

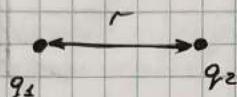
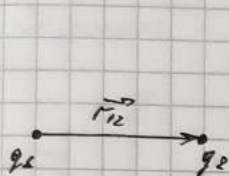
✓ Электростатика
Электрический заряд. Закон Купера

В природе всегда выполнен закон сохр. эл. зар.: (~ в замкнутой системе всегда выполнен закон сохр. эл. зарядов.)



$$Q_{\Sigma} = \text{const}$$

1785г.? 1785г.? - 3-м Купера ~ количественно описывает силу взаим. между зарядами



$$|\vec{F}_{12}| \sim |q_1 q_2|$$

(первой действ. на второй)

$$|\vec{F}_{12}| \sim \frac{1}{r^{2+\delta}}, \text{ где } \delta \sim 10^{-17}$$

$$\vec{F}_{12} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r}$$

$$r = |\vec{r}_{12}| = |\vec{F}_{12}|$$

$$k = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, SI \\ 1, CGSE \end{cases}$$

ϵ_0 - электрическая постоянная

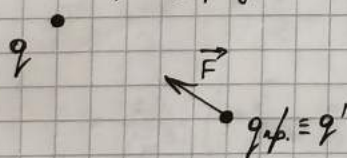
$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{Ф}{м}$$

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{Н \cdot м^2}{Кл^2}$$

Закон справедлив для зарядов сферической формы, точечн. зар. / для непрерывных зарядов или движе. с $v \gg c$ (ск-ты света)

✓ Электрическое поле
Напряжённость эл.-го поля.

Эл. поле - это область пространства, в которой на эл. заряд действует сила (естественно эл.-ой природы)
заряд, который создаёт поле



$$q' > 0 \text{ (всегда)}$$

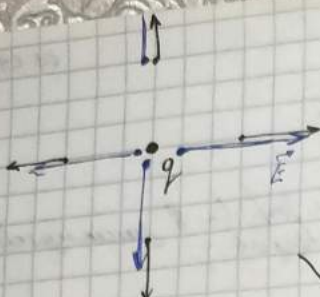
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}$$

- опр. напряжённости эл. поля (справедливо всегда, но не про $\vec{F}'$)

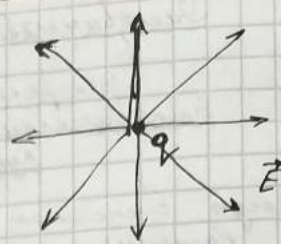
✓ Напряжённость поля точечного заряда (в.з.)

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^3} \cdot \vec{r}$$

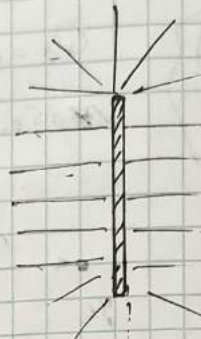
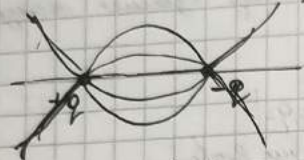
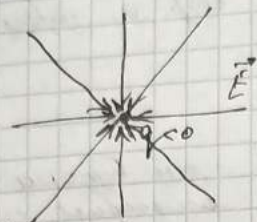
Силовая линия - линия, касательная к которой в каждой точке направлена так же, как $\vec{E}$ (указ. напр. $\vec{E}$)



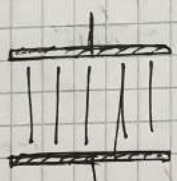
$q > 0$



Если $q < 0$:



Конденсатор:



Воскрешение полей заряженного распределения
Принцип суперпозиции

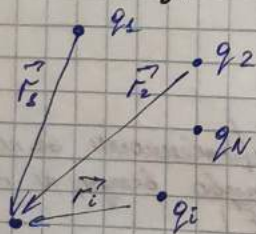
$$\vec{a} \sim \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{пр}}}{q'} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}{q'} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_i + \vec{E}_N$$

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{q'} \rightarrow \boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i}$$

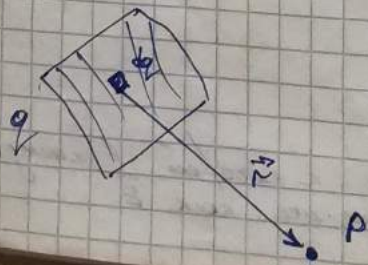
~ принцип суперпозиции (неуниверсальное равенство, заряды)

① С-мат. т.з.



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \frac{k q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

② Заряженная поверхность



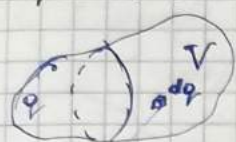
$$d\vec{E} = \frac{k dq}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{E} = \int \frac{k dq}{r^3} \vec{r} = \int \frac{k \sigma dS}{r^3} \vec{r} \quad (3)$$

Поверхностная плотность заряда:

$$\boxed{dq = \sigma \cdot dS}$$

③ Заряд. объемное тело



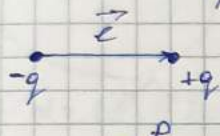
$$d\vec{E} = \frac{k dq}{r^3} \vec{r}$$

Объемная плотность заряда: $[dq = \rho dV]$

$$\vec{E} = \int_{(V)} \frac{k \rho dV}{r^3} \vec{r}$$

Внешнее поле электрического диполя.

Эл. диполь - это система двух т.з. разноименных по знаку и противоположенных по заряду.

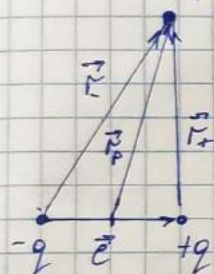


Вектор. от "-" к "+" - $\vec{E}$ - поле диполя

$$\vec{p} = q \vec{E} - \text{дипольный момент (диполя)}$$

$$r_p \gg l$$

$$q_+ = q, q_- = -q$$



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{kq}{r_+^3} \vec{r}_+ - \frac{kq}{r_-^3} \vec{r}_- = kq \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right)$$

$$\vec{r}_+ = -\frac{\vec{E}}{2} + \vec{r}_p$$

$$\vec{r}_- = \frac{\vec{E}}{2} + \vec{r}_p$$

$$|\vec{r}_\pm| = \sqrt{(\vec{r}_p \mp \frac{\vec{E}}{2})^2} =$$

$$|\vec{r}_\pm| = \sqrt{(\vec{r}_p \mp \frac{\vec{E}}{2})^2} = \sqrt{r_p^2 \mp \frac{(\vec{E}, \vec{r}_p)}{2} + \frac{E^2}{4}} \approx \sqrt{r_p^2 \mp \frac{(\vec{E}, \vec{r}_p)}{2}} \quad \text{пренебрегаем } (r_p \gg l)$$

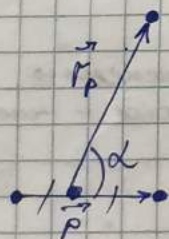
$$r_\pm^{-3} \approx (r_p^2 \mp \frac{(\vec{E}, \vec{r}_p)}{2})^{-3/2} = \frac{1}{r_p^3} \left(1 \mp \frac{(\vec{E}, \vec{r}_p)}{r_p^2} \right)^{-3/2} \approx \frac{1}{r_p^3} \left(1 \pm \frac{3(\vec{E}, \vec{r}_p)}{2 r_p^2} \right)$$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \dots$$

$$\vec{E} = \frac{kq}{r_p^3} \left(\left(-\frac{\vec{E}}{2} + \vec{r}_p \right) \left(1 + \frac{3(\vec{E}, \vec{r}_p)}{2 r_p^2} \right) - \left(\frac{\vec{E}}{2} + \vec{r}_p \right) \left(1 - \frac{3(\vec{E}, \vec{r}_p)}{2 r_p^2} \right) \right) =$$

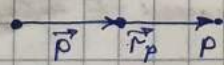
$$= \frac{kq}{r_p^3} \left(-\frac{\vec{E}}{2} + \vec{r}_p - \frac{3}{4} \frac{\vec{E}(\vec{E}, \vec{r}_p)}{r_p^2} + \frac{3}{2} \frac{\vec{r}_p(\vec{E}, \vec{r}_p)}{r_p^2} - \frac{\vec{E}}{2} + \vec{r}_p + \frac{3}{4} \frac{\vec{E}(\vec{E}, \vec{r}_p)}{r_p^2} - \frac{3}{2} \frac{\vec{r}_p(\vec{E}, \vec{r}_p)}{r_p^2} \right)$$

$$= \frac{kq}{r_p^3} \left(-\vec{E} + \frac{3\vec{r}_p(\vec{E}, \vec{r}_p)}{r_p^2} \right) = \frac{k}{r_p^3} \left(\frac{3\vec{r}_p(\vec{r}_p, \vec{r}_p)}{r_p^2} - \vec{r}_p \right)$$

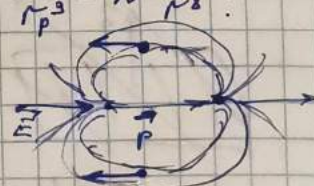


$$(\vec{r}_p, \vec{r}_p) = r_p \cdot r_p \cdot \cos \alpha$$

$$1) \alpha = 0: \vec{E}(\alpha=0) = \frac{k}{r_p^3} \left(\frac{3\vec{r}_p \cdot \vec{r}_p}{r_p} - \vec{r}_p \right) = \frac{3k r_p^2}{r_p^3} \sim \frac{1}{r_p^3} !$$

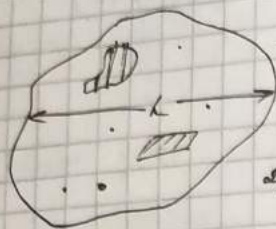


$$2) \alpha = \frac{\pi}{2}: \vec{E}(\alpha=\frac{\pi}{2}) = -\frac{k r_p}{r_p^3} \sim \frac{1}{r_p^3} !$$



8.09.21.

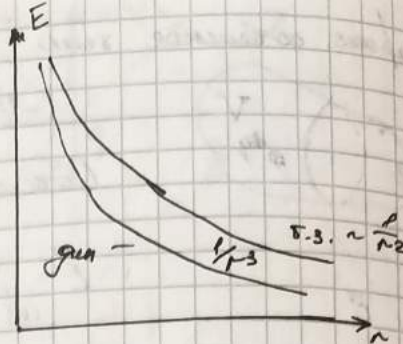
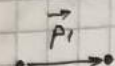
Точечный заряд $\rightarrow E \sim r^{-2}$
 Диполь $\rightarrow E \sim r^{-3}$
 ($r \gg l$)



1) Если $q_{\Sigma} \neq 0$,
 при $r \gg l \rightarrow E \sim r^{-2}$

2) $q_{\Sigma} = 0$
 $\rho_{\Sigma} \neq 0 \rightarrow E \sim r^{-3}$
 (дип. момент)

3) $\rho_{\Sigma} = 0 \rightarrow E \sim r^{-4}$ (квадруполь)

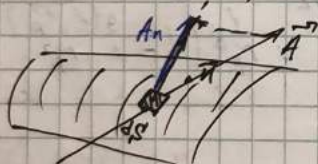


✓ Основные уравнения
 электростатического поля в
 вакууме.

Поток векторного поля ~

$\vec{A}(\vec{r}, t)$ - вект. поле

$\vec{A}(\vec{r})$ - статика



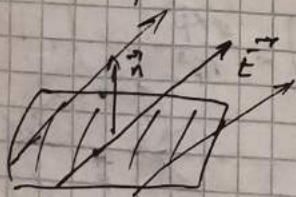
Проекция вектора $\vec{A}$ на нормаль $\vec{n}$ дает скаляр, который можно выразить, dS и проекция на нормаль. Тогда элементарный поток назовем:

$$d\Phi = (\vec{A}, \vec{n}) dS = A_n dS = A \cdot \cos(\vec{A}, \vec{n}) dS$$

$$\Rightarrow \Phi = \iint_{(S)} A_n dS$$

✓ Поток вектора $\vec{E}$.
 Теорема Остроградского - Гаусса. (ОГ)

$$\Phi_E = \iint_{(S)} E_n dS$$



Если участок dS мал, $E \sim E_n$, и значение равно $|\vec{E}|$, тогда физ. смысл потока - число линий $\vec{E}$ через S

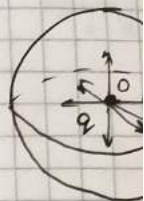
т.е., Φ - число линий $\vec{E}$ через S

о-замкн. поверхн.

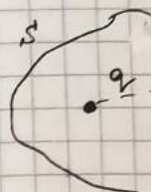
$$\Phi_E = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} =$$

Договорились

① Т.з. в

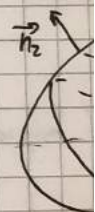


② Т.з. в

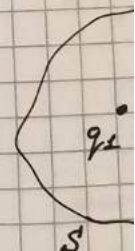


$\alpha =$

③ Т.з. в

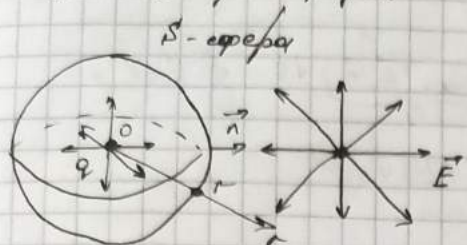


Если
 сдвинуть



Договоренность - берём внешнего нормаль

① Т.з. в центре сферы.

