_1|}{R}$

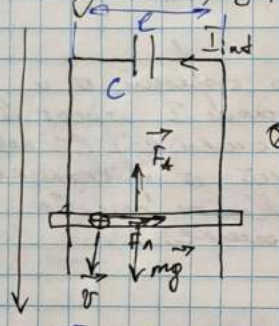
$B(r) = 2\beta\frac{I}{r}$

$$\Phi_1 = \iint\limits_{(S)} B_1\, dS = 2\beta I \int\limits_{b-a}^{b} a\, dr = 2\beta I a \ln \frac{b}{b-a}$$

$$\Phi_2 = -\iint\limits_{(S)} B_2\, dS = -2\beta I \int\limits_{b}^{b+a} a\, dr = -2\beta I a \ln \frac{b+a}{b}$$

$$\boxed{q = f \cdot \frac{|\Phi_2 - \Phi_1|}{R} = f\beta \cdot 2 \frac{I}{R} \ln \frac{b+a}{b-a}}$$

(5) Конденсатор C присоединён к верхним концам параллельных медных шин, расположенных вертикально на расстоянии l друг от друга. Однородное магнитное поле $\vec{B}$ горизонтально и перпендикулярно плоскости шин. Вдоль шин падает без начальной ск-ти проводник массой m без потери контакта с шинами. Сопротивление и индуктивность всех проводников пренебрежимо малы. Найти ускорение проводника и силу тока, заряжающего конденсатор.



$\otimes \vec{B}$

Пусть $\vec{B}$ = от нас.

Вопрос: что изменится при противоположном направлении $\vec{B}$?

1) $\vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_Л = fq[\vec{v}, \vec{B}] \equiv \vec{F}_{стор} \Rightarrow I_{ind}$ заряжает конденсатор.

$$I_{ind} \rightarrow \vec{F}_A = f I_{ind} [\vec{l}, \vec{B}]$$

II зН:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = m\vec{a} \qquad x:\ mg - F_A = ma_x$$

$$SI:\ f = 1 \Rightarrow mg - I_{ind} lB = ma_x \quad (1)$$

2) На конденсаторе $\begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{q}{C} = \dfrac{1}{C}\int I_{ind}\, dt \\ \Delta\varphi = |\mathcal{E}_{ind}| \end{cases}$

$$\Rightarrow I_{ind} = C \cdot \frac{d|\mathcal{E}_{ind}|}{dt}$$

$$\Phi = Blx \Rightarrow |\mathcal{E}_{ind}| = \frac{d\Phi}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} =$$

$$I_{ind} = BlC \frac{d^2x}{dt^2} \equiv BlC \cdot a_x \quad (2)$$

Из (1), (2)

$$mg - B^2 \ell^2 \cdot C\, a_x = m a_x$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{mg}{m + B^2 \ell^2 C}}$$

$$I_{ind} = \frac{mg B \ell C}{m + B^2 \ell^2 C}$$

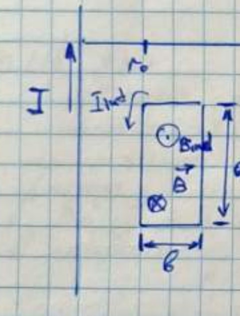
3-ий допуск

8.11.22.

Закон электромагнитной индукции
(вихревое электрическое поле)

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint\limits_{(\ell)} E_\ell d\ell = -f \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{(S)} B_n dS$$

① Длинный прямой проводник с током $I(t) = \alpha t$ (где $\alpha = const > 0$) и проводящая прямоугольная рамка лежат в одной пл-ти. Расстояние от провода до ближней стороны рамки r_0, размеры рамки $a \times b$. Найти $\mathcal{E}_{ind}$ в рамке и напр. инд. тока

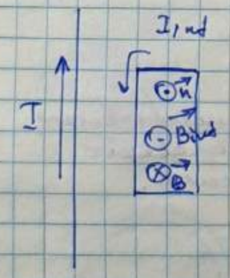


$$B = \frac{2\beta I}{r}$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha > 0 \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} > 0$$

$$\Rightarrow \text{необх } \vec{B}_{ind} \uparrow\downarrow \vec{B}$$

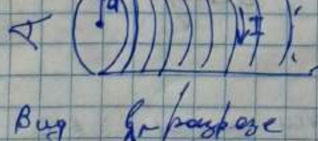
$$\Phi_B = \iint\limits_{(S)} B_n dS = -\int\limits_{r_0}^{r_0+b} 2\beta I a \frac{dr}{r} = -2\beta I a \ln \frac{r_0+b}{r_0}$$

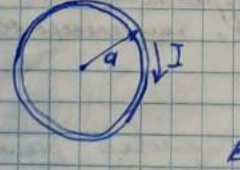


$$\boxed{\mathcal{E}_{ind} = -f \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{(S)} B_n dS = +2f\beta \cdot \alpha a \ln \frac{r_0+b}{r_0}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} I = \alpha\right)$$

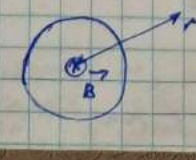
② В длинном соленоиде с радиусом сечения a и плотностью намотки n ток изменяется по закону $I = \alpha t$ (где $\alpha = const > 0$). Найти напряженность вихревого электрического поля, построить график.





Вид в разрезе

Вид с торца



1) $B(r) = \begin{cases} \beta \cdot 4\pi n I, & 0 \le r < a \\ 0 : & r \ge a \end{cases}$ $\qquad I = I(t) \Rightarrow B = B(t)$

2) $\oint\limits_{(L)} E_e dl = -f \frac{d}{dt} \iint\limits_{(S)} B_n dS$

Контур (L) выбираем из соображений симметрии!

Линии $\vec{E}$ замкнуты (т.к. вихревое поле) $\Rightarrow$ это окружности $\Rightarrow (L)$ совпадает с одной из линий $\vec{E}$.

Пусть обход (L) – по час. стрелке $\to \vec{n}$ от нас

$\to B_n = B$

$\frac{dB}{dt} = \begin{cases} \beta \cdot 4\pi n \alpha, & 0 \le r < a \\ 0, & r \ge a \end{cases}$

$\oint\limits_{(L)} E_e dl = E_e \cdot 2\pi r \quad (\forall r)$

а) $0 \le r < a$ (L_1)

$E_e \cdot 2\pi r = -f \cdot \underbrace{\beta \cdot 4\pi n \alpha}_{\frac{\partial B}{\partial t}} \cdot \underbrace{\pi r^2}_{S}$

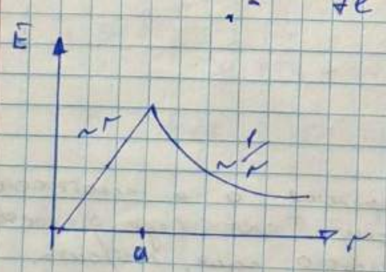
$\underline{E_e = -f\beta \cdot 2\pi n \alpha r}$

б) $r \ge a$ (L_2)

$E_e \cdot 2\pi r = -f\beta \cdot 4\pi n \alpha \cdot \pi a^2$

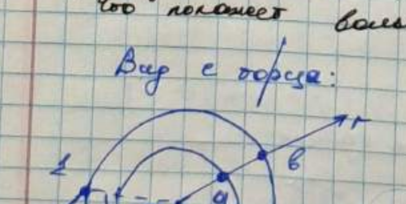
$\underbrace{E_e = -f\beta \cdot 2\pi n \alpha \frac{a^2}{r}}$

«–» $d\vec{l}$ противонапр. $\Rightarrow d\vec{l}$ направлен по часовой стрелке.



③ Проводящий виток расположен соосно с соленоидом, радиус витка $b > a$, сопротивления единицы длины R_1. Что покажет вольтметр, подключенный к витку?

Вид с торца:



γ – угловой размер дуги между 1:2

Из прошлой задачи: $\mathcal{E}_{ind} = \left|\oint_{(L)} E\,dl\right| = \left|f\frac{d}{dt}\iint_{(S)} B_n\,dS\right| =$

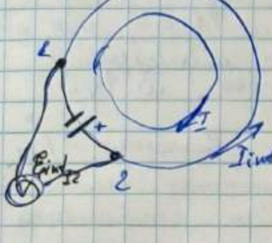
1) В витке $I_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R}$

— во всем витке.

$\mathcal{E}_{ind} = f\beta\cdot 4\pi n\alpha\pi a^2$

$R = R_1\cdot 2\pi b$

$\Rightarrow I_{ind} = f\beta\,\frac{2\pi n\alpha a^2}{R_1 b}$



Участок 1-2 неоднородный $\to$ з-н Ома для неоднородного участка.

2) На участке 12:

$I_{ind}\cdot R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{ind\,12}$

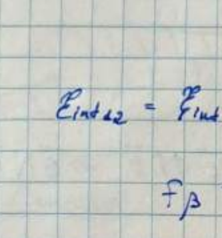
$R_{12} = R_1\, l_{12} = R_1 b\gamma$

$\mathcal{E}_{ind\,12} = \mathcal{E}_{ind}\cdot\frac{l_{12}}{2\pi b} = f\beta\cdot \cancel{4}^{2}\pi n\alpha\pi a^2\cdot\frac{b\gamma}{\cancel{2\pi b}}$

$f\beta\,\frac{2\pi n\alpha a^2}{\cancel{R_1 b}}\cdot R_1 b\gamma = U_{12} + f\beta\cdot 2\pi n\alpha a^2\gamma \;\to\; \underline{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 0}$

④ Ир. 3.314.

Плоская спираль с очень большим числом витков N, плотно прилегающих друг к другу, находится в однородном магнитном поле, перпенд. к плоскости спирали. Наружный радиус витков спирали равен a. Индукция $B = B_0\sin\omega t$, $B_0, \omega = const$. Найти амплитудное значение ЭДС индукции в спирали.

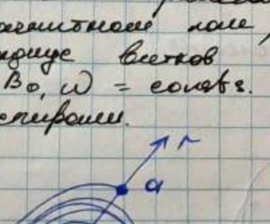


$N >> 1$, $a < \infty$ $\Rightarrow$ каждый виток - почти окружность (упростит решение).

На участке $r\in[0, a]$ - N витков

На участке dr — dN витков

$dN = \frac{N}{a}\,dr$



В витке с радиусом r (шириной dr)

$\mathcal{E}_{ind(1)} = -f\frac{d\Phi_{(1)}}{dt} = -f\frac{dB_n}{dt}\pi r^2$

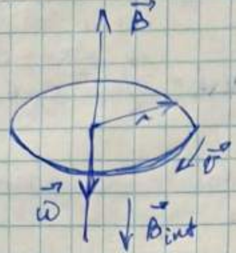
Во всей спирали:

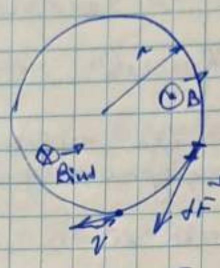
$\mathcal{E}_{ind} = \int_{(N)}\mathcal{E}_{ind(1)}\,dN = -f\int_0^a\frac{dB_n}{dt}\pi r^2\frac{N}{a}\,dr = -fB_{0n}\,\omega\cos\omega t\,\pi N\frac{a^2}{3}$

$\mathcal{E}_{ind_0} = f|B_{0n}|\,\omega\,\frac{\pi N a^2}{3}$

⑤ Ир. 3.19.

Непроводящее тонкое кольцо массы m, имеющее заряд q, может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоилось и магнитное поле отсутствовало. Затем включили однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости кольца, ...



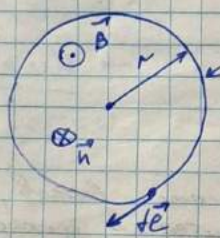


По усл. $\vec B$ нарастает $\Rightarrow$
$\Rightarrow \vec B_{ind} \uparrow\downarrow \vec B$ для этого заряды должны двигаться, $\vec\omega \uparrow\downarrow \vec B$

Причина движения – $\vec F_{эл}$

На малый заряд dq: $d\vec F_{эл} = dq\cdot\vec E$

1) $\oint\limits_{(L)} E_e\,dl = -f\dfrac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{(S)} B_n\,dS$



L совпадает с кольцом, $d\vec l \uparrow\uparrow \vec v \Rightarrow \vec B \uparrow\downarrow \vec n$

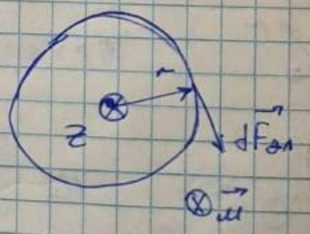
$$E\cdot 2\pi r = +f\frac{dB}{dt}\pi r^2$$

$$E = f\cdot\frac{dB}{dt}\cdot\frac{r}{2}$$

2) Для всего кольца (q распределён равномерно):

$$F_{эл} = qE = fq\frac{dB}{dt}\cdot\frac{r}{2}$$

3) $J\dfrac{d\vec\omega}{dt} = \vec M_F = [\vec r, \vec F_{эл}]$



z: $J\dfrac{d\omega}{dt} = rF_{эл} = fq\dfrac{dB}{dt}\dfrac{r^2}{2}$

$J = mr^2$

$$\int\limits_0^{\omega(t)} d\omega = fq\frac{1}{2m}\int\limits_0^{B(t)} dB \Rightarrow \omega = f\frac{q}{2m}B$$

$$\vec\omega = -f\frac{q\vec B}{2m}$$

Самоиндукция. Магнитная энергия.

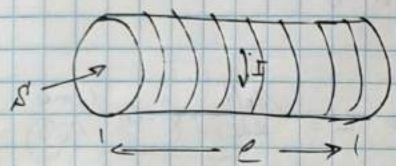
10.11.21

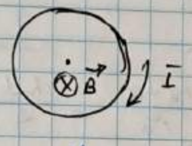
$L = \frac{\Phi_B}{fI}$ $\left(\frac{c\Phi_B}{I}, \text{CGSM}\right)$

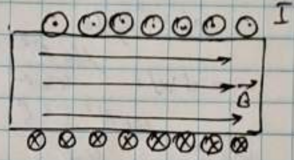
$W_M = f^2\frac{LI^2}{2}$ $\left(\frac{LI^2}{2c^2}, \text{CGSM}\right)$ ~ для единичного контура (!)

$w_M = \frac{f}{\beta}\cdot\frac{B^2}{8\pi}$ → $\frac{B^2}{2\mu_0}$ SI; → $\frac{B^2}{8\pi}$, CGSM

① Длина соленоида ℓ, площадь кругового сечения S ($\ell >> \sqrt{S}$), однослойная намотка содержит N витков. Найти индуктивность соленоида.







1 способ: $B = 4\pi\beta nI = 4\pi\beta\frac{N}{\ell}I$

$\Phi_\Sigma = N\Phi_1 = NBS = 4\pi\beta\frac{N^2}{\ell}SI$

поток через 1 виток!

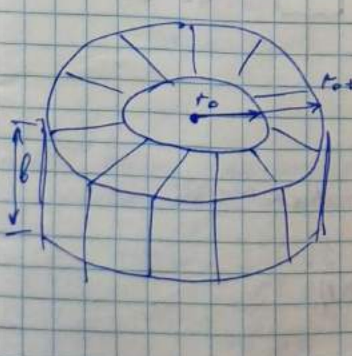
$$\boxed{L = \frac{\Phi_\Sigma}{fI} = 4\pi\frac{\beta}{f}\cdot\frac{N^2S}{\ell}}$$

2 способ: $w_M = \frac{f}{\beta}\cdot\frac{B^2}{8\pi} = \frac{f}{\beta}\cdot\frac{16\pi^2\beta^2N^2I^2}{\ell^2\cdot 8\pi} = \frac{2f\pi\beta N^2I^2}{\ell^2}$

$W_M = \int_{(V)} w_M\,dV = \int_0^\ell w_M S\,dx = \frac{f\beta\cdot 2\pi N^2I^2S}{\ell}$

$$\boxed{L = \frac{2W}{f^2I^2} = 4\pi\frac{\beta}{f}\cdot\frac{N^2S}{\ell}}$$

② Найти индуктивность тороида прямоугольного сечения. Высота тороида b, внутренний радиус r_0, внешний r_0+a, число витков в обмотке N.



Вид сверху:

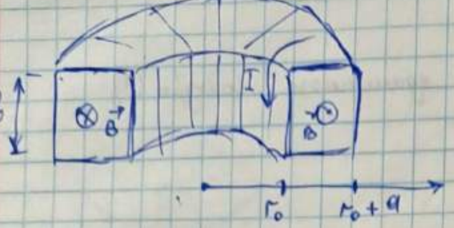
$\oint_{(L)} B_\ell\,d\ell = 4\pi\beta\cdot NI$

$B\cdot 2\pi r = 4\pi\beta NI$, $r_0 < r < r_0+a$

$B = \frac{2\beta NI}{r} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

$$\Phi_1 = \int_{r_0}^{r_0+a} B\cdot b\,dr = 2\beta N I b \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{dr}{r} =$$

$$= 2\beta N I \ln\frac{r_0+a}{r_0}\cdot b$$



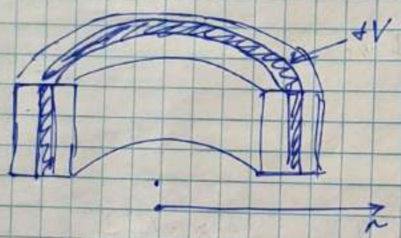
$$\Phi_\Sigma = N\Phi_1 = 2\beta N^2 I\cdot b\cdot \ln\frac{r_0+a}{r_0} = f L_c$$

$$L = \frac{2\beta}{f} N^2 b \ln\frac{r_0+a}{r_0} = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 b\cdot \ln\frac{r_0+a}{r_0}$$

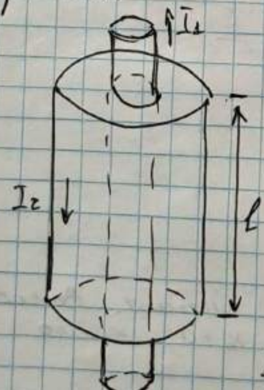
2 способ:
$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}, \quad dV = 2\pi r\,dr\cdot b$$

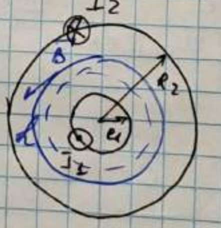
$$\Rightarrow dW = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi r}\, b\,dr$$

$$W = \frac{\mu_0 N^2 I^2 b}{4\pi}\cdot \ln\frac{r_0+a}{r_0} = \frac{L I^2}{2} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi}\cdot b\cdot \ln\frac{r_0+a}{r_0}$$

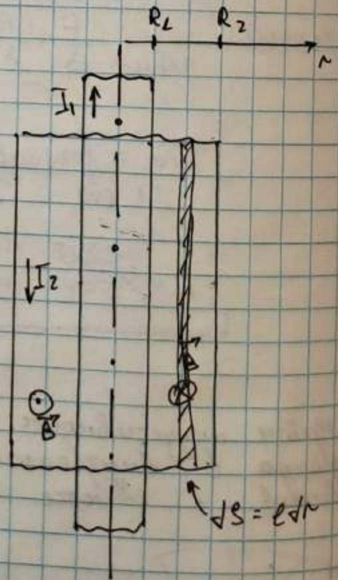


Ир. 3.326





$I_1 = I_2 \equiv I$



Ток течёт по поверхности цилиндров.

Поле при $r < R_1$, $r > R_2$ $B = 0$

1 способ: $\oint_{(L)} B_l\,dl = \beta\cdot 4\pi I_{int} \Rightarrow B = \frac{2\beta I}{r}, \quad R_1 \le r < R_2$

$$\Phi = \iint_{(S)} B_n\,dS = \int_{R_1}^{R_2} 2\beta I l \frac{dr}{r} = 2\beta I l\cdot \ln\eta$$

$$L_1 = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{f I l} = 2\frac{\beta}{f}\ln\eta,$$

Выбор площади только с одной стороны ~ ? полученного тока! не факт, что правильно. Метод лучше через энергию.

2 способ

$$w_m = \frac{f}{\beta}\cdot\frac{B^2}{8\pi} = \frac{f\beta I^2}{2\pi r^2}$$

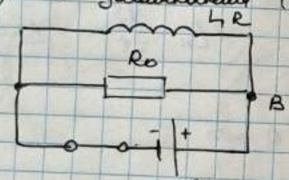
$$W_m = \iiint_{(V)} w_m\, dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{f\beta I^2}{2\pi r^2}\cdot 2\pi r\, dr\cdot l = f\beta I^2 l\cdot \ln\eta$$

$$L = \frac{2W}{f^2 I^2} = \frac{2f\beta I^2 l\cdot\ln\eta}{f^2 I^2} = 2\frac{\beta}{f}\cdot l\ln\eta$$

$$L_1 = \frac{L}{l} = 2\frac{\beta}{f}\ln\eta$$

(4) Ир. 3.346.

1) До замыкания $(t \le 0)$ В SI



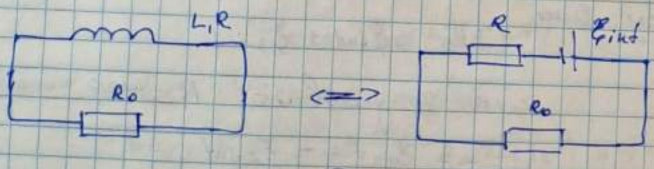
$\mathcal{E}\ (r=0)$

$r = 0 \Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}$

$\varphi_A - \varphi_B = I_L(0)\cdot R \Rightarrow I_L(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$

Какой ток течёт через катушку после размыкания ключа.

2) После размыкания $(t > 0)$



$I(R+R_0) = \mathcal{E}_{ind}$

$\mathcal{E}_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$

$$I(R+R_0) = -L\frac{dI}{dt}$$

$$(R+R_0)\,dt = -L\frac{dI}{I} \rightarrow \int_{I_L(0)}^{I(t)} \frac{dI}{I} = -\frac{R+R_0}{L}\int_0^t dt'$$

$$\ln\frac{I(t)}{I_L(0)} = -\frac{R+R_0}{L}t \Rightarrow I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\exp\left(-\frac{R+R_0}{L}t\right)$$

$$I \to 0,\ t\to\infty$$

Какое количество теплоты выделится в катушке за это „бесконечное" время.

$$dQ_{дж} = I^2 R\,dt$$

$$dQ = \frac{\mathcal{E}^2 R}{R^2} e^{-\frac{R+R_0}{L}2t}\,dt$$

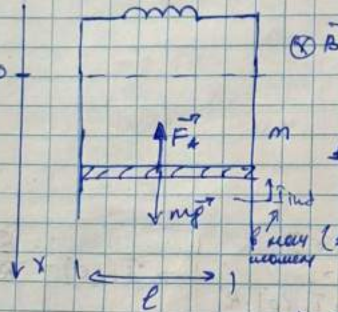
$$Q = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}^2}{R}\cdot e^{-\frac{R+R_0}{L}2t}\,dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\cdot\left(-\frac{L}{2(R+R_0)}\right)\cdot e^{-\frac{R+R_0}{L}2t}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2 L}{2R(R+R_0)}$$

Контр. вопрос: Какое кол-во теплоты выделится на R_0?

(5) Соленоид с индуктивностью L и пренебрежимо малым сопротивлением присоединён к верхним концам параллельных шин, расп. вертикально на расстоянии l друг от друга. Однородное магнитное поле $\vec{B}$ горизонтально и перпенд. плоскости шин. Вдоль шин начинает двигаться без нач. ск-ти проводник массой m (сопр. пров. мало, трения нет.) Найти закон движения проводника.

В SI



$\otimes \vec{B} = const$

В движ. пр. возникает I_{ind} вследствие $\mathcal{E}_{ind}$, поток зависит от времени

1) При движении перемычки $\Phi = \Phi(t)$

$$(1) \Rightarrow \mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B_n \frac{dS}{dt} = -B_n l \frac{dx}{dt}$$

2) $\mathcal{E}_{ind} \neq 0 \Rightarrow I_{ind} \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{s\text{-}ind} = -\frac{d\Phi_{собст}}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad (2)$$

Пусть есть какое-то сопротивление (исп. закона Ома)

Из (1), (2) $\Rightarrow$ закон Ома

$$IR_\Sigma = \mathcal{E}_{ind} + \mathcal{E}_{s\text{-}ind}$$

но по условию $R_\Sigma \to 0$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{ind} = -\mathcal{E}_{s\text{-}ind}$$

$$B_n l \frac{dx}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \Rightarrow B_n l x = -LI$$

$(x(t=0)=0,\ I(t=0)=0)$

3) II закон Ньютона:

$$mg + F_{Ax} = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

$$F_{Ax} = IlB_n = -\frac{B_n^2 l^2}{L}x \qquad (4)$$

$$mg - \frac{B_n^2 l^2}{L} \cdot x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Из (3), (4)

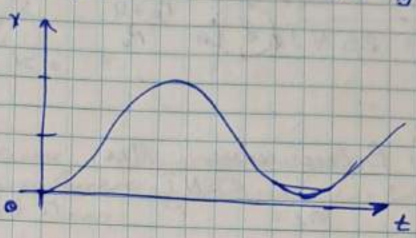
$$\ddot{x} + \frac{B^2\ell^2}{mL}x = g \qquad \omega^2 = \frac{B^2\ell^2}{mL}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi) + \frac{mgL}{B^2\ell^2}$$

$$t=0: \begin{cases} x(0)=0 \\ \frac{dx}{dt}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos\varphi + \frac{mgL}{B^2\ell^2} = 0 \\ A\omega\sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \varphi = \pi \\ A = \frac{mgL}{B^2\ell^2} \end{matrix}$$

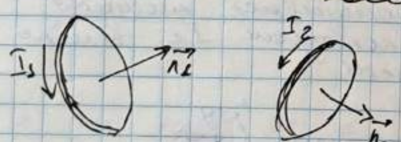
$$x(t) = \frac{mgL}{B^2\ell^2}(1-\cos\omega t)$$

$I(t)$ – ? построить график



15.11.21

Взаимная индукция



$\vec{n}_{1,2}$ согласовано с обходом (обход по току в контуре)

Φ_{ij} – поток, который ток I_i посылает в контур j

$\Rightarrow \Phi_{12} = f M_{12} I_1, \quad \Phi_{21} = f M_{21} I_2 \quad (M_{12} = M_{21})$

Полный поток:

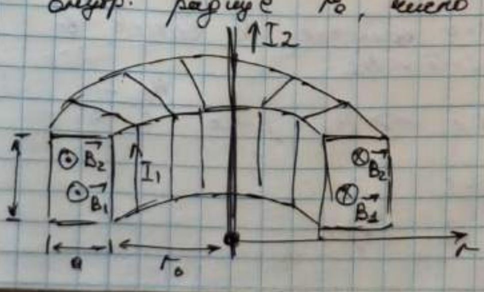
$$\Phi_{1\Sigma} = \Phi_{1соб} + \Phi_{21} = f L_1 I_1 + f M_{21} I_2$$

$$\Phi_{2\Sigma} = \Phi_{2соб} + \Phi_{12} = f L_2 I_2 + f M_{12} I_1$$

Полная энергия системы контуров:

$$W_м = f^2\left(\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2\right) = f\cdot\frac{1}{2}\left(\Phi_{1\Sigma} I_1 + \Phi_{2\Sigma} I_2\right)$$

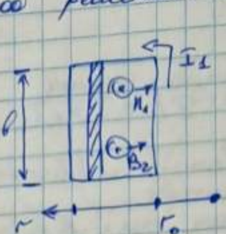
② Найти коэф-т взаимной индукции тороида и беск. прямого провода, проходящего по его оси. Сечение тороида – прямоугольник высотой b, шириной a; внутр. радиус r_0, число витков в обмотке N.



M_{12} и M_{21} найдём прямым расчётом. Для этого считаем: пусть ток в тороиде I_1, в проводе I_2.

1) Вычисление M_{21} (способ решения: $I_2 \to B_2 \to \Phi_{21} \to M_{21}$)

$$B_2 = \frac{2\beta I_2}{r}$$



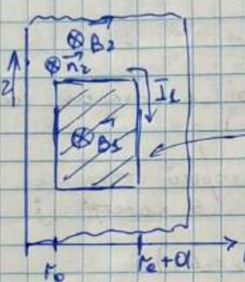
$$\Phi_{21} = N\iint_{(S_1)} B_{2n_1}\, dS = N\cdot 2\beta I_2 \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{b\,dr}{r} = 2\beta N I_2 b \ln\frac{r_0+a}{r_0}$$

$$\Rightarrow \quad M_{21} = 2\frac{\beta}{f} N b \ln\frac{r_0+a}{r_0}$$

2) Вычисление M_{12}.

$$B_1 = \frac{2\beta N I_1}{r}, \quad r_0 \le r < r_0+a$$

Любой ток должен быть замкнут => I_2 замыкается на бесконечности, образуя контур (полуплоскость).



Поле тороида пронизывает площадку, ограниченную контуром I_2, только в заштрих. области.

$$\Phi_{12} = \iint_{(S_2)} B_{1n_2}\, dS = 2\beta N I_1 \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{b\,dr}{r} = 2\beta N I_1 b\cdot \ln\frac{r_0+a}{r_0}$$

$$\Rightarrow \quad M_{12} = 2\frac{\beta}{f} N b \ln\frac{r_0+a}{r_0}$$

Контрольный вопрос: Как изменится коэф-т M_{21}, если провод деформировать?

② Ир. 8.358. Два соленоида одинаковой длины и почти одинак. сечения вставлены полностью один в другой. Найти их взаимную индуктивность, если их индуктивности равны L_1 и L_2.

Каркас общий => $S_1 = S_2 = S$

$l_1 = l_2 = l$

В 1-й обмотке N_1 витков, во 2-й – N_2

1) Пусть в 1-й обмотке ток I_1 => $B_1 = \beta\cdot 4\pi\cdot\frac{N_1}{l} I_1$

$$\Phi_{1соб} = B_1 S N_1 = \beta\cdot 4\pi \frac{N_1^2}{l} S I_1$$

$$L_1 = \frac{\Phi_{1соб}}{f I_1} = \frac{\beta}{f}\cdot 4\pi \frac{N_1^2}{l} S \quad (1)$$

Аналогично $L_2 = \frac{\beta}{f} \cdot 4\pi \frac{N_2^2}{l} S$ (2)

2) $|\Phi_{12}| = B_1 S N_2 = \beta \cdot 4\pi \frac{N_1 N_2}{l} S I_1$

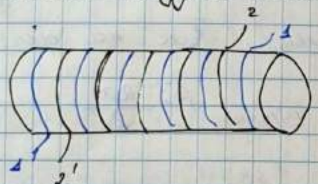
$|M_{12}| = \frac{|\Phi_{12}|}{f I_1} = \frac{\beta}{f} \cdot 4\pi \frac{N_1 N_2}{l} S$ (3)

$|\Phi_{21}| = B_2 S N_1 = \beta \cdot 4\pi \frac{N_2 N_1}{l} S I_2$

$|M_{21}| = \frac{|\Phi_{21}|}{f I_2} = \frac{\beta}{f} \cdot 4\pi \frac{N_2 N_1}{l} S$ (4)

$\Rightarrow \underline{M = \sqrt{L_1 L_2}}$

③ На длинный цилиндр намотаны вплотную две обмотки 1-1' и 2-2'. Индуктивности обмоток $L_1 = L_2 = L$. Найти индуктивность всей цепи если:



1) 1' и 2' соединить, в цепь включить 1 и 2
2) 1 и 2' соединить, в цепь включить 1' и 2
3) 1' и 2' соединить, 1 и 2 соединить, в цепь включить обе пары

1) ток течёт от 1 к 1'=2' и возвращается от 2' с 2 – т.е. в противоположных напр-ях

$\Rightarrow \vec{B_1} = -\vec{B_2}$ (т.к. $L_1 = L_2 \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2$)

$\Rightarrow \vec{B_\Sigma} = 0 \Rightarrow \Phi_\Sigma = 0 \Rightarrow \underline{L_\Sigma = 0}$

2) ток течёт от 1' к 1=2' и возвращается от 2' к 2 – т.е. всегда в одну сторону $\Rightarrow \vec{B_1} = \vec{B_2}$

$\Phi_{1\Sigma} = \Phi_{1соб} + \Phi_{21} = 2\Phi_{1соб} = 2L_1 I$

$\Phi_{2\Sigma} = \Phi_{2соб} + \Phi_{12} = 2\Phi_{2соб} = 2L_2 I$

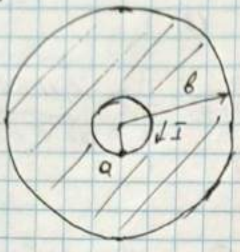
$\Phi_\Sigma = \Phi_{1\Sigma} + \Phi_{2\Sigma} = 2L_1 I + 2L_2 I \Rightarrow \underline{L_\Sigma = 4L}$

3) $U = const$, $S_{пр.} = S_{пр.1} + S_{пр.2}$ (площадь сечения пров.)

$\Rightarrow$ ток в обмотке увелич., но $\Phi_\Sigma \sim B_\Sigma \sim I$

$\Rightarrow \underline{L_\Sigma = L}$

④ Два концентрических тонких проводника в форме окружностей с радиусами a и b $(a << b)$ лежат в одной плоскости. По внутреннему проводнику течёт ток I. Найти магнитный поток через поверхность, ограниченную внешним проводником.



$\Phi_{ba} = \iint\limits_{(S)} B_n dS$, где $\vec{B}$ создано кольцом a.

Но: $\vec{B}$ для кольца не знаем и расчёт сложный.

По теореме взаимности:

$$M_{12} = M_{21} \equiv M$$

Пусть I течёт по <u>внешнему</u> кольцу. Поле на оси витка:

$$B(x) = \beta I \cdot \frac{2\pi b^2}{(b^2+x^2)^{3/2}} \Rightarrow B(0) = \frac{\beta I \cdot 2\pi}{b}$$

Т.к., $a << b$:

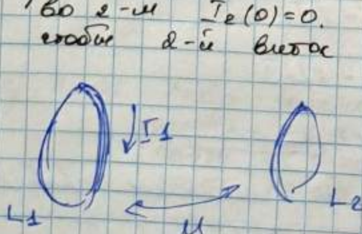
$$\Phi_{ba} \approx B(0)\cdot \pi a^2 = \frac{\beta I \cdot 2\pi^2 a^2}{b} = f M I$$

$$M = \frac{\beta}{f}\cdot\frac{2\pi^2 a^2}{b}$$

(как бы поменяли токи)

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{ab} = fMI = \beta\cdot\frac{2\pi^2 a^2}{b} I}$$

⑤ Два <u>сверхпроводящих</u> витка с индуктивностями L_1, L_2 расположены так, что коэф-т взаимной индукции равен M. В 1-м витке поддерживается ток $I_1(t) = I_0 = const$, во 2-м $I_2(0) = 0$. Какую работу надо совершить, чтобы 2-й виток унести в бесконечность?