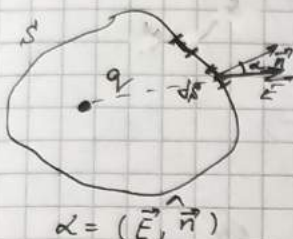


$$E_n = E = \frac{kq}{r^2}$$

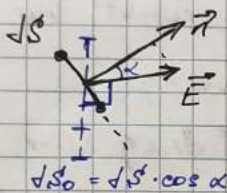
$$\Phi_E = \oint_{(S)} \frac{kq}{r^2} dS = \frac{kq}{r^2} \oint_{(S)} dS = \frac{kq}{r^2} (4\pi r^2) = k \cdot 4\pi q$$



② Т.з. в произв. фигуре.

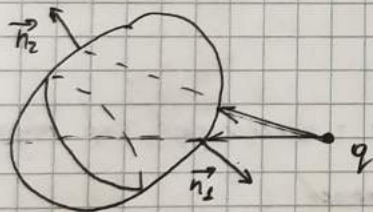


$$\Phi_E = \oint_{(S)} E_n dS = \oint_{(S)} E \cos \alpha dS = \oint_{(S)} E dS_0 = \oint_{(S)} \frac{kq}{r^2} r^2 d\Omega = kq \oint_{(\Omega)} d\Omega = 4\pi kq$$



$$dS_0 = r^2 d\Omega \quad (d\Omega - \text{элементарный телесный угол, под которым видна площадка } dS)$$

③ Т.з. вне произвольной поверхности.



$$E_n \leq 0 \quad (\vec{n}_2) \\ E_n \geq 0 \quad (\vec{n}_1)$$

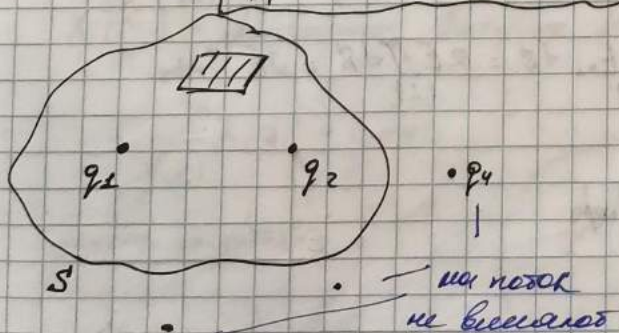
Есть разные проекции

$\Rightarrow \Phi_E = 0$ (линии поля входят на поверхность, и выходят, не задерживаясь.)

Если внутри - несколько т.з., то можно - система сфер сгущенная.

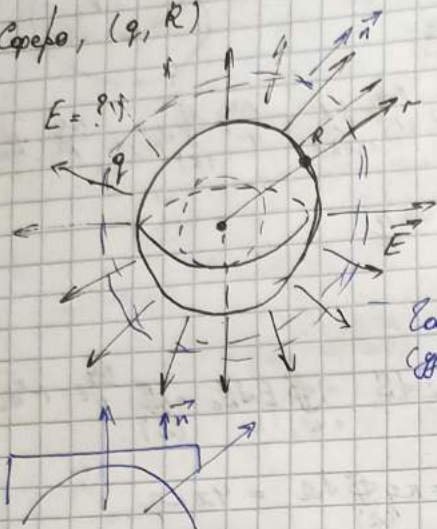
$$\oint_{(S)} E_n dS = \oint_{(S)} (\vec{E}, \vec{n}) dS = k \cdot 4\pi Q_{int}$$

интеграл - внутри
(суммарность охв. заряд.)



✓ Примеры применения теоремы
Остроградского - Гаусса.

① Сфера, (q, R)



$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint_{(S)} \underbrace{E \cos(\vec{E}, \vec{n})}_1 dS = \oint_{(S)} E dS = \\ &= E \oint_{(S)} dS = E \cdot 4\pi r^2\end{aligned}$$

Гауссова поверхность
(подобие сферы со осью сферой) (r)

$$\Rightarrow 1) \vec{E} \parallel \vec{n} \Rightarrow E_n = E$$

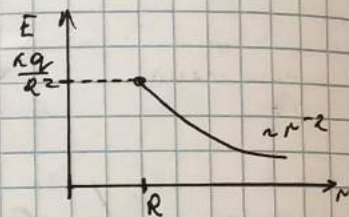
$$2) E = \text{const на } (r)$$

$$1) r > R ; Q_{\text{int}} = q$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k q \rightarrow E = \frac{kq}{r^2}$$

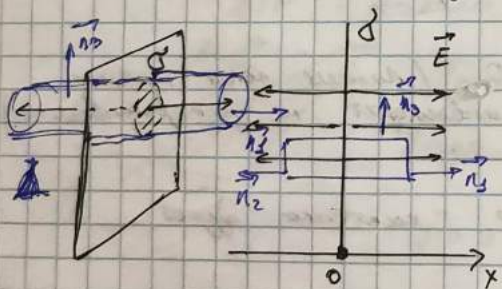
$$2) r < R ; Q_{\text{int}} = 0$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = 0 \rightarrow E = 0$$



② Плоскость (бесконечная сетка) $E = ?$

σ - поверхн. плотность заряда



Гауссова пов-ть - цилиндр, окр. кругами.

$$(\vec{E}, \vec{n}_1) = E = \text{const}$$

$$(\vec{E}, \vec{n}_2) = E = \text{const}$$

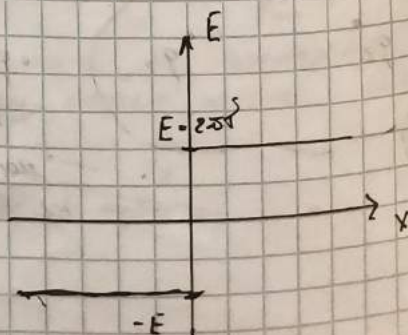
$$(\vec{E}, \vec{n}_3) = 0$$

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint_{(S)} E_n dS = \iint_{(S_1)} E_{n_1} dS + \iint_{(S_2)} E_{n_2} dS + \iint_{(S_3)} E_{n_3} dS = \\ &= 2 \iint_{(S_1)} E_{n_1} dS = 2E \iint_{(S_1)} dS = 2E S_{\text{осн.}}\end{aligned}$$

$$Q_{\text{int}} = \sigma \cdot S_{\text{осн.}}$$

$$\Rightarrow 2E S_{\text{осн.}} = \sigma \cdot 4\pi R^2 S_{\text{осн.}}$$

$$E = 2\pi k \sigma$$



Теорема Циркуля.

~ Любая равновесная конфигурация положительных точечных зарядов неустойчива, если на заряды действуют только кулоновские силы.

г.о - положение равновесия

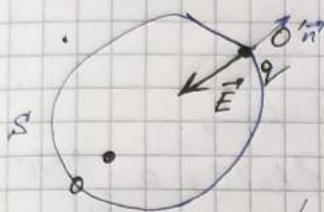
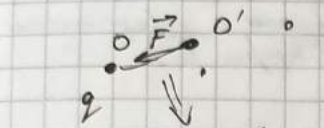
Если равн. устойчиво, то $\vec{F}$ стремится вернуть его обратно в о.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\Phi_E = 0 \quad (\text{вс. вне } S)$$

$$\Phi_E < 0 \quad \text{для уст. равновесия}$$

Упрощение



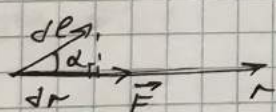
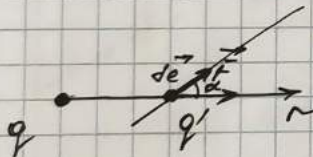
Гауссова поверхность

✓ Консервативность (потенциальность)
электростатического поля.

Кулоновское поле - центрально-симметричное $\rightarrow \vec{F} \parallel \vec{r}$

- центрально-симметричное $\rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

Все центрально-симметричные поля - консервативны (работа таких сил не зависит от траектории, зависит только от начального и конечного положения.)



$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \underbrace{F \cos \alpha}_{F_r} dr = F dr = F_r dr = (\vec{F}, d\vec{r})$$

Консервативное поле $\rightarrow \vec{A} = 0$
(потенциальное)

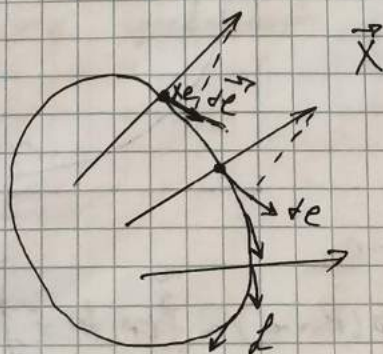
10.09.23.

✓ Циркуляция (векторного) поля

$\vec{X}(\vec{r})$ - произвольное векторное поле.

$$\Gamma = \oint_{(L)} X_e d\ell = \oint_{(L)} \vec{X} d\vec{\ell}$$

замкн. контур L



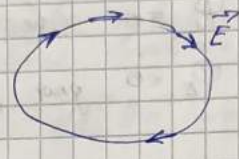
Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$.

$$\begin{cases} dA_F = F_r dr \\ \dot{A}_F = 0 \\ \dot{A}_F = \oint_{(L)} F_e dl = q' \oint_{(L)} E_e dl \end{cases} \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} \Rightarrow \oint_{(L)} E_e dl = 0$$

- выполняется только для статических полей!
(теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$)

Пусть выберем: нелинейное поле $\vec{E}$ не замкнуто

Доп-во: пусть замкнуто:
выберем контур/поле по линиям



$$\Rightarrow E_e dl = E dl, \text{ тогда } \oint_{(L)} E_e dl \neq 0 = \int E dl > 0$$

Линии поля $\vec{E}$ начинаются на "зарядах" и заканчиваются на "зарядах" и законч. на $+\infty$.

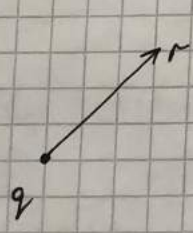
$$\oint_{(S)} E_n dS = k \cdot 4\pi Q_{int} \quad \sim \text{в электростатике, в любых электростатич. поле справедливо!}$$

Потенциал электростатического поля

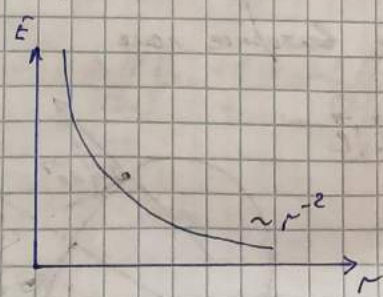
$$\begin{aligned} W_n(\vec{r}_1) - W_n(\vec{r}_2) &= A_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} F_r dr \\ W_{эл.}(\vec{r}_1) - W_{эл.}(\vec{r}_2) &= q' \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} E_r dr \quad / : q' \\ \varphi(\vec{r}_1) &= \frac{W_{эл.}(\vec{r}_1)}{q'} \Rightarrow \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} E_r dr \end{aligned}$$

Примеры вычисления потенциала через напряженность поля.

① Потенциал поля т.з.



$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \vec{r}$$



$$\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$$

$$\varphi(r) - \varphi(r \rightarrow \infty) = \int_{\infty}^r E_r dr = \int_{\infty}^r \frac{kq}{r^2} dr = \frac{kq}{r}$$

② Потенциал

$E =$
 $\varphi(r$
1) r
2) 0

③

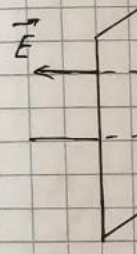
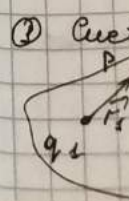


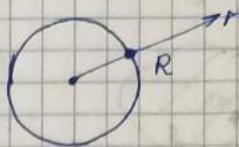
Рис
Рис

т.з



② Потенциал поля заряженной сферы. (q, R)

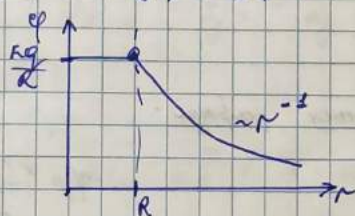
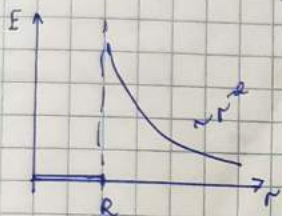
$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{kq}{r^2}, & r \geq R \\ 0, & r < R \end{cases}$$



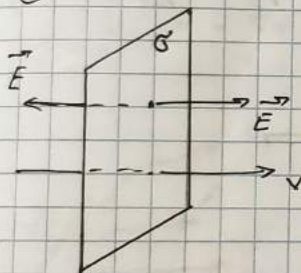
$\varphi(r) = ?$

1) $r \geq R$: $\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^{\infty} \frac{kq}{r^2} dr = \frac{kq}{r}$

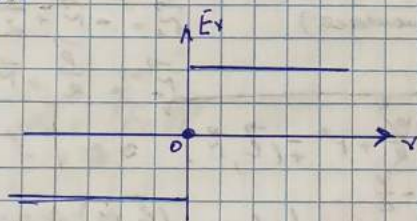
2) $0 < r < R$: $\varphi(R) = \frac{kq}{R}$
 $\varphi(r) - \varphi(R) = \int_r^R 0 \cdot dr = 0$
 $\varphi(r) = \frac{kq}{R}$ ~ внутри сферы



③



$$E = 2\pi k \sigma$$



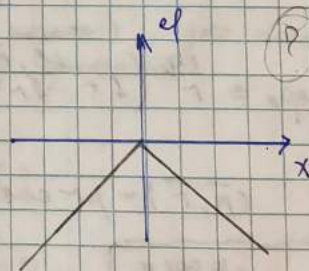
$\varphi(x) = ?$

Пусть $\varphi(x \rightarrow \infty) = 0$

$$\varphi(x) - \varphi(x \rightarrow \infty) = \int_x^{\infty} k \cdot 2\pi \sigma dx = 2\pi k \sigma \Big|_x^{\infty}$$

Пусть $\varphi(x=0) = 0$

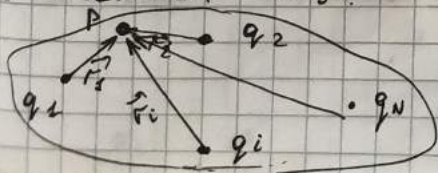
$$\varphi(x) - \underbrace{\varphi(0)}_{=0} = \int_0^x k \cdot 2\pi \sigma dx' = -2\pi k \sigma x$$



Вычисление потенциала по принципу суперпозиции.