По усл. $R_1, R_2 \to 0 \Rightarrow \Phi_{1,2\Sigma} = const$

$\left[\text{т.к. } I_{ind} = \frac{1}{R} f\left|\frac{d\Phi}{dt}\right| < \infty\right]$

$$dA_{стор} = dW\Big|_{\Phi=const} = f\cdot\frac{1}{2} d\left(\Phi_{1\Sigma} I_1 + \Phi_{2\Sigma} I_2\right) = f\cdot\frac{1}{2}\Phi_{2\Sigma}\, dI_2$$

$$\Rightarrow A_{стор} = f\cdot\frac{1}{2}\cdot\Phi_{2\Sigma}(0)\cdot I_{2\infty}$$

? ?

$$\Phi_{2\Sigma}(0) = f\left(L_2 I_2(0) + M I_1(0)\right) = f M I_0$$

$$\Phi_{2\Sigma}(0) = \Phi_{2\Sigma}(t_\infty) \Rightarrow L_2 I_2(0) + M I_1(0) = L_2 I_{2\infty} + 0$$

$$\Rightarrow I_{2\infty} = \frac{M}{L_2} I_0$$

Т.е. ток должен появиться во 2 контуре для поддержания.

$$\underline{A_{стор}} = f^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot M I_0 \cdot \frac{M}{L_2} I_0 = \underline{f^2 \cdot \frac{M^2 I_0^2}{2L_2}}$$

Квазистационарные токи

22.11.21

$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$

обозн. для переменных токов.

$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$

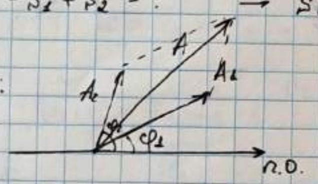
$s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

$s = s_1 + s_2 - ? \to s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$A - ?,\ \varphi - ?$

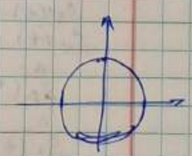
МВА:



Только фазу отсчитываем против часовой стрелки.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$tg\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$



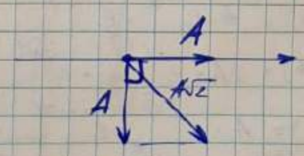
(1) $s_1(t) = A\cos\omega t$

$s_2(t) = A\sin\omega t = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

$$A'^2 = 2A^2 + 2A^2\cos(0 + \frac{\pi}{2}) = 2A^2$$

$$A' = A\sqrt{2}$$

$$tg\,\varphi = \frac{A\sin(0) + A\sin(-\frac{\pi}{2})}{A\cos(0) + A\cos(-\frac{\pi}{2})} = -1$$



$\to \varphi = -\frac{\pi}{4}$

$$\underline{s(t) = A\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})}$$

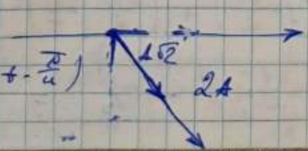
(2) $s_1(t) = A\cos\omega t$

$s_2(t) = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

$s_3(t) = 2A\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$

$s_1(t) + s_2(t) \to s(t) = A\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$

$s(t) + s_3(t)$



$$A'^2 = 4A^2 + 2A^2 + 2\cdot 2A \cdot A\sqrt{2}\cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 6A^2 + 4\sqrt{2}A^2$$
$$\Rightarrow \underline{s(t) = (\sqrt{2}+2)A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

МКА

$$s(t) = A\cos(\omega t+\varphi) \to \hat{s}(t) = A\left(\cos(\omega t+\varphi) + i\sin(\omega t+\varphi)\right) =$$
$$= A e^{i\varphi}\cdot e^{i\omega t} = \hat{A} e^{i\omega t}$$

③ $s_1(t) = A\cos\omega t$

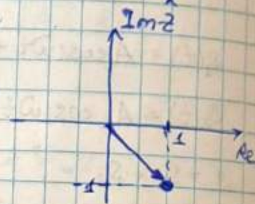
$s_2(t) = A\sin\omega t = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$\hat{s}_1(t) = A(\cos\omega t + i\sin\omega t) = \hat{A}_1\cdot e^{i\omega t}$ $\quad (\varphi_1 = 0)$

$\hat{s}_2(t) = A\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\omega t} = \hat{A}_2\cdot e^{i\omega t}$

$\hat{A}_\Sigma = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = A(1 + e^{-i\frac{\pi}{2}}) = A(1 + 0 - i)$

$\hat{A}_\Sigma = |\hat{A}_\Sigma|\cdot e^{i\varphi_\Sigma} = A\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = A\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$



$\operatorname{tg}\varphi_\Sigma = \frac{Im\hat{A}_\Sigma}{Re\hat{A}_\Sigma} = -1 \quad \to \varphi_\Sigma = -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \underline{s(t) = A\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)}$

④

$s_1(t) = A\cos\omega t$

$s_2(t) = A\sin\omega t \quad \to \quad s_2(t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$s_3(t) = 2A\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$

$s_4(t) = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

$\hat{s}_1(t) = A\cdot e^{i\omega t}$

$e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\hat{s}_2(t) = A\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\omega t}$

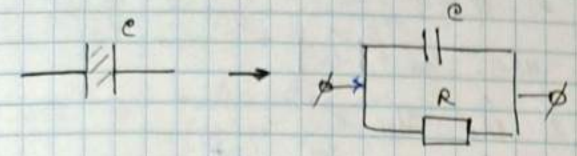
$\hat{s}_3(t) = 2A\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{i\omega t}$

$\hat{s}_4(t) = A\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\omega t}$

$$\hat{A}_\Sigma = \left(A + A\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} + 2A\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} + Ae^{i\frac{\pi}{4}}\right) =$$
$$= A\left(1 - i + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= A\left(1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = A\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right)\right)$$
$$|\hat{A}_\Sigma| = A\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2} = A\sqrt{1 - \sqrt{2} + \frac{2}{4} + \frac{9\cdot 2}{4} - 3\sqrt{2} + 1} =$$
$$= A\sqrt{2 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 4\sqrt{2}} = A\sqrt{7 - 4\sqrt{2}}$$

$$tg\,\varphi_\Sigma = \frac{-1+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

⑤

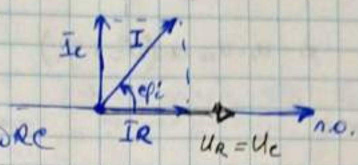


Дано: ω, R, C

Сдвиг $\varphi = \varphi_i - \varphi_u = ?$

$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$

$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$



$$tg\,\varphi_i = \frac{I_C}{I_R} = \frac{\cancel{U_C}\cdot Z_R}{Z_C \cdot \cancel{U_R}} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C}} = \omega RC$$

$$\boxed{\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}}$$

$\Rightarrow \varphi_u = 0$ — мы сами так выбрали

$\Rightarrow \varphi = \varphi_i - 0$

МКА: $\hat{i}_R(t) = \hat{I}_R e^{i\omega t}$ пусть $\varphi_R = 0$

$\hat{i}_C(t) = \hat{I}_C \cdot e^{i\omega t}$

$$\hat{I}_\Sigma = \hat{I}_R + \hat{I}_C = \frac{\hat{U}_R}{R} + \frac{\hat{U}_C}{-\frac{i}{\omega C}} = \hat{U}\left(\frac{1}{R} - \frac{\omega C}{i}\right) = \hat{U}\left(\frac{1}{R} + i\omega C\right)$$

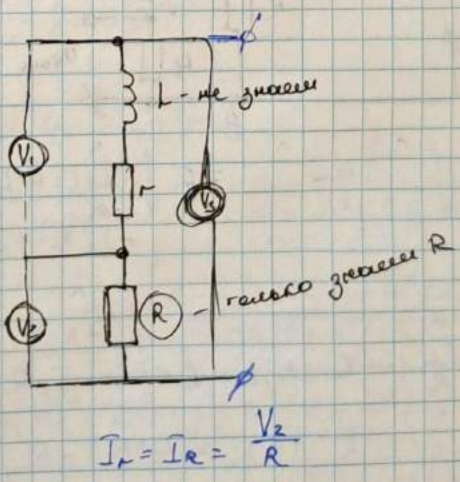
$$\hat{u}_R(t) = \underbrace{Z_R \cdot \hat{I}_R}_{\hat{U}_R} \cdot e^{i\omega t} = \underbrace{R\hat{I}_R}\cdot e^{i\omega t} = \hat{u}_C$$

$$tg\,\varphi = \frac{\operatorname{Im} \hat{I}_\Sigma}{\operatorname{Re} \hat{I}_\Sigma} = \frac{\omega C}{\frac{1}{R}} = \omega RC$$

⑥ Найти P на катушке. — ?

Дано: R, V_1, V_2, V_3

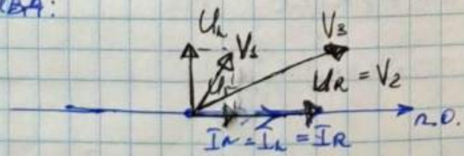
$P_L \to P_r$; $P_r = U_r I_r$



L - не знаем

только знаем R

МВА:



$$\begin{cases} U_L^2 + U_r^2 = V_1^2 \\ U_L^2 + (U_r + V_2)^2 = V_3^2 \end{cases}$$

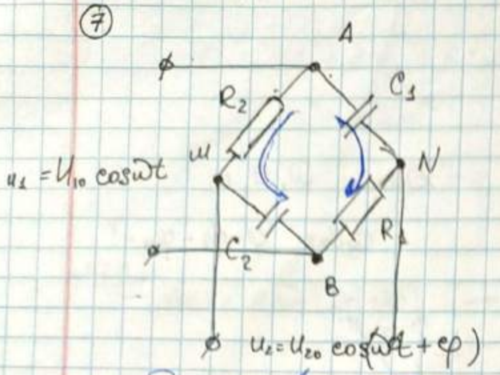
$I_r = I_R = \frac{V_2}{R}$

$\cancel{U_r^2} - \cancel{U_r^2} - 2U_r V_2 - V_2^2 = V_1^2 - V_3^2$

$2U_r V_2 = V_3^2 - V_2^2 - V_1^2 \longrightarrow U_r = \frac{1}{2V_2}\left(V_3^2 - V_2^2 - V_1^2\right)$

$\Rightarrow P_r = \frac{V_2}{R\,2V_2}\left(V_3^2 - V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{V_3^2 - V_2^2 - V_1^2}{2R}$

(7)



1) Док-ть, если $R_1C_1 = R_2C_2$

$$\Downarrow$$

$U_{10} = U_{20}$?

2) φ - ?

МКА: $U_{20} = |\hat{U}_{20}|$

1) $\hat{U}_1 = U_{10} \cdot e^{i\omega t}$

$\hat{U}_2 = U_{20} \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}$

Как бы мы рассмотрели разность потенциалов между точками M и N

$$\varphi_{MN} = \varphi_M - \varphi_N = \varphi_M - \varphi_A + \varphi_A - \varphi_N$$

$$\Rightarrow |\hat{U}_{20}| = |\hat{U}_{MA} - \hat{U}_{NA}| = |\hat{I}_{MA} \cdot \hat{Z}_{MA} - \hat{I}_{NA}\hat{Z}_{NA}| =$$

Всегда предполагаем, что выход разомкнут

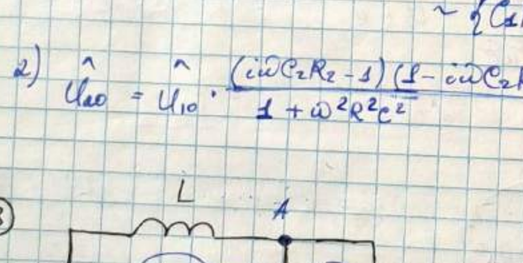
$$= \left|\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{Z}_{AMB}}\hat{Z}_{MA} - \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{Z}_{ANB}} \cdot \hat{Z}_{AN}\right| = U_{10}\left|\frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{i\omega C_2}} - \frac{1}{i\omega C} \cdot \frac{1}{i\omega C(R_1 + \frac{1}{i\omega C})}\right|$$

$$= U_{10}\left|\frac{i\omega C_2 R_2}{1 + i\omega C_2 R_2} - \frac{1}{1 + i\omega C_1 R_1}\right| = U_{10}\left|\frac{i\omega C_2 R_2 - 1}{1 + i\omega C_2 R_2}\right| = U_{10}, \text{ ч.т.д.}$$

$$\sim \{C_1R_1 = C_2R_2\}$$

2) $\hat{U}_{20} = \hat{U}_{10} \cdot \frac{(i\omega C_2R_2 - 1)(1 - i\omega C_2R_2)}{1 + \omega^2R^2C^2} \to tg\varphi = \frac{2\omega R_2C_2}{-1 + (\omega R_2C_2)^2}$

(8)



1) $\varphi = \varphi_{вых} - \varphi_{вх} = \frac{\pi}{2}$ → соотношение между L и R

2) $|\hat{K}| = \frac{|\hat{U}_{вых}|}{|\hat{U}_{вх}|} = ?$

$\hat{U}_{вых} = \hat{I}_2 \cdot R$

$$\begin{cases} \hat{I}_1(i\omega L + R) - \hat{I}_2 R = \hat{U}_{вх} \\ -\hat{I}_1 R + \hat{I}_2(i\omega L + 2R) = 0 \end{cases}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{I}_2}{R}(i\omega L + 2R)$$

$$\frac{\hat{I}_2}{R}(i\omega L + 2R)(i\omega L + R) - \hat{I}_2 R = \hat{U}_{вх}$$

$$\hat{I}_2\left(\left(\frac{i\omega L}{R} + 2\right)(i\omega L + R) - R\right) = \hat{U}_{вх}$$

$$\hat{I}_2\left(-\frac{\omega^2 L^2}{R} + i\omega L + 2i\omega L + 2R - R\right) = \hat{U}_{вх}$$

$$\hat{I}_2\left(\underbrace{3i\omega L + R - \frac{\omega^2 L^2}{R}}_{\hat{Z}_0}\right) = \hat{U}_{вх}$$

$$\hat{k} = \frac{\hat{U}_{вых}}{\hat{U}_{вх}} = \frac{\hat{U}_{вх} R}{\hat{Z}_0 \hat{U}_{вх}} \cdot \frac{R}{\hat{Z}_0} = \frac{R^2}{-(\omega L)^2 + R^2 + i\,3\omega L R}$$

$$\hat{k} = \frac{R^2\left(-(\omega L)^2 + R^2 - i\,3\omega L R\right)}{(R^2-(\omega L)^2)^2 + 9(\omega L R)^2}$$

$$\mathrm{Im}\,\hat{k} = \frac{-3\omega L R^3}{(R^2-(\omega L)^2)^2 + 9(\omega L R)^2}$$

$$tg\,\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\hat{k}}{\mathrm{Re}\,\hat{k}} = \frac{-3\omega L R^3}{R^2(R^2-(\omega L)^2)} = \frac{-3\omega L R}{R^2-(\omega L)^2} \rightarrow R = \omega L$$ для $\varphi = \frac{\pi}{2}$

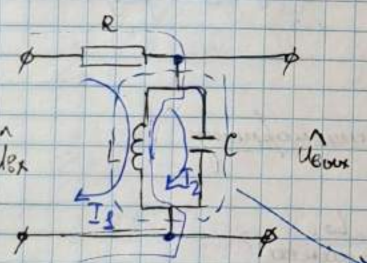
при таком условии:

$$|\hat{k}| = \frac{(\omega L)^2\left(-(\omega L)^2 + (\omega L)^2 - i\,3\omega^2 L^2\right)}{9(\omega^2 L^2)^2} =$$

$$= \frac{-i\,3(\omega L)^4}{9(\omega L)^4} = -\frac{1}{3}i$$

$$|\hat{k}| = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

(9)



$|\hat{k}| = ?$

$$\hat{U}_{вых} = \hat{I}_2 \cdot \frac{1}{i\omega C}$$

$$\begin{cases} \hat{I}_1(R + i\omega L) - \hat{I}_2\, i\omega L = \hat{U}_{вх} \\ \hat{I}_1\, i\omega L - \hat{I}_2\left(\frac{1}{i\omega C} + i\omega L\right) = 0 \end{cases}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{I}_2\left(\frac{1}{i\omega C} + i\omega L\right)}{i\omega L}$$

$$\hat{I}_2\left(\frac{\left(\frac{1}{i\omega C} + i\omega L\right)(R + i\omega L)}{i\omega L} - i\omega L\right) = \hat{U}_{вх}$$

$$\hat{k} = \frac{\hat{U}_{вых}}{\hat{U}_{вх}} = \frac{i\omega L}{i\omega C\left(\left(\frac{1}{i\omega C} + i\omega L\right)(R + i\omega L) + (\omega L)^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{R}{i\omega C} + i\omega L R + \frac{L}{C} - \cancel{(\omega L)^2} + \cancel{(\omega L)^2}} = \frac{i\omega C}{R - \omega^2 L C R + i\omega L} =$$

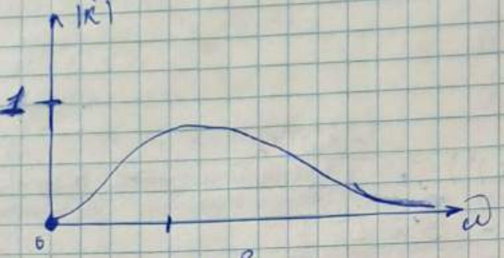
$$= \frac{i\omega C(R - \omega^2 L C R - i\omega L)}{\dots} = \frac{i\omega C(R - \omega^2 L C R) + \omega^2 L C}{(R - \omega^2 L C R)^2 + \omega^2 L^2}$$

$$|\hat{k}| = \frac{1}{(R - \omega^2 L C R)^2 + \omega^2 L^2} \cdot \sqrt{\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 C^2 (R - \omega^2 L C R)^2} =$$

$$= \frac{C}{(R - \omega^2 L C R)^2 + \omega^2 L^2} \cdot \sqrt{\omega^4 L^2 + \omega^2\left(R^2 - 2\omega^2 L C R^2 + \omega^4 L^2 C^2 R^2\right)}$$

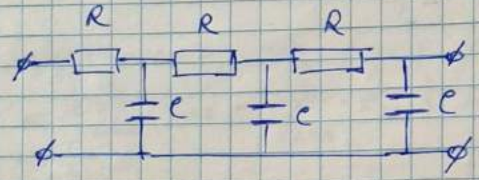
$$\hat{K} = \frac{1}{i\omega C\left(R - \frac{R}{\omega^2 LC} + \cancel{i\omega L} - \frac{i}{\omega C} - \cancel{i\omega L}\right)}$$

$$|\hat{K}| = \frac{1}{\omega C\left(R^2\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left((\omega RC)^2\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}}$$



$\omega^2 = \frac{2}{LC}$

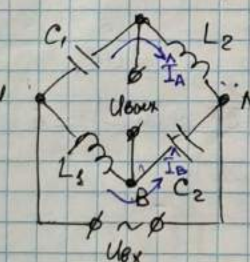
Д/З*



$\hat{K}$ - ? $|\hat{K}|$ - ?
График - ? $(K(\omega))$
Что за устройство?

29.11.21. Продолжение по квазистационарному току.

①



Дано: C_1, C_2, L_1, L_2.
Найти условие баланса?

$\hat{U}_{вых} = 0$

$\varphi_A - \varphi_B = \varphi_A - \varphi_M + \varphi_M - \varphi_B$

$\hat{U}_{AB} = |\hat{U}_{AM} - \hat{U}_{MB}| = |\hat{I}_{AM} \cdot \hat{Z}_{AM} - \hat{I}_{MB} \cdot \hat{Z}_{MB}| =$

$= \left| \frac{\hat{U}_{вх0}}{\hat{Z}_{MAN}} \cdot \hat{Z}_{AM} - \frac{\hat{U}_{вх0}}{\hat{Z}_{MBN}} \cdot \hat{Z}_{MB} \right|$

Нужно выбрать обдумно тогд. $\hat{U}_{MA} = \hat{U}_{MB}$

$\Downarrow$

$\hat{I}_A \hat{Z}_{C_1} = \hat{I}_B \hat{Z}_{L_1}$

$\hat{I}_A = \frac{\hat{U}_{вх}}{\hat{Z}_{C_1} + \hat{Z}_{L_2}}$; $\hat{I}_B = \frac{\hat{U}_{вх}}{\hat{Z}_{C_2} + \hat{Z}_{L_1}}$

$\frac{\hat{Z}_{C_1}}{\hat{Z}_{C_1} + \hat{Z}_{L_2}} = \frac{\hat{Z}_{L_1}}{\hat{Z}_{C_2} + \hat{Z}_{L_1}}$ $\qquad \hat{Z}_C = -\frac{i}{\omega C}$; $\hat{Z}_L = i\omega L$

$-\frac{i}{\omega C_1\left(-\frac{i}{\omega C_1} + i\omega L_2\right)} = \frac{i\omega L_1}{\left(-\frac{i}{\omega C_2} + i\omega L_1\right)}$

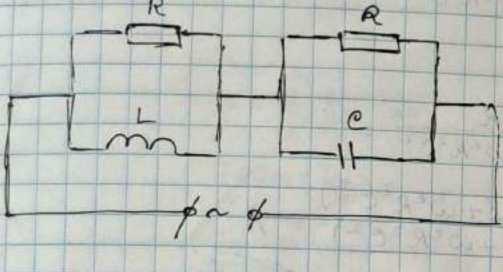
$-\frac{1}{\omega C_1\left(-\frac{1}{\omega C_1} + \omega L_2\right)} = \frac{\omega L_1}{\left(-\frac{1}{\omega C_2} + \omega L_1\right)}$

$$-1\left(-\frac{1}{\omega C_2}+\omega L_1\right)=\omega^2 L_1 C_1\left(-\frac{1}{\omega C_2}+\omega L_2\right)$$

$$\frac{1}{\omega C_2}-\cancel{\omega L_1}=-\cancel{\omega L_1}+\omega^3 L_1 L_2 C_1$$

$$\underline{\omega^4 L_1 L_2 C_1 C_2 = 1}$$

(2)



~~$\forall\omega$ – двухполюсник вёл себя как резистор. Соотношение параметров.~~

~~$\hat{Z}=a+ib$~~

Признак резистора → отсутствие мнимой части. **!**

$$\hat{Z}=\mathrm{Re}\,\hat{Z}+i\,\mathrm{Im}\,\hat{Z}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\,\hat{Z}=0$$

$$\frac{1}{\hat{Z}_1}=\frac{1}{R}+\frac{1}{i\omega L_1};\quad \frac{1}{\hat{Z}_2}=\frac{1}{R}-\frac{\omega C}{i}$$

$$\hat{Z}_1=\left(\frac{R+i\omega L_1}{i\omega R L_1}\right)^{-1};\quad \hat{Z}_2=\left(\frac{i-\omega RC}{iR}\right)^{-1}$$

~~$$\hat{Z}=\hat{Z}_1+\hat{Z}_2=\frac{R+i\omega L_1}{i\omega R L_1}+\frac{i-\omega RC}{iR}=\frac{R+i\omega L_1+\omega L_1(i-\omega RC)}{i\omega R L_1}=$$~~

~~$$=\frac{R+i\omega L_1+i\omega L_1-\omega^2 RCL_1}{i\omega RL_1}=\frac{R+2i\omega L_1-\omega^2 RCL_1}{i\omega RL_1}=$$~~

~~$$=\frac{R}{i\omega RL_1}+2\cdot\frac{1}{R}-\frac{\omega C}{i}=\frac{2}{R}+i\left(\omega C-\frac{R}{\omega RL_1}\right)$$~~

~~$$\Rightarrow \omega C-\frac{R}{\omega RL_1}=0$$~~

~~$$\omega C=\frac{1}{\omega L}\rightarrow \omega^2 LC=1$$~~

$$\hat{Z}=\frac{i\omega RL_1}{R+i\omega L_1}+\frac{iR}{i-\omega RC}=\frac{i\omega RL(i-\omega RC)+iR(R+i\omega L)}{(i-\omega RC)(R+i\omega L)}=$$

$$=\frac{-\omega RL-i\omega^2R^2LC+iR^2-\omega RL}{(i-\omega RC)(R+i\omega L)}=\frac{-2\omega RL+i(R^2-\omega^2R^2LC)}{iR-\omega L-\omega R^2C-i\omega^2RCL}$$

$$=\{\text{не решил}\rightarrow\text{спросил}\}=\frac{i\omega LR^2+(\omega L)^2R}{R^2+(\omega L)^2}+\frac{R-i\omega R^2C}{1+(\omega RC)^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\,\hat{Z}=\frac{\omega LR^2}{R^2+(\omega L)^2}-\frac{\omega R^2C}{1+(\omega RC)^2}=0$$

$$\frac{L}{R^2+\omega^2L^2}=\frac{C}{1+\omega^2R^2C^2}\rightarrow L+\omega^2R^2C^2L=CR^2+\omega^2L^2C$$

$$\cancel{CR^2(\omega^2R-1)}$$

$$\underline{(1-\omega^2LC)(L-R^2C)=0}\Leftarrow L(1-\omega^2LC)=R^2C(1-\omega^2LC)$$

$$\Rightarrow \underline{L = R^2 C}$$

$$\hat{z} = \frac{i\omega L R^2 + (\omega L)^2 R}{R^2 + (\omega L)^2} + \frac{R - i\omega R^2 C}{1 + (\omega R C)^2} =$$

$$= \frac{i\omega R^4 C + \omega^2 R^5 C^2}{R^2 + \omega^2 R^4 C^2} + \frac{R - i\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} =$$

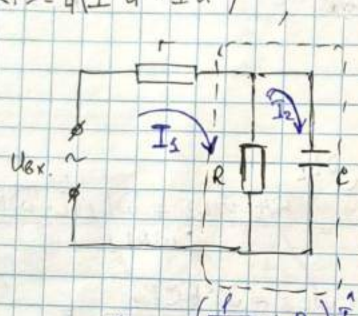
$$\hat{z} = \mathrm{Re}\,\hat{z} = z =$$

$$\Rightarrow z = \frac{\omega^2 R^5 C^2}{R^2 + \omega^2 R^4 C^2} + \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} =$$

$$= \frac{\omega^2 R^3 C^2 + R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{R(1 + \omega^2 R^2 C^2)}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)} = \underline{R}$$

3

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4}\left(\hat{I}^* \hat{U} + \hat{I} \hat{U}^*\right),$$ * - комплексно-сопряжённое.



$$\langle P_{общ.} \rangle = ?$$

$$\begin{cases} \hat{I}_1 (r + R) - \hat{I}_2 \cdot R = \hat{U}_{вх} \\ \hat{I}_2 \left(\frac{1}{i\omega C} + R\right) - \hat{I}_1 R = 0 \end{cases}$$

$$\hat{I}_2 \left(\frac{1}{i\omega C} + R\right) = \hat{I}_1 R$$

$$\Rightarrow \hat{I}_1 = \frac{\left(\frac{1}{i\omega C} + R\right) \hat{I}_2}{R} = 1 + \frac{1}{i\omega C R} = 1 - \frac{i}{\omega C R}$$

$$\hat{I}_1 (r + R) - \frac{R^2}{\left(\frac{1}{i\omega C} + R\right)} = \hat{U}_{вх}$$

$$\left(1 - \frac{i}{\omega C R}\right)(r + R) - \frac{R^2}{\left(-\frac{i}{\omega C} + R\right)} = \hat{U}_{вх}$$

$$r - \frac{ir}{\omega C R} + R - \frac{i}{\omega C}$$

$$\langle P_{общ} \rangle = \frac{1}{4}\left(\hat{U}^*_{вх} \hat{I} + \hat{U}_{вх} \hat{I}^*\right) = \frac{1}{4} U_{вх} (\hat{I}^* + \hat{I}) = \frac{1}{2} U_{вх} \cdot \mathrm{Re}\,\hat{I}$$

$\hat{U}_{вх} = U_{вх}$ (если отсутствие фаз у источника.

$$\hat{I} = \frac{U_{вх}}{\hat{z}} = \frac{U_{вх}}{r + \frac{R \cdot \frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}}} = \frac{U_{вх}}{r + \frac{R}{1 + i\omega R C}} = \frac{U_{вх}(1 + i\omega R C)}{r(1 + i\omega R C) + R} \stackrel{\{\omega R C = \alpha\}}{=}$$

$$\hat{z} = r + \frac{iR}{i - \omega R C}$$

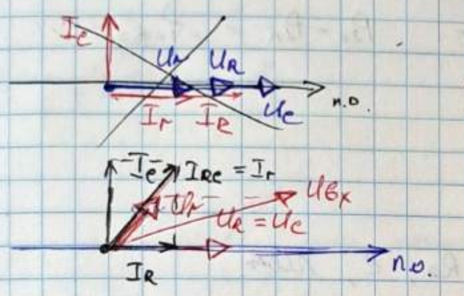
$$= \frac{U_{вх}(1 + i\alpha)}{R + r(1 + i\alpha)} =$$

$$= \frac{U_{вх}(1 + i\alpha)}{(R + r + ir\alpha)} = \frac{U_{вх}(1 + i\alpha)(R + r - ir\alpha)}{(R + r)^2 + r^2 \alpha^2} =$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\frac{1}{\dot I} = \frac{\dot U_{вх}\,(R + r + r\alpha^2)}{(R+r)^2 + (r\alpha)^2}$$

$$\Rightarrow \langle P_{\text{обр.}} \rangle = \frac{1}{2} U_{вх}^2 \frac{(R + r + r\alpha^2)}{(R+r)^2 + (r\alpha)^2}$$

$$P_{\text{обесточн}} = r \cdot \hat I \, \hat I^*$$



$\bar I_R + \bar I_C = \bar I_r$

…ка.

$\omega RC = \alpha\}$

6.12.21.

Электрическое поле в диэлектрике

$\oint_{(S)} P_n\, dS = -q_{связ} \;\to\; \operatorname{div} \vec P = -\rho_{связ}$

$\vec D = \varepsilon_0 \vec E + \vec P \quad (SI) \;\to\; \oint_{(S)} D_n\, dS = q_{своб} \;\to\; \operatorname{div} \vec D = \rho_{своб}$

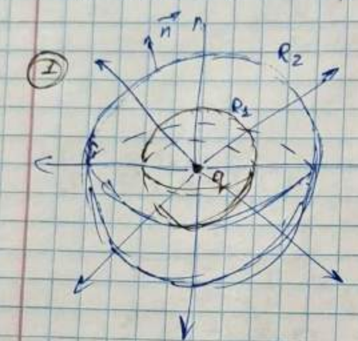
$\vec D = \vec E + 4\pi \vec P \quad (CGSE) \;\to\; \oint_{(S)} D_n\, dS = 4\pi q_{своб}$

$E_{1\tau} = E_{2\tau}$ $\;\to\;$ $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{связ}$ $\qquad P_n = \sigma_{связ}$

$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{своб}$ $\quad SI$

В ЛИД: $\vec D = \varepsilon \vec E$, $\;\varepsilon = \varepsilon_0 \tilde\varepsilon$

I



q, R_1, R_2, ε, ЛИД

$\vec E, \vec D, \vec P$ - ?

Распространение $q_{связ}$ в диэл-ке - ?

$\oint_{(S)} D_n\, dS = q_{своб} = q$

Гауссова пов-ть сфера:

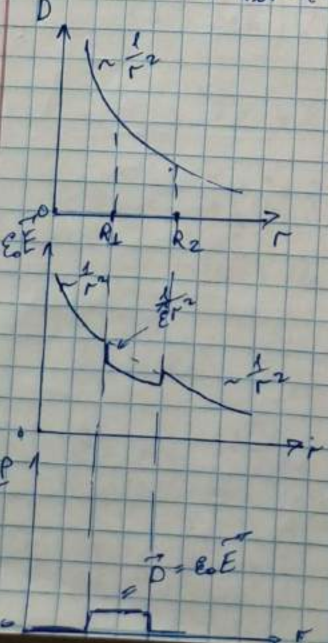
$D \cdot 4\pi r^2 = q \;\to\; \boxed{D = \frac{q}{4\pi r^2}}$

ЛИД: $\vec D = \varepsilon \vec E \;\to\; \vec E = \frac{1}{\varepsilon} \vec D$

$$\to E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & 0 \le r < R_1,\; r > R_2 \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}, & r \in [R_1, R_2] \end{cases}$$

$\to \vec P = \vec D - \varepsilon_0 \vec E$

$$P = \begin{cases} 0, & 0 \le r < R_1,\; R_2 < r \\ \frac{q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{\tilde\varepsilon}\right), & R_1 \le r \le R_2 \end{cases}$$



$$\boxed{\begin{aligned} &\oint_{(S)} P_n\, dS = -q_{связ} \\ &P \cdot 4\pi r^2 = -q_{связ} = q\,\frac{\tilde\varepsilon - 1}{\tilde\varepsilon} \end{aligned}}$$

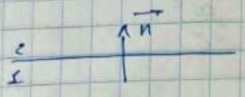
$\operatorname{div} \vec P = -\rho_{связ}$

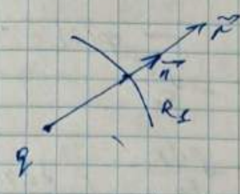
в сферич. сист. координат

$\operatorname{div} \vec P = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\big(\underbrace{r^2 P_n}_{=0}\big) = \frac{1}{r^2} \cdot 0 = 0 = -\rho_{связ}$

$\to \boxed{\rho_{связ} = 0}$ ~ внутри диэл. $r \in [R_1, R_2]$

=> заряд на границе.





$$\boxed{P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{связ}}$$

$r = R_1$:

$$\frac{q}{4\pi R_1^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = -\sigma_{связ}(R_1)$$

$$\sigma_{связ}(R_1) = \frac{q}{4\pi R_1^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

Полный заряд на R_1:

$$\sigma_{связ} \cdot S(R_1) = \frac{q}{4\pi R_1^2}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \cdot 4\pi R_1^2$$

$$\to q_{связ} = q\,\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

т.е. мы нашли заряд на R_1.

$r = R_2$:

$$0 - \frac{q}{4\pi R_2^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = -\sigma_{связ}(R_2)$$

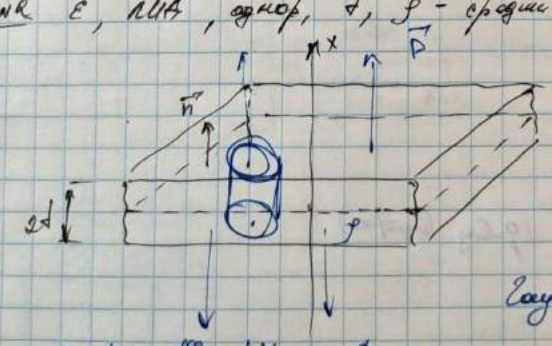
$$\frac{q}{4\pi R_2^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \sigma_{связ}(R_2)$$

$$\to q_{связ}(R_2) = q\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = -q_{связ}(R_1)$$

$$\Downarrow$$

$\to \Sigma$ заряд $= 0$ (мы это и получ. при $\oint_S P_n dS$ при $r \to R_2$)

NR ε, ЛИИ, однор, d, ρ - сторон.



$E(x)$ - ?

$\varphi(x)$ - ?

$\sigma_{связ}$ - ? $\rho_{связ}$ - ?

$$\oint D_n dS = q_{своб}$$

Гауссова пов-ть - цилиндр, осн. ∥ плоск:

$$D \cdot S_т = \iiint_{(V)} \rho\, dV = \rho S_т \cdot x, \quad x \in [0; d]$$

$$D = \rho x, \quad x \in [0, d] \to D = \rho |x|, \quad x \in [-d; d]$$

$$D S_т = \rho d S_т \Rightarrow D = \rho d, \quad |x| \in [d; +\infty)$$

$$D = \begin{cases} \rho |x|, & x \in (-d, d) \\ \rho d, & |x| \in [d; +\infty) \end{cases}$$

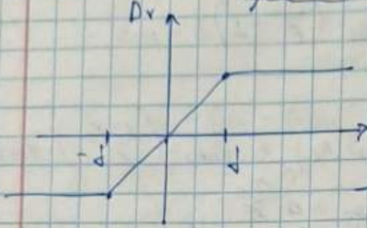
ЛИИ: $$E = \begin{cases} \dfrac{\rho |x|}{\varepsilon}, & x \in [-d, d] \\ \dfrac{\rho d}{\varepsilon_0}, & |x| \in [d; +\infty) \end{cases} \to E_x = \begin{cases} \dfrac{\rho x}{\varepsilon}, & x \in [-d; d] \\ \pm \dfrac{\rho d}{\varepsilon_0}, & |x| \in [d; +\infty) \end{cases}$$

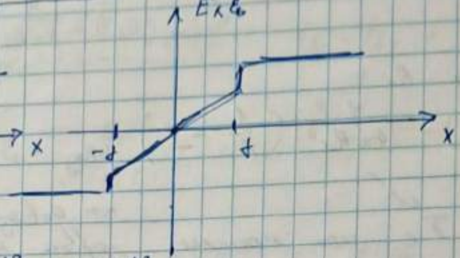
$$\overset{=0}{\varphi(0)} - \varphi(x) = \int_0^x E_x dx = \int_0^x \frac{\rho x}{\varepsilon} dx = \frac{\rho x^2}{2\varepsilon}$$

$$\varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\tilde{\varepsilon}}, \quad x \in [0; d) \quad \to \quad \varphi(d) = -\frac{\rho d^2}{2\tilde{\varepsilon}}$$

$$\varphi(d) - \varphi(x) = \int_x^d \frac{\rho d}{\varepsilon_0}\,dx = \frac{\rho d x}{\varepsilon_0} - \frac{\rho d^2}{\varepsilon_0}, \quad d \le x$$

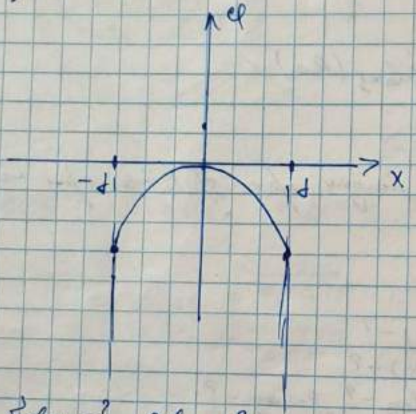
$$\varphi(x) = -\frac{\rho d^2}{2\tilde{\varepsilon}} + \frac{\rho d^2}{\varepsilon_0} - \frac{\rho d x}{\varepsilon_0}, \quad d \le x$$





$$\varphi(x) = +\frac{\rho d x}{\varepsilon_0} - \frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}} + \frac{\rho d^2}{\varepsilon_0}, \quad x < -d$$

$$\varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\tilde{\varepsilon}}, \quad -d < x < 0$$



$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$

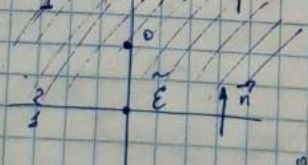
$\rho_{связ}$ внутри $|x| \in [0; d)$

$\sigma_{связ}$ - ? $\rho_{связ}$ - ?

$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon \vec{E}$. Ищем только внутри ($\rho_{связ}$ внутри)

$$P_x = \begin{cases} \rho x - \frac{\rho}{\tilde{\varepsilon}}, & |x| < d \\ 0, & |x| \ge d \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{dP_x}{dx} = \rho \frac{\tilde{\varepsilon} - 1}{\tilde{\varepsilon}} = -\rho_{связ}.$$



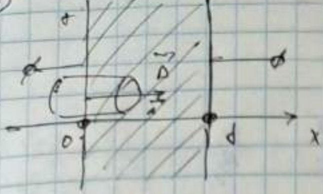
2) $x = d$: $\overset{=0}{P_{2n}} - P_{1n} = -\sigma_{связ}(d)$

$$\boxed{\sigma_{связ}(d) = \rho d \frac{\tilde{\varepsilon} - 1}{\tilde{\varepsilon}}}$$

3) $x = -d$: $P_{2n} - \overset{=0}{P_{1n}} = -\sigma_{связ}(-d)$

$$\boxed{\sigma_{связ}(-d) = P_{2n} = \rho d \frac{\tilde{\varepsilon} - 1}{\tilde{\varepsilon}}}$$

③

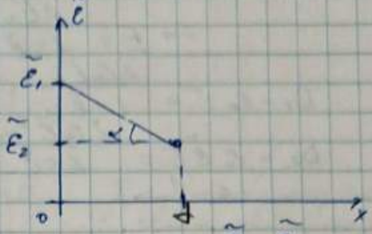


$S,\ d.$

$\tilde{\varepsilon}(x=0)=\tilde{\varepsilon}_1$

$\tilde{\varepsilon}(x=d)=\tilde{\varepsilon}_2$ ← изм. по линейному з-ну.

$C-?$



$dC=\dfrac{d\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0 S}{d}$

$tg\alpha=\dfrac{\tilde{\varepsilon}_1-\tilde{\varepsilon}_2}{d}$

$\tilde{\varepsilon}=\tilde{\varepsilon}_1-tg\alpha\cdot x \rightarrow \boxed{\tilde{\varepsilon}=\tilde{\varepsilon}_1-\dfrac{\tilde{\varepsilon}_1-\tilde{\varepsilon}_2}{d}x} \rightarrow \boxed{d\tilde{\varepsilon}=-\dfrac{\tilde{\varepsilon}_1-\tilde{\varepsilon}_2}{d}dx}$

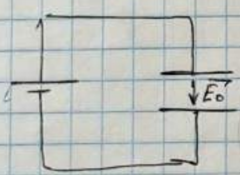
$$\Delta\varphi=\int_0^d\frac{q\,dx}{S\varepsilon_0(\tilde{\varepsilon}_1+\frac{\tilde{\varepsilon}_2-\tilde{\varepsilon}_1}{d}x)}=\frac{q}{S\varepsilon_0}\cdot\frac{d}{\tilde{\varepsilon}_2-\tilde{\varepsilon}_1}\ln\left(\tilde{\varepsilon}_1+\frac{\tilde{\varepsilon}_2-\tilde{\varepsilon}_1}{d}\right)\Big|_0^d=$$

$$=\frac{qd}{S\varepsilon_0(\tilde{\varepsilon}_2-\tilde{\varepsilon}_1)}\ln\frac{\tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\varepsilon}_1}$$

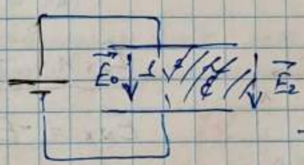
$$\rightarrow C=\frac{S\varepsilon_0(\tilde{\varepsilon}_2-\tilde{\varepsilon}_1)}{d\ln\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\varepsilon}_1}\right)}$$

④ $E_{1\tau}=E_{2\tau}$ $\quad E-?$

$D_{2n}-D_{1n}=\sigma_{своб}$ $\quad D-?$



ввели диэлектрик



$E_1=E_0=E_{1\tau}$

$E_{1\tau}=E_{2\tau}$

$\rightarrow \boxed{E_2=E_{2\tau}=E_0}$

$E_n=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

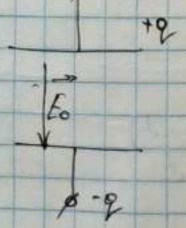
$D_1=\varepsilon_0E_0$

$D_2=\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_0$

$\|$

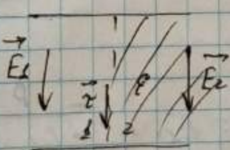
ε

⑤



откл. от ист.

ввели диэлектрик



$\vec{E}-?$

$\vec{D}-?$

$q=const=q_0$

$\boxed{E_1=E_2}\equiv E$

$D_0=2D_1+2D_2$

$\varepsilon_0E_0=2\varepsilon_0E_1+2\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_2$

$E_0=2E+2\tilde{\varepsilon}E$

$E_0=2E(1+\tilde{\varepsilon})$

$\vec{E}_{1_{,2}}\uparrow\uparrow\vec{\tau}$; $D_0=\varepsilon_0E_0=\sigma_0=\dfrac{q_0}{S}$

$D_1=\varepsilon_0E_1=\sigma_1=\dfrac{q_1}{S/2}$

$D_2=\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_2=\sigma_2=\dfrac{q_2}{S/2}$

$q_0=q_1+q_2$

$D_0=2D_1+2D_2$

$\dfrac{q_0}{S}=\dfrac{q_1}{S/2}+\dfrac{q_2}{S/2}\Rightarrow\boxed{\sigma_0=2\sigma_1+2\sigma_2}$

$$\underbrace{S\varepsilon_0 E_0}_{q_0} = \frac{\varepsilon_0 E_1 S}{2} + \frac{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} S E_2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E S}{2} + \frac{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} S E}{2}$$

$$E_0 = \frac{E}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon} E}{2} = \frac{E}{2}(1+\tilde{\varepsilon})$$

$$\frac{q_0}{S} = \frac{q_1}{S/2} + \frac{q_2}{S/2}$$

$$\to E = \frac{2E_0}{1+\tilde{\varepsilon}}$$

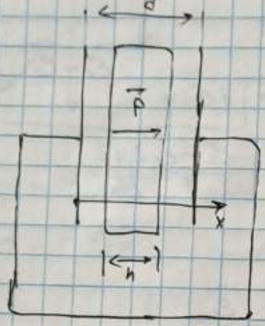
$$D_1 = \varepsilon_0 E = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{1+\tilde{\varepsilon}}$$

$$D_2 = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E = \frac{2\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E_0}{1+\tilde{\varepsilon}}$$

$D \cdot S = q$ (Г.О.) $/ : S$?

$D_0 =$

(6)



$d, h, \vec{P} = const$

$E, D - ?$

$\Delta\varphi = 0$

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{0-h} + \Delta\varphi_{h-d} = 0$$

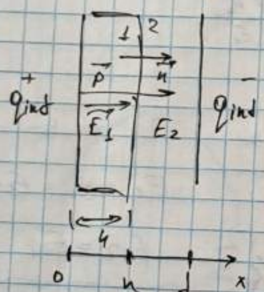
$$\Delta\varphi_{0h} = -\Delta\varphi_{hd}$$

$$\int_0^h E_{1x}\,dx = -\int_h^d E_{2x}\,dx$$

$$E_{1x}\int_0^h dx = -E_{2x}\int_h^d dx$$

$$E_{1x} h = -E_{2x}(d-h)$$

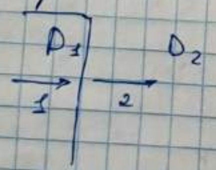
$$E_{2x} = -E_{1x}\frac{h}{d-h}$$



$D_{2x} = \varepsilon_0 E_{2x}$

$D_{1x} = \varepsilon_0 E_{1x} + P_x$ " P

Граничные условия: $E_{2x} = -E_{1x}\frac{h}{d-h}$



$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{своб} = 0$$

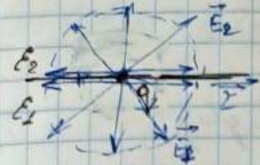
$$\to D_{2n} = D_{1n} \to \boxed{D_{2x} = D_{1x}}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_0 E_{2x} = \varepsilon_0 E_{1x} + P \\ E_{2x} = -\frac{h}{d-h} E_{1x} \end{cases} \to E_{1x} = \frac{-P}{\varepsilon_0\left(1+\frac{h}{d-h}\right)} = \frac{P(h-d)}{\varepsilon_0 d}$$

$$D = D_{2x} = D_{1x} = \varepsilon_0 E_{1x} + P = \frac{\varepsilon_0 P(h-d)}{\varepsilon_0 d} + P$$

Продолжение. Поле в диэлектрике. 18.12.21.

①



$E=?$ $D=?$

ГУ: $D_{2n}-D_{1n}=\sigma_{своб}$; $E_{1\tau}=E_{2\tau}$

$\oint\limits_{(S)} D_n\, dS = q_{своб}$

$$\vec D_1=\varepsilon_1\vec E_1=\varepsilon_0\tilde\varepsilon_1\vec E$$
$$\vec D_2=\varepsilon_2\vec E_2=\varepsilon_0\tilde\varepsilon_2\vec E$$

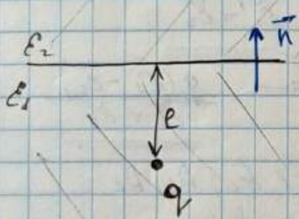
$E=E_1=E_2$ т.к. поля одинаковые в своих пространствах

Гауссова пов-ть – сфера: $D_1\cdot 2\pi r^2 + D_2\cdot 2\pi r^2 = q_{своб}$

$$\varepsilon_0\cdot 2\pi r^2(\tilde\varepsilon_1+\tilde\varepsilon_2)E=q_{своб}$$

$$E=\frac{q_{своб}}{\varepsilon_0\cdot 2\pi r^2(\tilde\varepsilon_1+\tilde\varepsilon_2)}\to D_1 \text{ и } D_2.$$

②

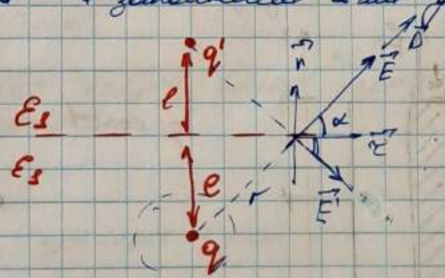


$E=?$ $D=?$

$E_{1\tau}=E_{2\tau}$; $D_{1n}=D_{2n}$

Метод изображений!

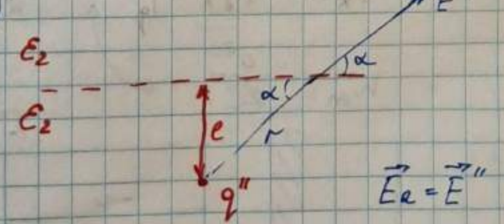
1) Представляем, что есть воображаемая граница и заполнение 1-им диэлектриком.



не обязат. равны $q'\neq q$

$$\vec E_1=\vec E+\vec E'$$

2)



$$\vec E_2=\vec E''$$

$$\vec D_1=\varepsilon_0\tilde\varepsilon_1\vec E_1=\varepsilon_0\tilde\varepsilon_1(\vec E+\vec E')=\vec D+\vec D'$$
$$\vec D_2=\varepsilon_0\tilde\varepsilon_2\vec E_2$$

$D_2\cdot 4\pi r^2=q''\to D_2=\frac{q''}{4\pi r^2}$

$D=\frac{q}{4\pi r^2}$; $D'=\frac{q'}{4\pi r^2}$; $D''=\frac{q''}{4\pi r^2}$

$\cancel{D_{1n} = \frac{q}{4\pi r^2}\cdot \sin\alpha - \frac{q'}{4\pi r^2}}$

n: $\frac{q}{4\pi r^2}\cdot\frac{l}{r} - \frac{q'}{4\pi r^2}\cdot\frac{l}{r} = \frac{q''}{4\pi r^2}\cdot\frac{l}{r} \quad \Big| : \frac{l}{r}$

$\frac{q}{4\pi r^2} - \frac{q'}{4\pi r^2} = \frac{q''}{4\pi r^2} \to q - q' = q'' \Rightarrow q = q' + q''$

$E' = \frac{q'}{\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_1 \cdot 4\pi r^2}$

τ: $\frac{q'}{\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_1 4\pi r^2}\cos\alpha + \frac{q}{\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_1 4\pi r^2}\cos\alpha = \frac{q''}{\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_2 4\pi r^2}\cdot\cos\alpha$

$$\begin{cases} \frac{q'}{\tilde{\varepsilon}_1} + \frac{q}{\tilde{\varepsilon}_1} = \frac{q''}{\tilde{\varepsilon}_2} & \Big| \cdot \tilde{\varepsilon}_1 \\ q - q' = q'' \end{cases}$$

$$+\begin{cases} q' + q = \frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\tilde{\varepsilon}_2} q'' \\ -q' + q = q'' \end{cases} \to 2q = q''\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\tilde{\varepsilon}_2} + 1\right)$$

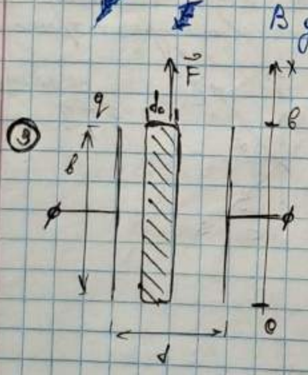
$$q'' = \frac{2q}{\frac{\tilde{\varepsilon}_1}{\tilde{\varepsilon}_2} + 1} = \underline{\underline{\frac{2q\tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2}}}$$

$$q' = q - q'' = q - \frac{2q\tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2} = \frac{q\tilde{\varepsilon}_1 + q\tilde{\varepsilon}_2 - 2q\tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2} = \underline{\underline{\frac{q(\tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2)}{\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2}}}$$

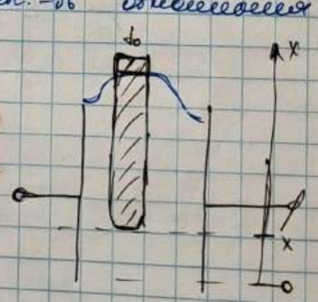
$\to E_1, E_2, D_1, D_2$

В д/з можно исп.-ть отношения зарядов.

⑨

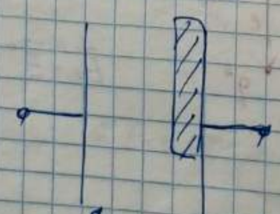


$q = const$

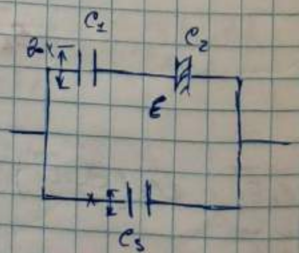


$$F_x = +\frac{\partial W_{эл}}{\partial x}\Big|_q = \frac{q^2}{2}\left(-\frac{1}{C^2}\right)\frac{dC}{dx} = -\frac{q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx}$$

$$W_{эл} = \frac{q^2}{2C}$$



$\to$



$$C_1 = \frac{S}{4\pi k d} = \frac{a(b-x)}{4\pi k(d-d_0)}$$

$$C_2 = \frac{a(b-x)}{4\pi k\varepsilon d_0}; \quad C_3 = \frac{ax}{4\pi k d}$$

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{4\pi k(d-d_0)}{a(b-x)} + \frac{4\pi k \tilde{\varepsilon} d_0}{a(b-x)}$$

$$C' = \frac{a(b-x)}{4\pi k d - 4\pi k d_0 + 4\pi k \tilde{\varepsilon} d_0} = \frac{a(b-x)}{4\pi k(d - d_0 + \tilde{\varepsilon} d_0)}$$

$$C = C' + C_3 = \frac{a(b-x)}{4\pi k(d-d_0+\tilde{\varepsilon} d_0)} + \frac{ax}{4\pi k d} \qquad k = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$$

правильно

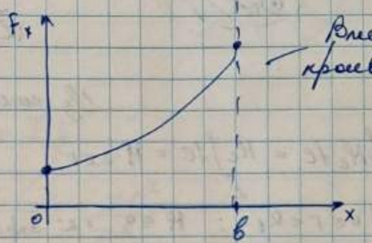
$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

$$\cancel{C = \frac{\varepsilon_0 ax}{d} + \frac{\frac{\varepsilon_0 a(b-x)}{d-d_0} \cdot \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon} a(b-x)}{d_0}}{\frac{\varepsilon_0 a(b-x)}{d-d_0} + \frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon} a(b-x)}{d_0}} = \frac{\varepsilon_0 ax}{d} + \frac{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}(b-x)}{(d-d_0)d_0(d_0+d-d_0)}}$$

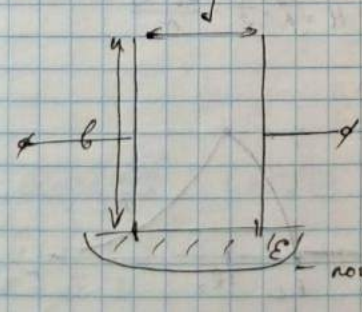
$$C = \frac{\varepsilon_0 ax}{d} + \frac{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} a(b-x)}{d_0 + \tilde{\varepsilon}(d-d_0)} = \varepsilon_0 a\left(\frac{x}{d} + \frac{\tilde{\varepsilon}(b-x)}{d_0+\tilde{\varepsilon}(d-d_0)}\right)$$

$$\frac{dC}{dx} = \varepsilon_0 a\left(\frac{1}{d} - \frac{\tilde{\varepsilon}}{d_0+\tilde{\varepsilon}(d-d_0)}\right) = \varepsilon_0 a \frac{d_0 + \tilde{\varepsilon}d - \tilde{\varepsilon}d_0 - \tilde{\varepsilon}d}{d(d_0+\tilde{\varepsilon}(d-d_0))} =$$

$$= \varepsilon_0 a \frac{d_0(1-\tilde{\varepsilon})}{d(d_0+\tilde{\varepsilon}(d-d_0))} < 0$$



Д/3



$U = const$

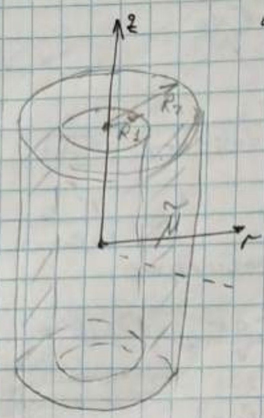
$h = ?$

На какую высоту поднимется диэлектрик

погрузили чуть-чуть в диэл.

Магнетики. в SI

(1)



$R_1, R_2, \tilde{\mu}$

$\oint\limits_{L} H_l\, dl = I_{пр} + \underbrace{I_{см}}_{=0}$

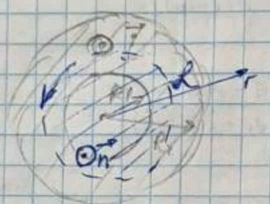
$\oint\limits_{(S)} B_n\, dS = 0$

$I_{пр} = \iint\limits_{S} j_n\, dS$

$\cancel{H\ldots}$

1) $0 < r < R_1$; $H = 0$

2) $\cancel{H \cdot 2\pi r = j(\pi r^2 - \pi R_1^2)}$



$\oint\limits_{(L)} H_l\, dl = I_{пр} = \iint\limits_{(S)} j_n\, dS$, $\vec{B} = \mu_0 \tilde{\mu} \vec{H}$

1) Из симметрии линии поля $\vec{H}$ – окружности

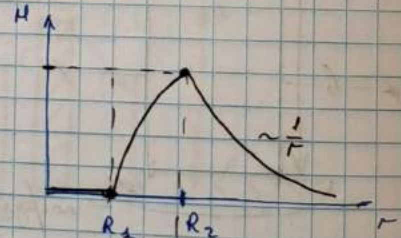
$\oint\limits_{L} H_l\, dl = H_l \int\limits_{L} dl = H \cdot 2\pi r$

1) $0 \le r < R_1$: $H = 0$, т.к. $I_{пр.} = 0$

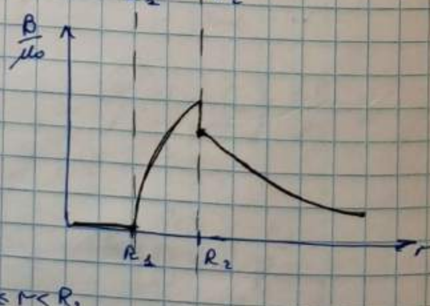
2) $R_1 \le r < R_2$: $I_{пр.} = \iint\limits_{(S)} j_n\, dS = j(\pi r^2 - \pi R_1^2) = j\pi(r^2 - R_1^2) \Rightarrow H = j \cdot \frac{1}{2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)$

3) $r \ge R_2$: $I_{пр.} = \iint\limits_{(S)} j_n\, dS = j\pi(R_2^2 - R_1^2) \Rightarrow H = j \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{r}$

$$\Rightarrow H = \begin{cases} 0, & 0 \le r < R_1 \\ \frac{1}{2} j \left(r - \frac{R_1^2}{r}\right), & R_1 \le r < R_2 \\ \frac{1}{2} j \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{r}, & r \ge R_2 \end{cases}$$

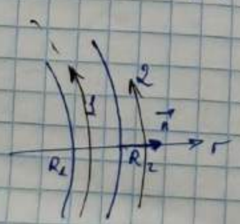


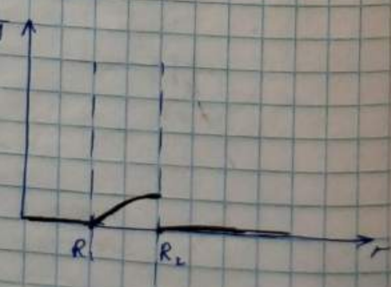
$$B = \begin{cases} 0 \\ \mu_0 \tilde{\mu} \cdot \frac{1}{2} j \left(r - \frac{R_1^2}{r}\right) \\ \mu_0 \cdot \frac{1}{2} j \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{r} \end{cases}$$



$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$; $\vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$

$$J_\varphi = J = \begin{cases} 0, & 0 \le r < R_1 \\ \frac{1}{2} j \left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)(\tilde{\mu} - 1), & R_1 \le r < R_2 \\ 0, & r \ge R_2 \end{cases}$$





2) $\oint\limits_{(\ell)} J_\ell\, d\ell = f I_{мол}$

$\text{rot}\,\vec{J} = f\,\vec{j}_{мол}$

$$\text{rot}\,\vec{J} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial J_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial J_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial J_r}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (J_\varphi \cdot r)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial J_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

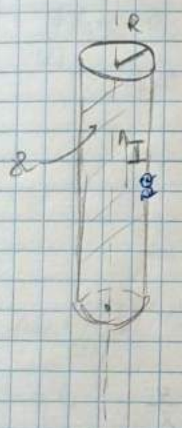
$J_z = J_r = 0$

$$\Rightarrow \text{rot}\,\vec{J} = \underbrace{-\frac{\partial J_\varphi}{\partial z}}_{=0}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial (J_\varphi \cdot r)}{\partial r}\vec{e}_z$$

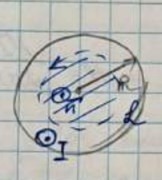
$$J_\varphi \cdot r = \frac{j(\tilde{\mu}-1)}{2}(r^2 - R_1^2)$$

$$(J_\varphi \cdot r)'_r = j(\tilde{\mu}-1)r \quad \Rightarrow \frac{1}{r}\cdot j(\tilde{\mu}-1)r\cdot\vec{e}_z = \underline{\underline{j(\tilde{\mu}-1)\vec{e}_z}} = \text{rot}\,\vec{J} = \underline{\underline{\vec{j}_{мол}}}$$

(2)



$I_{мол}^{об} = ?$ $I_{мол}^{пов} = ?$ I



$\oint\limits_{\ell} H_\ell\, d\ell = I_{пр.}$

1) $0 \le r < R_1$

$H \cdot 2\pi r = I \cdot \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$

$H = I \cdot \frac{1}{2\pi R^2}\cdot r$

2) $r \ge R_1$

$H = \frac{I}{2\pi r}$

$$H = \begin{cases} I \cdot \frac{1}{2\pi R^2}\cdot r, & 0 < r < R_1 \\ \frac{I}{2\pi r}, & r \ge R_1 \end{cases}$$

$j = \frac{I}{\pi R^2}$

$\tilde{\mu} = 1 + \varkappa$

$\varkappa = \tilde{\mu} - 1$

Нужны только молек. токи: берём внутри $\rightarrow H = \frac{1}{2} j r, \; r < R$

$J = \varkappa H = \frac{1}{2}\varkappa j r \;, \; r \le R$

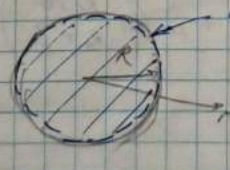
$J = 0 \;, \; r > R$

$\oint\limits_{(\ell)} J_\ell\, d\ell = I_{мол} = \iint\limits_{(S)} j_n^{мол}\, dS$

const? → проверим через ротор.

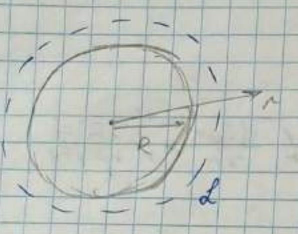
$\vec{j}_{мол} = \text{rot}\,\vec{J} = \frac{1}{r}\frac{\partial (J_\varphi \cdot r)}{\partial r}\vec{e}_z = \varkappa j\,\vec{e}_z \Rightarrow$ однородное! (по сечению)

берём контур почти радиуса R



$\underline{I_{мол}^{об}} = \iint\limits_{(S)} j_n^{мол}\, dS =$

$= \varkappa j \cdot \pi R^2 = \underline{\varkappa I}$

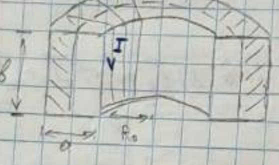


$$\oint\limits_{(L)} \vec{J}\,d\vec{l} = 0 = I^{\text{об}}_{\text{мол}} + I^{\text{пов}}_{\text{мол}}$$

$$J = 0$$

$$\Rightarrow I^{\text{пов}}_{\text{мол}} = -I^{\text{об}}_{\text{мол}} = -\varkappa I$$

③ Тороид. Намотка

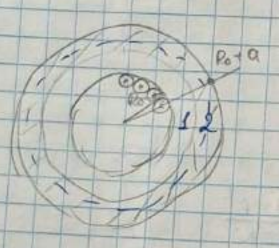


$L = ?$ (индуктивность) SI

$$L = \frac{\Phi_B}{I}$$

1: $B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$

$$\Phi_1 = \int\limits_{R_0}^{R_0+\frac{a}{2}} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\, b\, dr = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_0 + \frac{a}{2}}{R_0}$$



$$\Phi_{1\Sigma} = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_0 + \frac{a}{2}}{R_0}$$

2: $\oint\limits_{(L)} \vec{H}\,d\vec{l} = I_{\text{пр}}$

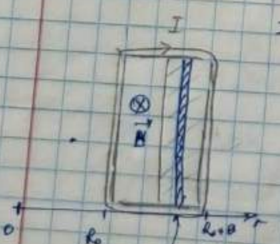
$$H \cdot 2\pi r = NI \rightarrow H = \frac{NI}{2\pi r}$$

$$B = \mu_0 \tilde{\mu} \frac{NI}{2\pi r}$$

$$\Phi_{2\Sigma} = \frac{\mu_0 \tilde{\mu} N^2 I}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_0 + a}{R_0 + \frac{a}{2}}$$

$$\Phi_\Sigma = \Phi_{1\Sigma} + \Phi_{2\Sigma} = \frac{\mu_0 \tilde{\mu} N^2 I}{2\pi} \ln \frac{R_0 + a}{R_0 + \frac{a}{2}} + \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_0 + \frac{a}{2}}{R_0}$$

$$L = \frac{\Phi_\Sigma}{I} =$$



В массе:

$$\oint\limits_{(L)} \vec{H}\,d\vec{l} = I_{\text{охват}}$$

$$H \cdot 2\pi r = NI \quad (R_0 \le r \le R_0 + a)$$

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}, & R_0 \le r < R_0 + \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{\mu_0 \tilde{\mu} N I}{2\pi r}, & R_0 + \dfrac{a}{2} \le r \le R_0 + a \end{cases}$$

$$\Phi_B = \int\limits_{R_0}^{R_0+\frac{a}{2}} \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi r} \cdot b\, dr + \int\limits_{R_0+\frac{a}{2}}^{R_0+a} \mu_0 \tilde{\mu} \frac{N^2 I}{2\pi r} b\, dr = \mu_0 \frac{N^2 I}{2\pi} \cdot b \left(\ln \frac{R_0 + \frac{a}{2}}{R_0} + \tilde{\mu} \ln \frac{R_0 + a}{R_0 + \frac{a}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \left(\ln \frac{R_0 + \frac{a}{2}}{R_0} + \tilde{\mu} \ln \frac{R_0 + a}{R_0 + \frac{a}{2}} \right)$$

$\frac{R_0+\frac{a}{2}}{R_0}$

$\frac{a}{2}$

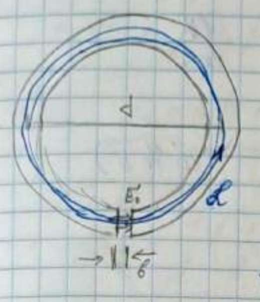
$+\tilde{\mu}\ln\frac{R_0+a}{R_0+\frac{a}{2}}\Big)$

④ Постоянный магнит в форме кольца.

$b \ll d$, d ~ средний диаметр

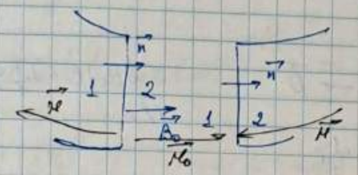
$\vec{B}_0$ – в зазоре.