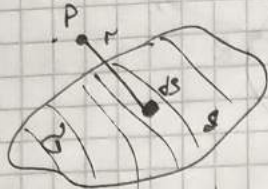
З.З : $\varphi(r) = \frac{kq}{r}$

④ Система З.З.



$$\Rightarrow \varphi_P = \sum_{i=1}^N \varphi_i = \sum_{i=1}^N \frac{kq_i}{r_i}$$

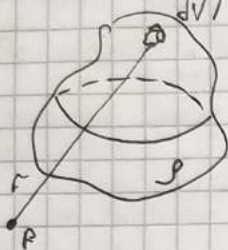
② Заряд распределен по поверхности.



$$dq = \frac{\kappa dq}{r} = \frac{\kappa \sigma dS}{r}$$

$$\varphi_P = \iint_S \frac{\kappa \sigma dS}{r}$$

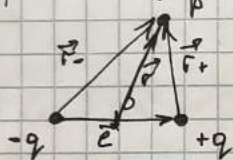
③ Объемное распределение заряда.



$$dq = \rho dV \rightarrow dq = \frac{\kappa \rho dV}{r}$$

$$\varphi_P = \iiint_V \frac{\kappa \rho dV}{r}$$

Пример - два точечных заряда.



$$\varphi_P = ?$$

$$r \gg l$$

$$\varphi_P = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{\kappa q}{r_+} - \frac{\kappa q}{r_-} = \kappa q \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

$$\vec{r} = q \vec{e} \text{ (диольный момент)}$$

$$\vec{r}_+ = \vec{r} - \frac{\vec{e}}{2}$$

$$\vec{r}_- = \frac{\vec{e}}{2} + \vec{r}$$

$$r_{\pm} = \sqrt{\left(\frac{\vec{e}}{2} \pm \vec{r}\right)^2} = \sqrt{\frac{e^2}{4} + r^2 \pm (\vec{e}, \vec{r})} \approx r \sqrt{1 \pm \frac{(\vec{e}, \vec{r})}{r^2}}$$

$$r_{\pm}^{-1} = \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{(\vec{e}, \vec{r})}{r^2} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{(\vec{e}, \vec{r})}{2r^2} \right)$$

разл. тейлора

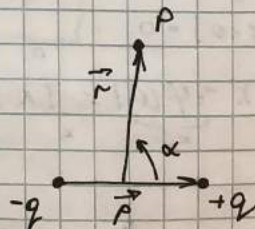
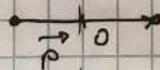
$$\varphi_P = \frac{\kappa q}{r} \left(1 + \frac{(\vec{e}, \vec{r})}{2r^2} - 1 + \frac{(\vec{e}, \vec{r})}{2r^2} \right) = \frac{\kappa q (\vec{e}, \vec{r})}{r^3} = \frac{\kappa (\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$$

$$(\vec{p}, \vec{r}) = pr \cos \alpha$$

$$\boxed{\varphi_P = \frac{\kappa p \cos \alpha}{r^2}}$$

$$\alpha = 0: \varphi_P(\alpha=0) = \frac{\kappa p}{r^2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}: \varphi_P(\alpha=\frac{\pi}{2}) = 0$$



← эквипотенциальная поверхность.

Вычисление интегральности поля
через потенциал.

$$dx = x_2 - x_1$$

$$d\varphi = \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$$

q' пробн. заряд из x_1 в x_2 :

$$\begin{cases} dA_r = F_x dx = q' E_x dx & (\text{о.ф. } A, \vec{E}) \\ dA_r = q' (\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) & (\text{о.ф. } \varphi) \end{cases}$$

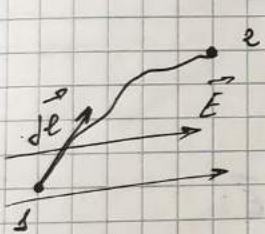
$$q' E_x dx = q' (\varphi(x_1) - \varphi(x_2))$$

$$E_x = - \frac{d\varphi}{dx} ; E_y = - \frac{d\varphi}{dy} ; E_z = - \frac{d\varphi}{dz}$$

В общем случае: $\varphi = \varphi(x, y, z)$

$$\vec{E} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = - \text{grad } \varphi \equiv - \nabla \varphi$$

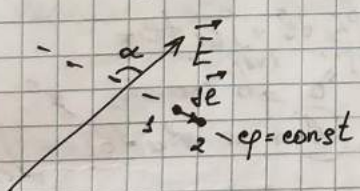
$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}_r d\vec{r} \\ \vec{E} = - \nabla \varphi &= - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{(1)}^{(2)} E_c dL \\ \vec{E} &= - \text{grad } \varphi \end{aligned}$$

13.09.21.

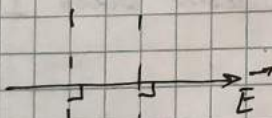
Опр. Эквипотенциальные линии (и поверхности) - это линии (поверхности), на которых потенциал равен одинаков.



$$\begin{aligned} \kappa = ? \\ \varphi_1 - \varphi_2 \equiv d\varphi = E_c dL = (\vec{E}, d\vec{L}) \\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \\ \text{т.к. на эквипотенциале} \end{aligned} \Rightarrow (\vec{E}, d\vec{L}) = 0$$

$$\vec{E} \perp d\vec{L}$$

$\Rightarrow$ Всегда эквипотенциаль всегда $\perp$ полю $\vec{E}$



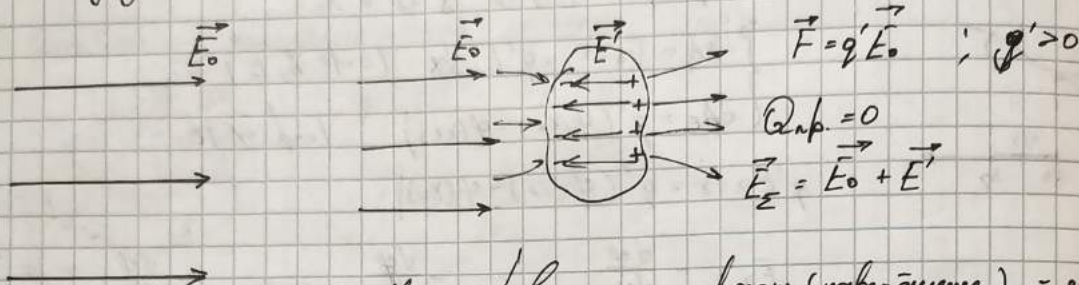
$$\varphi_1 > \varphi_2$$

$$\varphi_1 \quad \varphi_2$$

Проводники в электростатическом поле.

Проводник (в электростатике) - это вещество, в котором содержится бесконечно много свободных зарядов.

Свободными называются заряды, способные перемещаться при малейшем ударе малейшим внешним воздействием. (свободные заряды "+")



Индукцированные заряды (наведенные) - заряды самого проводника наведенные полем E_0

$E_{\Sigma} = 0$

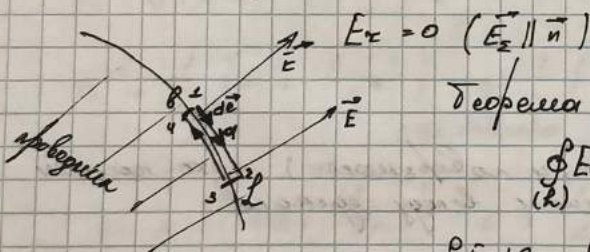
① Внутреннее поле $\rightarrow E_{\Sigma} = 0$ ~ внешнее в-во проводника в поле
 $(\rightarrow E_{\text{внутр}} = -E_0)$

② Проводник является эквипотенциальным телом.

$\varphi = \text{const}$ в проводнике

$\oint_{(L)} E_{\Sigma} dl = 0$

③ Полоса вне проводника:



Теорема о циркуляции вектора E :

$\oint_{(L)} E dl = 0$

$\oint_{(L)} E dl = \int_{(L1)} E_{\Sigma} dl + \int_{(L2)} E_{\Sigma} dl + \int_{(L3)} E_{\Sigma} dl + \int_{(L4)} E_{\Sigma} dl =$
 $= \int_{(L1)} E_{\Sigma} dl + \text{const}_{L2} \cdot b + \text{const}_{L3} \cdot b + \text{const}_{L4} \cdot b = \int_{(L1)} E_{\Sigma} dl = 0$

$E_{\Sigma} = 0$ по (L2)

$\Rightarrow$ линии поля должны быть $\perp$ поверхности

④ $\rho = 0$ (объемная плотность внутр. зарядов = 0)



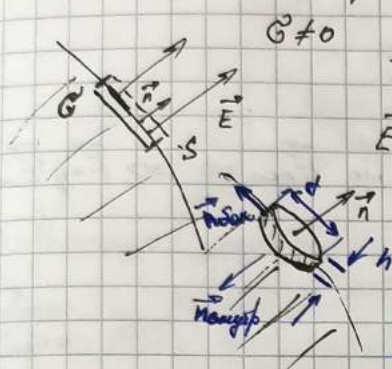


$$\oint_{(S)} E_n dS = k \cdot 4\pi Q_{int}$$

$$\oint_{(S)} E_n dS = k \cdot 4\pi \iiint_{(V)} \rho dV = 0 \Rightarrow Q_{int} = 0$$

0 по с.в.-ву

⑤ $E = E_n$ внутри проводника



Тогда от:
 $\vec{E} \uparrow \vec{n}$

$h \ll d$

$$\oint_{(S)} E_n dS = E_n \cdot S$$

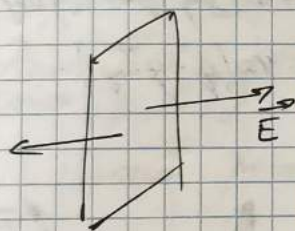
$$\iiint_{(V)} \rho dV = \rho \cdot S$$

$$\oint_{(S)} E_n dS = k \cdot 4\pi Q_{int} = k \cdot 4\pi \iiint_{(S)} \rho dS$$

$$\oint_{(S)} E_n dS = \underbrace{\oint_{(S_{top})} E_n dS}_{E_n \cdot S} + \underbrace{\oint_{(S_{side})} E_n dS}_{=0} + \underbrace{\oint_{(S_{bottom})} E_n dS}_{\text{const} \cdot S \cdot \frac{1}{d} \cdot h \rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow E_n \cdot S = k \cdot 4\pi \rho S$$

$$\Rightarrow E_n = k \cdot 4\pi \rho$$



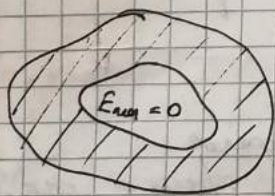
$$E = 2\pi k \rho$$

Разница в др., т.к. у нас $\vec{E}$ - через оба диска.

Теорема Рундана.

~ В проводнике есть полость (с.в. проводника с пещерой)

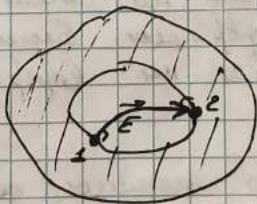
① Заряды вне полости



• q

/// - проводник

Прост $E_{вн} \neq 0$



$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E_n dV$$

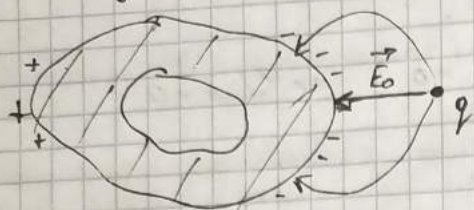
Но $\varphi_1 = \varphi_2$ - проводник - эквипотенциал

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow E_n = 0$$

$$\Rightarrow E_{вн} = 0, \text{ т.е. } \varphi$$

~ "электростатическая экранировка" (защита)

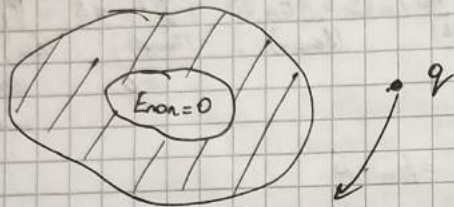
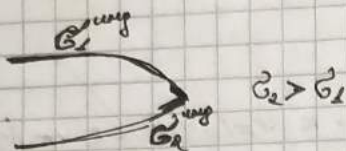
Распределение индуцированных зарядов:



$Q_{\Sigma} = 0$
У плоскости зарядов нет

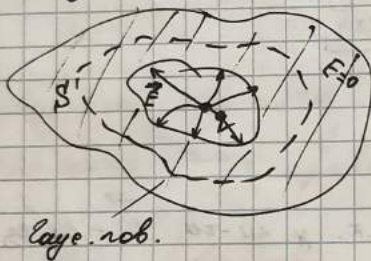
Если же привезти лоб. меньше, там зарядов будет меньше

экспер. факт



q движется, но $\vec{E}_{пол} = 0 \Rightarrow \vec{F} = q \vec{E}_{пол} = 0$

2 Заряды внутри полости.



$\vec{E}_{пол} \neq 0$

Распределение индуцированных зарядов: ($q_{инд}$)

$$\oint_{(S)} \vec{E}_{ин} dS = k \cdot 4\pi Q_{инт} = k \cdot 4\pi (q + q_{инд}^{пол})$$

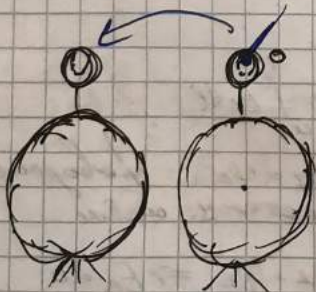
в формуле.

$$\Rightarrow q_{инд}^{пол} = -q$$

$$Q_{нр} = 0 \Rightarrow q_{инд}^{внеш} = q$$

$$Q_{нр} = q_{инд}^{пол} + q_{инд}^{внеш}$$

q движется $\Rightarrow \vec{E}_{пол}$ изм.
 $\vec{E}_{внеш}$ не изм.



внешн на внешн - 10

внутр. на внешн - не зарядов

внешн на внутр. - 10, но средняя экв. сила

До попытки объяснить почему

Заряд с зарядного
пытается передать на
нейтральный

1 экп.



2 экп.

1 Прямая

Рано: q
Найти: E

Ско

2 Обратно

Рано:
Найти:

3 Сфера

Рано

Найти

Но q

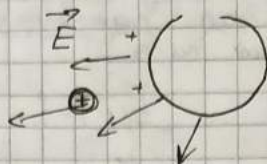
$$\oint_{(S)} \vec{E}_{ин} dS$$

(S)

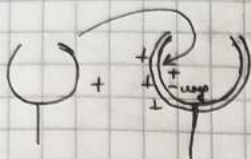
до q

До

1 экз.



2 экз.



Темы электростатических задач.
Теорема единственности
решения. $\sqrt{1000}$

1 Прямая задача

Дано: $q_i, \vec{r}_i, \rho$ Найти: $\vec{E}(\vec{r}), \varphi(\vec{r})$

Способы решения: 1) принцип суперпозиции
2) теорема Стокса-Гаусса.

2 Обратная задача

Дано: $\vec{E}(\vec{r})$ ($\varphi(\vec{r})$)Найти: $q_i, \vec{r}_i, \rho$

Способ решения: ф-я в дивергенции.

3 Связанные задачи

Дано: $q_i, \vec{r}_i, \rho$ $\vec{E}(\vec{r})$ - заданные функции координат.Найти $\vec{E}_z$ и остальные потенциалы.

Но должны всегда быть выполнены граничные условия:

$$\oint \vec{E}_n dS = k \cdot q_{\text{вн}} \quad (1)$$

$$\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}_e dL$$

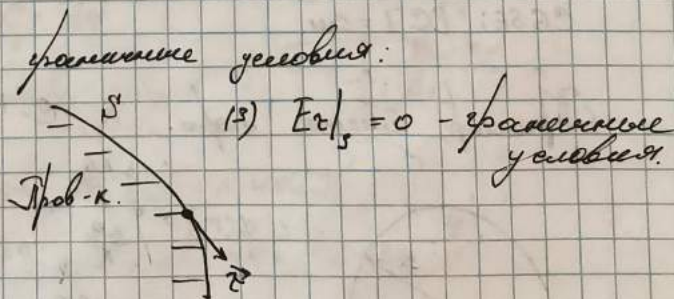
$$\oint \vec{E}_e dL = 0 \quad (2)$$

Если выполнены (1), (2), (3) - то найденное поле верно.

Теорема единственности

- если решение найдено, то оно единственно.

~ без док-ва



Метод изображения (метод наведения решения).

проводящая пл-сть.

②

Здесь поле ноль (электр.)
 $E=0$ (н.д.р.)

ант. зер.

$\vec{E}(\vec{r})=?$

Чем дальше отпл., тем ближе линии поля.

$\varphi=0$

$\varphi(\infty)=0$

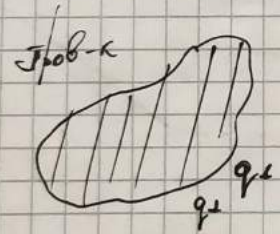
как герано

решение здесь
 $Ez=0$

поис. решение

Электроемкость Конденсаторы.

1. Электроемкость одиночного проводника.



$q_1 \rightarrow \varphi_1$

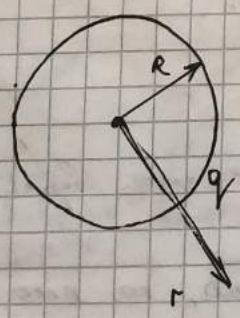
$q_1 + q_2 \rightarrow 2\varphi_1$ (по принципу суперпозиции)

$C = \frac{q}{\varphi_1}$ — электроемкость (одиночного проводника)

— не зависит ни от заряда, ни от потенциала.

СИ: $[C] = \Phi$
 CGSE: $[C] = \text{см.}$

Пример: емкость шара: $R, C=?$



$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Rq}{r}, & r \geq R \\ \frac{Rq}{R}, & 0 \leq r \leq R \end{cases}$$

$$\varphi(R) = \frac{Rq}{R}$$

$$C = \frac{qR}{Rq} = \frac{R}{k} \iff C = \frac{R}{k}$$

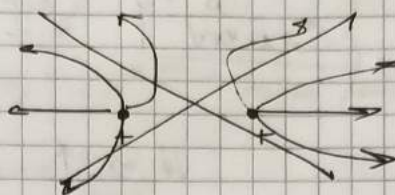
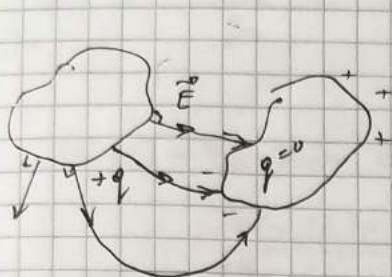
CGSE: $k=1 \Rightarrow C=R$

СИ: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \cdot R$

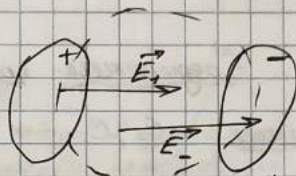
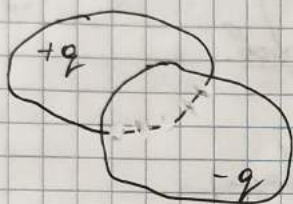
Ёмкость земного шара: $R_0 = 6400 \text{ км} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$.

$$\kappa = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

$$C = \frac{6,4 \cdot 10^6 \text{ м}}{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ Ф} = 0,7 \text{ мФ}$$

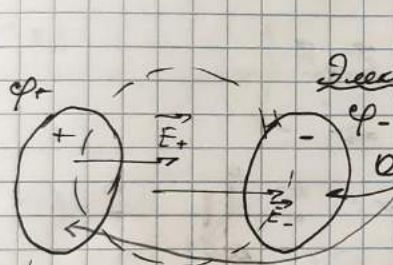


Кл. проводящая.



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

Конденсатор - устройство, где поля конденсируются (сгущаются)



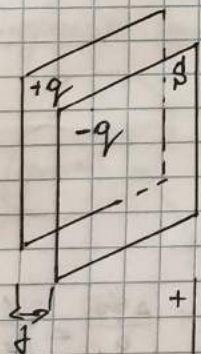
Ёмкость конденсатора.

Область.

$$C = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{q}{\Delta \varphi} = \frac{q}{U}$$

напряжение; $U = \Delta \varphi$

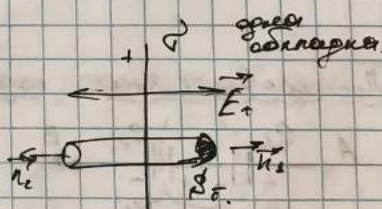
Пример: Ёмкость плоского конденсатора



$$d \ll \sqrt{S} \Rightarrow \text{можно считать поле плоскостным}$$

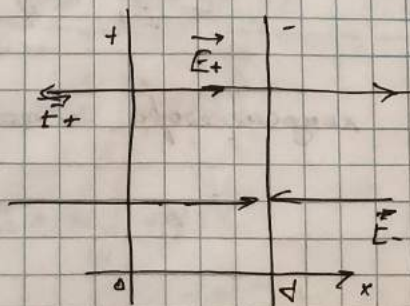
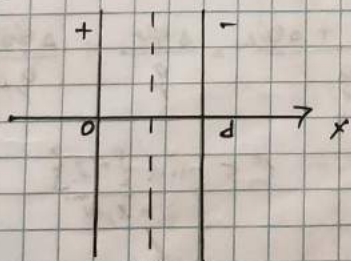
$$q \rightarrow \Delta \varphi \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta \varphi}$$

$$\Delta \varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \int_0^d E_x dx$$



$$2E_x \frac{S}{2} = 1 \cdot 4\pi \epsilon_0 \frac{q}{S}$$

$$E_x = 1 \cdot 2\pi \epsilon_0 \frac{q}{S}$$



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{q}{\kappa \cdot 4\pi \cdot S} \vec{e}, & x \in [0; d] \end{cases}$$

$$\Delta\varphi = \kappa \cdot 4\pi \frac{q}{S} \cdot d$$

$$C = \frac{S}{\kappa \cdot 4\pi d}$$

$$\text{CGSE: } C = \frac{S}{4\pi d}$$

$$\text{SI: } C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$d \downarrow \Rightarrow C \uparrow$$

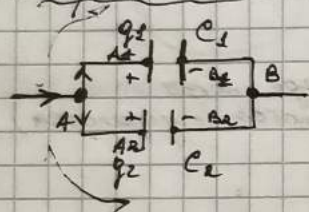
$$S \uparrow \Rightarrow C \uparrow$$

Интересно!

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C} = \text{const}$$

Соединение конденсаторов.

1. Параллельное соединение: $C_1, C_2 \rightarrow C$ - ?



$$q = q_1 + q_2 \quad (\text{з.ч. сохр. заряда})$$

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \varphi_A - \varphi_B$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

(к)

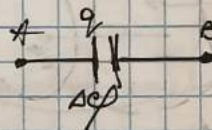
$$\oint_{\text{всех}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q' \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

(к)

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\varphi_{A1} = \varphi_A = \varphi_{A2}$$

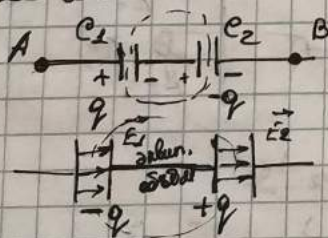
$\Rightarrow$ Можно заменить одним конденсатором:



$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q_1 + q_2}{\Delta\varphi} = C_1 + C_2$$

$$\Rightarrow C = \sum_{i=1}^N C_i$$

2. Последовательное соединение: $C_1, C_2 \rightarrow C$ - ?



$$\Delta\varphi \equiv \Delta\varphi_{AB} = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$$

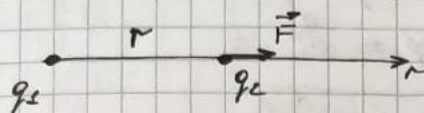
$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta\varphi}{q} = \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{q} = \frac{\Delta\varphi_1}{q} + \frac{\Delta\varphi_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C = \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{C_i} \right) \right)^{-1}$$

$$C < \min_{i=1, N} \{C_i\}$$

Основная ф-я конденсатора ~ некая энергия.

② Wэл. с-ии т.з.



$$\vec{F} = \frac{kq_1q_2}{r^2} \vec{r}$$

$$A_F = \int_r^{\infty} \frac{kq_1q_2}{r^2} dr = \frac{kq_1q_2}{r}$$

$$A_F = -A^* \leftarrow \text{наша работа}$$

$$W_n(r) - W_n(r \rightarrow \infty) = A_F(r \rightarrow \infty)$$

$$W_{эл.}(r) = W_n(r) = \frac{kq_1q_2}{r} \quad (W_n(\infty) = 0)$$

$$\varphi(r) = \frac{kq}{r} \quad (\text{т.з.})$$

$$\varphi_1 = \frac{kq_1}{r}$$

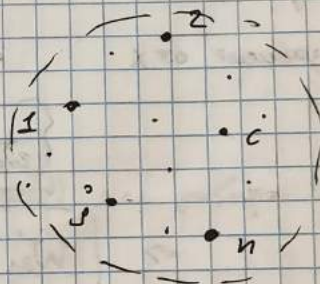
$$W_{эл} = q_2 \varphi_1 = q_1 \varphi_2$$

поле созд. 1 зарядом, но в т. q_2 .
По полюмо складыв. и наоборот

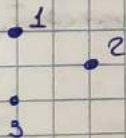
$$\Rightarrow W_{эл.} = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2)$$

н т.з.:

$$W_{эл.} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n q_i \varphi_j$$

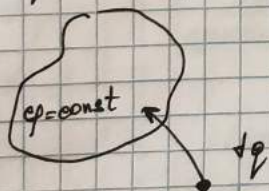


n=3:



$$W_{эл} = \underline{q_1 \varphi_2} + \underline{q_2 \varphi_1} + \underline{q_1 \varphi_3} + \underline{q_3 \varphi_1} + \underline{q_2 \varphi_3} + \underline{q_3 \varphi_2}$$

② Энергия одиночного заряженного проводника (сфер.б.)



$$dA^* = dq \cdot \varphi$$

потенциал, который уже есть в теле

$$dW_{эл} = dA^* = dq \cdot \varphi$$

$$W_{эл.} = \int_{(q)} dq \cdot \varphi = \frac{\int q dq}{C} = \frac{q^2}{2C}$$

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

$$\Rightarrow W_{эл.} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}$$

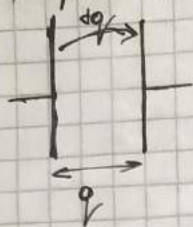
Если

$$q = \int_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow W_{эл.} = \frac{1}{2} \int_{(S)} \vec{E} \cdot \varphi d\vec{S}$$

$$W_{эл.} = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho \varphi dV$$

3) Энергия заряженного конденсатора.



$$\delta A^* = dq \cdot \Delta \varphi$$

$$\delta W_{эл} = \delta A^*$$

$$W_{эл} = \int_{(q)} dq \cdot \Delta \varphi = \int_{(q)} q \frac{dq}{C}$$

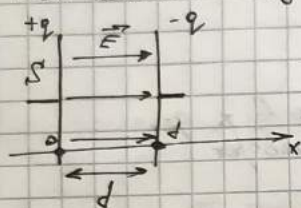
$$C = \frac{q}{\Delta \varphi} = \frac{q^2}{2\epsilon}$$

$$W_{эл} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q \cdot \Delta \varphi}{2} = \frac{C(\Delta \varphi)^2}{2}$$

Энергия заключена в поле!