H – ? (в зазоре и магните)



$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \sim \text{в зазоре}$$

$B_{1n} = B_{2n}$



$\oint\limits_{(\mathcal{L})} H_e\,dl = 0$

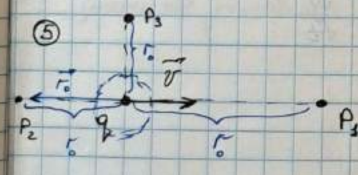
$$\oint H_e\,dl = \int\limits_{(b)} H_0\,dl + \int\limits_{(\text{магн})} H_e\,dl = H_0\cdot b + H\cdot(\pi d - b) = 0$$

$$H_e = -\frac{B_0}{\mu_0}\,\frac{b}{\pi d - b}$$

Ток смещения.

$$I_{см} = \iint\limits_{(S)} j_n^{см}\,dS = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial D_n}{\partial t}\,dS$$

⑤



$q>0$, $v \ll c$

$\vec{j}_{см} = ?$

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\cdot\frac{\vec{r}_0}{r} = \vec{e}_r \qquad \text{Или например } \vec{e}_r = \frac{\vec{v}}{v}$$

$= \vec{e}_r$

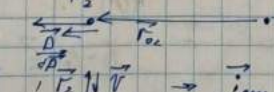
$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{q}{4\pi}\left(-\frac{2}{r^3}\right)\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{\vec{r}_0}{r}$$

единичный вектор

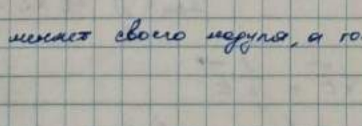
1) P_1: $\frac{dr}{dt} = -v$ ~ приближается

$r_0 \equiv r$ ~ меняется, не константа.

$$\vec{j}_{см\,1} = +2\,\frac{q\vec{v}}{4\pi r^3}$$

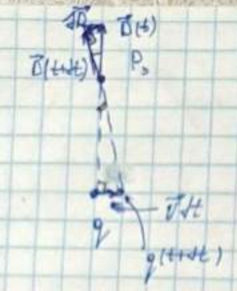


2) P_2: $\frac{dr}{dt} = v$ ~ убегает



$$j_{см_n} = -\frac{qv}{2\pi r^3}\ ;\ \vec{D}_2 \uparrow\downarrow \vec{v}\ ;\ \vec{r}_2 \uparrow\downarrow \vec{v} \;\rightarrow\; \vec{j}_{см_2} = +\frac{q}{2\pi r^3}\vec{v}$$

3) P_3: $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{r}_0]$ – если вектор не меняет своего модуля, а только направ-е



$$\frac{dD}{v\,dt} = \frac{D}{r_0}$$

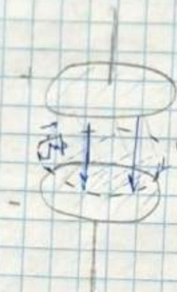
$$\Rightarrow j_{см_1} = \frac{dD}{dt} = \frac{vD}{r_0} = \frac{qv}{4\pi r_0^3}$$

?

?

$$\vec{j}_{см_2} = -\frac{q\vec{v}}{4\pi r_0^3} \qquad (d\vec{D} \uparrow\downarrow \vec{v})$$

⑥



$H = ?$

$q_{своб} \to \vec{D}$

$\oint\limits_{(L)} H_e\,dl = I_{пр} + I_{см}$

$\sigma \to \vec{j}_{пр}$

$\downarrow$

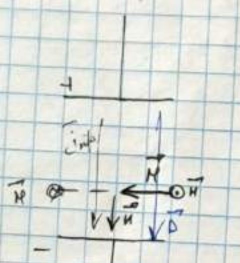
$q_{своб} = q(t)$

$\downarrow$

$\vec{D} = \vec{D}(t)$

$\downarrow$

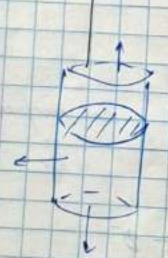
$\vec{j}_{см}$



$$\Rightarrow H \cdot 2\pi r = I_{пр} + I_{см} = \iint\limits_{(S)} j_n^{пр}\,dS + \iint\limits_{(S)} j_n^{см}\,dS$$

$I_{пр} = -\frac{dq}{dt}$ (т.к. заряд стекает)

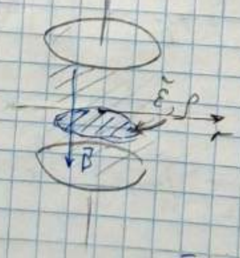
$$I_{см} = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial D_n}{\partial t}\,dS = \frac{\partial D_n}{\partial t} \cdot S = \frac{dq}{dt}$$



По т. Г-О. $D \cdot S = q$

$$\Rightarrow \oint\limits_{(L)} H_e\,dl = 0 \quad \Rightarrow \quad H = 0$$

⑦



$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos\omega t$

$H(r) = ?$

$\oint\limits_{(L)} H_e\,dl = I_{пр} + I_{см}$

$\vec{D} = \varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\vec{E}$

$D = \varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_0\cos\omega t$

$$I_{см} = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial D_n}{\partial t}\,dS = -\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_{0n}\,\omega\sin\omega t \cdot S$$

$$\vec{j}_{пр} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$$

$$I_{пр} = \iint\limits_{(S)} \frac{1}{\rho}E_n\,dS = \frac{1}{\rho}E_{0n}\cos\omega t \cdot S \;;$$

$$\oint H_\ell\, d\ell = H_\ell \cdot 2\pi r = \frac{1}{\rho} E_0 \cos\omega t \cdot S - \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E_{0_n} \omega S \sin\omega t$$

$$H_\ell \cdot 2\pi r = \frac{1}{\rho} E_{0_n} \cos\omega t \cdot \pi r^2 - \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E_{0_n} \omega \cdot \pi r^2 \cdot \sin\omega t \quad /:2\pi r$$

$$H_\ell = \frac{E_{0_n} r}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{\rho}\cos\omega t - \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}\,\omega \cdot \sin\omega t\right)} = \to A\cos(\omega t+\varphi)$$

$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + (\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\omega)^2\right)^{-1/2}$$

$$\sin\varphi = \varepsilon\tilde{\varepsilon}\,\omega\left(\frac{1}{\rho^2} + (\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\omega)^2\right)^{-1/2} \to \varphi$$

$$= \frac{1}{2}E_{0_n} r\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + (\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\omega)^2} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$\oint\limits_{(S)} B_n\, dS = 0$

СИ: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$

$\oint\limits_{(L)} H_\ell\, d\ell = I_{пр} + I_{см} = \iint\limits_{(S)} j_n^{пр}\, dS + \iint\limits_{(S)} j_n^{см}\, dS.$

$\oint\limits_{L} J_\ell\, d\ell = I_{мол}.$

Магн: $\vec{J} = \chi\vec{H} \to \vec{B} = \mu_0\tilde{\mu}\vec{H}$

Граничн. условия: 2 $\otimes\vec{n}$ $\uparrow\vec{n}$ $\vec{\tau}$ 1

$B_{1n} = B_{2n}.$

$H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_N^{пр}$

$\alpha = \frac{n p_0^2}{3\varepsilon_0 kT}$

$\beta = \frac{e^2}{k\varepsilon_0}$

4 семестр

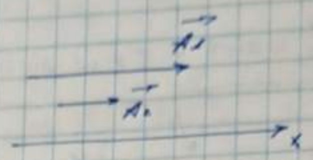
7.02.22. Задачник Иродова
Савушкин (Электричество и магнетизм.)

ге мен.

Сложение колебаний

① $\vec{S_1} = \vec{A_1}\cos(\omega t + \varphi_1)$

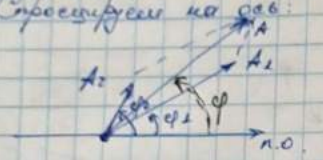
$\vec{S_2} = \vec{A_2}\cos(\omega t + \varphi_2)$



$\vec{A_1} \parallel \vec{A_2}$

$\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2} = ?$

Спроецируем на ось:



$S_{1x} = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$
$S_{2x} = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

$$tg\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$\vec{A} = \vec{A_1} + \vec{A_2} \rightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2(\vec{A_1}\cdot\vec{A_2})$

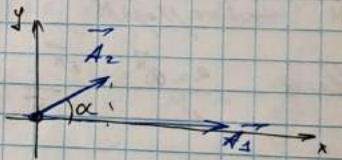
$\vec{S} = \vec{A}\cos(\omega t + \varphi)$ – результирующее колебание.

$\vec{A}$ по оси x, меняется по амплитуде и направлению.

(11.) $\vec{S_1} = \vec{A_1}\cos(\omega t + \varphi_1)$

$\vec{S_2} = \vec{A_2}\cos(\omega t + \varphi_2)$

$(\widehat{\vec{A_1}, \vec{A_2}}) = \alpha$



1) $S_{1x} = A_1\cdot\cos(\omega t + \varphi_1)$
$S_{2x} = \underbrace{A_2\cos\alpha}_{A_2^{нов.}}\cos(\omega t + \varphi_2)$

аналогично 1.0

2) $S_{1y} = 0$
$\cancel{S_{2y} = A_2\sin(\omega t + \varphi_2)}$
$S_{2y} = A_2\sin\alpha\cdot\cos(\omega t + \varphi_2)$

$\Rightarrow S_x = A_x\cos(\omega t + \varphi_x)$
$S_y = S_{2y} = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)\cdot\sin\alpha$

$S_x(t) = A_x\cos(\omega t + \varphi_x)$, $\varphi_x = 0$ – пусть "0" отсчёта будем отсчитывать.
$S_y(t) = A_y\cos(\omega t + \varphi_y)$

$S_x(t) = A_x\cos(\omega t) \rightarrow \cos(\omega t) = \frac{S_x}{A_x}$
$S_y(t) = A_y\cdot(\cos\varphi_y\cdot\cos\omega t - \sin\varphi_y\cdot\sin\omega t)$

$$S_y(t) = A_y\cdot\left(\cos\varphi_y\cdot\frac{S_x}{A_x} - \sin\varphi_y\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{S_x}{A_x}\right)^2}\right)$$

$$\frac{A_y\cos\varphi_y\,S_x}{A_x} - S_y = A_y\sin\varphi_y\sqrt{1 - \left(\frac{S_x}{A_x}\right)^2} \quad \Big/\cdot A_x$$

$$A_y \cos\varphi_y\, S_x - A_x \cdot S_y = A_x A_y \sin\varphi_y \sqrt{1-\left(\frac{S_x}{A_x}\right)^2} \quad \uparrow^2$$

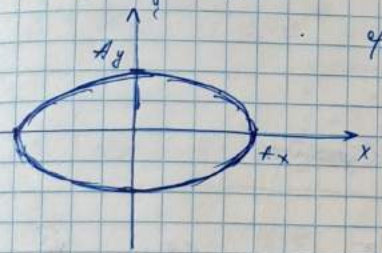
$$A_y^2 \cos^2\varphi_y\, S_x^2 - 2A_y A_x \cos\varphi_y \cdot S_x S_y + A_x^2 S_y^2 = A_x^2 A_y^2 \sin^2\varphi_y \left(1 - \frac{S_x^2}{A_x^2}\right)$$

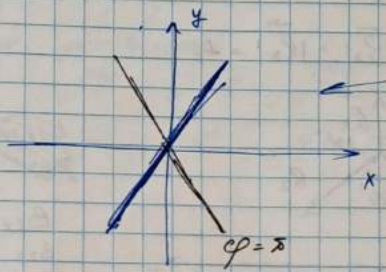
$$\frac{S_y}{A_y} - \frac{S_x}{A_x}\cos\varphi_y = \mp\sqrt{1-\left(\frac{S_x}{A_x}\right)^2}\,\sin\varphi_y \quad \uparrow^2$$

$$\left(\frac{S_y}{A_y}\right)^2 - \frac{2S_y S_x}{A_y A_x}\cos\varphi_y + \frac{S_x^2}{A_x^2}\cos^2\varphi = \sin^2\varphi_y\left(1 - \frac{S_x^2}{A_x^2}\right)$$

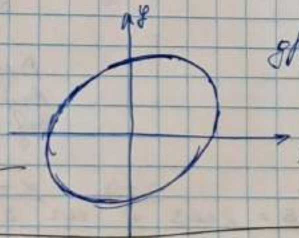
$$\left(\frac{S_y}{A_y}\right)^2 - \frac{2\cos\varphi_y}{A_y A_x}\cdot S_y S_x + \left(\frac{S_x}{A_x}\right)^2 = \sin^2\varphi_y$$ ~ эллипс.

$\varphi_y = \frac{\pi}{2}$





$\varphi_y = 0,$
$\varphi_y = \pi$

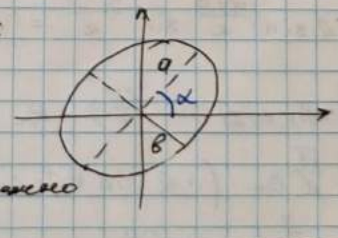


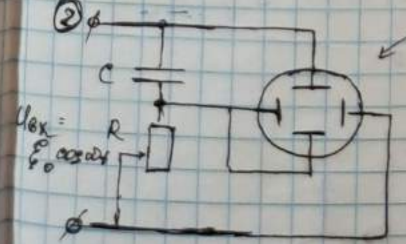
другие φ.

Д/З* Даны полуоси эллипса:
дано, a, b, α.

Найти фазу колебаний:
$\operatorname{tg}\varphi = ?$

Фазу первого колебания можно считать нулём.





осциллограф с эллипсом: $\frac{a}{b} = 2$
C, ω

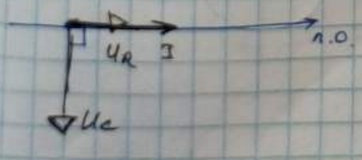
Найти: $R = ?$

$U_{вх} = \tilde{\xi}_0 \cos\omega t$

$S_y = U_C$
$S_x = U_R$

$U_R = IR$

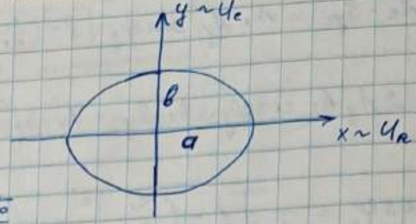
$U_C = \frac{I}{\omega C}$



На экране эллипс.

$$\frac{U_R}{U_C} = \frac{a}{b} = 2$$

$$\frac{IR\omega C}{I} = 2 \quad \to R = \frac{2}{\omega C}$$

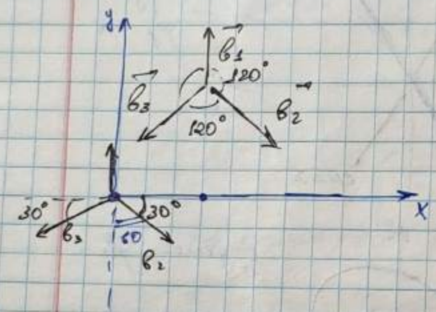


(3) $\vec{B_1} = \vec{b_1} B_0 \cos \omega t$

$\vec{B_2} = \vec{b_2} B_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$

$\vec{B_3} = \vec{b_3} B_0 \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$

$|\vec{b_1}| = |\vec{b_2}| = |\vec{b_3}| = 1.$



$B_{1x} = 0$

$B_{2x} = B_0 \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) = B_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$

$B_{3x} = -B_0 \cos\frac{\pi}{6} \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$

$B_{1y} = B_0 \cos \omega t$

$B_{2y} = B_0 \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$

$B_{3y} = -B_0 \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$

Формулы

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$B_x = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} B_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) - B_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} B_0 \left(\cdot 2 \sin \omega t \sin\frac{2\pi}{3} \right) = + \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} \cdot B_0 \sin \omega t =$$

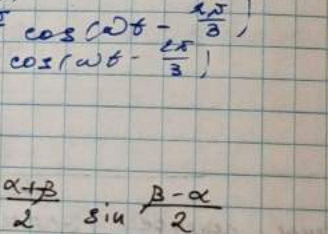
$$= \frac{3}{2} B_0 \sin \omega t$$

$$B_y = B_0 \cos \omega t - B_0 \cdot \frac{1}{2} \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) - B_0 \cdot \frac{1}{2} \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) =$$

$$= B_0 \cos \omega t - B_0 \cos\frac{2\pi}{3} \cdot \cos \omega t = \frac{3}{2} B_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_x = \frac{3}{2} B_0 \sin \omega t \\ B_y = \frac{3}{2} B_0 \cos \omega t \end{cases} \text{— окружность}$$

$$B_x^2 + B_y^2 = \left(\frac{3}{2} B_0\right)^2$$



④ N колебаний. (эквидистантные.)
(n)

ω, A МКА.

$s_1 = A\cos\omega t \to \hat{s}_1 = A\cdot e^{i\omega t}$

$s_2 = A\cos(\omega t+\varphi) \to \hat{s}_2 = A e^{i\varphi} e^{i\omega t}$

$s_3 = A\cos(\omega t+2\varphi) \to \hat{s}_3 = A\cdot e^{i2\varphi} e^{i\omega t}$

$\dots$

$s_N = A\cos(\omega t+(N-1)\varphi) \to \hat{s}_N = A\cdot e^{i(N-1)\varphi} e^{i\omega t}$

$s = \sum_{n=1}^{N} s_n = ? \iff A_\Sigma = ?$

$\varphi_\Sigma = ?$

$\hat{s} = A e^{i\omega t}\left(1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{i(N-1)\varphi}\right)$

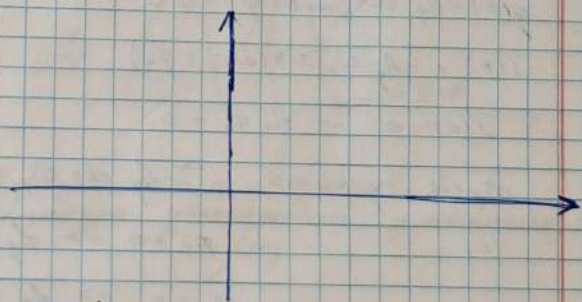
сумма геом. прогрессии

$$\boxed{\hat{A}_\Sigma = A\cdot 1\cdot\frac{1-e^{i\varphi N}}{1-e^{i\varphi}}} = A\cdot\frac{e^{\frac{iN\varphi}{2}}\left(e^{-\frac{iN\varphi}{2}} - e^{\frac{iN\varphi}{2}}\right)}{e^{\frac{i\varphi}{2}}\left(e^{-\frac{i\varphi}{2}} - e^{\frac{i\varphi}{2}}\right)}\cdot\frac{2i}{2i} =$$

$$= A\cdot e^{i\frac{(N-1)}{2}\varphi}\cdot\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$A_\Sigma = |\hat{A}_\Sigma| = A\left|\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|\cdot 1$ ✓

$\varphi_\Sigma = \frac{N-1}{2}\varphi$ ✓



1) $\varphi = 2\pi k$ $k\in\mathbb{Z}$

$A_\Sigma = A\left|\frac{\sin(N\cdot\pi k)}{\sin(\pi k)}\right| = AN;$ правило Лопиталя.

2) $\varphi = \pi k$

k - нечетн.

N - нечетн.

$A_\Sigma = A\left|\frac{\sin\left(\frac{N\cdot\pi k}{2}\right)}{\sin\frac{\pi k}{2}}\right| = A$

$\sin\frac{\varphi}{2} = \pm 1$

$\sin\frac{N\varphi}{2} = \pm 1$

3) $\frac{N\varphi}{2} = \pi k$

Пусть $\frac{k}{N}$ ~ нецелое

$\to A_\Sigma = 0$

$\sin\pi k = \pm 0$

$\sin\left(\frac{N\varphi}{4}\right)$

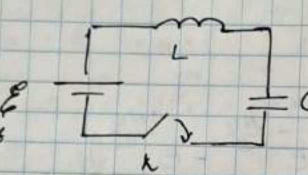
Д/з** Графики $A_\Sigma = A\cdot\left|\dfrac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|$ ~ для $N=4$
$A_\Sigma(\varphi)$

Д/з*** Сложить N колебания из прошл. задачи МВА (проверить.)

Свободные колебания линейного осциллятора.

$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = f(t)$

①



$I_{max} = ?$
$U_{C\,max} = ?$

$U_C = \mathcal{E} - L\dfrac{dI}{dt}$

$\dfrac{1}{C}q + L\ddot{q} = \mathcal{E}$

$\ddot{q} + \dfrac{1}{LC}q = \dfrac{\mathcal{E}}{L} \;\Big|\cdot\dfrac{d}{dt} \Rightarrow \ddot{I} + \dfrac{1}{LC}I = 0$

$\downarrow$

$I(t) = A_I\cos(\omega_0 t + \varphi_I)$

$q(t) = A_q\cos(\omega_0 t + \varphi) + \mathcal{E}C$

$I(t) = -A_q\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_q)$

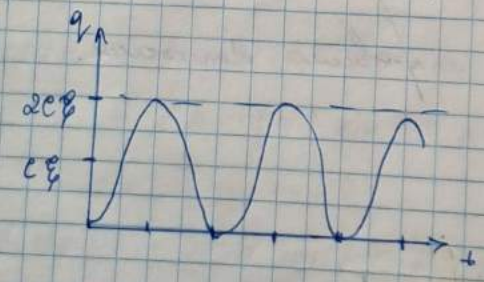
$I(0) = 0 \rightarrow \sin\varphi_q = 0$

Пусть $q(0) = 0 \rightarrow A_q\cos\varphi_q + C\mathcal{E} = 0$

$\varphi_q = 0 \Rightarrow A_q = -C\mathcal{E} < 0 \Rightarrow \varphi_q \neq 0$

$\varphi_q = \pi \Rightarrow A_q = C\mathcal{E}$ ✓ $\Rightarrow$

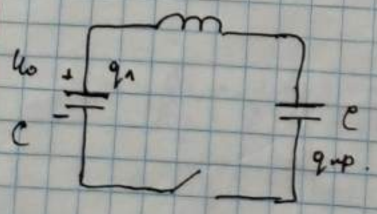
$\Rightarrow q(t) = C\mathcal{E}(1 - \cos\omega_0 t)$



$U_{C\,max} = 2\mathcal{E}$

$I_{max} = C\mathcal{E}\omega_0 = \dfrac{C\mathcal{E}}{\sqrt{LC}} = \mathcal{E}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

②



$C_1 = C_{пр} = C$

$U_1(t=0) = U_0$
$U_{пр}(0) = 0$

$U_1(t) - ?$ $U_{пр}(t) = ?$

$U_1(t) = U_{пр.}(t) - L\dfrac{dI}{dt} \Rightarrow \dfrac{q_1}{C} - \dfrac{(q_0 - q_1)}{C} + L\dfrac{d^2 q_1}{dt^2} = 0$

ЗСЗ $q_0 = CU_0$; $q_1(t) + q_{пр.}(t) = CU_0$

$I = \dfrac{dq_1}{dt}$; $q_{пр} = q_0 - q_1$

$$\Rightarrow \frac{2q_1}{C} - \frac{q_0}{C} + L\frac{d^2q_1}{dt^2} = 0$$

$$L\ddot{q}_1 + \frac{2}{C}q = \frac{q_0}{C} \to \ddot{q}_1 + \frac{2}{LC}q = \frac{q_0}{LC}$$

$$q_1(t) = A_0\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{q_0}{2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{2}{LC}$$

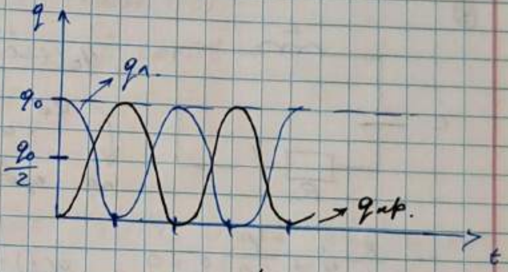
$$\begin{cases} A_0\cos\varphi + \frac{q_0}{2} = q_0 \\ -A_0\omega_0\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0,\ \varphi = \pi$$

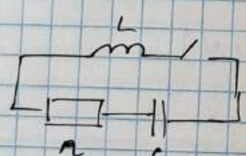
$$A_0\cos\varphi = \frac{q_0}{2} \Rightarrow A_0 = \frac{q_0}{2} > 0, \text{ если } \varphi = 0$$

$$q_1(t) = \frac{q_0}{2}(1 + \cos\omega_0 t) = \frac{CU_0}{2}(1 + \cos\omega_0 t)$$

$$q_{пр}(t) = \frac{CU_0}{2}(1 - \cos\omega_0 t)$$



⑤



$N = ?$ Через сколько периодов амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

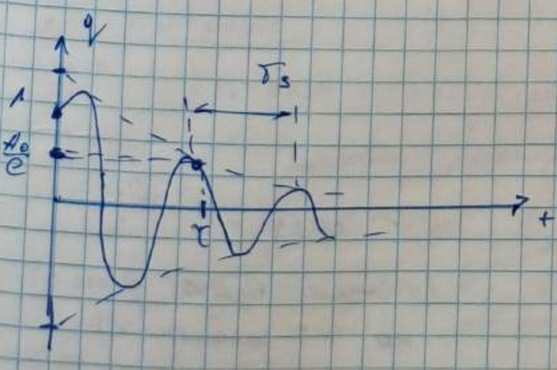
$$IR + U = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\ddot{q}L + \dot{q}R + \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\frac{R}{L} = 2\delta \qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \to q(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_s t + \varphi)$$

$$N = \frac{\tau}{T_s} = \frac{\tau\omega_s}{2\pi} = \frac{\omega_s}{2\pi\delta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\pi\delta} = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{\frac{2\pi R}{2L}}$$



$Q = \pi N$ ~ определение.

④ Произвольный осциллятор.

Известно τ, $x(0) = x_0$

Найти: $\dot{x}(0)$: $x_0 = A_0$

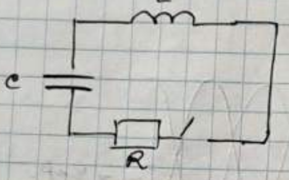
$$x(t) = \underset{x_0}{A_0}\, e^{-\delta t} \cos(\omega_s t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = \underset{x_0}{A_0}\, e^{-\delta t} \left(-\delta \cos(\omega_s t + \varphi) - \omega_s \sin(\omega_s t + \varphi)\right)$$

$$x(0) = x_0 = A_0 e^{-\delta \cdot 0} \cos\varphi = A_0 \cos\varphi = x_0 \cos\varphi \;\; \Rightarrow \;\; \varphi = 0$$

$$\boxed{\dot{x}(0) = -x_0 \delta = -\frac{x_0}{\tau}}$$

⑤



$\underline{U_C(t=0)}$ – ?

U_0 – амплитуда

по един $\dfrac{q(t=0)}{q_0}$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad q(t) = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_s t + \varphi)$$

$$U_C(t) = q(t) \cdot C = \underset{U_0}{C q_0}\, e^{-\delta t} \cos(\omega_s + \varphi)$$

$$q(t=0) = q_0 \cos\varphi$$

$$\dot{q} = q_0 e^{-\delta t}\left(-\delta \cos(\omega_s t + \varphi) - \omega_s \sin(\omega_s t + \varphi)\right)$$

$$\dot{q}(0) = q_0 (-\delta \cos\varphi - \omega_s \sin\varphi) = 0$$

$$\frac{q(t=0)}{q_0} = \cos\varphi$$

$$\delta \cos\varphi = -\omega_s \sin\varphi$$

$$\delta^2 \cos^2\varphi = \omega_s^2 (1 - \cos^2\varphi)$$

$$(\delta^2 + \omega_s^2) \cos^2\varphi = \omega_s^2$$

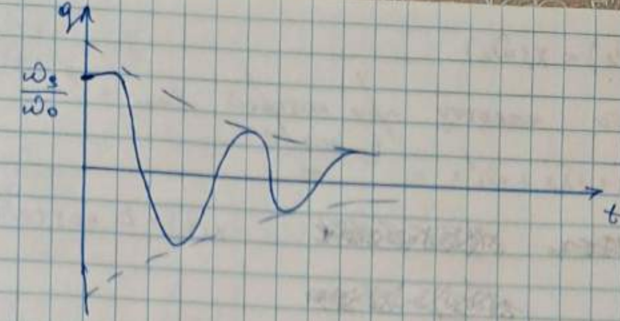
$$\cos^2\varphi = \frac{\omega_s^2}{\delta^2 + \omega_s^2}$$

$$= \omega_0^2 - \delta^2$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \pm \frac{\omega_s}{\omega_0}$$

(можем взять $q(0) > 0$ на "+" пластине)

$\cos\varphi = \frac{\omega_з}{\omega_0}$



$\varphi = 0$

21.02.

Вынужденные колебания линейного осциллятора.

① m

$F_x = F_0\cos\omega t$

$x(t) = x_0\sin\omega t$ $\Big\}\ \psi = \frac{\pi}{2}$

δ - ?

$\delta =$

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$

$\dot{x} = x_0\cdot\omega\cos\omega t$

$\ddot{x} = -x_0\omega^2\sin\omega t$

$-x_0\omega^2\sin\omega t + 2\delta\cdot x_0\cdot\omega\cos\omega t + \omega_0^2\cdot x_0\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$

$\sin\omega t\cdot(x\omega_0^2 - x_0\omega^2) + \cos\omega t\left(2\delta x_0\cdot\omega - \frac{F_0}{m}\right) = 0$

$$\begin{cases} \omega_0^2 x_0 - x_0\omega^2 = 0 \\ 2\delta x_0\cdot\omega - \frac{F_0}{m} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_0^2 = \omega^2 \\ \delta = \frac{F_0}{2x_0\omega m} \end{cases}$$

В классе:

$ma_x = \sum_{n=1}^{N} F_{nx}$

$m\ddot{x} = F_x + F_{сопр\,x} + F_{упр\,x}$

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_x}{m} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$

Если посмотреть на ур-е $x(t) = x_0\sin\omega t$, $A = const$ => F_x и $F_{сопр.x}$ компенсируют друг друга.

$\dot{x} = x_0\omega\cos\omega t$

$\ddot{x} = -x_0\omega^2\sin\omega t$

$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0\sin\omega t + 2\delta x_0\cdot\omega\cdot\cos\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$

1) $\omega_0^2 = \omega^2$ (условие резонанса на фаз. рез. кривой)

$S(t) = B\cos(\omega t - \psi)$, $\psi = \frac{\pi}{2}$

2) $2\delta x_0\omega = \frac{F_0}{m}$ => $\delta = \frac{F_0}{2x_0\omega m}$

② $X_0(\omega_1) = X_0(\omega_2)$

Найти частоту при которой $X_{max} = ?$ – вынужденные колеб-я.

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \cos\omega t}{m}$$

$$x(t) = B\cos(\omega t - \psi)$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = f_0 \cos\omega t$$

Как только закончится процесс установления:

$$x(t) = x_0\cos(\omega t - \psi) \rightarrow \hat{x} = \hat{x}_0 e^{i\omega t}$$

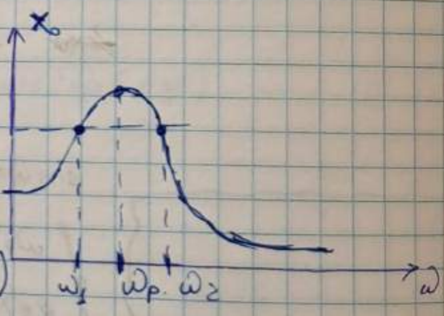
$$\hat{\dot{x}} = i\omega \cdot \hat{x}_0 e^{i\omega t} \quad ; \quad \hat{\ddot{x}} = -\omega^2 \hat{x}_0 e^{i\omega t}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\hat{x}_0 + 2i\delta\hat{x}_0\omega = f_0$$

$$\hat{X}_0 = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\delta\omega} = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad X_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\omega^2(x_{max}) = \omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$$



$$\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\delta^2\omega_2^2}}$$

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2 = (\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\delta^2\omega_2^2$$

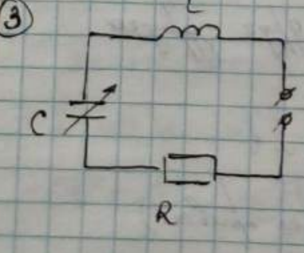
$$\cancel{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}(2\omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) = 4\delta^2\cancel{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}$$

$$2\omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 = 4\delta^2 \quad /:2$$

$$\omega_0^2 - 2\delta^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} = \omega_p^2 = \omega^2(x_{max})$$

$$\Rightarrow \omega_p^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}$$

③



$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos\omega t$

Добиваемся резонанса.

$C_1 \rightarrow \omega_1 = \omega_{0_1}$

$C_2 = \frac{C_1}{2} \rightarrow \omega_2 = \omega_{0_2}$.

$$\frac{I_2}{I_1} = ? \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = ?$$

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \mathcal{E}(t)/L$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \sqrt{2}$$

$\hat{Z}_R = R$; $\hat{Z}_L = i\omega L$; $\hat{Z}_C = -\frac{i}{\omega C}$.

$\hat{\mathcal{E}} =$

$$\hat{I}\left(R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right) = \hat{\mathcal{E}}(t)$$

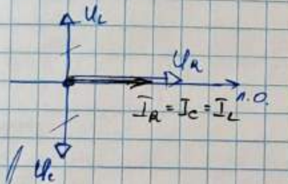
$$\hat{I}\left(R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) = \hat{\mathcal{E}}(t)$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}(t)\cdot\left(R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$I = \left.\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\right|_{\omega = \omega_0} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

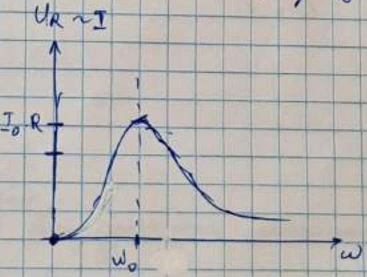
$$\frac{I_2}{I_1} = 1$$ ~ на резонансной частоте.

МВД:



Условие резонанса: $U_L = U_C$

$\Rightarrow$ сразу можно получить ответ.



④ Тот же контур

Док-ть, что при отклонении частоты источника на величину $\Delta\omega$ от ω_0 амплитуду тока можно представить в виде

$$I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2 Q^2}} \quad ; \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \ - ?$$

$$|\Delta\omega| \ll \omega_0 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0 / R}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} =$$

$$= \frac{I_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\omega \cdot \sqrt{L}\cdot\sqrt{L}\cdot\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}} - \frac{1}{\omega\sqrt{C}\cdot\sqrt{C}}\cdot\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{I_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\cdot\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C}} - \frac{\omega_0}{\omega}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\cdot\frac{L}{C}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} =$$

$$= \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega_0 + \Delta\omega}\right)^2}}$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{(\omega_0 \omega)^2} = \frac{(\omega-\omega_0)^2(\omega+\omega_0)^2}{\omega^2\omega_0^2} =$$

$$= \frac{(\Delta\omega)^2 \cdot 4\omega_0^2}{\omega_0^2 \cdot \omega_0^2} = \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$\omega + \omega_0 = \omega_0 \pm \Delta\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$$

$$\omega^2 = (\omega_0 + \Delta\omega)^2 \approx \omega_0^2$$

$$\Rightarrow I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$, ч.т.д. , только при $|\Delta\omega| \ll \omega_0$

Д/З: При частотах генератора ω_1 и ω_2 (даны) амплитуда тока в контуре равна половине максимального значения

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_{max}.$$

Найти: $\omega_0 = ?$
$Q = ?$

Переходные процессы.

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = f(t)$$

$$s(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_s t + \varphi) + B\cos(\omega t - \psi)$$

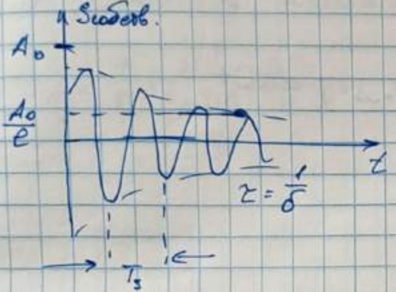
① $Q >> 1$, $\omega = \omega_p$, ω_0; $\tau_{уст} - ?$

$|\Delta\omega| << \omega_0$

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$

$$Q = \frac{\omega_s}{2\delta} = \frac{\omega_s \tau}{2} \approx \frac{\omega_0 \tau}{2} \rightarrow \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

$$\tau_{уст} = \frac{1}{\delta}$$



$$Q = \pi N = \pi \frac{\tau}{T_s} = \frac{\cancel{\pi}\tau\omega_s}{2\cancel{\pi}} \approx \frac{\omega_0 \tau}{2}$$

$$\tau \approx \frac{2Q}{\omega_0}$$

ока

② Осциллятор.

m, $\delta = 0$, ω_0

$F_x(t) = F_0 \cos\omega t$

При каких нач. усл-ях (с самого начала) будут происходить только вынужденные колебания?