Плотность энергии эл. поля.

$W_{эл}$ плоского конденсатора.



E не зависит от x

w

$$W_{эл} = \frac{C(\Delta \varphi)^2}{2} = \frac{S E^2 d^2}{4\pi \kappa d \cdot 2} = \frac{E^2}{\kappa \cdot 8\pi} \cdot Sd$$

$$C = \frac{S}{4\pi \kappa d}$$

$$\Delta \varphi = \int_0^d E_x dx = Ed$$

$V = Sd$ (объем электрического поля.)

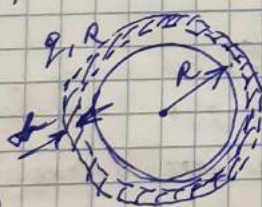
$$w_{эл} = \frac{W_{эл}}{V} = \frac{E^2}{\kappa \cdot 8\pi}$$

сферически-симметрично.

$$\Rightarrow W_{эл} = \int_{(V)} w_{эл} dV$$

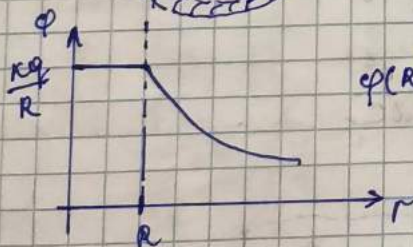
V - объем заряженного тела.

Пример: $W_{эл}$ сфера



1 способ:

$$W_{эл} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{\kappa q^2}{2R}$$



$$\varphi(r) = \frac{\kappa q}{r}$$

2 способ:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{\kappa q}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

$$w_{эл} = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{\kappa q^2}{8\pi r^4}, & r \geq R \end{cases}$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$W_{эл.} = \int_R \frac{\rho \kappa q^2}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 dr = \int_R \frac{\rho \kappa q^2}{2} dr = \frac{\kappa q^2}{2\epsilon}$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Выполняется ли принцип для энергии?

$$W_{эл} \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^n W_{эл.i}$$

$$W_{эл.} = \frac{E^2}{\kappa \cdot 8\pi} = \frac{1}{\kappa \cdot 8\pi} (E_1^2 + E_2^2 + 2(\vec{E}_1, \vec{E}_2)) = W_{эл.1} + W_{эл.2} + \frac{1}{\kappa \cdot 8\pi} \cdot 2(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$$

~ принцип суперпозиции не выполняется!
устанавливается энергия взаимодействия.

$$C_1 \xrightarrow{q_1} W_{эл.1} = \frac{q_1^2}{2C_1}$$

$$C_2 \xrightarrow{q_2} W_{эл.2} = \frac{q_2^2}{2C_2}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline C_1 \\ \hline C_2 \\ \hline \end{array} \quad W_{эл.} = ?$$

Потенциальный (соединительный) ~ не зависит от формы электродов.

Опр: ток - это направленное, упорядоченное движение носителей заряда.

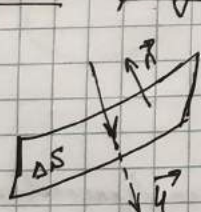
$$\vec{v}_i \rightarrow \langle \vec{v}_i \rangle = 0 \quad \sim \text{для тепл. движения}$$

$$\langle \vec{v}_i \rangle \equiv \vec{U} - \text{упорядоченная ср.-сб. движение}$$

$\vec{v}_i$ $\xrightarrow{q_2}$ ток, который обусловлен движением зарядов называется конвекционным.

$\vec{v}_{ср.} \Rightarrow$ конвекционный ток
(расшир. и, только, когда заряд движ.)

Опр: ток в проводниках, когда заряд в целом неподвижен называется током проводимости.

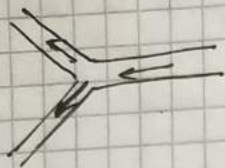


$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

СИ: $[I] = A$
СГСЭ: $[I] = \text{сг. СГСЭ}$

Плотность тока.

$$j = \frac{I}{\Delta S}$$

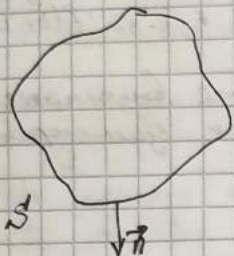


$$\vec{j} \parallel \vec{v} \quad \text{или} \quad \vec{j} \parallel \vec{U}_+$$

$$\vec{j} \parallel \vec{n}$$

$$\Rightarrow I = \int_{(S)} j_n dS$$

Закон сохранения эл. заряда



$$\oint_{(S)} j_n dS = ?$$

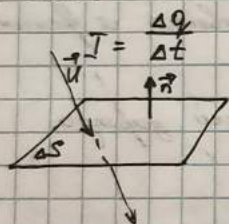
$$\oint_{(S)} j_n dS = \oint_{(S)} (\vec{j}, \vec{n}) dS = -\frac{dq}{dt}$$

Сток. ток. $\Leftrightarrow q = \text{const} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \oint_{(S)} j_n dS = 0$$

~ мат. вып. закона сохр. заряда
 $\Rightarrow$ линии тока должны быть замкнуты.

24.09.21.



~ сток. ток. $\rightarrow I = \frac{dq}{dt}$ всегда

$$j = \frac{I}{\Delta S}$$

~ плотность тока.

$$\vec{j} \parallel \vec{U}_+$$

Выражение для $\vec{j}$:

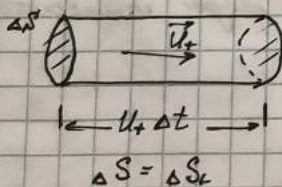
$$I = \frac{dq}{dt} = n e U_+ \Delta S$$

$$N = n \cdot \Delta V = n \cdot \Delta S \cdot U_+ \cdot dt$$

$$\Delta q = N \cdot e$$

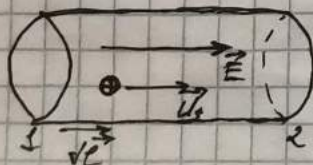
$$e > 0$$

$$\Rightarrow \vec{j} = n e \vec{U}_+$$

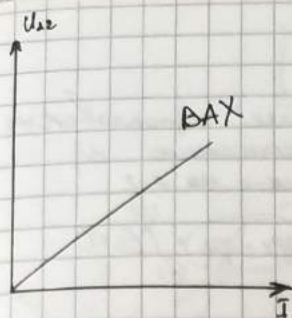


Закон Ома для однородного участка цепи

① Однородный участок ~ если на участке действует только /упрощение/ силы, то такой участок можно считать однородным.



$$\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E_e dl$$



$$\Delta \varphi = U$$

$$I \sim \Delta \varphi \quad (I \sim U_{12})$$

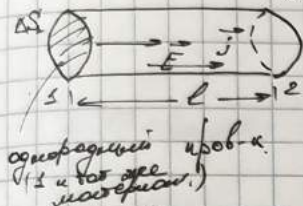
$$I = \frac{U_{12}}{R}, \quad R - \text{сопротивление.}$$

ВАХ - вольт-амперная характеристика.

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{U_{12}}{R}}$$

~ 3-й закон Ома для однородного участка цепи.
(по обн. # 31.10. колло.)

Закон Ома в дифференциальной форме.



однородный провод.
(1-2 и то же вещество.)

$$I = \frac{\Delta \varphi}{R}$$

$$j \Delta S = \frac{El}{R}$$

$$\rightarrow j = E \frac{l}{\Delta S \cdot R}$$

$\Rightarrow E$ - однородное.
(не зависит от коор.)

$$\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E dl = El$$

$$\left. \begin{aligned} R &\sim \frac{l}{\Delta S} \\ R &\sim \frac{1}{\Delta S} \end{aligned} \right\} R = \rho \frac{l}{\Delta S}, \quad \rho - \text{удельное сопротивление}$$

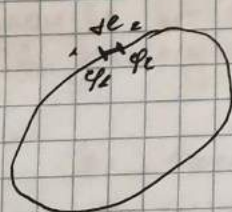
$$j = \frac{1}{\rho} E; \quad U \uparrow \uparrow E, \quad j \uparrow \uparrow U$$

$$\Rightarrow \boxed{j = \frac{1}{\rho} E} \quad - \text{3-й закон Ома в дифференциальной форме.}$$

$$G = \frac{1}{\rho} \sim \text{удельная проводимость.}$$

$$j = \sigma E$$

Условие существования эл-ого тока в замкнутой цепи.



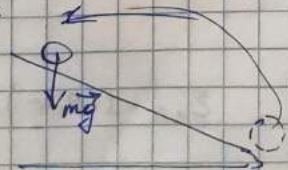
$$\varphi_1 \neq \varphi_2 \Rightarrow E \neq 0 \Rightarrow j \neq 0$$

$$\oint E dl = 0 \Leftrightarrow \dot{A}_{\text{кул}} = 0$$

Если в цепи действующая только кул. сила $\rightarrow \dot{A} = 0 \rightarrow$ тока нет.
(т.е. движение существ. других нестатич. сил.)

$$\Rightarrow A = \underbrace{\dot{A}_{\text{кул}}}_{=0} + \underbrace{\dot{A}_{\text{нел}}}_{>0} > 0$$

Условие:



Закон Ома для неоднородного участка цепи.

Неоднородный участок цепи, на котором кроме кулоновских сил действуют и контактные (сторонние) по отношению к напряжению на 1-2.



$$\text{Однор.} \Rightarrow \vec{E}_{\text{кул.}} \neq 0 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_c d\vec{l}$$

$$\vec{E}_z = \vec{E}_{\text{кул.}} + \vec{E}_{\text{своб.}}$$

$$\vec{E}_{\text{кул.}} = \frac{\vec{F}_{\text{кул.}}}{q}$$

по аналогии

$$\vec{E}_{\text{своб.}} = \frac{\vec{F}_{\text{своб.}}}{q'} \quad (\text{где } q' \text{ — абсолютная электрическая величина})$$

$$\Delta U_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_z d\vec{l}$$

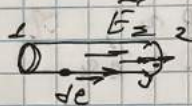
ΔU_{12} — падение напряжения на у.ч. 1-2.

$$\Delta U_{12} = \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_{\text{кул.}} d\vec{l}}_{\varphi_1 - \varphi_2} + \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_{\text{своб.}} d\vec{l}}_{\text{работа } \vec{F}_{\text{своб.}} \text{ на } 1-2}$$

$$\Rightarrow \Delta U_{12} = A_{\text{кул.}} + A_{\text{своб.}}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \rho \vec{j}$$

$$\vec{E}_z = \rho \vec{j} \quad | \cdot \sqrt{l} \cdot \int_{(1)}^{(2)} \dots d\vec{l}$$



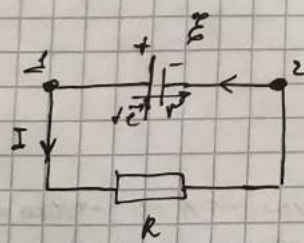
$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_z d\vec{l} = \int_{(1)}^{(2)} \rho \vec{j} d\vec{l} = \rho j l = \rho l \cdot \frac{I}{\Delta S}$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_z d\vec{l} = \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_{\text{кул.}} d\vec{l}}_{\varphi_1 - \varphi_2} + \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_{\text{своб.}} d\vec{l}}_{\mathcal{E}_{12} \text{ — ЭДС (электрохимическая сила)}}$$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} = IR}$$

з-н Ома для неоднородного участка цепи.

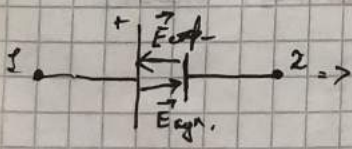
Закон Ома для замкнутой цепи.



1R2 — однор. участок
1\mathcal{E}2 — неоднор. участок

r — внутр. сопр-е

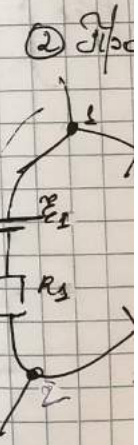
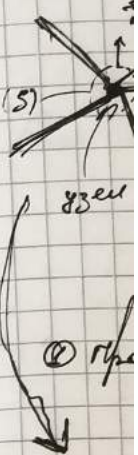
$$\rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = IR$$



$$\vec{E}_{\text{своб.}} \uparrow \vec{E}_{\text{кул.}} \\ \vec{E}_{\text{своб.}} > \vec{E}_{\text{кул.}}$$

$$\varphi_1 > \varphi_2 \Rightarrow \vec{I} (1 \rightarrow 2)$$

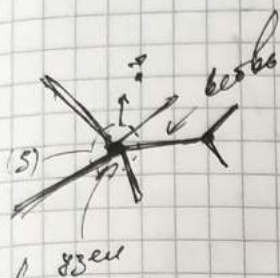
$$-Ir = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{12} = I(R+r) \\ \varphi_1 - \varphi_2 = IR$$



R — сопротивление

$$I = \frac{\sum_{i,j} \xi_{i,j}}{R+r}$$

- закон Ома для замкнутой цепи.



Разветвление цепи.
Правило Кирхгофа.

1) Узел - это место соединения трех и более проводников.

2) Знак перед током узла определяется ветвью.

ток считается положительным, если он выходит из узла.

$I > 0$ - выходит
 $I < 0$ - входит.

③ правило: алгебраическая сумма токов равна 0.

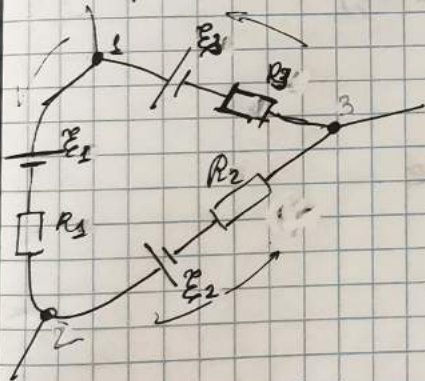
$$\sum_{k=1}^N I_k = 0$$

$$\oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \frac{dq}{dt} = 0$$

(S) сохр. ток

Если в цепи N_y - число узлов $\rightarrow (N_y - 1)$ независимых уравнений

② Правило



$$R_i = R + r$$

$$12: I_1 R_1 = (\varphi_1 - \varphi_2) + \xi_1$$

$$23: I_2 R_2 = (\varphi_2 - \varphi_3) + \xi_2$$

$$31: I_3 R_3 = (\varphi_3 - \varphi_1) + \xi_3$$

$$\sum_{n=1}^K I_n R_n = \sum_{m=1}^M \xi_m$$

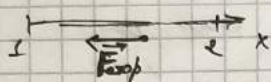
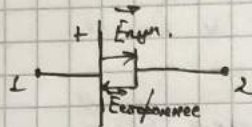
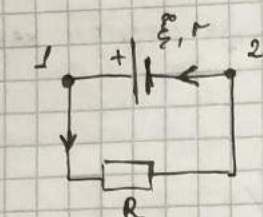
~ 2-ое правило Кирхгофа.

K - кол-во ветвей
в замкнутой контуре

N_b - число ветвей во всей цепи.

$\rightarrow N_b - (N_y - 1)$ ур-н 2-го правила.

27.09.21.



IR2 - одноп. $IR = \varphi_1 - \varphi_2$ ~ 3-й Закон
 1 & 2 - неодноп. $-Ir = \varphi_1 - \varphi_2 + A_{\text{электр}}(1,2)$
 $- \mathcal{E}$

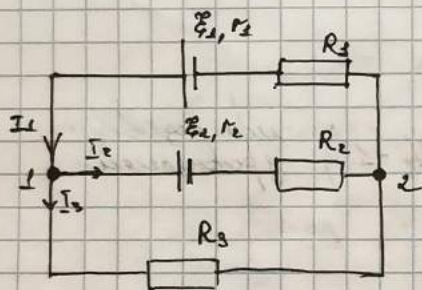
Условие тока существования $\mathcal{E}_{\text{электр}} > E_{\text{инд}}$.

$$A = \int_{(1)}^{(2)} F_{\text{эл}} dx$$

$$\Rightarrow -Ir = IR - \mathcal{E}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

Пример применения правил Кирхгофа.

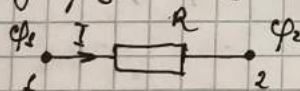


$I_1, I_2, I_3 = ?$

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ (2) \quad \text{для } R_1 \text{ и } R_2: \quad I_2(r_2 + R_2) + I_1(R_1 + r_1) &= -\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 \\ \text{для } R_2 \text{ и } R_3: \quad I_2(r_2 + R_2) - I_3 R_3 &= -\mathcal{E}_2 \end{aligned} \right\}$$

Работа и мощность в цепи постоянного (стационарного) тока.
Закон Джоуля-Ленца.

① Одномерный участок:



$$U = IR$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$dA_{\text{эл}} = dq \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = IU dt$$

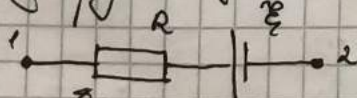
$$\Delta W_{\text{эл}} = IU \Delta t$$

$$P = \frac{A_{\text{эл}}}{\Delta t} = IU$$

~ энергия затрачена на нагрев.

$$Q_{\text{ж}} = IU \Delta t = I^2 R \Delta t$$

② Неодномерный участок.

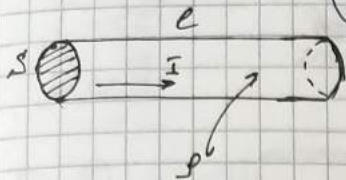


внеш. ир

$$dA_{\text{эл}} + dA_{\text{эп}} = dq(\varphi_1 - \varphi_2) + dq \cdot \mathcal{E}$$

$$A_2 > 0$$

$$Q_{\text{ж}} = (IU + I\mathcal{E}) \Delta t = (I^2 R + I\mathcal{E}) \Delta t$$



$$P_{\text{loss}} = I^2 R$$

$$Q_{\text{Joule}} = I^2 R \Delta t = (jS)^2 \cdot \rho \frac{l}{S} \Delta t = j^2 \rho (lS) \cdot \Delta t$$

$$q_{\text{Joule}} = \frac{Q_{\text{Joule}}}{V} = j^2 \rho \Delta t$$

$$\rho = j^2 r$$

Еще выведем закон Ома в дифференциальной форме.

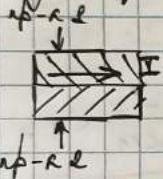
$$\vec{j} = \sigma \vec{E}; \quad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$\Rightarrow \rho = j^2 r = \sigma E^2$$

~ тепло в единицу времени и в единицу объема.

Эффект Пельтье (1834 г.)

Есть два разных по хим. составу проводника.

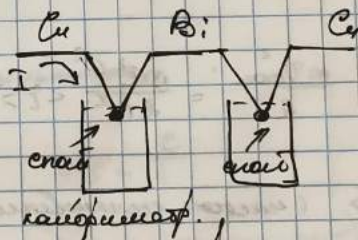


В камере из проводников выделяется тепло. А на границе может поглощаться или выделяться тепло.

$$Q_p \sim I \Delta t \geq 0$$

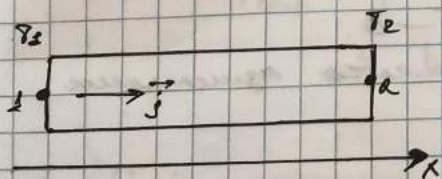
$$Q_{\text{Joule}} \sim I^2$$

Направление, связанное с направлением тока и температурой.



$\Rightarrow$ 1 спай нагревается, а другой охлаждается.
 $\rightarrow$ Холодный эффект Пельтье.

Эффект Томсона (1856 г.)



$$\sigma = \sigma(x)$$

(проводник неоднородно нагрев.)

$$\nabla T = \frac{dT}{dx} \vec{i}$$

$$\frac{dT}{dx} > 0 \Leftrightarrow T_2 > T_1, \text{ если } \vec{j} \uparrow \vec{i}$$

$\Rightarrow$ тепло будет поглощаться

$$\frac{dT}{dx} < 0 \Leftrightarrow T_2 < T_1, \text{ если } \vec{j} \uparrow \vec{i} \sim \text{выделяется тепло.}$$

классическая электронная теория проверяется металлов.

$$\vec{j} = en\vec{u}$$

$$\vec{j} \neq \vec{j}(t) \Rightarrow \vec{u} = \text{const.}$$

$$\vec{E} \neq 0 \Rightarrow \vec{F} = e\vec{E} \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \neq 0 \quad (?)$$

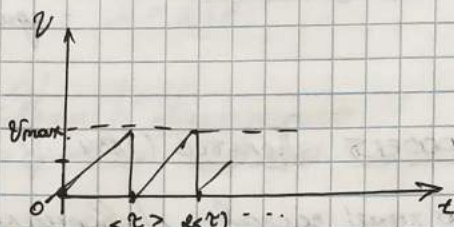
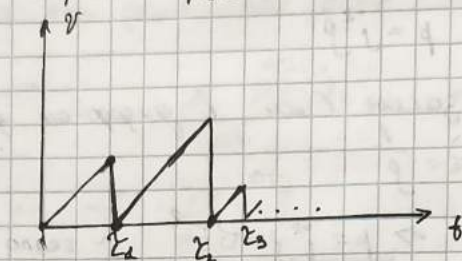
Теория Друда (1900г.)

$$m\vec{a} = e\vec{E}$$

$$v = \frac{|e|E}{m}t$$

$$\langle \tau \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N \tau_i}{N}$$

$$v_{\max} = \frac{|e|E}{m} \langle \tau \rangle$$



Пренебрегая в числителе: $u = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{|e|E}{2m} \langle \tau \rangle$

$$\left. \begin{aligned} j &= |e|nu = \frac{e^2 n}{2m} \langle \tau \rangle E \\ j &= \sigma E \end{aligned} \right\} \sigma = \frac{e^2 n}{2m} \langle \tau \rangle$$

1) $\delta \uparrow \Rightarrow \langle \tau \rangle \downarrow \Rightarrow v \downarrow \Rightarrow j \uparrow$ (проверка разумности теории!)

2) $q_{\text{дис}} = ?$

$$W_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{m e^2 E^2}{2m^2} \langle \tau \rangle^2 = \frac{e^2 E^2}{2m} \langle \tau \rangle^2 \quad - \text{1 электрон.}$$

$$\nu = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \quad (\text{частота соударений})$$

$$V = \delta \epsilon_0 \nu \Rightarrow n$$

$$\Rightarrow W = W_{\max} \cdot \nu \cdot n = \frac{e^2 E^2}{2m} \langle \tau \rangle^2 \cdot \frac{1}{\langle \tau \rangle} \cdot n = \frac{e^2 \langle \tau \rangle}{2m} n E^2 = \sigma E^2$$

$$\Rightarrow \underline{W = q_{\text{дис}} = \sigma E^2}$$

Критерии:

- 1) Нет максимума на сверхпроводимости при $\delta \rightarrow 0$
- 2) Усреднение $\langle \tau \rangle$ - некорректно, так как оно является асимптотическим.

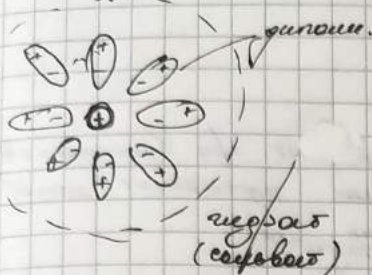
Металлы - проводники 1 рода.
Электрониты - проводники 2 рода.

Для электролитов.

Преобразование мексиканских электролитов не электролитов, а ионная.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{j} = en\vec{u}$$



$$u = vE, \quad v - \text{подвижность}$$

$$\vec{j} = envE$$

$$\vec{j} = env$$

$$eE = F_{\text{conf.}} = \hbar \omega$$

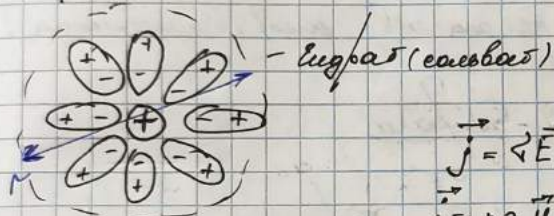
сил. электр. тр.

$$\Rightarrow u = \frac{eE}{\hbar}$$

коэф. сопр.

$$\Rightarrow v = \frac{e}{\hbar}$$

1.10.23.



$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad - \text{3-й закон Ома}$$

$$\vec{j} = ne\vec{u}$$

заряд иона

$$\vec{F}_{\text{эл}} = e\vec{E}$$

$$\vec{F}_{\text{conf.}} = -\hbar \vec{u}$$

~ по 3-му закону Стокса
h - коэффициент сопротивления.

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{conf.}} = 0 \rightarrow eE = \hbar u = \hbar vE$$

$$u = vE$$

подвижность

$$\vec{j} = ne u = nevE$$

$$\rightarrow v = \frac{e}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = nev = \frac{ne^2}{\hbar} E$$

3-й закон Стокса: $F_{\text{conf.}} = (6\pi\eta r)$ (для сферических тел.)

$$F_{\text{conf.}} \sim \eta r$$

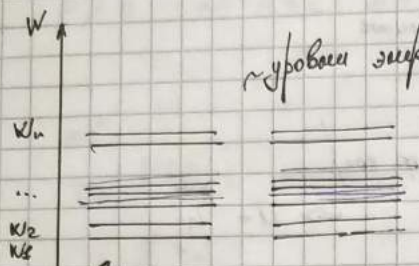
$$\Rightarrow h \sim \eta r$$

$$\sigma = \zeta(\delta) - ?$$

Если $\delta \uparrow \Rightarrow n \uparrow$ (увеличивается диссоциация) $\Rightarrow \zeta \uparrow$ (проводимость)
вследствие $\eta \downarrow$

$$\tau \uparrow \Rightarrow r \downarrow \Rightarrow \sigma \uparrow$$

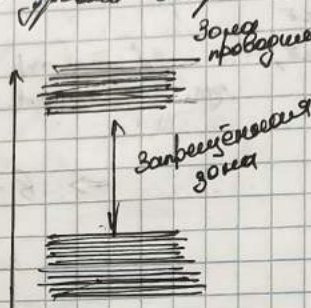
Несколько сведений о зонах
теории проводимости кристаллов.