$x(0) = ?$
$\dot{x}(0) = ?$
$x(t) = ?$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$x(t) = B\cos(\omega t - \psi)$) В общем случае невозможно

$$\dot{x} = -\omega B \sin(\omega t - \psi)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 B \cos(\omega t - \psi)$$

$$-\omega^2 B\cos(\omega t - \psi) + \omega_0^2 \cdot B\cos(\omega t - \psi) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\cancel{-\omega^2 B(\cos\omega t \cdot \cos\psi + \sin\omega t \sin\psi) + \omega_0^2 B}$$

$$\cos(\omega t - \psi)(\omega_0^2 B - \omega^2 B) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$B\cos(\omega t - \psi)(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$B(\cos\omega t\cos\psi + \sin\omega t\sin\psi)(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$(B\omega_0^2\cos\psi - \omega^2 B\cos\psi)\cos\omega t + (B\omega_0^2\sin\psi - \omega^2 B\sin\psi)\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\hat{B} = \frac{F_0}{m} \rightarrow \hat{B} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$B = \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

ψ - ?

подстав. в ур-е

1) $\omega_0^2 > \omega^2 \Rightarrow B = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \Rightarrow \psi = 0$

2) $\omega^2 > \omega_0^2 \Rightarrow B = -\dfrac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \Rightarrow \psi = \pi$

1) $x(t) = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \cos\omega t$

2) $x(t) = -\dfrac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \cos(\omega t - \pi) = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \cos\omega t$

$\Rightarrow x(0) = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$

$\dot{x}(0) = 0$

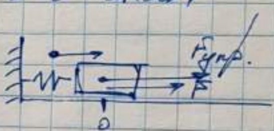
③ грузик

m, $\delta = 0$, k, $F = const$

τ - время действия F

Найти $A = ?$ при $t > \tau$

$x(t) = ?$ - график



$\dot{x}(0) = 0$

$x(0) = 0$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}$$

~~$x(t) = B\cos(\omega t - \psi)$~~

~~$\dot{x} = -\omega B \sin(\omega t - \psi)$~~

~~$\ddot{x} = -\omega^2 B\cos(\omega t - \psi)$~~

~~$\dot{x}(0) = -\omega B \sin(\omega t - \psi) = 0$~~

~~$x(0) = B\cos(\omega t - \psi) = 0$~~

~~$\begin{cases} -\omega B \sin(\omega t - \psi) = 0 \\ B\cos(\omega t - \psi) = 0 \end{cases}$~~

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F}{k}$$

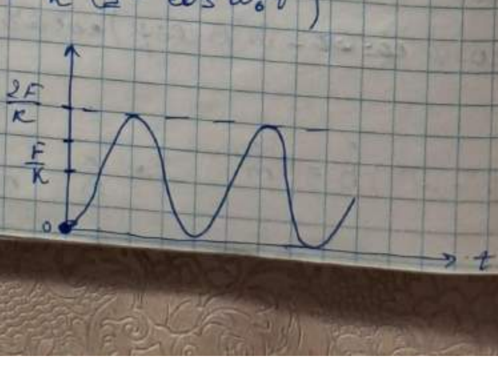
$$\begin{cases} x(0) = A\cos\varphi + \dfrac{F}{k} = 0 \\ \dot{x}(0) = -\omega_0 A \sin\varphi = 0 \end{cases} \rightarrow \varphi = 0, \quad \varphi = \pi$$

$$A = \frac{F}{k}$$

$$x(t) = \frac{F}{k}\cos(\omega_0 t + \pi) + \frac{F}{k} = \frac{F}{k}(1 - \cos\omega_0 t)$$

2) После τ секунд изменится ур-е:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



$$\begin{cases} x(\tau) = \frac{F}{k}(1-\cos\omega_0\tau) \\ \dot{x}(\tau) = \frac{F}{k}\omega_0 \sin\omega_0\tau \end{cases}$$

$\omega_0 t - \omega_0\tau + \varphi_2$

$$x(t) = A_2\cos(\omega_0(t-\tau)+\varphi_2)$$

$x = A_2\cos(\omega_0(t-\tau)+\varphi_2)$
$\dot{x} =$

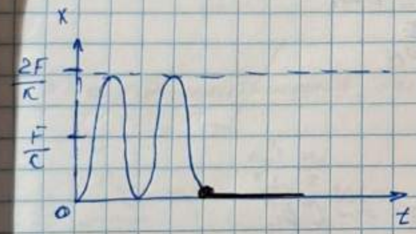
$$\left.\begin{cases} A_2\cos\varphi_2 = \frac{F}{k}(1-\cos\omega_0\tau) \\ -A_2\omega_0\sin\varphi_2 = \frac{F}{k}\omega_0\sin\omega_0\tau \end{cases}\right\} \uparrow^2$$

$$A^2 = \left(\frac{F}{k}\right)^2(2-2\cos\omega_0\tau)$$

$$A_2 = \frac{F}{k}\cdot 2\left|\sin\frac{\omega_0\tau}{2}\right| \; ; \quad tg\varphi_2 = -\frac{\sin\omega_0\tau}{1-\cos\omega_0\tau} = -\frac{\sin\omega_0\tau}{2\sin^2\frac{\omega_0\tau}{2}} =$$

$$= -\frac{2\sin\frac{\omega_0\tau}{2}\cos\frac{\omega_0\tau}{2}}{2\sin^2\frac{\omega_0\tau}{2}} = -\frac{4}{4}ctg\frac{\omega_0\tau}{2} =$$

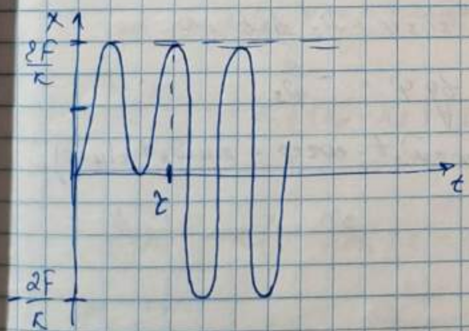
$$= -ctg\frac{\omega_0\tau}{2}$$



① $\sin\frac{\omega_0\tau}{2} = 0$

$\frac{\omega_0\tau}{2} = \pi k. \rightarrow \tau = \frac{2\pi k}{\omega_0}$

$\rightarrow A_2 = 0, \; x(t) = 0$



② $\left|\sin\frac{\omega_0\tau}{2}\right| = 1$

$\frac{\omega_0\tau}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k.$

$\tau = \frac{\pi}{\omega_0} + \frac{2\pi k}{\omega_0}$

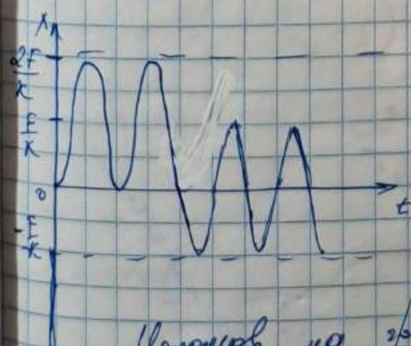
③ Промежуточный.

$A_2 = \frac{F}{k}\cdot 2\left|\sin\frac{\omega_0\tau}{2}\right|$

$\left|\sin\frac{\omega_0\tau}{2}\right| = \frac{1}{2}$

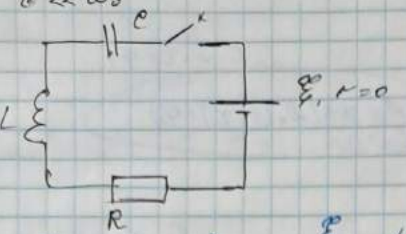
$\frac{\omega_0\tau}{2} = \frac{\pi}{6} + \pi n \rightarrow \tau = \frac{\pi}{3\omega_0} + \frac{2\pi n}{\omega_0}$

$A_2 = \frac{F}{k}$



Изломов на графиках быть не может!

④ $\delta^2 \ll \omega_0^2$



$U_c(0) = 0$ $R \uparrow$

$U_0(0) = ?$ На какое минимальное напряжение он должен быть рассчитан.

$U_{c\,max} = ?$

$$\ddot q + 2\delta \dot q + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}}{L} \quad / \cdot C \qquad C = \frac{q}{U} \to U = Cq$$

$$\ddot U_c + 2\delta \dot U_c + \omega_0^2 U_c = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) \approx -4\omega_0^2$$

$$\sqrt{D} = i2\omega_0 \quad ; \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm i2\omega_0}{2} = -\delta \pm i\omega_0$$

$$q(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi) + \mathcal{E}C$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$q(0) = 0 = A_0 \cos\varphi + C\mathcal{E} \quad \to A_0 \cos\varphi = -C\mathcal{E}$$

$$\dot q(0) = -A_0(\delta\cos\varphi + \omega_1 \sin\varphi) = 0 \quad \to \delta\cos\varphi + \omega_1\sin\varphi = 0$$

$$A_0\omega_1 \sin\varphi - \delta C\mathcal{E} = 0 \qquad tg\,\varphi = -\frac{\delta}{\omega_1}$$

$$q(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_1 t + \varphi) + C\mathcal{E} = A_0 e^{-\delta t}(\cos\omega_1 t \cdot \cos\varphi - \sin\omega_1 t \sin\varphi) + C\mathcal{E}$$

$$tg\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = -\frac{\delta}{\omega_1}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{\delta^2}{\omega_1^2}(1 - \sin^2\varphi)$$

$$\sin^2\varphi = \frac{\delta^2}{\omega_1^2} - \frac{\delta^2}{\omega_1^2}\sin^2\varphi$$

$$\sin^2\varphi\left(1 + \frac{\delta^2}{\omega_1^2}\right) = \frac{\delta^2}{\omega_1^2}$$

$$\sin\varphi = \frac{\delta/\omega_1}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega_1^2}}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\delta}{\omega_1} \cdot \frac{\mathcal{E}C}{A_0}$$

Всё подставить.

Дальше арифметика.

$U_c(t) = \mathcal{E}[1 -$

$U_{c\,max} = 2\mathcal{E}$

Нормальные колеб

1) СО: сили. ко

1сп-б: а) для своб

$m_0\ddot x + kx$

б) антисимметричн

$\frac{m_c \ddot x_1}{2} = +k((x$

$\frac{m_c}{2}\ddot x_1 - k(-$

$\frac{m_c}{2}\ddot x_1 + k(x_1$

$\ddot x_1 + \frac{2k}{m_c}\left(\frac{m_c}{2m_0} +\right.$

2 способ:

$\frac{m_c}{2}\ddot x_1$

$m_0 \ddot x_2$

$$U_c(t) = \mathcal{E}\left[1 - e^{-\delta t}\left(\cos\omega_1 t + \frac{\delta}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)\right]$$

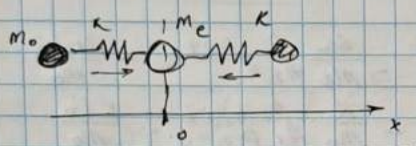
$$U_{c\,max} = 2\mathcal{E}$$

Связанные колебания

7.02.22

Нормальные колебания — с одной и той же част.

1) СО$_2$: симм. колеб. Найти частоты норм. колеб-й?

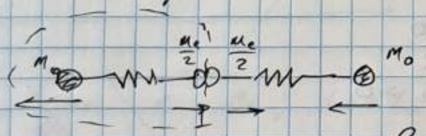


1 сп-б: а) для своб. колебаний: $\vec{a}_c = 0 \to x_{ц.м} = 0$

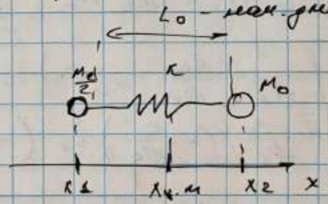
$$m_0 \ddot{x} + \underbrace{kx}_{-F_{упр.} = +kx} = 0 \;\to\; \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ — для симм. колебаний

б) антисимметричный тип.



т.к. ц.м. — непод.



$$\frac{m_c \ddot{x}_1}{2} = +k\left((x_2 - x_1) - L_0\right) \qquad x_{ц.м} = \frac{\frac{m_c}{2}x_1 + m_0 x_2}{\frac{m_c}{2} + m_0} = 0$$

$$x_2 = -\frac{m_c}{2m_0}x_1$$

$$\frac{m_c}{2}\ddot{x}_1 - k\left(-\frac{m_c}{2m_0}x_1 - x_1 - L_0\right) = 0$$

$$\frac{m_c}{2}\ddot{x}_1 + k\left(x_1\left(\frac{m_c}{2m_0} + 1\right) + L_0\right) = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{2k}{m_c}\left(\frac{m_c}{2m_0} + 1\right)x_1 = -\frac{2kL_0}{m_c} \;\to\; \ddot{x}_1 + \left(\frac{k}{m_0} + 1\right)x_1 = -\frac{2kL_0}{m_c}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = k\left(\frac{1}{m_0} + \frac{2}{m_c}\right)$$ — частота для антисимм. колебаний

2 способ:

$$\frac{m_c}{2}\ddot{x}_1 = F_{упр.1x} = k\left((x_2 - x_1) - L_0\right)$$

$$m_0 \ddot{x}_2 = F_{упр.2x} = -k(x_2 - x_1 - L_0)$$

т.к. $F_{упр.2x} = -F_{упр.1x}$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{2k}{m_e} x_1 - \frac{2k}{m_e} x_2 = -\frac{2kL_0}{m_e} \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{m_0} x_2 - \frac{k}{m_0} x_1 = +\frac{kL_0}{m_0} \end{cases}$$

$\hat{x}_{1,2} = \hat{A}_{1,2} e^{i\omega t}$ – предп. решение

$\hat{x}'_{1,2} - i\omega \hat{A}_{1,2} e^{i\omega t}$

$\hat{x}''_{1,2} = -\omega^2 \hat{A}_{1,2} e^{i\omega t}$

$$\begin{cases} -\omega^2 \hat{A}_1 e^{i\omega t} + \frac{2k}{m_e} \hat{A}_1 e^{i\omega t} - \frac{2k}{m_e} \hat{A}_2 e^{i\omega t} = -\frac{2kL_0}{m_e} \\ -\omega^2 \hat{A}_2 e^{i\omega t} + \frac{k}{m_0} \hat{A}_2 e^{i\omega t} - \frac{k}{m_0} \hat{A}_1 e^{i\omega t} = \frac{kL_0}{m_0} \end{cases}$$

Решим сперва однородную систему:

$$\begin{cases} -\omega^2 \hat{A}_1 + \frac{2k}{m_e} \hat{A}_1 - \frac{2k}{m_e} \hat{A}_2 = 0 \\ -\omega^2 \hat{A}_2 + \frac{k}{m_0} \hat{A}_2 - \frac{k}{m_0} \hat{A}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 \left(\frac{2k}{m_e} - \omega^2\right) - \frac{2k}{m_e} \hat{A}_2 = 0 \\ \hat{A}_1 \cdot \left(-\frac{k}{m_0}\right) + \left(\frac{k}{m_0} - \omega^2\right) \hat{A}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{2k}{m_e} - \omega^2 & -\frac{2k}{m_e} \\ -\frac{k}{m_0} & \frac{k}{m_0} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$ метод Крамера

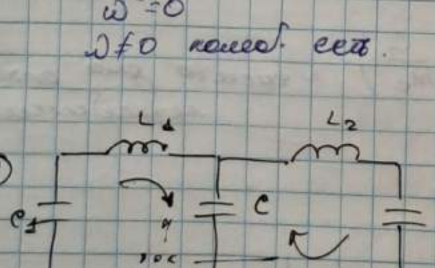
$$\left(\frac{2k}{m_e} - \omega^2\right)\left(\frac{k}{m_0} - \omega^2\right) - \frac{2k^2}{m_0 m_e} = 0$$

$$\frac{2k^2}{m_0 m_e} - \omega^2 \frac{2k}{m_e} - \omega^2 \frac{k}{m_0} + \omega^4 - \frac{2k^2}{m_0 m_e} = 0$$

$$\omega^2 \left(-\frac{2k}{m_e} - \frac{k}{m_0} + \omega^2\right) = 0$$

$\omega^2 = 0$

$\omega \neq 0$ колеб. есть. $\quad \omega^2 = +\frac{k}{m_0} + \frac{2k}{m_e} = k\left(\frac{1}{m_0} + \frac{2}{m_e}\right)$

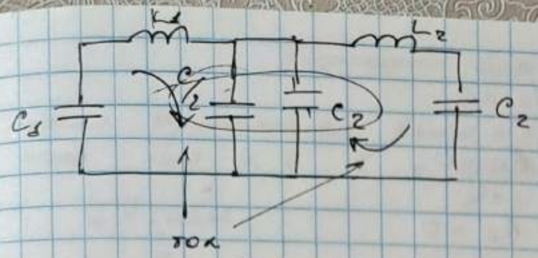
② 

Между L_1 и L_2 нет инд. связи! и $R = 0$

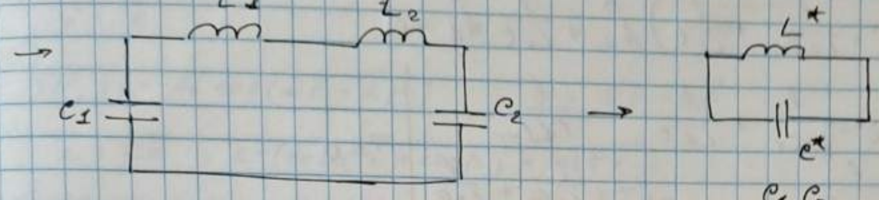
ω – ? (норм. колебаний)

<u>1 способ:</u>

а) антисимметр. колеб-я.



C — не заряжается ⇒ его можно вывести

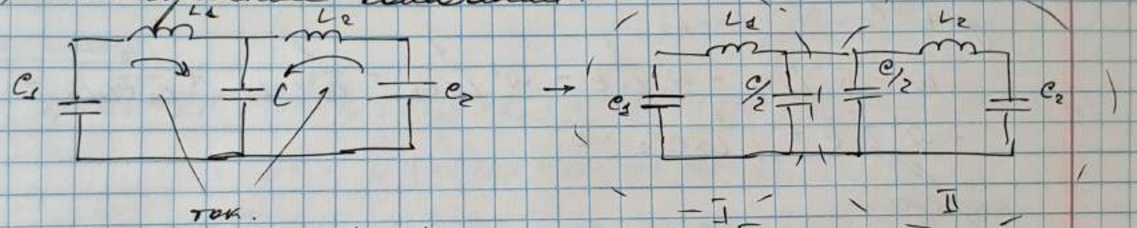


$$C^* = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

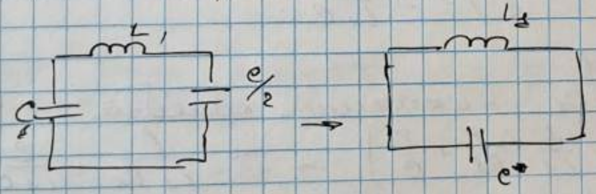
$$\boxed{\omega^2 = \frac{1}{L^* C^*}} \Leftarrow \quad L^* = L_1 + L_2 \quad (M = 0)$$

при $L_1 = L_2$, $C_1 = C_2$: $\omega^2 = \frac{2}{2L_1 C_1} = \frac{1}{L_1 C_1}$

б) симметричные колебания:



пусть $C_1 = C_2$; $L_1 = L_2$, системы I и II равны:



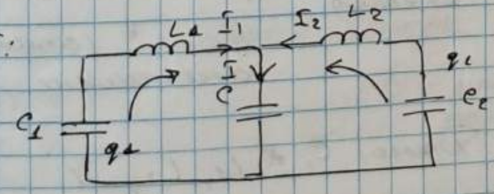
$$C^* = \frac{C_1 \cdot \frac{C}{2}}{C_1 + \frac{C}{2}}$$

$$\to \omega^2 = \frac{1}{L_1 \frac{C_1 C}{2C_1 + C}} = \frac{2}{L_1 C} + \frac{1}{L_1 C_1}$$

для симм. колеб-ий

---

2 способ:



$I = I_1 + I_2$

$$\begin{cases} \text{I)}\ \frac{q_1}{C_1} + L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \\ \text{II)}\ \frac{q_2}{C_2} + L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \end{cases}$$

дифф. I и II:

$$\begin{cases} \frac{I_1}{C_1} + L_1 \ddot{I}_1 + \frac{1}{C} \overbrace{I}^{I_1 + I_2} = 0 \\ \frac{1}{C_2} I_2 + L_2 \ddot{I}_2 + \frac{1}{C} \overbrace{I}^{I_1 + I_2} = 0 \end{cases}$$

Предп. решение:

$$\hat{I}_{1,2} = \hat{A}_{1,2} e^{i\omega t}$$

$$\dot{\hat{I}}_{1,2} = i\omega \hat{A}_{1,2} e^{i\omega t}$$

$$\hat{I}''_{1,2} = -\omega^2 \hat{A}_{1,2} e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}\right)\hat{A}_1 - L_1\omega^2\hat{A}_1 + \frac{1}{C}\hat{A}_2 = 0 \\ \left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C}\right)\hat{A}_2 - L_2\omega^2\hat{A}_2 + \frac{1}{C}\hat{A}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2+\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_1C}\right)\hat{A}_1 + \frac{1}{CL_1}\hat{A}_2 = 0 \\ \left(-\omega^2+\frac{1}{L_2C_2}+\frac{1}{L_2C}\right)\hat{A}_2 + \frac{1}{L_2C}\hat{A}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2+\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_1C} & \frac{1}{CL_1} \\ \frac{1}{L_2C} & -\omega^2+\frac{1}{L_2C_2}+\frac{1}{L_2C} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(-\omega^2+\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_1C}\right)\left(-\omega^2+\frac{1}{L_2C_2}+\frac{1}{L_2C}\right) - \frac{1}{C^2L_1L_2} = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2\frac{1}{L_2C_2} - \omega^2\frac{1}{L_2C} - \omega^2\frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{C_1C_2L_1L_2} + \frac{1}{C_1CL_1L_2} -$$
$$-\omega^2\frac{1}{L_1C} + \frac{1}{L_1L_2C\cdot C_2} + \frac{1}{L_1L_2C^2} - \frac{1}{L_1L_2C^2} = 0$$

пусть $C_1 = C_2$; $L_1 = L_2$:

$$\omega^4 - \omega^2\frac{1}{L_1C_2} - \omega^2\frac{1}{L_2C} - \omega^2\frac{1}{L_1C_2} + \frac{1}{C_2^2L_1L_2} + \frac{1}{C_2CL_1L_2} -$$
$$-\omega^2\frac{1}{L_1C} + \frac{1}{L_1L_2CC_2} = 0$$

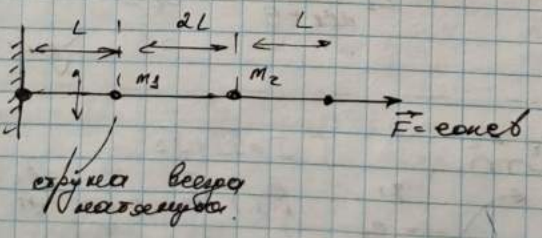
корни:

$$-\omega^2 + \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}\right) = \pm\frac{1}{L_1C}$$

(+) $\omega^2 = \frac{1}{L_1C_1}$ – антисимм. колеб-я.

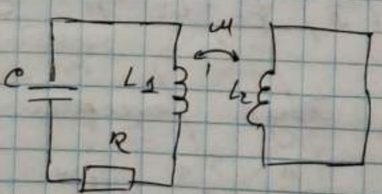
(−) $-\omega^2 = -\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{2}{C}\right) \to \omega^2 = \frac{1}{L_1C_1} + \frac{2}{L_1C}$ – симм. колеб-я.

Д/З:

① 

Дано: F, $m_1 = m_2 = m$, откл-я от положе. равновесия $h \ll L$

$\omega_{1,2}$ – ? (симм. и антисимм.)

② 

Дано: C, R, L_1, L_2, M

$\omega_{рез}(I)$ – ?

Кинематика волн. Эффект Доплера.

14.03.22

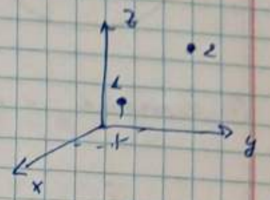
① Плоская гармоническая волна с част. ω распр. со ск-ю u в напр. сост. α, β, γ с осями координат. Найти разность фаз в т.:

$\vec{k}\vec{r} = const$

$\vec{n} = \dfrac{\vec{k}}{k}$

$$\Delta\varphi = \underbrace{\varphi(x_1, y_1, z_1)}_{\varphi_1} - \underbrace{\varphi(x_2, y_2, z_2)}_{\varphi_2} = ?$$

$$f(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad ; \quad \varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$$



$$\vec{k} = k\vec{n} = k\cdot(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k})$$

$$\varphi_1 = \omega t - k(\cos\alpha\, x_1 + \cos\beta\, y_1 + \cos\gamma\, z_1)$$

$$\varphi_2 = \omega t - k(\cos\alpha\, x_2 + \cos\beta\, y_2 + \cos\gamma\, z_2)$$

$$\Delta\varphi = k\left[\cos\alpha\,(x_2 - x_1) + \cos\beta\,(y_2 - y_1) + \cos\gamma\,(z_2 - z_1)\right]$$

$$k = \frac{\omega}{u} \rightarrow \Delta\varphi = \frac{\omega}{u}\left[\cos\alpha\,|x_2 - x_1| + \cos\beta\,|y_2 - y_1| + \cos\gamma\,|z_2 - z_1|\right]$$

<u>В классе:</u>

$$\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r} = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \omega t - k(\cos\alpha\cdot x + \cos\beta\, y + \cos\gamma\, z) =$$
$$= \omega t - \frac{\omega}{u}(\cos\alpha\, x + \cos\beta\, y + \cos\gamma\, z)$$

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = \frac{\omega}{u}\left(\cos\alpha\cdot|x_1 - x_2| + \cos\beta\cdot|y_1 - y_2| + \cos\gamma\cdot|z_1 - z_2|\right)$$

② Плоская волна с частотой ω, нек-рая фаза волнов. перем. со ск-тями u_x, u_y, u_z, Найти $\vec{k} = ?$

$$k = \frac{\omega}{u}$$

$$\vec{k} = k_x \vec{e_x} + k_y \vec{e_y} + k_z \vec{e_z}$$

$$k_{x,y,z} = \frac{\omega}{u_{x,y,z}} \Rightarrow \vec{k} = \omega\left(\frac{\vec{e_x}}{u_x} + \frac{\vec{e_y}}{u_y} + \frac{\vec{e_z}}{u_z}\right)$$

Эффект Доплера

*① В акустике.

$V_{ист} < u$

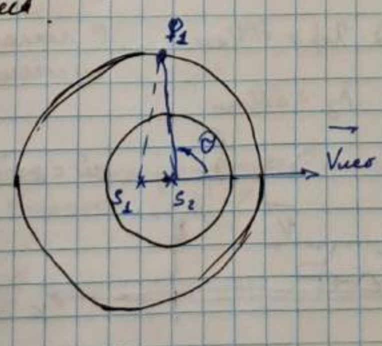
$V_{пр.} < u$

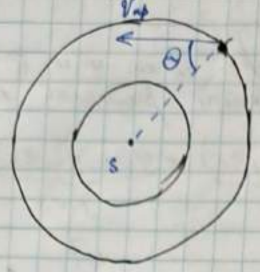
θ - угол между вектором ск-ти и т-кой наблюдения.

а) $\omega = \dfrac{\omega_0}{1 - \frac{V_{ист}}{u}\cos\theta}$ движ. источник

б) движется приёмник.

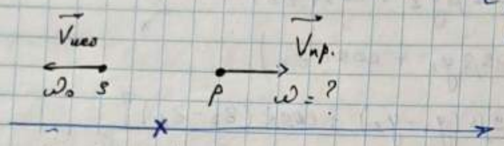
$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{V_{пр}}{u}\cos\theta\right)$$





③ Источник и приёмник удал. друг от друга.

– приходим неп. ретранслятор



– поместим антенну и она будет переизлучать.

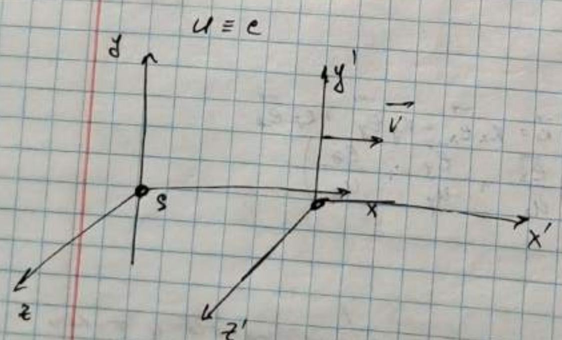
$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{1 - \frac{V_{ист}}{u}\cos\underbrace{\theta_{ист}}_{\pi}} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{V_{ист}}{u}}$$

$$\omega = \omega_1 \cdot \left(1 + \frac{V_{пр.}}{u}\cos\underbrace{\theta_{пр.}}_{\pi}\right) = \omega_1 \cdot \left(1 - \frac{V_{пр.}}{u}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \omega_0 \cdot \frac{\left(1 - \frac{V_{пр}}{u}\right)}{\left(1 + \frac{V_{ист}}{u}\right)} \quad ✓$$

*② В оптике.

$u \equiv c$



$$\omega' = \frac{\omega - k_x \cdot V_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

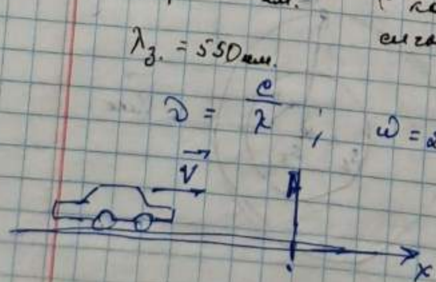
Продольный эффект: $\vec{k} = k_x \vec{e}_x = k\vec{e}_x$

$$k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \omega' = \omega\sqrt{\frac{1 - V_x/c}{1 + V_x/c}}$$

④ $\lambda_{кр.} = 700$ нм. С какой ск-ю ехал автомобиль, что красный сигнал светофора казался ему зелёным.

$\lambda_{з.} = 550$ нм.

$$\nu = \frac{c}{\lambda}; \quad \omega = 2\pi\nu \to \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$



$$\omega' = \frac{2\pi c}{\lambda_{з.}}; \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda_{кр.}}$$

$$\frac{2\pi c}{\lambda_з} = \frac{2\pi c}{\lambda_{кр.}}\sqrt{\frac{1 - \frac{V_x}{c}}{1 + \frac{V_x}{c}}}$$

$$\frac{1-\frac{V_x}{c}}{1+\frac{V_x}{c}} = \frac{\lambda_{кр}^2}{\lambda_з^2}$$

$$\frac{(\cancel{c}-V_x)\cancel{c}}{\cancel{c}\,(\cancel{c}+V_x)} = \frac{\lambda_{кр}^2}{\lambda_з^2}$$

$$\lambda_{кр}^2\cdot c + \lambda_{кр}^2\cdot V_x = \lambda_з^2 c - \lambda_з^2 V_x$$

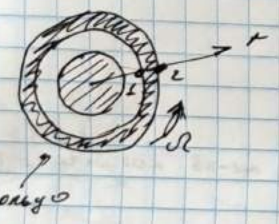
$$V_x\,(\lambda_{кр}^2+\lambda_з^2) = c\cdot(\lambda_з^2-\lambda_{кр}^2)$$

$$\to V_x = \frac{c\cdot(\lambda_з^2-\lambda_{кр}^2)}{(\lambda_{кр}^2+\lambda_з^2)} \approx -7{,}1\cdot 10^7\ \frac{м}{с} \approx$$

$$\approx 0{,}23\cdot c$$

Про кольца Сатурна: (сплошное или нет?)

1) Сплошное



$\Omega_1=\Omega_2=\Omega$

$V_1 < V_2$; $\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\frac{V_x}{c}}{1+V_x/c}}$

$V_{1,2} << c$.

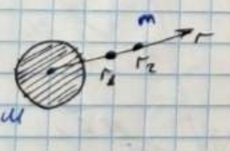
$\omega' \approx \left(1-\frac{1}{2}\frac{V_x}{c}\right)^2\cdot\omega \approx \omega\left(1-\frac{V_x}{c}\right)$

⇓

$\cancel{\omega_1' < \omega_2'}$ $\omega_2' < \omega_1'$

) Сравнивая с экспериментально ком. эффекта Доплера можно опр-ть.

2) Отдельные камни.



$ma_n = F_{гр}$

$\frac{mV^2}{r} = G\frac{M\cdot m}{r^2}$

$V=\sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \to \quad V\sim\frac{1}{\sqrt{r}}$

$r_2 > r_1$

⇓

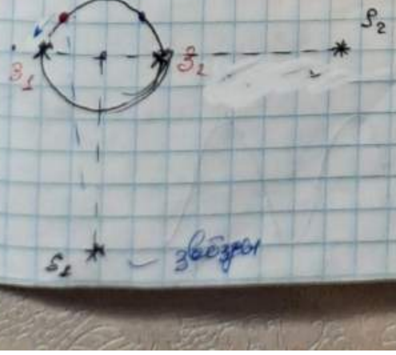
$V_2 < V_1$?

$\omega_2' > \omega_1'$

③ Вертится набл. за спектром звёзд, лежащ...

земная орбита

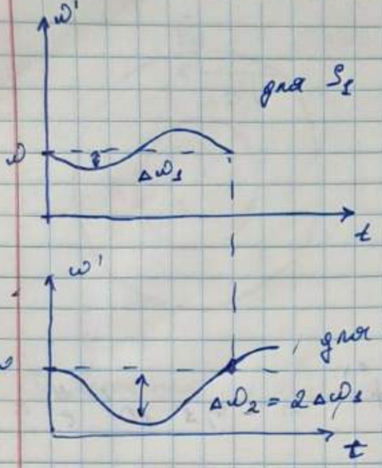
$\Delta t = \frac{T}{2} = 1/2$ года



λ

Найти макс. доплеровское смещение длины волны; $(\Delta\lambda)_{max}=?$

$\omega' = \omega\left(1-\frac{V_x}{c}\right)$



для 1:

$$\frac{2\pi c}{\lambda'} = \frac{2\pi c}{\lambda}\left(1 - \frac{V_x}{c}\right)$$

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 - V_x/c}$$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{\lambda}{1 - V_x/c} - \lambda = \lambda\left(\frac{1}{1 - \frac{V_x}{c}} - 1\right)$$

$V_x << c$ преобр.

$$\lambda' \approx \lambda\left(1 + \frac{V_x}{c}\right)$$

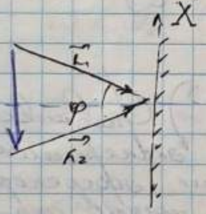
$$\Delta\lambda \approx \frac{V_x}{c}\lambda$$

21.03.22.

Интерференция.

① Две плоские волны, $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$, $A_{01} = A_{02} \equiv A_0$

$(\widehat{\vec{k}_1, \vec{k}_2}) = \varphi << 1$. Волны падают на экран, пл-ть которого $\perp$

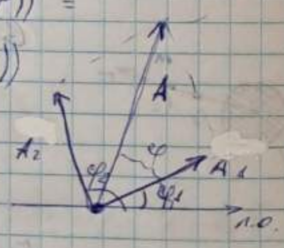


$\Delta x = ?$

$$f_1(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1\vec{r})$$

$$f_2(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k}_2\vec{r})$$

$$A^2 = 2A_0^2 + 2A_0^2 \cos(\Delta\varphi(\vec{r})) = 2A_0^2(1 + \cos(\Delta\varphi(\vec{r})))$$



$$f_1(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1\vec{r} + \varphi_{01})$$

$$f_2(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k}_2\vec{r} + \varphi_{02})$$

$$A^2 = A_0^2 + A_0^2 + 2A_0^2\cos\Delta\varphi = 2A_0^2(1 + \cos\Delta\varphi)$$

$$\Delta\varphi = \underbrace{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)}_{\Delta\vec{k}}\vec{r} + (\varphi_{01} - \varphi_{02}) = -\Delta k \cdot x + (\varphi_{01} - \varphi_{02}) = \underbrace{-2k \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot x}_{-k\varphi x} + (\varphi_{01} - \varphi_{02})$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

max: $\cos \to 1$

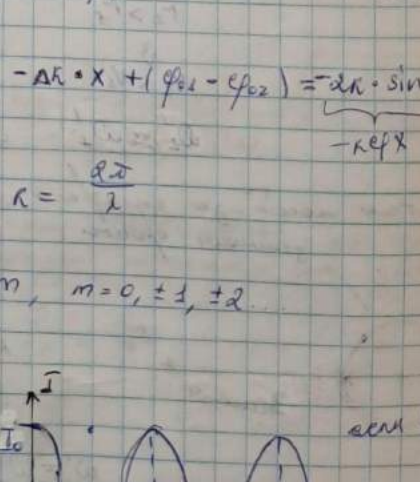
$$-2k\sin\frac{\varphi}{2}x_m + (\varphi_{01} - \varphi_{02}) = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \approx \frac{\lambda}{\varphi}$$

I – интенсивность на экране:

$$\Delta\varphi = (\varphi_{01} - \varphi_{02}) - \frac{4\pi}{\lambda}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot x$$

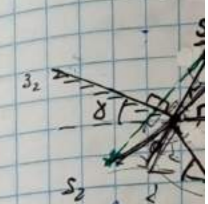
если $\varphi_{01} = \varphi_{02}$



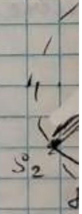
$A = \sum A_{0i}$

$A_0^2 = I_0$

② Бизеркало



Зеркало



$A^2 = 2A_0^2($

$\Delta\varphi = k($

$l = a + r$

$r_2^2 = l^2$

~~$r_1^2 - x^2$~~

$r_{1,2} = \sqrt{}$

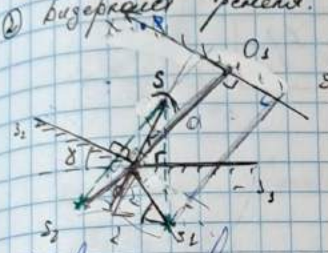
$\approx l(1 +$

$\Delta\varphi = k(r_2 -$

$A=\sqrt{2}A_0$ $\quad A^2 = 2A_0^2\left(1+\cos\left(\underbrace{-\frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{\varphi}{2}\cdot x}_{k\varphi x} + (\varphi_{01}-\varphi_{02})\right)\right)$

$A_0^2 = I_0$ Расстояние между полосами не зависит от положения экрана.

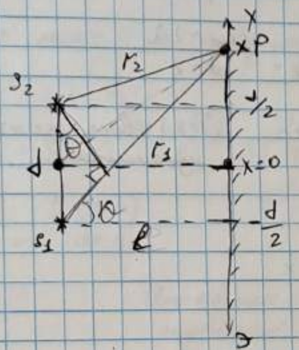
② Бизеркала Френеля.



$SO = r$

$OO_1 = a$; $\gamma \ll 1$

$\Delta x,\ I(x) = ?$

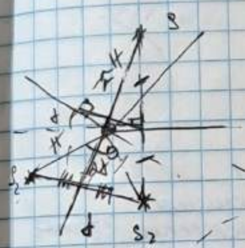


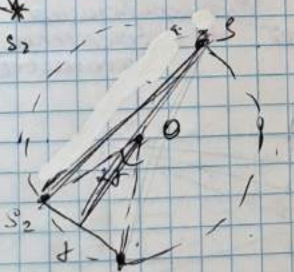
$\frac{\pi - 2\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \gamma$

$2\alpha = \pi$

$2\pi - (\pi - \alpha) - \gamma = \gamma$

Зеркальное отражение:





$S_1\hat{O}S_2 = 2S_1\hat{S}S_2 = 2\gamma$

$d = 2r\sin\gamma \approx 2r\gamma$

$A_1(r) \approx A_2(r) = A_0$

$f_1(r,t) = A_0\cos(\omega t - kr_1)$

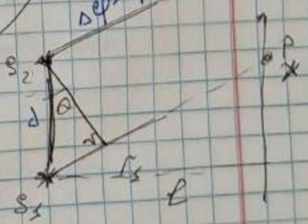
$f_2(r,t) = A_0\cos(\omega t - kr_2)$

$\vec{f}_{1,2} = \vec{E}_{1,2}$, $\vec{E}_1 \uparrow\uparrow \vec{E}_2$

$r_1 - r_2 = d\sin\theta$

$r_2 = r_1 - d\sin\theta$

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k(r_2 - r_1)$



$A^2 = 2A_0^2(1+\cos\Delta\varphi)$

$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1)$

$l = a + r\cos\gamma \approx a + r$; $d = 2r\sin\gamma \approx 2r\gamma$

$r_2^2 = l^2 + (x - \frac{d}{2})^2 = (a+r)^2 + (x-\frac{d}{2})^2$

~~$r_1^2 = x^2 + l^2$ | $r_2 - r_1 =$~~

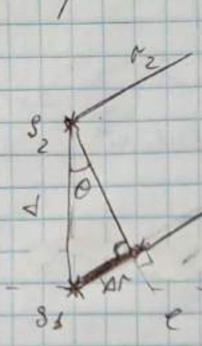
$r_{1,2} = \sqrt{l^2 + (x \pm \frac{d}{2})^2} = \sqrt{l^2 + x^2 + \cancel{\frac{d^2}{4}} \pm xd} \approx l\sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2} \pm \frac{xd}{l^2}} \approx$

пренебр.

$\approx l\left(1 + \frac{x(x\pm d)}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx l\left(1 + \frac{x(x\pm d)}{2l^2}\right)$

$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) \approx kl\left(\cancel{1} + \frac{x(x-d)}{2l^2} - \cancel{1} - \frac{x(x+d)}{2l^2}\right) = kl\left(\frac{x^2}{2l^2} - \frac{xd}{2l^2} - \frac{x^2}{2l^2} - \frac{xd}{2l^2}\right) = -k\frac{xd}{l}$

Быстрее, если приближ. парал. лучей.



$$\Delta r = d\sin\theta = d\cdot\frac{x}{\ell}$$

max: $k\cdot\Delta r = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$k\, d\, \frac{x_m}{\ell} = 2\pi m$$

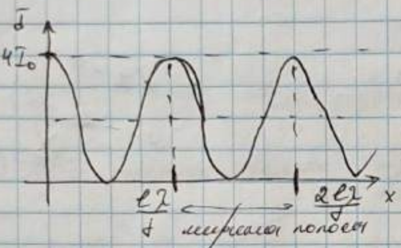
$$x_m = \frac{m\ell\lambda}{d} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{\ell\lambda}{d}}$$

$\ell \approx a + r$; $d \approx 2r\alpha$

$r_1 = r_2 + d\sin\theta$

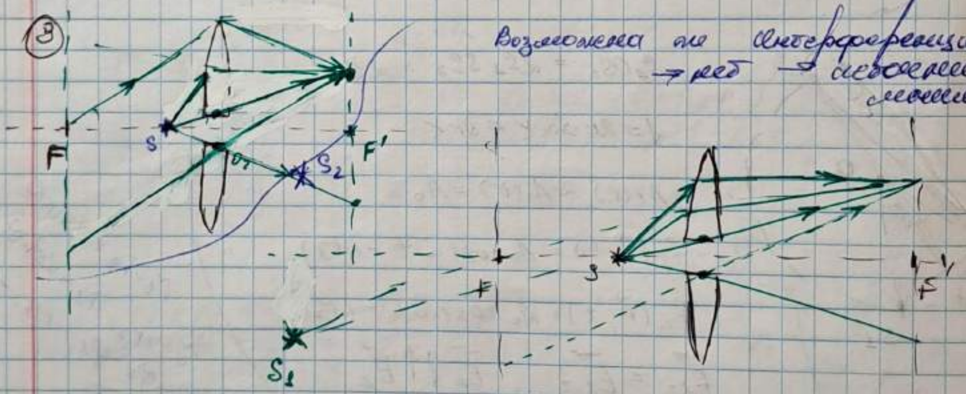
$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = d\sin\theta$

$$\Delta x = \frac{(a+r)\lambda}{2r\alpha}$$



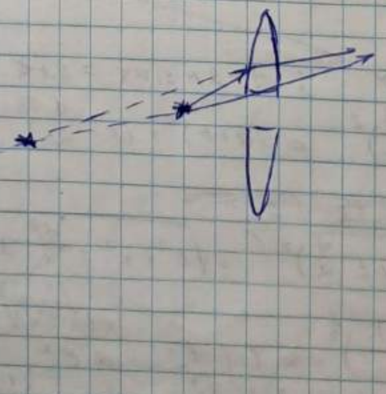
$I(x)$ выглядит так-же, только изменилась ширина.

③



Возможна ли интерференция? → нет → источники стали мнимые!

Нужно аккуратно с линейкой.

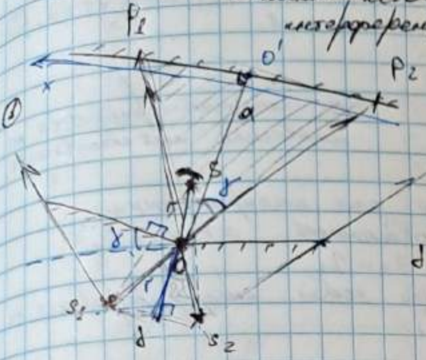


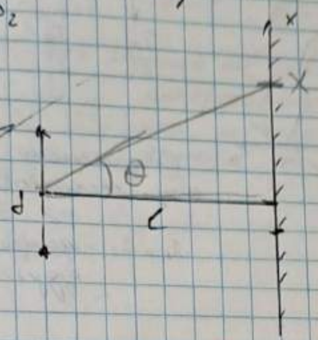
Влияние источника на наблюдение интерференционной картинки

13.03.

$S_1S_2 = d$

①





$\Delta x = \frac{\lambda l}{d}$ Сколько полос мы увидим?

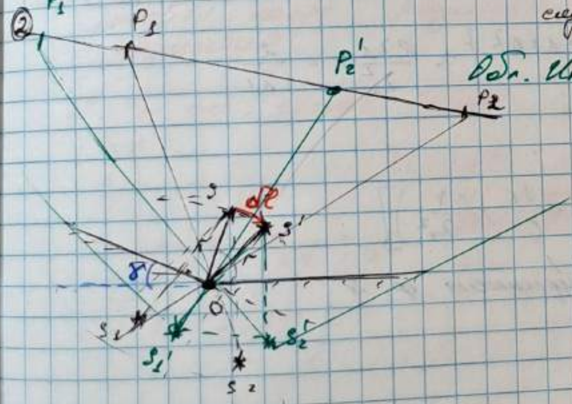
$\angle S_1OS_2 = 2\gamma$

$L = P_1P_2 = a\cdot 2\gamma$; $N = \frac{L}{\Delta x} = \frac{a\cdot 2\gamma d}{\lambda l} = \frac{2a\gamma d}{\lambda l} = \frac{a\cdot 2\gamma\cdot 2r\gamma}{\lambda (r+a)}$

$PO' = a\gamma$

$\Delta x = \frac{\lambda (r+a)}{2r\gamma}$

②

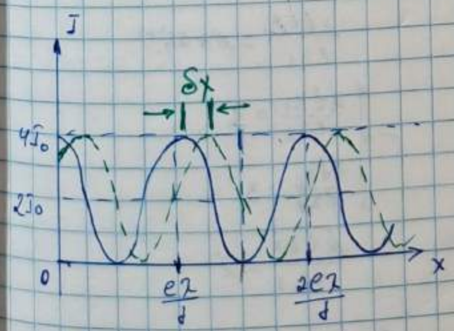


Сместим источник S. Что случится с изображением

Обл. интерференции сместится влево.

$\delta\varphi = \frac{\delta l}{r} \Rightarrow \delta x = a\delta\varphi$

$\delta x = \frac{a\delta l}{r}$ ~ на сколько съехало.



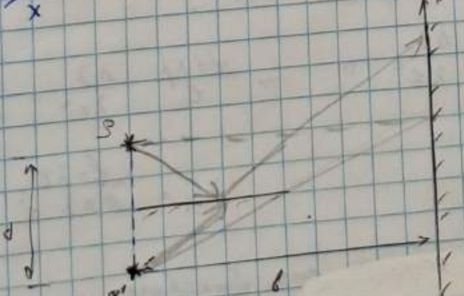
Для наблюдения необходимо

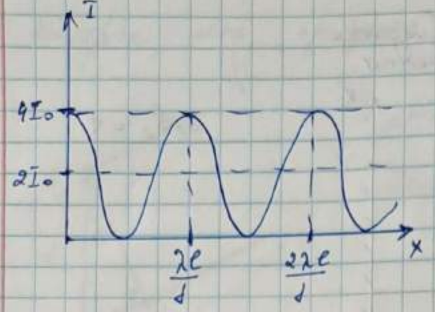
$\delta x < \frac{\Delta x}{2}$

③ Зеркало Ллойда

$\Delta x = \frac{\lambda l}{d}$;

$I(x) = 2I_0\left(1+\cos\frac{2\pi x d}{\lambda l}\right)$





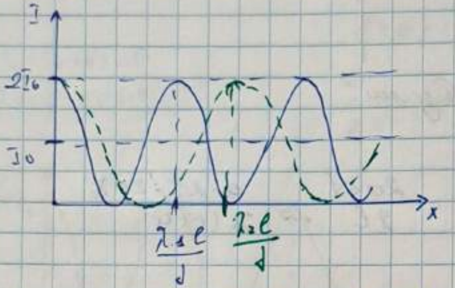
λ_1, λ_2 ; $\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1| \ll \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$

каждый источник S.

$\frac{I_0}{2}$ $\frac{I_0}{2}$ — на каждую приходится по половине интенсивности.

Обязательно для интерференции обяз. согласованность $\Rightarrow \omega_1 = \omega_2$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

λ_1 и λ_2 — между собой интерферировать не будут.



$I_1 = I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi x d}{\lambda_1 l}\right)$

$I_2 = I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi x d}{\lambda_2 l}\right)$

Видит глаз: $I_1 + I_2 = I_0\left(2 + \cos\frac{2\pi x d}{\lambda_1 l} + \cos\frac{2\pi x d}{\lambda_2 l}\right) =$

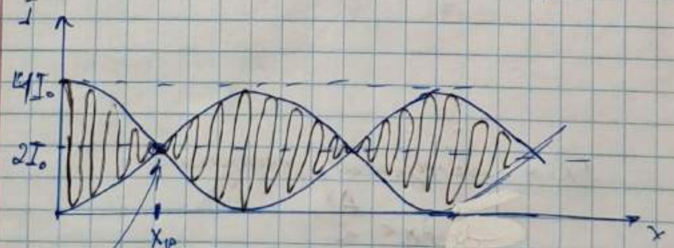
$= I_0\left(2 + 2\cos\left(\frac{2\pi x d}{2l}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x d}{l 2}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right)\right) =$

$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \{\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda\} \approx \frac{2\lambda_1}{\lambda_1^2} = \frac{2}{\lambda_1}$

$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2}$

$\Rightarrow I = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi d x}{l \lambda_1}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi d x}{l} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2}\right)\right]$

огибающая ф-я.



$\frac{2\pi d x}{l \lambda_1} = \pi + 2\pi m$

$\begin{cases} \frac{2 d x_1}{l \lambda_1} = 1 \\ \frac{2 d x_2}{l \lambda_1} = 3 \end{cases}$

$\frac{2 d \Delta x}{l \lambda_1} = 2$

Здесь картинка размоется.

x_p — координата размытия — ?

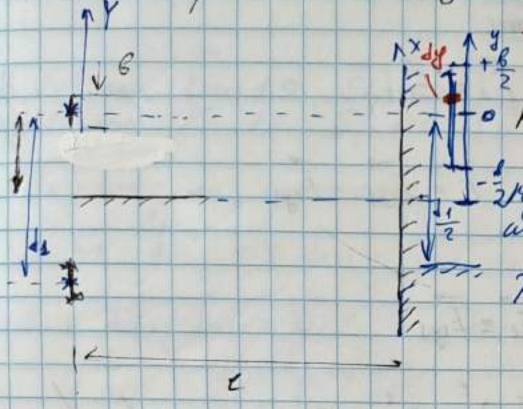
$\cos\frac{\pi d x_p}{l} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2} = 0 \quad \to \quad \frac{\cancel{\pi} d x_p}{l} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \frac{\cancel{\pi}}{2}$

$x_p = \frac{l \cdot \lambda_1^2}{2\Delta\lambda \cdot d}$

$\Delta x = \frac{l \lambda_1}{d}$ — опр-ся cos быстрого заполнения.

$N = \frac{x_p}{\Delta x} = \frac{l \cdot \lambda_1^2 \, \cancel{d}}{2\Delta\lambda \cdot \cancel{d} \cdot l \lambda_1} = \frac{\lambda_1}{2\Delta\lambda}$ — очень большое число.

(1) Источник — короткий светящийся отрезок.



~~источник~~

$d \ll l$; $b \ll l$, $b < \frac{d}{2}$

Нужно ли зеркало? для набл. интерференции.

Нужен, потому что по отдельности источники не согласованы.

$I_0 \sim b$

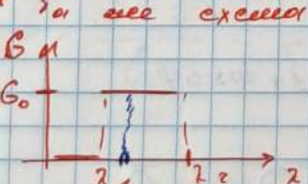
$dI \sim dy$

$$dI = \frac{I_0}{b} dy \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x d_1}{l}\right)$$

$$\frac{d_1}{2} = \frac{d}{2} + y \to d_1 = d + 2y$$

Д/з: Найти интенсивность, построить график, найти коорд. размытия, число полос до размытия.

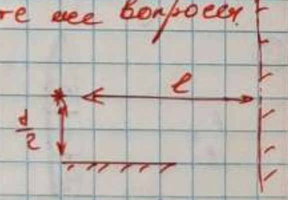
2* Та же схема Ллойда.



$\lambda_2 - \lambda_1 \ll \lambda_1$.

~ источник - точечный, геометрия задана.

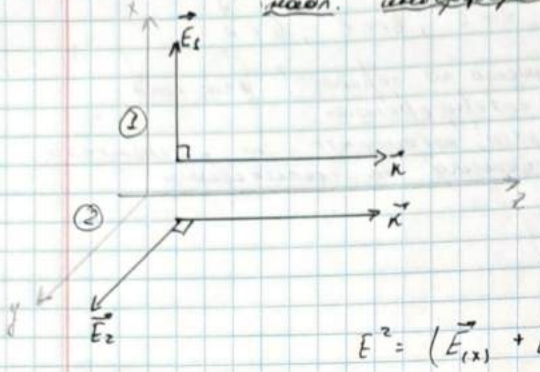
те же вопросы



+ И/р. 5.77

4.04.22.

Влияние поляризации на набл. интерференции.



$\vec E_1 = \vec E_{(x)}$

$\vec E = \vec E_{(x)} + \vec E_{(y)}$

$\vec E_2 = \vec E_{(y)}$

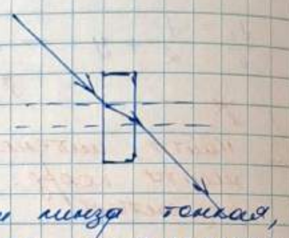
$E^2 = \left(\vec E_{(x)} + \vec E_{(y)}\right)^2 = E_{(x)}^2 + E_{(y)}^2$ ~ интерференции нет.

$I = I_{(x)} + I_{(y)}$

В силу их равноправия: $I_{(x)} = I_{(y)} = \frac{1}{2} I_0$

① Билинза

плоско паралл. пластинка



Воспилили и сдвинули

Если линза тонкая, луч не преломляется.

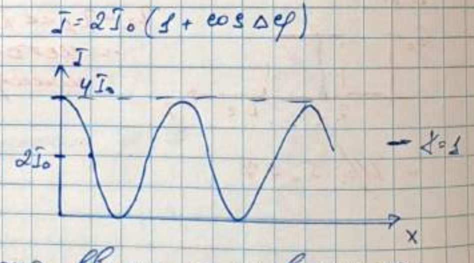
③

наклеиваем плёнку поляроид

$\vec E_{(x)} \neq 0$
$\vec E_{(y)} = 0$ => $I_{max} = 2I_0$

$\gamma = 1$

$I = 2I_0(1 + \cos\Delta\varphi)$



Можно ввести ф-ю видности:

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Картинка стала менее яркой. Контрастность та же.

② В 1ой половинке $\vec E_{(x)} \neq 0$, $\vec E_{(y)} = 0$
Во 2ой половинке $E_{(x)} = 0$, $\vec E_{(y)} \neq 0$ => Интерференции не будет.

Если I_0 – интенсивн. под. источника.

S_1 – $\frac{I_0}{2}$ $\xrightarrow{\text{с поляроидом}}$ $\frac{I_0}{4} = I_{(x)}$

S_2 – $\frac{I_0}{2}$ => $\frac{I_0}{4} = I_{(y)}$

$I_{max} = I_{min} = \frac{I_0}{2}$

$I = I_{(x)} + I_{(y)} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0$

② В 1ой пол. $\vec{E}_{(x)} \neq 0$, $\vec{E}_{(y)} = 0$
Во 2ой пол. $\vec{E}_{(x)} \neq 0$, $\vec{E}_{(y)} \neq 0$ $\Big| \Rightarrow$

I_0 - инт. изл. источника.

$S_1 \to \frac{I_0}{2} \Rightarrow I_{(x)} = \frac{I_0}{4}$

S_2: ~~$I_{(y)} = I_{(x)} = \frac{I_0}{4}$~~ $\quad$ ~~$I_{(x)} = I_{(y)} = \frac{I_0}{2}$~~

~~$I = \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{2}$~~

$I_{max} = \frac{I_0}{4} + I_0 = \frac{5}{4} I_0$

$I_{min} =$

В классе: $I = (\vec{E}_{(x)_1} + \vec{E}_{(x)_2} + \vec{E}_{(y)_2})^2 = (\vec{E}_{(x)_1} + \vec{E}_{(x)_2})^2 + E_{(y)_2}^2 =$

$= E_{(x)_1}^2 + E_{(x)_2}^2 + 2\vec{E}_{(x)_1} \cdot \vec{E}_{(x)_2} + E_{(y)_2}^2 = \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} + 2\sqrt{\frac{I_0}{4}}\sqrt{\frac{I_0}{4}} =$

$\to I = \frac{3I_0}{4} + \frac{I_0}{2}\cos\Delta\varphi$

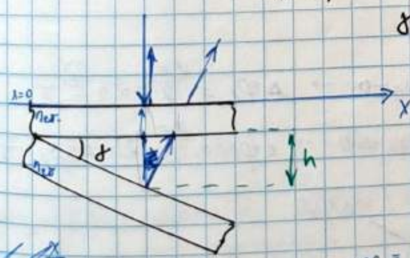
$I_{max} = \frac{3I_0}{4} + \frac{I_0}{2} = \frac{5}{4} I_0$

$I_{min} = \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} - \frac{I_0}{2} = \frac{3}{4} I_0 - \frac{2I_0}{4} = \frac{I_0}{4}$

$\gamma = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{6}{4}} = \frac{1 \cdot 4}{6} = \frac{2}{3}$

Интерференция в тонких плёнках.

① $\gamma \ll 1$, λ



$\Delta x = ?$

$\Delta\varphi = k\Delta r$

$\Delta r = 2hn\cos\beta \pm \frac{\lambda}{2}$ (из интерф. Фабри-Перо)

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2h \pm \frac{\lambda}{2}\right)$

min: $\cos\Delta\varphi = -1$

$\frac{2\pi}{\lambda}\left(2h_m \pm \frac{\lambda}{2}\right) = \pi + 2\pi m$

$\frac{4\pi h_m}{\lambda} + \cancel{\pi} = \cancel{\pi} + 2\pi m$

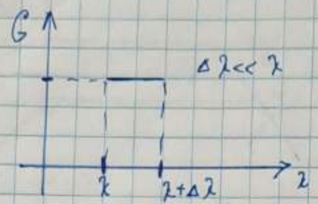
$h_m = \frac{\lambda m}{2}$ $\quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$

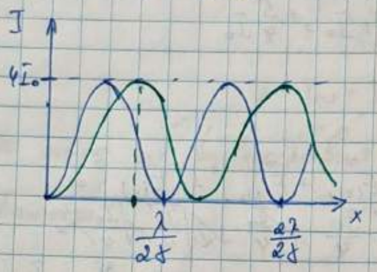
$\Delta h = \frac{\lambda}{2}$, m - это порядок интерф-ии.

Номер минимума и порядок интерфер-ии - разные вещи.

$$\Rightarrow \cancel{\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha}} \qquad \Delta x = \frac{\Delta h}{\gamma} = \frac{\lambda}{2\gamma}$$

②





$\Delta\lambda \ll \lambda$

N_{max} - ?

$l = c\tau$ - длина цуга

$$\Delta\omega \cdot \tau = 2\pi$$

$$l = \frac{c \cdot 2\pi}{\Delta\omega} = \frac{c}{\Delta\nu}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow |\Delta\nu| = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

$\Rightarrow \Delta r \le l$ - для набл. интерференции.

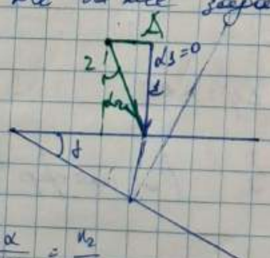
$$2h + \frac{\lambda}{2} \le l \qquad \Rightarrow 2h \le \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

пренебр.

$$h_{max} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

$$N_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{h_{max}}{\Delta h}$$

③ Всё та же задача



$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\alpha_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \rightarrow \Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2h \pm \pi$$

$$\alpha_2 > 0 \rightarrow \beta_2 \ne 0 \rightarrow \Delta\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2h\cos\beta_2 + \pi$$

Когда max наложится на min → глаз различать не будет.

$$\Delta\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2h\cos\beta_2 + \pi \approx \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2h\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) + \pi$$

$$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 \le \pi$$

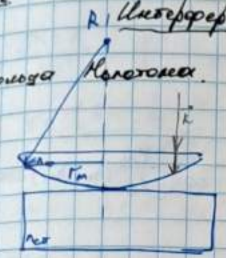
$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2h_{max}\cdot\frac{\beta^2}{2} < \pi \rightarrow \beta^2 < \frac{\lambda}{2h_{max}}$$

$$\beta^2 < \frac{\lambda\cdot 2\Delta\lambda}{2\lambda^2} \rightarrow \beta^2 < \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

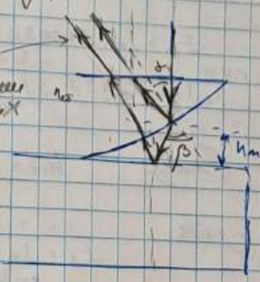
11.04.22

Интерференция в тонких плёнках.

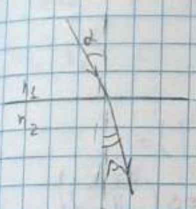
1) Кольца Ньютона.



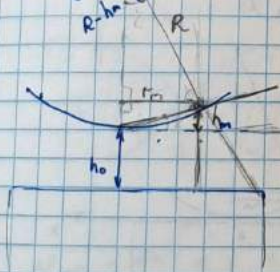
λ, Что видит наблюдатель по мере поднимания линзы?



в приближении параллельности (интерференция волн.)



Линзу подняли: Найти радиус кольца. (r_m - ?)



$$h_\Sigma = h_0 + h$$

$$\Delta r_{опт} = 2hn\cos\beta \pm \frac{\lambda}{2}$$ - оптическая разность хода. в общем случае

$h \rightarrow h_\Sigma$

β - мал. $\cos\beta = 1$

В нашем случае:

$$\Delta r_{опт} = 2h_\Sigma\cdot 1\cdot 1 \pm \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = k\,\Delta r_{опт} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\cdot 2}{\lambda}(h_0 + h_m) \pm \pi$$

$I = 2I_0(1+\cos\Delta\varphi)$ - всегда так. $A^2 = A_0^2 + A_0^2 + 2A_0^2\cos\Delta\varphi$

max: $\Delta\varphi = 2\pi m = \frac{4\pi}{\lambda}(h_0 + h_m) \pm \pi$

$$r_m = \sqrt{R^2 - (R-h_m)^2} = \sqrt{-h_m^2 + 2Rh_m} \approx \sqrt{2Rh_m}$$

$h_m^2 \to 0$

$$\rightarrow h_m = \frac{(m-\frac{1}{2})\lambda}{2} - h_0$$

$$r_m^2 = 2Rh_m \rightarrow h_m = \frac{r_m^2}{2R}$$

$$2\pi m = \frac{4\pi}{\lambda}\left(h_0 + \frac{r_m^2}{2R}\right) \pm \pi \rightarrow \pi m = \frac{2\pi}{\lambda}\left(h_0 + \frac{r_m^2}{2R}\right) + \pi$$

$$\frac{\pi(m-1)\lambda}{2\pi} = h_0 + \frac{r_m^2}{2R}$$

где-то ошибочка

$$\frac{r_m^2}{2R} = \frac{\lambda}{2}(m-1) - h_0 \rightarrow r_m^2 = \lambda R(m-1) - 2Rh_0$$

$$r_m = \sqrt{2R\left[\frac{\lambda}{2}(m-1) - h_0\right]}$$

$r_m = \sqrt{(m-\frac{1}{2})R\lambda - 2Rh_0}$ → по мере уменьшения радиус колец уменьшается → „сдвигаются к центру".

Разность хода должна быть меньше длины луча.

② Неоновая лампа.

$\lambda_1 = 5890$ Å $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$

$\lambda_2 = 5896$ Å

$\cancel{I_1 = I_0(1+\cos}$

$$I_1 = I_0(1+\cos\Delta\varphi_1) = I_0\left(1+\cos\left[\frac{4\pi}{\lambda_1}(h_0+h_m) \pm \pi\right]\right)$$

$$I_2 = I_0\left(1+\cos\left[\frac{4\pi}{\lambda_2}(h_0+h_m) \pm \pi\right]\right)$$

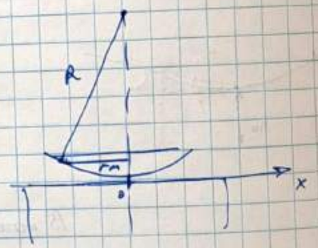
$$h_m = \frac{(m-\frac{1}{2})\lambda}{2} \cancel{-h_0} \qquad h_m = \frac{(m-\frac{1}{2})\lambda}{2}$$

$\cancel{I_1 = I_0(1+\cos[\frac{4\pi h_0}{}}$

$$I_1 = I_0\left(1+\cos\left[\frac{4\pi h}{\lambda_1} \pm \pi\right]\right) = I_0\left(1+\cos\left[\frac{4\pi h}{\lambda_1} \pm \pi\right]\right) = I_0\left(1-\cos\left(\frac{4\pi h}{\lambda_1}\right)\right)$$

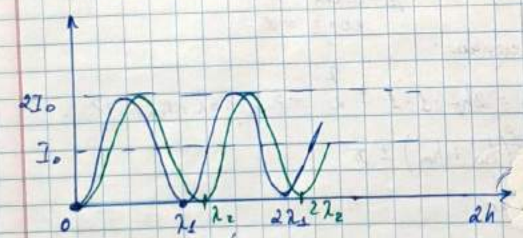
$$I_2 = I_0\left(1-\cos\left(\frac{4\pi h}{\lambda_2}\right)\right)$$

$\cancel{I_1 + I_2 = 2I_0(1 - (\cos}$



В классе:

$$I_{1,2} = I_0(1+\cos\Delta\varphi_{1,2})$$



Пусть $h_0 = 0$

$$\Delta r = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2} = \pi$$

~ Интерф. пропадёт, когда максимум наложится на минимум

$$I_1 + I_2 = I_0(1+\cos\Delta\varphi_1) + I_0(1+\cos\Delta\varphi_2) = 2I_0 + I_0\cos\Delta\varphi_1 + I_0\cos\Delta\varphi_2$$
$$= I_0(2+\cos\Delta\varphi_1 + \cos\Delta\varphi_2) = I_0\left(2 + 2\cos\frac{\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_2}{2}\cdot\cos\frac{\Delta\varphi_1-\Delta\varphi_2}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_2}{2} = \frac{\frac{2\pi\cdot 2h}{\lambda_1}+\pi+\frac{2\pi\cdot 2h}{\lambda_2}+\pi}{2} = \frac{\frac{4\pi h}{\lambda_1}+\frac{4\pi h}{\lambda_2}+2\pi}{2} =$$
$$= \frac{2\pi h}{\lambda_1} + \frac{2\pi h}{\lambda_2} + \pi \ominus \qquad \lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda \to \lambda_2 = \Delta\lambda + \lambda_1$$

$\cancel{\frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2}{2}}$

$$\ominus \frac{2\pi h}{\lambda_1} + \frac{2\pi h}{\lambda_1+\Delta\lambda} + \pi \approx \frac{4\pi h}{\lambda_1} + \pi$$

$$\frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2}{2} = \frac{2\pi h}{\lambda_1}$$

$I_1 + I_2 = 2I_0(1 -$

$\cos\frac{2\pi h\Delta\lambda}{\lambda_1^2} = 0$

$\frac{2h\Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \frac{1}{2} + 2m$

$h = \frac{(2m+\frac{1}{2})\lambda_1^2}{2\Delta\lambda}$

В классе:

λ_1 - min: $h = 0$, λ_1,

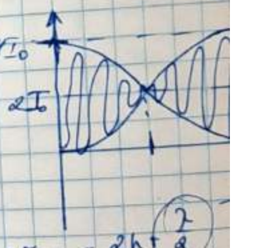
λ_2 - max: $h = \frac{\lambda_2}{2}$,

$h_1 = h_2 \Rightarrow N\lambda_1$

$N\lambda_1$

$N\lambda_1$

$\frac{\lambda_2}{2}$



$\Delta r_{опт} = 2h + \frac{\lambda}{2}$

$2h = m\lambda - \frac{\lambda}{2}$

*Д/З. дорешить и дальше; порядки ... происходит ... центре?