Энергетический спектр.

~ уровни энергии (условно)

- подуровни (возникают при взаимодействии)
- уровни энергии определяют атомов

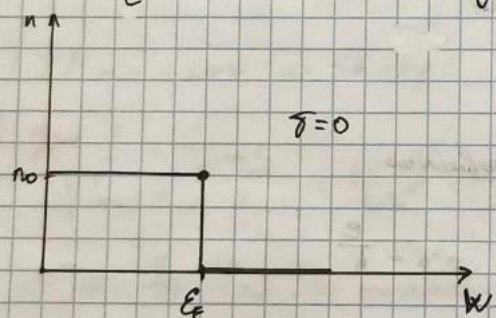


Распределение энергии электрона не описыв. формул. Большая масса!
(только при $\gg \delta$)

Распределение Ферми - Дирака

$$n = \frac{N_0}{e^{\frac{W - E_F}{kT}} + 1}$$

где E_F - уровень Ферми

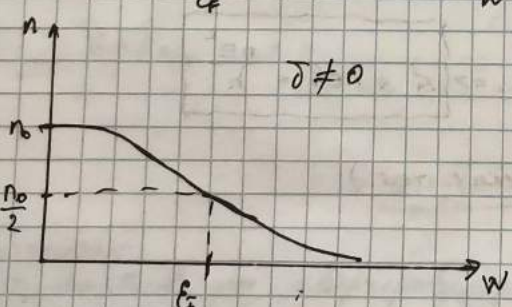


$T=0$

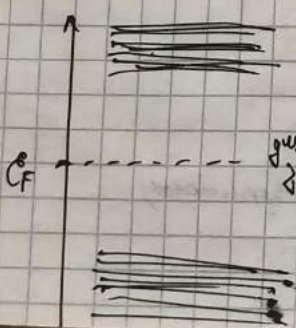
До уровня Ферми электроны будут иметь энергию ~ а выше - ничего нет.

$$kT \gg W \Rightarrow n \rightarrow N_0 \cdot e^{-\frac{W}{kT}}$$

~ формул. е Больцмана.

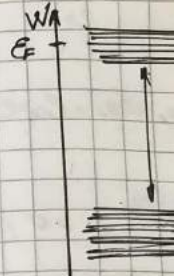


$T \neq 0$



электроны $\delta \approx 0$

~ Если энергия Ферми лежит в зап. зоне $\rightarrow$ электрон не может откликнуться на внешнее воздействие

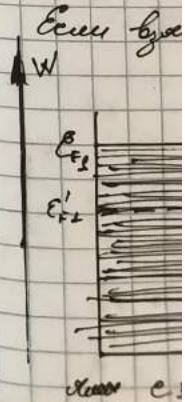


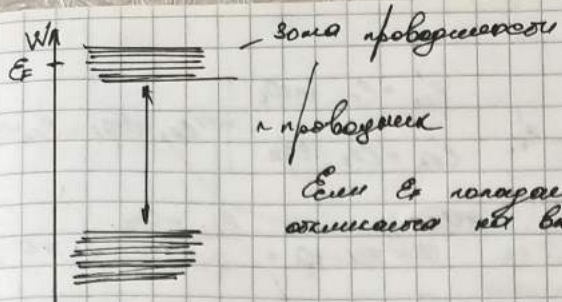
Ферми
Уровни

n_2

$$\Delta \varphi = \frac{f}{kT} \gg 1$$

В Pa



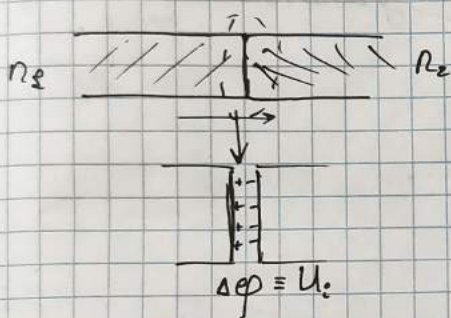


Если E_F попадает в зону проводимости - электрон переходит на высшие энергетические уровни.

Экстражение явления в контактах
Внутренняя контактная разность потенциалов

Робинс эффект - вольт (1707 г.)

Две слои проводника, два металла:



Если $n_1 > n_2$ - электроны переходят слева направо

i - intrinsic - внутр.



$$\Delta\phi = f(n_1, n_2, \delta)$$

$$\kappa\delta \gg W \rightarrow n_1 = n_{01} \cdot e^{-\frac{W_1}{\kappa\delta}}$$

$$n_2 = n_{02} \cdot e^{-\frac{W_2}{\kappa\delta}}$$

В равновесии $\rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow \frac{n_{01}}{n_{02}} = e^{-\frac{\Delta W}{\kappa T}}$

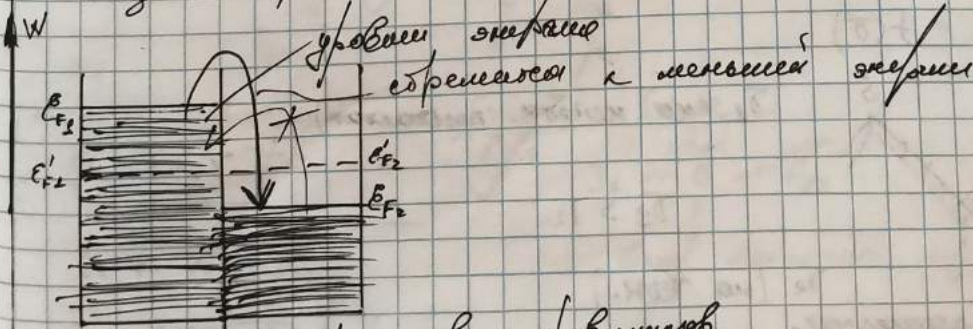
$$\Delta W = W_1 - W_2$$

$$|W| = \kappa \cdot \epsilon_n \cdot \frac{n_{01}}{n_{02}} \quad (\text{по модулю})$$

$$|W| = |e| \cdot |U_c|$$

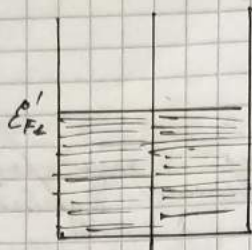
$$|U_c| = \frac{\kappa\delta}{|e|} \cdot \epsilon_n \cdot \frac{n_{01}}{n_{02}}$$

Если взять Zn, Cu $\rightarrow U_c \sim 10^{-2}$ В



или энерг. спектры двух проводников

Состояние равновесия:



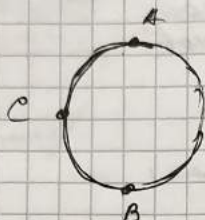
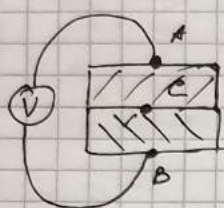
$$\begin{aligned} E_{F1}' &= E_{F1} + e\phi_1 \\ E_{F2}' &= E_{F2} + e\phi_2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} E_{F1}' &= E_{F2}' \\ E_{F1} + e\phi_1 &= E_{F2} + e\phi_2 \end{aligned} \right.$$

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \frac{E_{F2} - E_{F1}}{e} > 0 \text{ (если)}$$

С позиций зонной теории / возникновении разности потенциалов в контакте $\rightarrow$ из-за различия уровней Ферми.

$$E_F \sim n^{2/3}$$

показ. вольтампер.



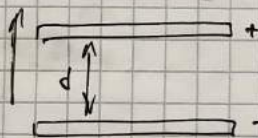
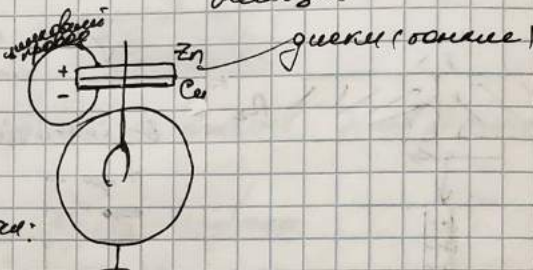
$$V = \phi_A - \phi_B = (\phi_A - \phi_C) + (\phi_C - \phi_B)$$

$\Rightarrow$ вольтметр измеряет разность потенциалов.

Опыт Вебера:

Эксперимент

Сначала соединяли / магнитики, затем разрывали.

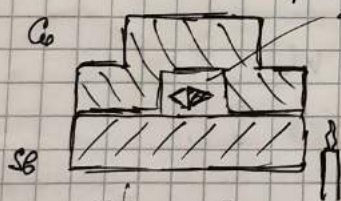


$$\Delta T \Rightarrow C \downarrow$$

$$q = \text{const} \Rightarrow \Delta \phi \uparrow$$

1) Прямой эффект (Эффект Зеебека). ~ 1822 г.

Все материалы разных материалов $\rightarrow$ Sb, Cu магнитный эффект при нагревании отклоняется



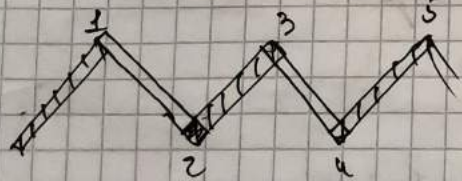
Если нагревать с другой стороны $\Rightarrow$ магнитный эффект отклоняется в другую сторону.

Прямой эффект:

$$T \uparrow \Rightarrow \text{появл. } I \text{ (если } \Delta \phi \text{) термоэдв.}$$

Уровень Ферми зависит от $T \rightarrow$ т.е. он сдвигается.

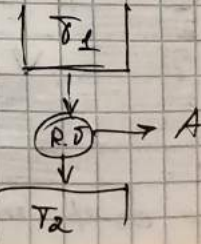
$$E_F = f(T)$$



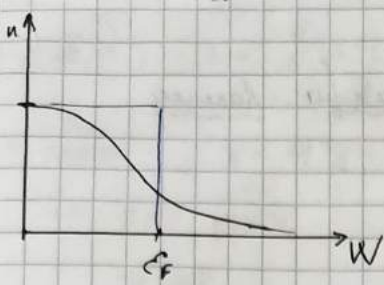
T_2 (на левом контакте)

$$T_3 > T_2$$

T_2 (на правом)



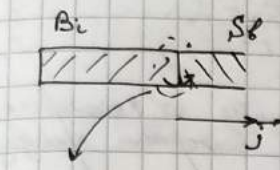
~ как температурная зависимость



1) $E_F = F(T)$
 2) $T_1 > T_2 \Rightarrow$ гермодиф. (где δ больше, концентр. больше, а флуктуирует и уменьшается с концентр., от T_1 до T_2)

2) Эффект Зельдовича:

4.10.21



$Q_{\text{ген}} \sim J^2 > 0$

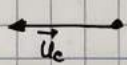
$\vec{F}_i \uparrow \vec{U}_e \rightarrow W_n \uparrow \Rightarrow \delta \uparrow$ слева

$Q_n \sim I \geq 0$

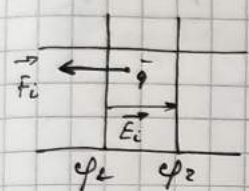
$\varphi_1 > \varphi_2$



$q < 0$

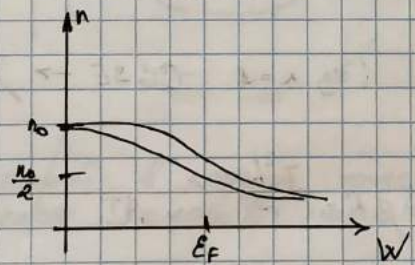
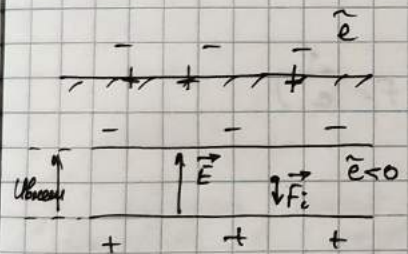


энергия уходит в решетку.



$\vec{F}_i \uparrow \vec{U}_e \Rightarrow W_n \downarrow \Rightarrow \delta \downarrow$ энергия забирается у решетки.

Внешняя контактная разность потенциалов.



$A_{\min} = \text{минимальная работа выхода (работа для пред. Увнеш.)}$

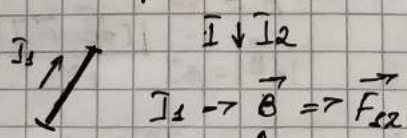
$|\vec{E}| \cdot U_{\text{внеш}} = A_{\min}$

Магнитостатика в вакууме.



$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_1}$

$q_1 \Rightarrow \vec{E} = \vec{F}_{12}$



вектор магнитной индукции

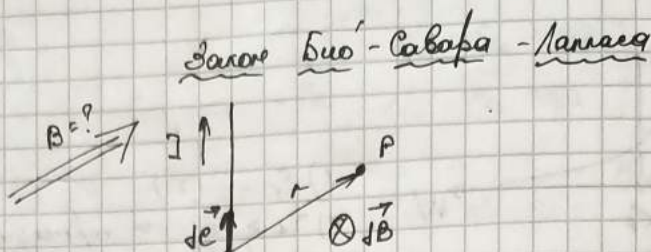
$\vec{F} = \mu_0 I_1 I_2 [\vec{dl}, \vec{B}_1]$

$$I \perp \Rightarrow \vec{B}_2$$

$$\vec{E} \uparrow \vec{j}_2$$

$$F = \begin{cases} \frac{1}{c}, SI \\ \frac{1}{c}, CGSM \end{cases}$$

магнит. ед. сг.