...ается радиусе.
... → сдвигаются

дуга.

$\cos\left[\frac{4\pi}{\lambda_1}(h_0+h_m) \pm \pi\right]\right)$

$\ldots\pi]\Big) =$

$\ldots\cos\left(\frac{4\pi h}{\lambda_1}\right)\Big)$

$\ldots \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2} = \pi$

на минимум

$I_0\cos\Delta\varphi_1 + I_0\cos\Delta\varphi_2 =$

$\ldots\Delta\varphi_2 \ldots \cdot\cos\frac{\Delta\varphi_1-\Delta\varphi_2}{2}\Big)$

$\ldots + 2\pi =$

$\ldots \lambda_2 = \Delta\lambda + \lambda_1$

$$\frac{\Delta\varphi_1-\Delta\varphi_2}{2} = \frac{2\pi h}{\lambda_1} - \frac{2\pi h}{\lambda_2} = 2\pi h\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{2\pi h\,\Delta\lambda}{\lambda_1^2}$$

$$I_1+I_2 = 2I_0\left(1-\cos\frac{4\pi h}{\lambda_1}\cdot\cos\frac{2\pi h\,\Delta\lambda}{\lambda_1^2}\right)$$

$$\cos\frac{2\pi h\,\Delta\lambda}{\lambda_1^2} = 0 \qquad \frac{2\pi h\,\Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$$

$$\frac{2h\Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \frac{1}{2} + 2m \qquad ?$$

$$h = \frac{\left(2m+\frac{1}{2}\right)\lambda_1^2}{2\Delta\lambda} \qquad h = \frac{\lambda_1^2}{4h} = \ldots$$

$$h = \frac{\lambda_1^2}{4\Delta\lambda} \text{ до } I_0.$$

В целом:

λ_1 - min: $h = 0,\ \lambda_1,\ 2\lambda_1, \ldots, N\lambda_1.$

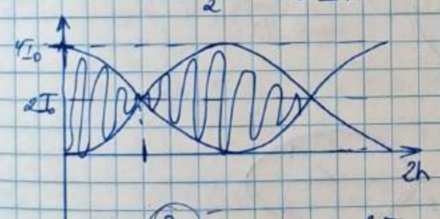
λ_2 - max: $h = \frac{\lambda_2}{2},\ \frac{\lambda_2}{2}+\lambda_2,\ \frac{\lambda_2}{2}+2\lambda_2, \ldots, \frac{\lambda_2}{2}+(N-1)\lambda_2$

$h_1 = h_2 \Rightarrow N\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2} + (N-1)\lambda_2$

$N\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2} + N\lambda_2 - \lambda_2$

$N\lambda_1 = -\frac{\lambda_2}{2} + N\lambda_2$

$\frac{\lambda_2}{2} = N\Delta\lambda \rightarrow N = \left[\frac{\lambda_2}{2\Delta\lambda}\right] = \left[\frac{\lambda_2}{2(\lambda_2-\lambda_1)}\right] = 491.$



$\Delta r_{опт} = 2h + \frac{\lambda}{2}; \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2h+\frac{\lambda}{2}\right) = 2\pi m$

$2h = m\lambda - \frac{\lambda}{2}$

$\underbrace{2h = m\lambda - \frac{\lambda}{2}} \Rightarrow h_m = \frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\lambda}{2} - h_0$

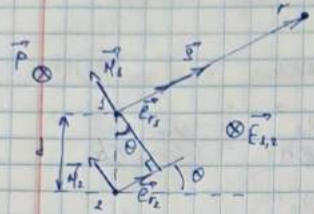
*Д/з. доделать до конца. $h_p = ?$, $N = ?$ И дальше представим, что пластинку поднимают $h_0 \neq 0$, качественно – что будет происходить, что будет в точке размытия, в центре?

18.04.

Диаграмма направленностей.

① $\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_0$
$p_{01} = p_{02} = p_0$

$$D(\theta) = \frac{\langle S(\theta)\rangle}{(\langle S(\theta)\rangle_T)_{max}}$$



$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kr_1)$$
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kr_2)$$

$$\Delta\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

$D(\theta) - ?$

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\Delta\varphi = $$
$$= 2E_0^2(1+\cos\Delta\varphi)$$

$$D(\theta) = \frac{\langle|\vec{S}|\rangle_T}{(\langle|\vec{S}|\rangle_T)_{max}} = \frac{1+\cos\Delta\varphi}{2} = \frac{1+\cos\left(\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)}{2}$$

$\left.\begin{aligned}\vec{S} &= [\vec{E},\vec{H}]\\ H &= \frac{E}{Z_B}\end{aligned}\right\} \Rightarrow S \sim E^2$

$$D(\theta,\varphi) = \frac{\langle S(\theta,\varphi)\rangle_T}{(\langle S(\theta,\varphi)\rangle_T)_{max}}$$
$$\vec{H} = -\frac{1}{4\pi c r}[\vec{e}_r, \ddot{\vec{p}}(t - \tfrac{r}{c})]$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}[\vec{e}_r,[\vec{e}_r,\ddot{\vec{p}}(t-\tfrac{r}{c})]]$$

1.2 1) $d \ll \lambda$

2) $d = \frac{\lambda}{4}$

$$D(\theta) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{2}$$

$\frac{\pi}{2}\sin\theta = \pi m'$

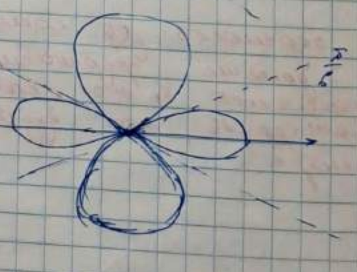
$\sin\theta = 2m'$

3) $d = \frac{\lambda}{2}$

$$D(\theta) = \frac{1+\cos(\pi\sin\theta)}{2}$$

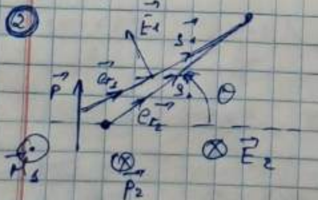
4) $d = \lambda$

$$D(\theta) = \frac{1+\cos(2\pi\sin\theta)}{2}$$



Поляризация линейная

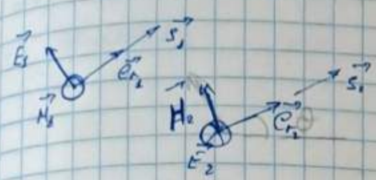
②



d, $p_{01} = p_{02}$; $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$

$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos\theta$

$E_1^2 \sim \cos^2\theta$



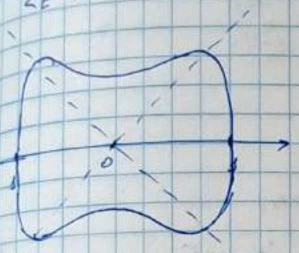
$\vec{E_1} = \vec{E_0}\cos(\omega t - kr_1)$

$\vec{E_2} = \vec{E_0}\cos(\omega t - kr_2)$

$\vec{E_1} \perp \vec{E_2}$ из рис. $E^2 = E_1^2 + E_2^2$

$D(\theta) = \frac{\langle E^2\rangle}{\langle E^2\rangle_{max}} = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$

$\langle E^2\rangle = \frac{E_0^2}{2}(1+\cos^2\theta)$

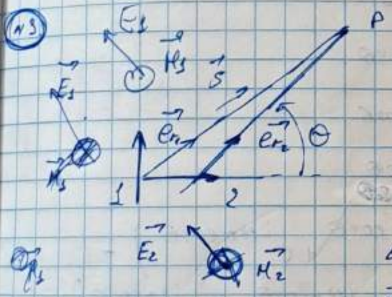


$\Delta\varphi = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}$

$d \ll \lambda$ — / лин.

$d = \frac{\lambda}{2}$ — 0 ~ эллиптич.

№3



$\vec{E}^2 = (\vec{E_1}+\vec{E_2})^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_0^2 =$

$= E_0^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta) =$

$= E_0^2(1+\sin 2\theta)$ $H_2 \sim \sin\theta$

$H_1 \sim S$

$\vec{E_1} = \vec{E_0}\cos\theta\cos(\omega t - kr_1)$

$\vec{E_2} = \vec{E_0}\sin\theta\cos(\omega t - kr_2)$ $E_2 \sim \sin\theta$

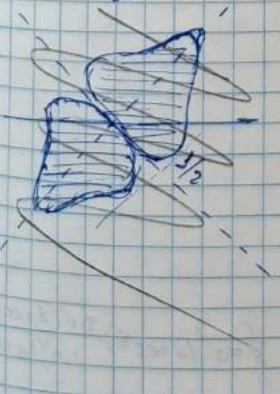
$d \ll \lambda$ $\Delta\varphi = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} \approx 0$

$\Rightarrow D(\theta) = \frac{1+\sin 2\theta}{2}$

$E^2 = E_0^2(1+\sin 2\theta)$

$\sin 2\theta = -1$

$2\theta = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$



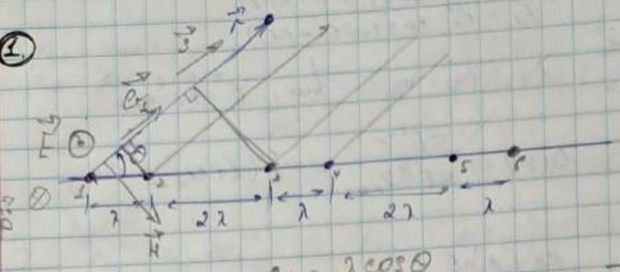
Д/з: ① а) $d = \frac{3\lambda}{2}$

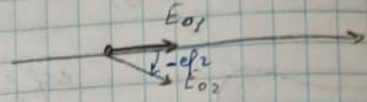
б) $d = \lambda$

Сив. 258

25.04. Решётка из вибраторов.

(1)





$p_{0i} = p_0$ $\qquad \Delta_1 = \lambda\cos\theta$

$\varphi_{i0} = 0$ $\qquad \Delta_2 = 3\lambda\cos\theta$

Δ_3

$\vec E_1 = \vec E_0 \cos(\omega t - kr)$

$\vec E_2 = \vec E_0 \cos(\omega t - kr_1 - k\Delta_1)$

МКА: $\vec E_1 = \vec E_0 \cos(\omega t - kr_1) \to \hat{\vec E}_1 = \vec E_0 e^{i(\omega t - kr_1)}$

$\vec E_2 = \vec E_0 \cos(\omega t - kr_1 + k\lambda\cos\theta) \to \hat{\vec E}_2 = \hat{\vec E}_1 e^{i2\pi\cos\theta}$

$\vec E_3 = \vec E_0 \ldots;$ $\qquad \hat{\vec E}_3 = \hat{\vec E}_1 e^{i6\pi\cos\theta}$

$\hat{\vec E}_4 = \hat{\vec E}_1 \cdot e^{i8\pi\cos\theta}$

$\hat{\vec E}_5 = \hat{\vec E}_1 \cdot e^{i12\pi\cos\theta}$

$\hat{\vec E}_6 = \hat{\vec E}_1 e^{i14\pi\cos\theta}$

$$\hat{\vec E} = \hat{\vec E}_1 \left(1 + e^{i2\pi\cos\theta} + e^{i6\pi\cos\theta} + e^{i8\pi\cos\theta} + e^{i12\pi\cos\theta} + e^{i14\pi\cos\theta}\right) =$$

$$= \hat{\vec E}_1 \left((1 + e^{i2\pi\cos\theta}) + e^{i6\pi\cos\theta}(1 + e^{i2\pi\cos\theta}) + e^{i12\pi\cos\theta}(1 + e^{i2\pi\cos\theta})\right) =$$

$$= \hat{\vec E}_1 (1 + e^{i2\pi\cos\theta})(1 + e^{i6\pi\cos\theta} + e^{i12\pi\cos\theta}) =$$

$$= \hat{\vec E}_1 \cdot \frac{1(e^{i4\pi\cos\theta} - 1)}{e^{i2\pi\cos\theta} - 1} \cdot \frac{1(e^{i18\pi\cos\theta} - 1)}{e^{i6\pi\cos\theta} - 1} =$$

$$= \cancel{\hat{\vec E}_1 \cdot e^{i\pi\cos\theta}(e^{-i\pi\cos\theta} + e^{i\pi\cos\theta})} =$$

$$= \hat{\vec E}_1 \cdot e^{i\pi\cos\theta} \cdot 2\cos(\pi\cos\theta)\, \frac{1 - e^{i\cdot 6\pi\cos\theta\cdot 3}}{1 - e^{i\cdot 6\pi\cos\theta}} =$$

$$= \hat{\vec E}_1 \cdot e^{i\pi\cos\theta} \cdot 2\cos(\pi\cos\theta) \cdot \frac{e^{i9\pi\cos\theta}}{e^{i3\pi\cos\theta}} \ldots =$$

$$= \hat{\vec E}_1 \cdot e^{i\cdot 7\pi\cos\theta} \cdot 2\cos(\pi\cos\theta) \cdot \frac{\sin(9\pi\cos\theta)}{\sin(3\pi\cos\theta)}$$

$$D(\theta) = \frac{\langle|\vec S|\rangle}{\langle|\vec S|\rangle_{max}} = \frac{4\cos^2(\pi\cos\theta)\,\frac{\sin^2(9\pi\cos\theta)}{\sin^2(3\pi\cos\theta)}}{4\cdot 9} = \frac{1}{9}\cos^2(\pi\cos\theta)\,\frac{\sin^2(9\pi\cos\theta)}{\sin^2(3\pi\cos\theta)}$$

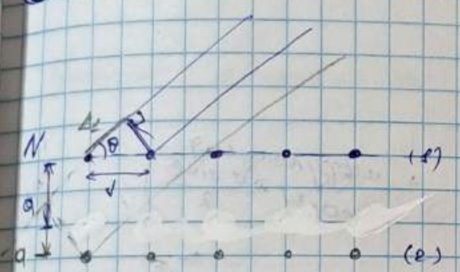
$$\lim \cancel{\frac{2\sin(9\pi\cos\theta)\cdot 9\pi\cdot(-\sin\theta)}{2\sin(3\pi\cos\theta)\cdot 3\pi\cdot(-\sin\theta)}} \to \cancel{\frac{81\pi^2\cos^2\theta}{9\pi^2\cos^2\theta}} = 9.$$

$$\frac{2\sin(9\pi\cos\theta)\cdot\cos(9\pi\cos\theta)\cdot \overset{3}{9\pi}\cdot(-\sin\theta)}{2\sin(3\pi\cos\theta)\cos(3\pi\cos\theta)\cdot 3\pi\cdot(-\sin\theta)} =$$ по беск. малым.

$2r\cos\theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow D_{max} = 1$

Дома нарисовать: ... (на компьютере). * Д/з.

②



$D(\theta)$ - ?

$$\hat{\vec{E}}_1 = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - k r_1)}$$

$$\hat{\vec{E}}_2 = \hat{\vec{E}}_1 \cdot e^{ikd\cos\theta}$$

$$\hat{\vec{E}}_3 = \hat{\vec{E}}_2 \cdot e^{ik2d\cos\theta}$$

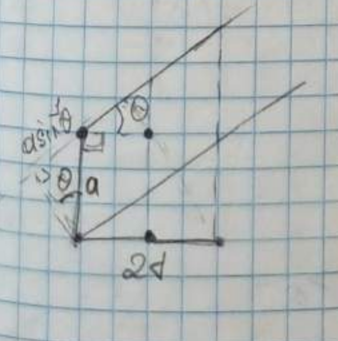
...

$$\hat{\vec{E}}_N = \hat{\vec{E}}_1 \cdot e^{ik(N-1)d\cos\theta}$$

Для (1):

$$\hat{\vec{E}} = \hat{\vec{E}}_1 \left(1 + e^{ikd\cos\theta} + \ldots + e^{ik(N-1)d\cos\theta}\right) = \vec{E}_1 \frac{\left(1 - e^{ikd\cos\theta \cdot N}\right)}{1 - e^{ikd\cos\theta}} = \vec{E}_1 \cdot \frac{e^{\frac{ikdN\cos\theta}{2}} \cdot \sin\left(kd\cos\theta \cdot \frac{N}{2}\right)}{e^{\frac{ikd}{2}\cos\theta} \cdot \sin\left(kd\cos\theta \cdot \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \vec{E}_1 \cdot e^{i\frac{kd}{2}(N-1)\cos\theta} \cdot \frac{\sin\left(\frac{kdN}{2}\cos\theta\right)}{\sin\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)}$$



$$\varphi_{доп} = -a\sin\theta$$

Для (2):

$$\hat{\vec{E}}_1' = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - k r_1)} \cdot e^{-ia\sin\theta}$$

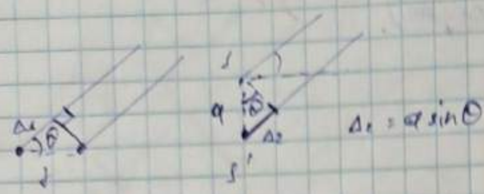
$$\hat{\vec{E}}_2' = \vec{E}_1 \cdot e^{ikd\cos\theta} \cdot e^{-2ia\sin\theta}$$

...

$$\hat{\vec{E}}_N' = \vec{E}_1 \cdot e^{ik(N-1)d\cos\theta} \cdot e^{-iaN\sin\theta}$$

$$\hat{\vec{E}}' = \hat{\vec{E}}_1 \cdot (e^{-ia\sin\theta}$$

В масс.: $\hat{\vec{E}}_I = \hat{\vec{E}}_1\left(1+e^{ik\Delta_1}+\dots+e^{ik\Delta_1(N-1)}\right) = \hat{\vec{E}}_1\cdot\frac{1-e^{ik\Delta_1 N}}{1-e^{ik\Delta_1}}$



$\Delta_1 = a\sin\theta$

$\hat{\vec{E}}_{II} = \hat{\vec{E}}_I\, e^{-ik\Delta_2}$

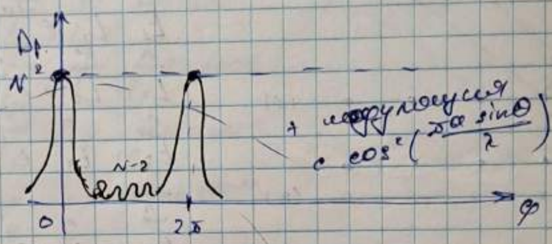
$$\vec{E} = \hat{\vec{E}}_I + \hat{\vec{E}}_{II} = \hat{\vec{E}}_I\left(1+e^{-ik\Delta_2}\right) = \hat{\vec{E}}_1 \frac{e^{ik\frac{\Delta_1 N}{2}}}{e^{ik\frac{\Delta_1}{2}}}\cdot e^{\frac{ik\Delta_2}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{k\Delta_1 N}{2}}{\sin\frac{k\Delta_1}{2}}\cdot 2\cos\left(\frac{k\Delta_2}{2}\right)$$

$$D(\theta) = \frac{4\cos^2\left(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right)}{4N^2\cos^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)}\left(\frac{\sin\left(\frac{N\pi d\cos\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d\cos\theta}{\lambda}\right)}\right)^2$$

D_p - решёточный множитель

$\varphi = \frac{2\pi d\cos\theta}{\lambda}$

$D_p = \left(\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2$



+ модуляция с $\cos^2\left(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right)$

$\sin\frac{\varphi}{2} = 0$

$\frac{\varphi}{2} = \pi m$

$\varphi = 2\pi m,\ m = 0, 1, \dots$

Нули: $\frac{N\varphi}{2} = \pi m'$

$m' = 1, 2, \dots, (N-1)$ → $(N-1)$ нулей между главн. побочн. максимумы (их $N-2$)

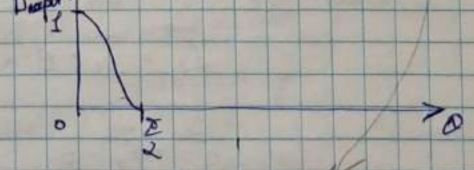
, если $a = \frac{\lambda}{2}$

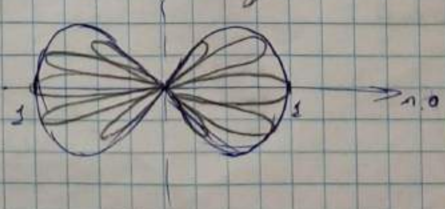
$D_{парц}(\theta) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{1}$

$\frac{\pi}{2}\sin\theta = \frac{\pi}{2}$

$\sin\theta = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

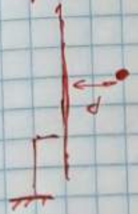




Д/з: ① Синфазное; $D(\theta)$ - ?

② ⊥ вибратор около заземлённой стенки.

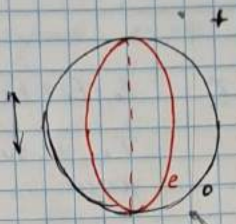
Для случаев картинки $d=\frac{\lambda}{4}$; $d=\frac{\lambda}{2}$; $d=\lambda$



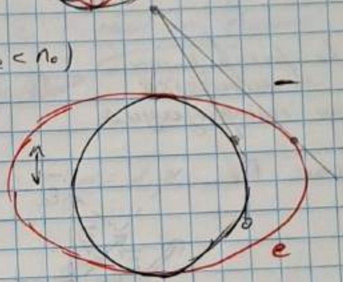
18.05.22.

Двулучепреломление.
Кристаллооптика

Кристалл „положителен" если $v_e < v_0$
($n_e > n_0$)

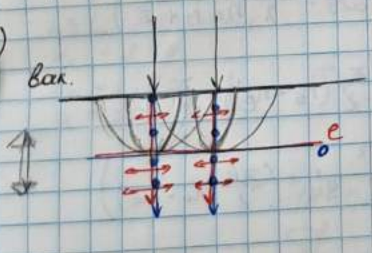


Кристалл „отрицательный", если $v_e > v_0$ ($n_e < n_0$)

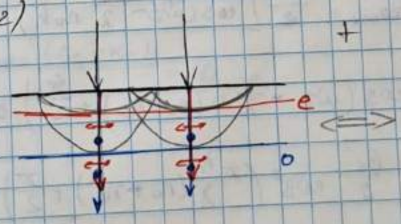


① Построение Гюйгенса (кристалл +)

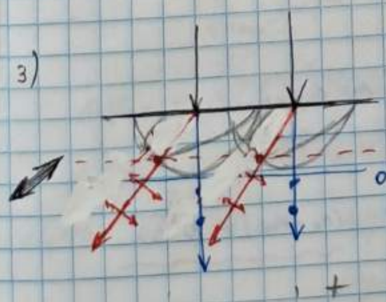
1)



2)

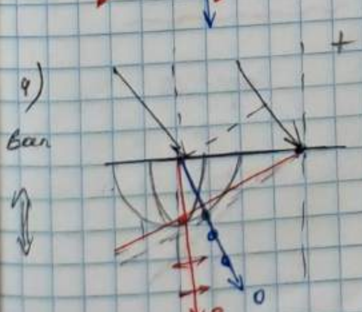


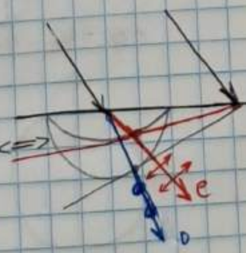
3)

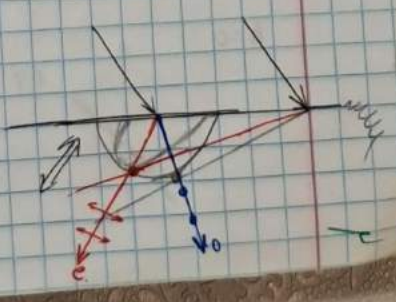


— под углом к оптической оси.

4)

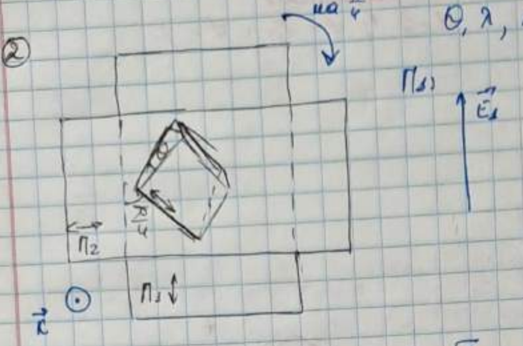




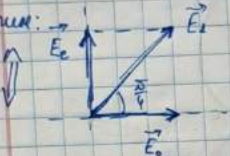


Д/з Все в прошлых случаев для „−" кристалла

② $\theta, \lambda, \Delta x, \; n_o - n_e = ?$



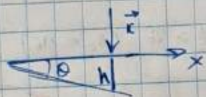
Клин:



$E_o = E_e = E_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; $u = \frac{c}{n}$

Т.к. ск-ти распр-я волн разные → будет набег фази.

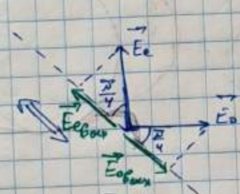
по мере распр волны вдоль OX → меняется из-за фази поляризация.



$$\varphi_o = k_o \cdot h = \frac{\omega}{u_o} h = \frac{\omega}{c} n_o h = \frac{2\pi}{\lambda} n_o h$$

$$\varphi_e = \frac{2\pi}{\lambda} n_e h$$

После П2:



$$E_{o\,вых} = E_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_o h\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$E_{e\,вых} = E_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_e h + \pi\right)$$

$$E = E_{o\,вых} + E_{e\,вых} = \frac{E_1}{2}\left[\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_o h\right) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_e h + \pi\right)\right] =$$

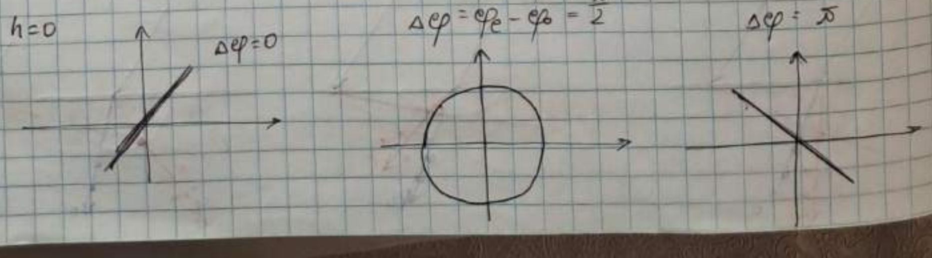
$$= \frac{E_1}{2} \cdot 2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda} h (n_o + n_e) + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda \cdot 2}(n_o - n_e)h + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = \langle E_\Sigma^2 \rangle = \frac{E_1^2}{2} \cos^2\left(\frac{\pi h}{\lambda}(n_o - n_e) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E_1^2}{2} \sin^2\left(\frac{\pi h}{\lambda}(n_o - n_e)\right)$$

$$tg\,\theta = \frac{h}{x} \rightarrow h \approx x\theta$$

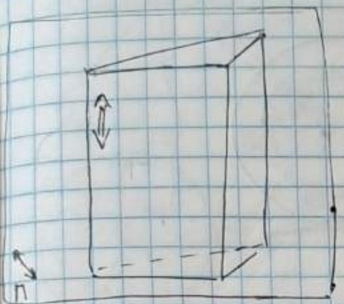
min: $\frac{\pi h_m}{\lambda}(n_o - n_e) = \frac{\pi x_m \theta}{\lambda}(n_o - n_e) = \pi m$, $m = 0, 1, 2 \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x_2 \theta}{\lambda}(n_o - n_e) = 2 \\ \frac{x_1 \theta}{\lambda}(n_o - n_e) = 1 \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{\Delta x \theta}{\lambda}(n_o - n_e) = 1 \rightarrow (n_o - n_e) = \frac{\lambda}{\theta \Delta x}$$



③ λ, на входе круговая поляризация.

Пусть смотрим в поляризатор



$n_o, n_e.\ (n_o < n_e),\ \lambda,\ h_{max}$

$N - ?$ (тёмных полос) ($m_{max} - ?$)

$$E_{o\,вых} = E_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_o h\right)$$

$$E_{e\,вых} = E_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_e h + \pi\right)$$

Условие минимума то же самое:

$$\min: \ \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi_{o,e}}{2}\right) = 0$$

$$\Delta\varphi_{o,e} = 2\pi m$$

Но у ребра клина уже есть фаза $\frac{\pi}{2}$ → там не темно.

$$\Delta\varphi_{o,e} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} h (n_e - n_o)$$ из прошлой.

$$\Delta\varphi_{o,e} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} h (n_e - n_o) = 2\pi m, \quad m \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} h (n_e - n_o) = 2\pi m_{max}$$

$$m = \frac{1}{4} + \frac{h}{\lambda}(n_e - n_o) \longleftrightarrow h_{min} = \frac{\lambda \cdot 1}{n_e - n_o}$$ т.е. можно добавить $\frac{1}{4}$

$h_{max} = 0,05$ см
$n_o = 1,54$
$n_e = 1,55$
$\lambda = 500$ нм.

$$m_{max} = \frac{h_{max}(n_e - n_o)}{\lambda} = 10$$

④ n_e, n_o, λ

h_{min}? При какой минимальной толщине пластинки лин. поляр → круг?

$$\Delta\varphi_{o,e} = \cancel{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} h (n_e - n_o) = \frac{\pi}{2}}$$

$$\cancel{h = \frac{\lambda}{2\pi (n_e - n_o)}}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} h (n_e - n_o) = \frac{\pi}{2}$$

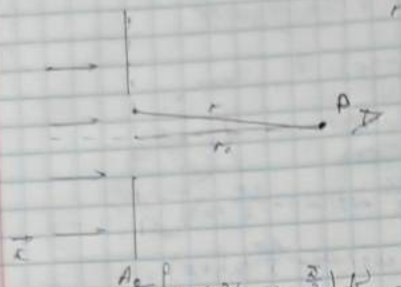
$$h_{min} = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)}$$

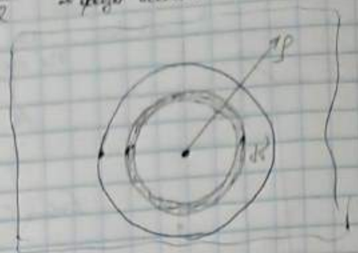
Пусть на входе $\Delta\varphi_{o,e} = 0$

$$\Delta\varphi_{o,e}^{вых} = \frac{\pi}{2}$$

Дифракция Френеля

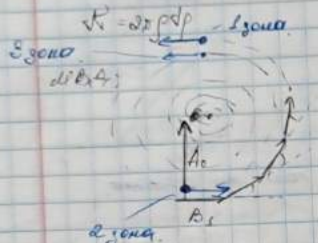
$r = r_0 + \frac{\lambda}{2}$ → фаза меняется на π





$$I_P = \frac{A_0}{\lambda r_0}\int \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) dS \to \sum_{m=0}^{N} B_m \cos(\omega t - \varphi_m)$$

$dS = 2\pi\rho\, d\rho$ – 1 зона



A_0 ~ соотв. открытому волновому фронту.

Важно для решения задач: $B_m \sim A_0$, $B_m \sim dS$

① Монохром-ая волна с $I_0 = A_0^2$, падает на экран с отверстием 1½ зоной Френеля

$\rho_{max} = \rho_1$; $I_P = ?$

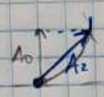
1)

$A_1 = 2A_0$

$I_1 = 4A_0^2 = 4I_0$

2) Теперь закроем дырку:

$\Rightarrow A_2 = A_0\sqrt{2}$



$I_2 = A_2^2 = 2A_0^2 = 2I_0$

3)

Но теперь только половинка даёт вклад

Закроем половину дырки.

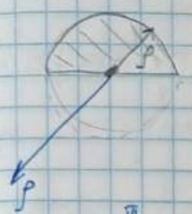
— ~стало

$B_m \sim dS$

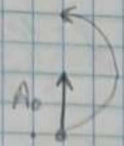
По фазе всё также → ⊃. Но вектора теперь стали короче

$A_3 = A_0 \to I_3 = I_0$

4) $\rho = \rho_{III}$, Вокруг открытой волновой фронт



$I_p = ?$

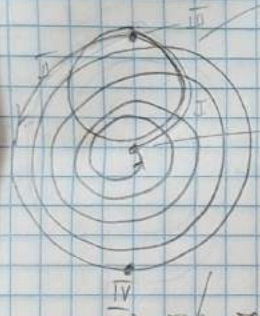


A_{ex} - вектор, соотв. внешней части.

A_{in} - внутренняя.

$\Rightarrow A_4 = 0 \rightarrow I_4 = 0$

2 способ.

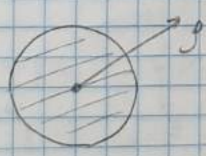


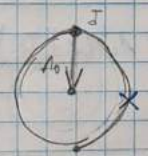
полузона (половинка заслонки)

т.к. делая открытой волновой фронт, спираль даёт как обычно прямую в ноль.

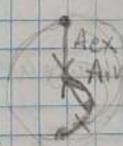
открыта полностью

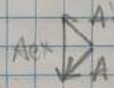
5)





$A = A_0$
$\Rightarrow I = I_0$

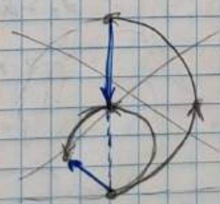


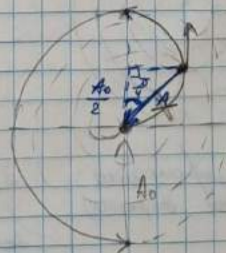


$A_0^2 - \frac{A_0^2}{2}$

$\Rightarrow A = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$

6)





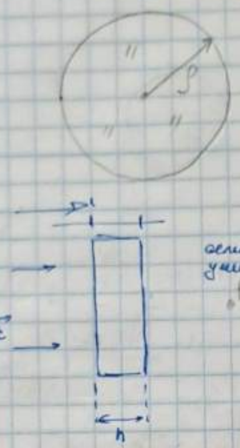
$A_6 = \sqrt{\frac{A_0^2}{4} + \frac{A_0^2}{4}} = \frac{A_0\sqrt{2}}{2}$

$A_6^2 = I = \frac{2A_0^2}{4} = \frac{I_0}{2}$

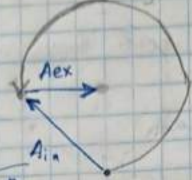
② Есть стеклянный диск.

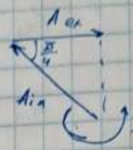
ρ – 1,5 зоны, n, I_p – max, λ

$h = ?$ ~ толщина диска.



если не учитывать n



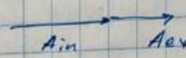


фаза из запаздывания

$A_{ex} = A_0$

$A_{in} = \sqrt{2} A_0$ | к рису…

нужно



$$\Rightarrow \Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + 2\pi m, \quad m = 0, 1, \ldots$$

$$\Delta\varphi_{h_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot nh - \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} h}_{\text{волны бегут и вне пластинки}}$$

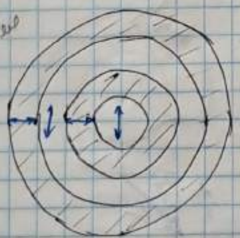
$$\frac{2\pi}{\lambda} h (n-1) = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m$$

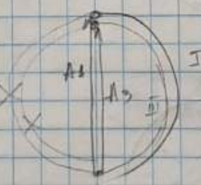
$$h = \frac{\lambda}{(n-1)} \left(\frac{5}{8} + m\right)$$

$$A = A_0 (1 + \sqrt{2}) \quad \to \quad I_{max} = A_0^2 (1 + \sqrt{2})^2$$

③ Зонная пластинка.

4 зоны





$A_1 = 2A_0$

$A_3 = 2A_0$

$\Rightarrow A = A_1 + A_3 = 4A_0$

$\Rightarrow I = 16 I_0$

С поляроидами:
(все зоны открыты)

$I_{\updownarrow} = 8 I_0$

$I_{\leftrightarrow} = 8 I_0$

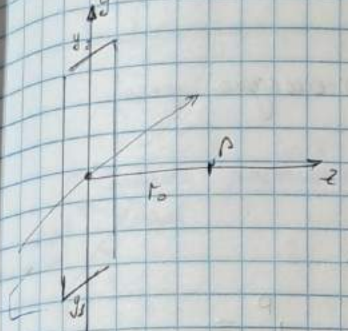
$\to I = I_{\leftrightarrow} + I_{\updownarrow} = 16 I_0$

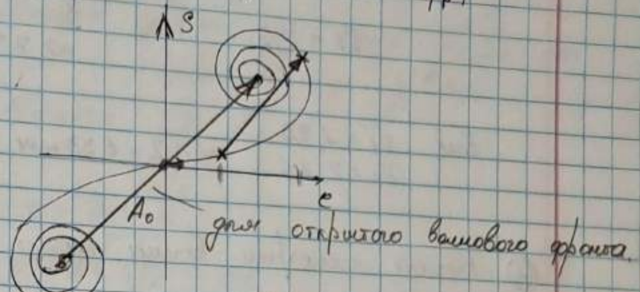
Дифракция Френеля с прямоугольным отверстием

$$f_p = B\left(\left(C(v_2) - C(v_1)\right)\cos\theta_0 + \left(S(v_2) - S(v_1)\right)\sin\theta_0\right) = BF\cos\left(\omega t - kr_0 + \frac{\pi}{2} + \varphi_p\right)$$

где $C(v) = \int\limits_0^v \cos\frac{\pi v'^2}{2}\,dv'$

$S(v) = \int\limits_0^v \sin\frac{\pi v'^2}{2}\,dv'$



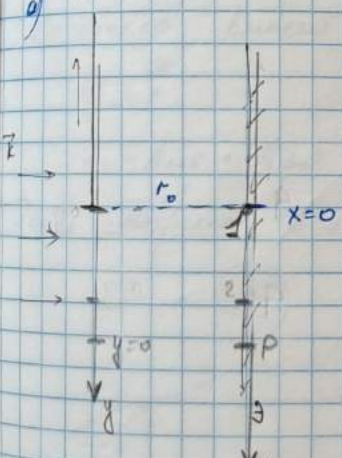


для открытого волнового фронта.

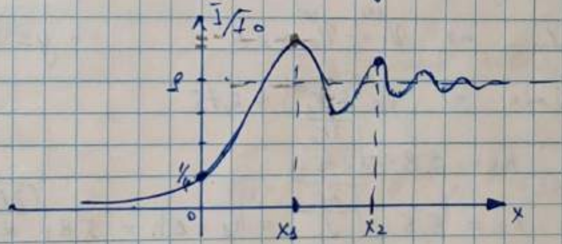
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \quad tg\,\varphi_p = -\frac{F_2}{F_1}$$

① Дифракция на крае полуплоскости: $\frac{I_{max}}{I_{min}}$ - ?

а)



1) $A = 32 = \frac{A_0}{2}$ — всё в у.е.



2) $A_{1max} = 75$ у.е. $\quad A_0 = 64$

$\frac{I_{1max}}{I_0} = \frac{A_{1max}^2}{A_0^2} \approx 1,37$

3) $A_{min} = 55$ у.е. $\Rightarrow \frac{I_{1min}}{I_0} \approx 0,74$

$\frac{I_{1max}}{I_{1min}} \approx 1,85$

б) пусть $r_0 = 1$ м ; $\Delta x = x_2 - x_1 = 0,63$ мм.

λ = ?

$v = x\sqrt{\frac{2}{b\lambda}}$; $\quad v_1 = x_1\sqrt{\frac{2}{b\lambda}} = 1,25$

$v_2 = x_2\sqrt{\frac{2}{b\lambda}} = 2,35$

$\Delta v = \Delta x\sqrt{\frac{2}{b\lambda}} \Rightarrow \frac{\Delta v^2}{\Delta x^2} = \frac{2}{\underset{\overset{\shortparallel}{r_0}}{b}\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\Delta x^2}{b\Delta v^2} \approx 656$ нм.

В классе: $\frac{k y^2}{2 r_0} = \frac{\pi v^2}{2} \Rightarrow \frac{2\pi y^2}{\lambda r_0} = \pi v^2 \Rightarrow y = v\sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}}$

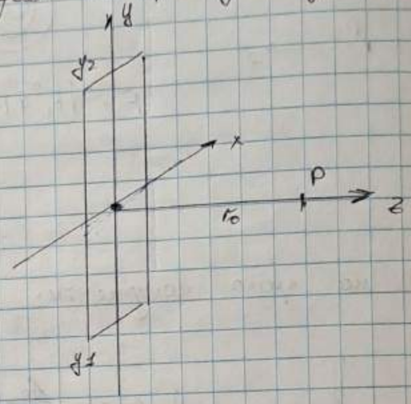
$v_1 \approx 1{,}3$

$v_2 \approx 2{,}3$ $\Rightarrow \Delta y = \Delta x = \Delta v \sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}}$

$\Rightarrow \lambda \approx 794$ нм.

Если $v_1 = 1{,}23$, $v_2 = 2{,}35$ $\Rightarrow \lambda = 633$ нм.

② Плоская монохром. волна падает на прямоугольную щель.



$r_0 = 60$ см

h_1 — I_{1min}

$h_2 = h_1 + \Delta h$ — I_{2min}

$\Delta h = 0{,}7$ мм.

λ — ?

$y_2 - y_1 = h$

$y_1 = -y_2$

$1min \Rightarrow v_2^{(1)} = -v_1^{(1)} \approx 1{,}9$ $\qquad y = v\sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}}$

$2min \Rightarrow v_2^{(2)} = -v_1^{(2)} \approx 2{,}75$

$$h_1 = 3{,}8 \cdot \sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}}$$

$$h_2 = 5{,}5 \cdot \sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}} = h_1 + \Delta h = 3{,}8\sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}} + \Delta h$$

$$1{,}7\sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}} = \Delta h$$

$$\frac{\lambda r_0}{2} = \frac{\Delta h^2}{1{,}7^2} \rightarrow \lambda = \frac{2\Delta h^2}{1{,}7^2 \cdot r_0} \approx 565 \text{ нм.}$$

В классе:

$$y = v\sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}}$$

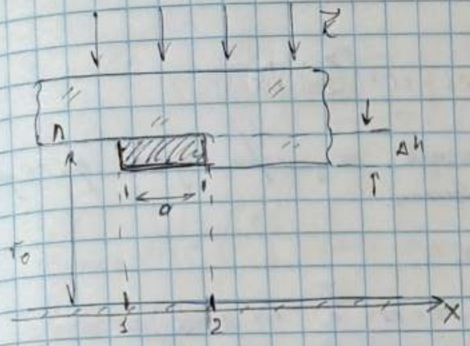
$$h = 2v_2^{(1)}\sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}} = 2y_2^{(1)}$$

$$h + \Delta h = 2y_2^{(2)} = 2v_2^{(2)}\sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}}$$

$$\Delta h = 2\sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}}\left(v_2^{(2)} - v_1^{(1)}\right) \rightarrow \frac{\Delta h^2}{4(v_2^{(2)} - v_1^{(1)})^2} = \frac{\lambda r_0}{2}$$

$$\lambda = \frac{\Delta h^2}{2 r_0} \cdot \frac{1}{(v_2^{(2)} - v_1^{(1)})^2}$$

③ Плоская монохром. волна $\lambda = 0{,}65$ мкм.



$a \approx 0{,}3$ мм ~ непрозрачная полоска
$r_0 = 110$ см

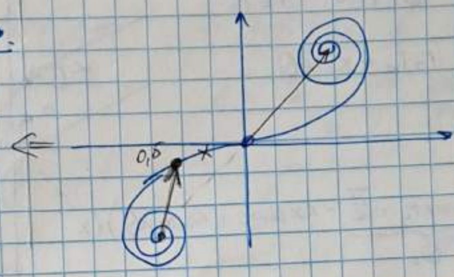
Высота уступа Δh такое $\Rightarrow I_2 - max$ в т. 2

Найти $\frac{I_2}{I_1}$ – ?

$$a = v\sqrt{\frac{\lambda r_0}{2}}$$

$$v = a\sqrt{\frac{2}{\lambda r_0}} \approx 0{,}5$$

⇒ Спираль разбивается.



Это если у стекла $n=1$.

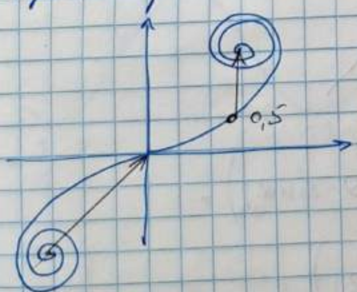
Но стекло вносит запаздывание

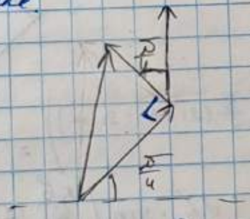
$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$A_2 = A_{лев} + A_{прав} = (19 + 32)$ у.е.

т.к. запазд. повор. влево

Теперь смотрим в 1 точке.





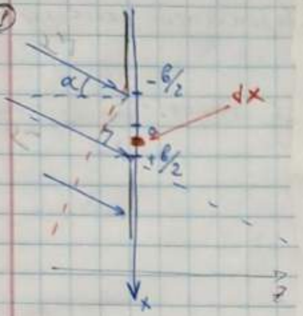
$A_1 = \sqrt{32^2 + 19^2}$ у.е. $\approx 37{,}22$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2}{A_1^2} = \frac{51^2}{32^2 + 19^2} = \frac{(A_{лев} + A_{прав})^2}{A_{лев}^2 + A_{прав}^2} \approx 1{,}88$$

23.05.22

Дифракция Фраунгофера

①



λ, b ; $I = ?$

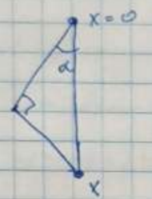
$$df = \frac{A_0}{\sqrt{\lambda z}} \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2} + \varphi(x)\right) dx$$

Проще вести отсчёт от центра, пусть $\varphi_0 = 0$ для

запаздывание

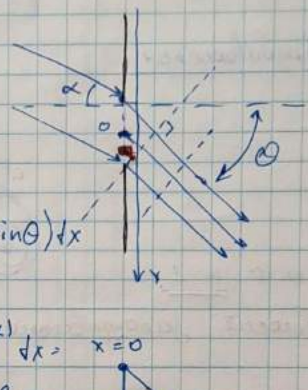
$$\varphi(x) = -kx\sin\alpha$$

$$\Rightarrow df = \frac{A_0}{\sqrt{\lambda z}} \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2} - kx\sin\alpha\right) dx$$



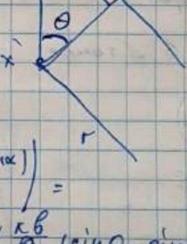
от $x = 0$ $\quad r \equiv r_0$

$$r = r_0 - x\sin\theta$$



$$\Rightarrow df = \frac{A_0}{\sqrt{\lambda z}} \cos(\underbrace{\omega t - kr_0 + \frac{\pi}{2}}_{\theta_0} - kx\sin\alpha + kx\sin\theta) dx$$

$$\hat{f} = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{A_0}{\sqrt{\lambda z}} e^{i\theta_0} e^{ikx(\sin\theta - \sin\alpha)} dx =$$



$$= \frac{A_0}{\sqrt{\lambda z}} e^{i\theta_0} \cdot \frac{e^{ikx(\sin\theta - \sin\alpha)}}{ik(\sin\theta - \sin\alpha)} \Bigg|_{-b/2}^{b/2} =$$

$$= \frac{A_0 \cdot e^{i\theta_0}}{\sqrt{\lambda z}} \cdot \frac{1}{ik(\sin\theta - \sin\alpha)} \cdot$$

$$\cdot \left(e^{ik\frac{b}{2}(\sin\theta - \sin\alpha)} - e^{-ik\frac{b}{2}(\sin\theta - \sin\alpha)}\right) =$$

$$= \frac{A_0 \cdot e^{i\theta_0}}{\sqrt{\lambda z}} \cdot \frac{1}{\cancel{i}k(\sin\theta - \sin\alpha)} \cdot 2\cancel{i} \cdot \sin\left(\frac{kb}{2}(\sin\theta - \sin\alpha)\right) =$$

$$= \frac{A_0 \cdot e^{i\theta_0}}{\sqrt{\lambda z}\,(\sin\theta - \sin\alpha)} \cdot 2\sin\left(\frac{kb}{2}(\sin\theta - \sin\alpha)\right) =$$

$$= \frac{2A_0}{\sqrt{\lambda z}} e^{i\theta_0} \cdot \frac{\sin\left(\frac{kb}{2}(\sin\theta - \sin\alpha)\right)}{k(\sin\theta - \sin\alpha)} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{b} =$$

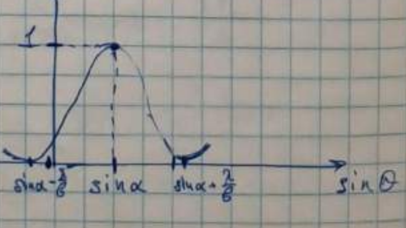
$$\frac{A_0 b}{\lambda b}$$

$$I = I_{max} \cdot \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\theta - \sin\alpha)\right)$$

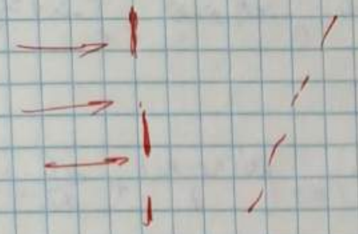
$$I_{max} = \frac{A_0^2 b^2}{\lambda z}$$

$$\frac{\cancel{\pi} b}{\lambda}(\sin\theta - \sin\alpha) = \cancel{\pi} m, \quad m = \pm 1, \pm 2$$

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{b} + \sin\alpha$$



Для лаб.



раздробить другой по-своему?

(2) $I = I_{max}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\theta - \sin\alpha)\right)$

$I_{max} = \frac{A_0^2 b^2}{\lambda z}$ → уменьш.

Здесь $\alpha = 0$

$b' = \frac{b}{2}$;

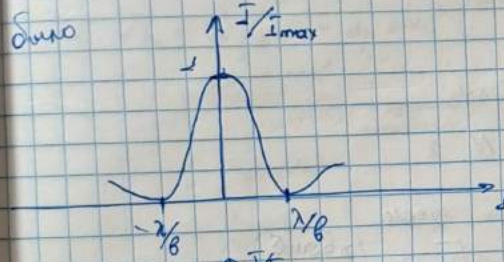
Высота ~~максимума при $\sin\theta = 0$~~

$\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta = \pi m$ → $\sin\theta = \frac{\lambda m}{b}$

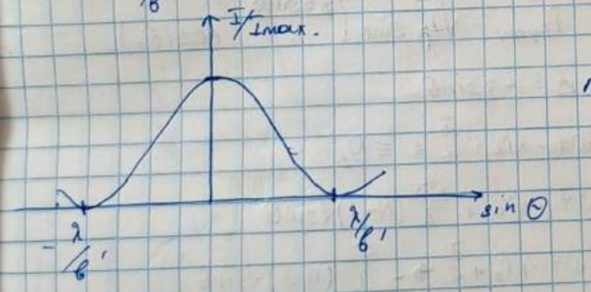
$b' = \frac{b}{2}$ → ~~[illegible]~~ дальше. (т.е. шире)

$\sin\theta \le 1$. → $\frac{\lambda m}{b} = 1$ → $m = \left[\frac{b}{\lambda}\right]$

было



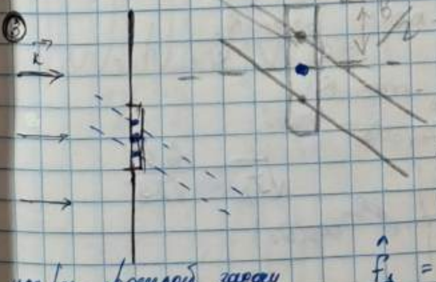
$b' = \frac{b}{2}$ → число минимумов уменьш.



$m_{max} = \left[\frac{b}{\lambda}\right]$

$I'_{max} = \frac{1}{4} I_{max}$

(3)



$b, \lambda, d,$ n_1, n_2 — перекрывается щель пластинами толщиной d

Что должно быть, чтобы максимума в центре не было.

Рассмотреть как две отдельные щели.

нет фаз. пластиной задачи

$$\hat f_1 = \frac{A_0}{\sqrt{\lambda z}} \cdot e^{i\theta_0} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b \sin\theta}{2\lambda}\right) \cdot \frac{b}{2} \cdot e^{-ikn_1 d} \cdot e^{-ik\frac{b}{4}\sin\theta}$$

$$\hat f_2 = \frac{A_0 b}{2\sqrt{\lambda z}} \cdot e^{i\theta_0} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b \sin\theta}{2\lambda}\right) \cdot e^{-ikn_2 d} \cdot e^{+ik\frac{b}{4}\sin\theta}$$

$$\hat f = \hat f_1 + \hat f_2 = \frac{A_0 b}{2\sqrt{\lambda z}} e^{i\theta_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b \sin\theta}{2\lambda}\right)\left(e^{-ikn_1 d} e^{-ik\frac{b}{4}\sin\theta} + e^{ik\frac{b}{4}\sin\theta} e^{-ikn_2 d}\right) =$$

Отдельно со сдвигом:

$e^{-ikdn_1}\cdot e^{-ik\frac{b}{4}\sin\theta} + e^{-ikdn_2}\, e^{+ik\frac{b}{4}\sin\theta} = e^{-ikd\frac{n_1+n_2}{2}}\left(e^{-ikd\frac{n_1-n_2}{2}}\, e^{-ik\frac{b}{4}\sin\theta} + e^{+ik\frac{b}{4}\sin\theta}\cdot e^{+ikd\frac{n_1-n_2}{2}}\right) =$

$$= \frac{A_0 b}{\sqrt{\lambda z}}\, e^{i\theta_0}\, \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b\sin\theta}{2\lambda}\right)\cos\left(\frac{\pi d(n_1-n_2)}{\lambda}+\frac{\pi b}{2\lambda}\sin\theta\right)\cdot e^{-ikd\frac{n_1+n_2}{2}}$$

$$I = \frac{A_0^2 b^2}{\lambda z}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b\sin\theta}{2\lambda}\right)\cos^2\left(\frac{\pi d(n_1-n_2)}{\lambda}+\frac{\pi b\sin\theta}{2\lambda}\right)$$

I_{max} — при $\sin\theta = 0$

$$\Rightarrow I = \frac{A_0^2 b^2}{\lambda z}\cdot\cos^2\left(\frac{\pi d(n_1-n_2)}{\lambda}\right)$$

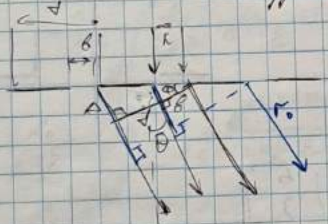
$\frac{\pi d(n_1-n_2)}{\lambda} = \frac{\pi}{2}+\pi l \to$ чтобы выполнялось такое условие

$$\Rightarrow d(n_1-n_2) = \lambda\left(\frac{1}{2}+l\right)$$

27.05.22

Дифракционные решётки

(1)



b, d, N, λ

Для одной щели:

$$f_{p\,щели} = \sqrt{I_p}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}\right)\cos(\theta_0)$$

$$\Delta = +d\sin\theta$$

$$\theta_0 = \omega t - kr_0 + \frac{\pi}{2} \equiv \theta_1$$

$$\theta_n = \omega t - kr_0 + \frac{2\pi}{\lambda}(N-1)d\sin\theta$$

$$f_p = \sum_{n=1}^{N}\sqrt{I_p}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}\right)\cos\left(\omega t - kr_0 + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d\sin\theta\right)$$

$$\hat f_{p_\Sigma} = \sqrt{I_p}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}\right)\cdot e^{i(\omega t - kr_0+\frac{\pi}{2})}\cdot\left(1+e^{-ikd\sin\theta}+e^{-2ikd\sin\theta}+\ldots\right) =$$

$$= \sqrt{I_p}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}\right)\cdot e^{i\overbrace{(\omega t - kr_0+\frac{\pi}{2})}^{\theta_0}}\;\frac{1-e^{-ikdN\sin\theta}}{1-e^{-ikd\sin\theta}}$$

$$\sqrt{I_p} = \frac{A_0 b}{\sqrt{\lambda z}}$$

$$\Rightarrow f_p = \sqrt{I_p}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi dN\sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)}\cdot\cos(\theta_0)$$

$$I_{p_\Sigma} = f_p^2 = I_p\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}\right)\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi dN\sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)}$$

$I(\theta)$ - ? $N=3$; $\frac{d}{b}=3$

В итоге: ~~все~~ щель можно рассм-ть как отдельный вибратор

$$\theta_0 = \omega t - kr_0 + \frac{\pi}{2} \equiv \theta_1$$

$i\kappa d\frac{n_1-n_2}{2}$ $e^{-i\kappa\frac{\theta}{2}\sin\theta}$ +

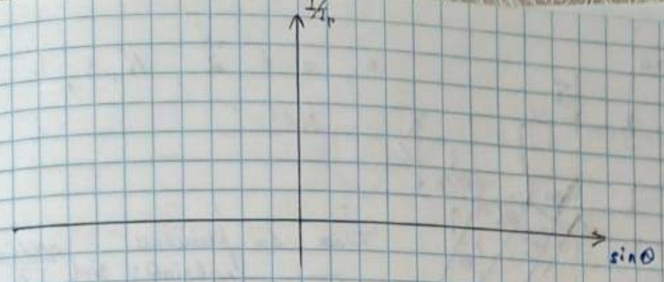
$e^{-i\kappa d\frac{n_1+n_2}{2}}$

выполняться условие

$\cos(\theta_0)$

$\frac{A_0 b}{\sqrt{\lambda z}}$

вибратор



$\theta_2 = \theta_0 - \kappa d\sin\theta$

...

$\theta_n = \theta_0 - \kappa d(n-1)\sin\theta$

$$f_p = \sum_{n=1}^{N} f_{pn}$$

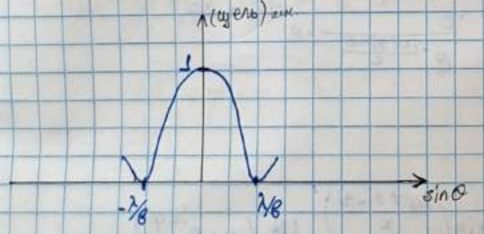
$$\hat{f}_{p_\Sigma} = \sqrt{I_p}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}\right)e^{i\theta_0}\left(1 + e^{-i\kappa d\sin\theta} + e^{-i2\kappa d\sin\theta} + \ldots\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{p_\Sigma} = \hat{f}_p\hat{f}_p^* = I_p\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}\right)\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi N d\sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)}$$

компл. сопр.

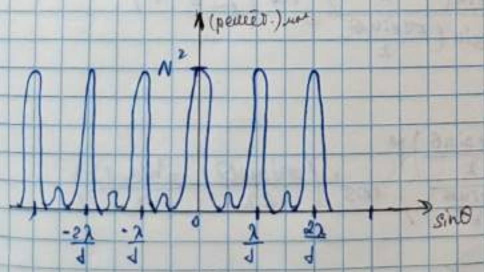
щелевой ф-р главные минимумы

решёточный ф-р главн. макс., где знам. равен 0



$$\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = \pi m$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d}m$$



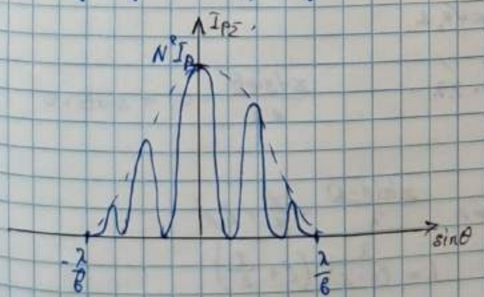
$$\frac{\pi N d\sin\theta}{\lambda} = m'\pi$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda m'}{dN}$$

$m' = 1, \ldots, (N-1)$

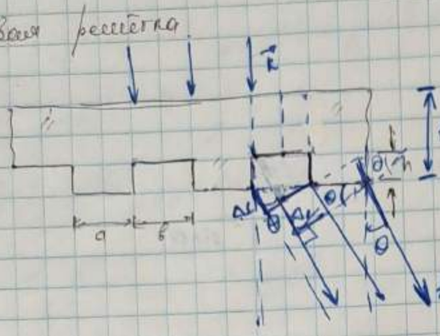
при $N = 3$ → побочн. ~~max~~ → 2.
между ними миним. → 1

$\left.\begin{matrix}(N-1)\ \min\\(N-2)\ \max\end{matrix}\right\}$ побочн.



$d = 3b$

② Фазовая решётка



$n, \quad a = b = \frac{d}{2}, \quad N, \lambda, h$

$I(\theta) = ?$

Для 1й решётки:

$$f_{p1} = \sqrt{I_{p1}}\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi N d \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)} \cdot \cos\left(\omega t - k r_0 + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} n(l-h) + \frac{\pi}{\lambda}\right.$$

$$f_{p2} = \sqrt{I_{p2}} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi N d \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)} \cos\left(\omega t - k r_0 + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} n l\right.$$

$$\Delta = (a+b)\sin\theta = d\sin\theta$$

В массе: $$\hat{f}_a = \frac{A_0 a}{\sqrt{\lambda z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi d N \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)} e^{i\Theta_0} \frac{e^{-\frac{ikNd\sin\theta}{2}}}{e^{-\frac{ikd\sin\theta}{2}}}$$

для волнок $$\hat{f}_b = \frac{A_0 b}{\sqrt{\lambda z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi d N \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)} \cdot \frac{e^{-\frac{ikNd\sin\theta}{2}}}{e^{-\frac{ikd\sin\theta}{2}}} \cdot e^{i(\Theta_0 + \Delta\varphi)}$$

$$\Delta_1 = \frac{d}{2}\sin\theta$$

$$\Delta\varphi = k\Delta_1 - k(n-1)h$$

$$\hat{f}_p = \hat{f}_{(a)} + \hat{f}_{(b)} = \frac{A_0 d}{2\sqrt{\lambda z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi d \sin\theta}{2\lambda}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{N\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)} e^{i\Theta_0'}\left(1 + e^{i\Delta\varphi}\right)$$

$$1 + e^{i\Delta\varphi} = e^{\frac{i\Delta\varphi}{2}} \cdot 2\cos\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$I_p = \frac{A_0^2 d^2}{\lambda z} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{2\lambda}\right) \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{N\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{2\lambda} - \frac{\pi h(n-1)}{\lambda}\right)$$

$$\cancel{\frac{\pi d \sin\theta}{2\lambda} - \frac{\pi h(n-1)}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi k}, \quad k = 0, 1 \ldots$$

$$\cancel{\frac{d \sin\theta}{2\lambda} - \frac{h(n-1)}{\lambda} = \frac{1}{2} + k} \quad \Big| \cdot 2\lambda \qquad \frac{\pi d \sin\theta}{2\lambda} = 0 \to \sin\theta = 0$$

$$d\sin\theta - 2h(n-1) = \lambda + 2k\lambda$$

Хотим загасить центр. max: $\theta = 0 \Rightarrow$ $$\frac{\pi h(n-1)}{\lambda} = \frac{\cancel{\pi}}{2} + l\cancel{\pi}$$

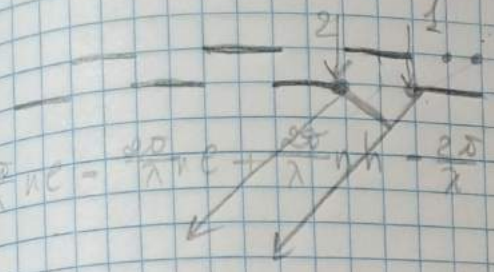
$$h = \frac{\lambda}{(n-1)}\left(l + \frac{1}{2}\right)$$

$\frac{d\sin\theta}{\lambda}$

$\frac{\sin\theta}{\lambda}$

$n(\ell-h) + \frac{2\pi}{\lambda}h$

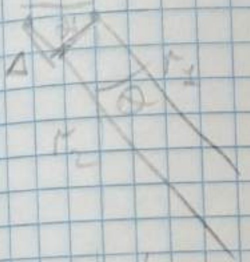
$\frac{2\pi}{\lambda} n(\ell-h) + \frac{2\pi}{\lambda} h$



$\frac{2\pi}{\lambda} n\ell +$

$$\frac{2\pi}{\lambda} n\ell - \frac{2\pi}{\lambda} n\ell + \frac{2\pi}{\lambda} nh - \frac{2\pi}{\lambda} h = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)h$$

$$k\Delta = \frac{k d}{2}\sin\theta$$



$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} k\Delta_1$$

?

$$\frac{2\pi}{\lambda} n\ell - \frac{2\pi}{\lambda} nh + \frac{2\pi}{\lambda} h =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} n\ell - \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1)$$

$$r_2 - r_1 = \frac{d}{2}\sin\theta \qquad r_2 = r_1 + \frac{d}{2}\sin\theta$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \frac{d}{2}\sin\theta$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)h -$$

2)

$\theta = 0$

ения.

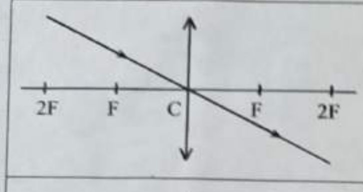
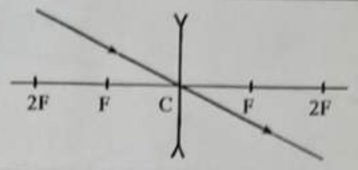
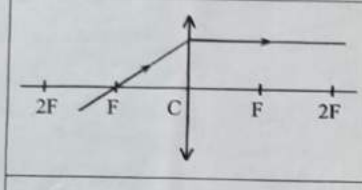
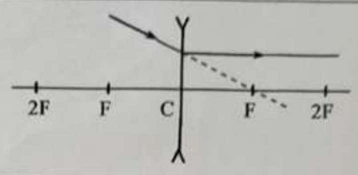
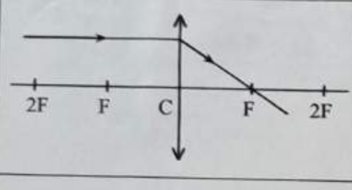
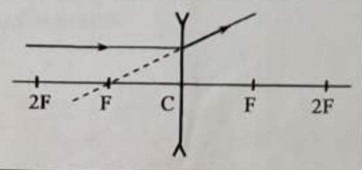
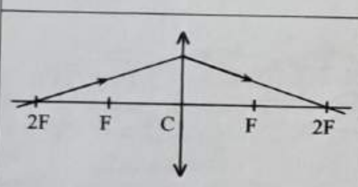
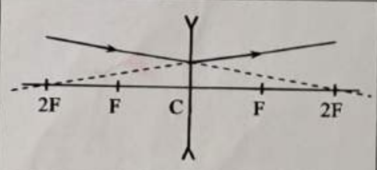
ние

$\nu' = \nu \cdot \frac{1}{1 \mp \frac{v_{ист}}{c}}$ «−» источник приб. «+» источник удал.

$\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{v_{пр}}{c}\right)$ «+» приёмник приб. «−» приёмник удал.

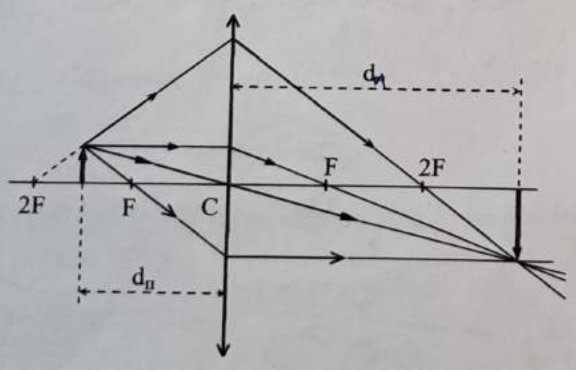
$\nu' = \nu\,\frac{c - v_{пр\,x}}{c - v_{ист.\,x}}$

Построение изображений в тонких линзах. Удобные лучи.

Собирающая линза		**Рассеивающая линза**
	Луч, проходящий через оптический центр, не преломляется.	
	Луч, проходящий через фокус (своим продолжением вперёд)*, после линзы идёт параллельно оптической оси.	
	Луч, идущий параллельно оптической оси, после линзы проходит через фокус (своим продолжением назад)*.	
	Луч, проходящий через двойной фокус(своим продолжением вперёд)*, после линзы проходит через двойной фокус(своим продолжением назад)*.	

*(в скобках) даны уточнения для рассеивающей линзы

Пример. Получение действительного, увеличенного перевёрнутого изображения с помощью собирающей линзы. Проведены все удобные лучи. Также на рисунке отмечены:



$d_п$ – расстояние от линзы до предмета,
$d_и$ – расстояние от линзы до изображения.

Увеличение, даваемое линзой:

$$Г = \frac{h_и}{h_п} = \frac{d_и}{d_п},$$ где $h_п$ – высота предмета, $h_и$ – высота изображения.

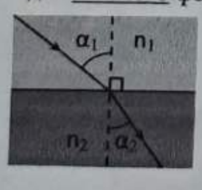
Оптическая сила линзы:

$$D = \frac{1}{f},$$ где f – фокусное расстояние линзы.

Формула линзы:

$$\pm\frac{1}{f} = \frac{1}{d_п} \pm \frac{1}{d_и}.$$

+ для <u>действительного</u> фокуса (у собирающей линзы), для <u>действительного</u> изображения.
− для <u>мнимого</u> фокуса (у рассеивающей линзы), для <u>мнимого</u> изображения.



Закон преломления:

$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$, где n_1.и n_2 – показатели преломления