(р.с. этот вектор всегда перпенд. кривой из-за сг.)

! Этот вектор от тока к P

$$\begin{aligned} |\vec{B}| &\sim I \\ |\vec{B}| &\sim \frac{1}{r} \\ |\vec{B}| &\sim \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \beta I \frac{[\vec{de}, \vec{r}]}{r^3}$$

формула от Кирхгофа
в векторном произведении

$$\beta = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi}, SI \\ \frac{1}{c}, CGSM \end{cases}$$

μ_0 - магнитная постоянная.

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{Гн}{м} \right]$$

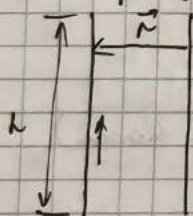
$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{r}, \kappa = 1 \text{ CGSE}$$

$$[q] = [F \cdot r^2] = \text{сг CGSE}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = [I] = \text{сг CGSE}$$

$$CGS: \beta = f \Rightarrow \beta = F = \frac{1}{c} \quad (\text{из } \kappa = 1 \text{ CGSE} \rightarrow \beta = F = \frac{1}{c})$$

Два проводника



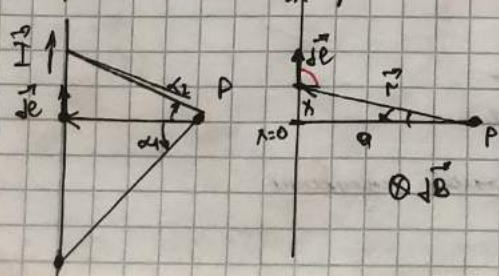
$$F_A = \beta F = \frac{I^2 \kappa}{r}, SI$$

$$F_A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \rightarrow I = 2 \text{ А}$$

$$f = 1 \rightarrow \beta = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

Рассеяние энергии
токов

2) О резонанс кривого проводника



$$\vec{B} = \int \vec{dB}$$

$$|\vec{B}| = \beta I \frac{|\vec{de} \cdot \vec{r}|}{r^3} = \frac{\beta I de \cdot \sin(\vec{de}, \vec{r})}{r^3}$$

$$= \beta I \cdot \frac{de \cdot \cos \alpha}{r^2} = \beta I \cdot \frac{a \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{a^2} =$$

$$= \beta I \frac{\cos \alpha \cdot \cos \alpha}{a}$$

$$\sin(\vec{e}, \vec{r}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$r = \frac{a}{\cos \alpha}; \quad x = a \tan \alpha$$

$$de = dx = \frac{a d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

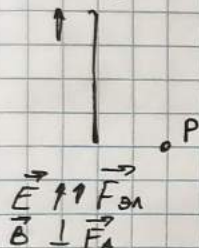
$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{a} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{a} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 I}{a} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

а) Бесконечная:

$$B_{\infty} = \frac{2\mu_0 I}{a}$$

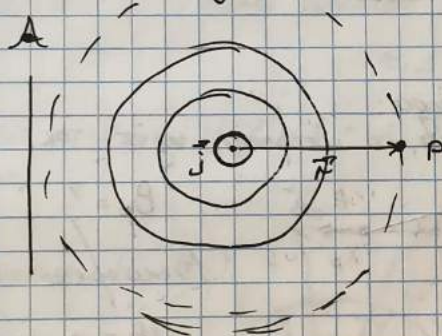
$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$$

б) полубесконечная, т. Р находится под углом полубесконечности: $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \alpha_1 = 0$



$$B = \frac{\mu_0 I}{a}$$

Линии поля B для ∞ проводника с током

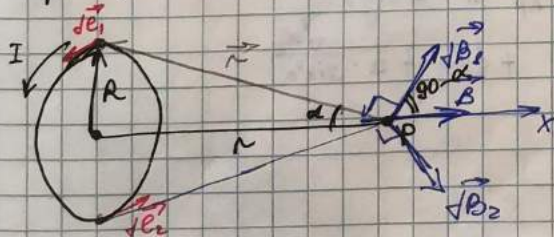


$$B \uparrow [\vec{e}, \vec{r}]$$

Линия силовых линий, которая в каждой точке совпадает по направлению с вектором B, называется силовой линией (условная)

• Линии поля B всегда замкнуты - это отличие от E. (из-за того, что нет положительных зарядов.)

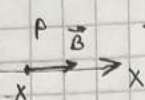
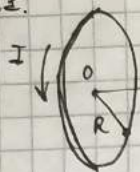
Пример: кольцо с током (Виток)



$$\sin \alpha = \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B = B_x = \int \mu_0 I \cdot \frac{de}{r^3} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

8.10.21.



$$B = \mu_0 \cdot 2I \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

1) $x=0 \rightarrow B(x=0) = \mu_0 \cdot \frac{2I}{R}$

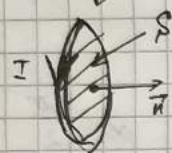
2) $x \gg R \rightarrow B(x \rightarrow \infty) = \mu_0 \cdot \frac{2I R^2}{x^3} \sim \frac{1}{x^3} \Rightarrow$ Видна с точки - магнитный диполь

$$\vec{p}_m = I \vec{S} \vec{n}$$

$\vec{n}$ - направление витка

$|\vec{n}| = 1$ - дипольный магнитный момент.

$\vec{n}$ - сф., по правилу правого винта с током I .



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2 \frac{\vec{p}_m}{x^3}$$

Несколько витков:

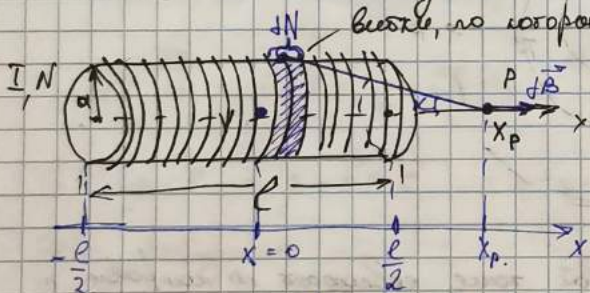


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{L} \cdot 2N \frac{\vec{p}_m}{x^3}$$

, но не очень много

3. Магнитное поле соленоида:

витки, по которым идёт ток.



$$B_P = ?$$

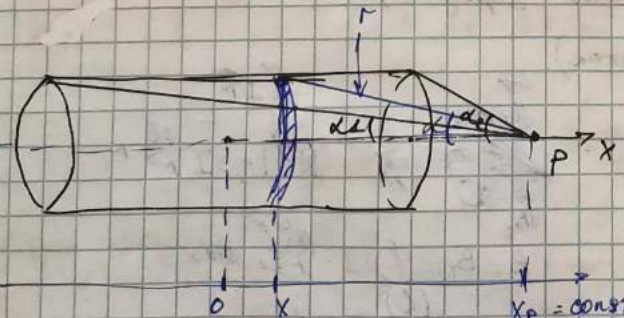
Выберем 0 в центре катушки.

$$dB = \mu_0 \cdot 2I \frac{a^2}{r^3} \cdot dN$$

Если катушка равномерна: $n = \frac{N}{l}$

$\sim$ плотность катушки

$$\Rightarrow dN = n dx$$



$$r = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$x_P - x = a \cot \alpha$$

$$+ dx = + a \cdot \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$dB = \mu_0 \cdot 2I \cdot \frac{a^2}{r^3} \cdot dN = \mu_0 \cdot 2I \cdot \frac{a^2 \sin^3 \alpha \cdot a \cdot d\alpha}{a^3 \cdot \sin^4 \alpha} = \mu_0 \cdot 2I n \sin \alpha d\alpha$$

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu_0 \cdot 2I n \sin \alpha d\alpha = \mu_0 \cdot 2I n (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_p + \frac{c}{2}}{\sqrt{(x_p + \frac{c}{2})^2 + a^2}}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{x_p - \frac{c}{2}}{\sqrt{(x_p - \frac{c}{2})^2 + a^2}}$$

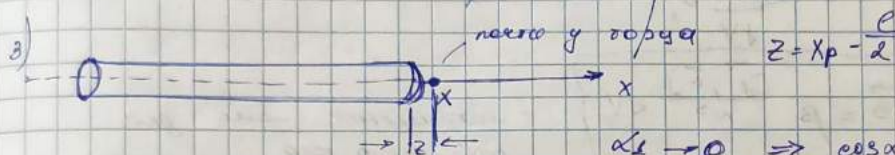
$$l \gg a$$

1) $x_p = 0$
 $l \rightarrow \infty$ (усиление, длина очень большая) $\rightarrow \alpha_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \alpha_1 = 1$
 $\alpha_2 \rightarrow \pi \Rightarrow \cos \alpha_2 = -1$

$$\Rightarrow B = \beta \cdot 4\pi I \sim \text{магнитное поле на оси сек. длинного соленоида.}$$

2) $x_p = \frac{c}{2} \Rightarrow \alpha_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \alpha_1 = 1$
 $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha_2 = 0$

$$\Rightarrow B = \beta \cdot 2\pi I$$



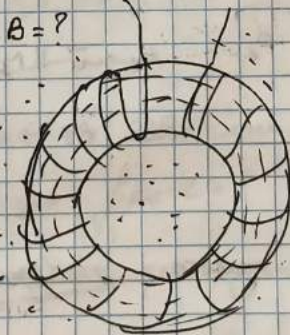
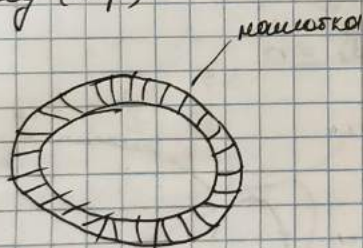
$$\alpha_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \alpha_1 = 1$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{x_p - \frac{c}{2}}{\sqrt{(x_p - \frac{c}{2})^2 + a^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

Будем считать, что $a \ll z$ (осевая точка): $\cos \alpha_2 = \frac{z}{\sqrt{1 + (\frac{a}{z})^2}} \approx$
 $\approx 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2}$

$$B \approx \beta \cdot 2\pi I \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} \right) = \beta \pi I \frac{a^2}{z^2}$$

4. Тороид (тор)



Магнитное поле объемных токов.

5. Объемные токи

Линии тока - это линии, направленные так же как $\vec{j}$



$$\vec{n} \parallel \vec{j}$$

$$I = j \Delta S$$

$$d\vec{B} = \beta I \frac{[d\vec{e}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$= \beta \Delta S \frac{[j d\vec{e}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$d\vec{e} \parallel \vec{j}$$

$$= \beta \Delta S \cdot d\vec{e} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} = \beta dV \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$d\vec{B} = \beta \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV$$

- магнитное поле для объемного тока.

6. Магнитное поле единичного движущегося заряда.

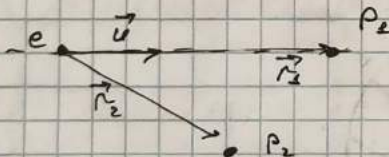
$$\vec{j} = en\vec{u}$$

$$d\vec{B} = \beta \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV$$

$$= \beta en dV \cdot \frac{[\vec{u}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$n = \frac{dN}{dV} \Rightarrow dN = n dV$$

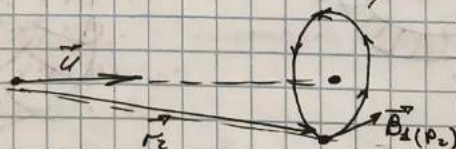
$$\vec{B}_1 = \frac{d\vec{B}}{dN} = \beta \cdot e \frac{[\vec{u}, \vec{r}]}{r^3} \quad (\text{един заряд})$$



$$P_1: \vec{u} \parallel \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{B}_1 = 0$$

$$P_2: B_1 \sim \frac{1}{r^2}$$

Магнитное поле создано только движущимся зарядом.



Основные уравнения магнитостатического поля в вакууме.

Электр-ое поле

Магнит-ое поле.

1) $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$

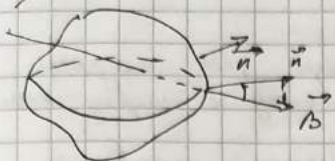
1) $\oint \vec{B} d\vec{l} = ?$ ($\neq 0$ по теореме)

2) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \kappa \cdot q_{\text{вн}}$

2) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

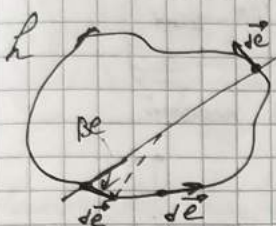


$$d\Phi = (\vec{B}, \vec{n}) dS = B_n dS$$

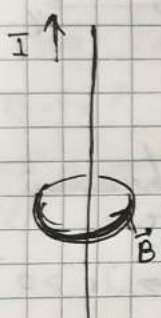


$$\oint_{(S)} B_n dS = 0 \quad - \text{теорема}$$

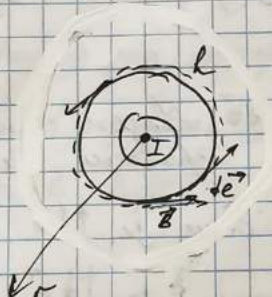
Теорема о циркуляции
магнитного поля в вакууме



$$B_{\vec{l}} = (\vec{B}, \vec{dl}) = B \cdot dl \cdot \cos(\vec{B}, \vec{dl})$$



Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен $\vec{dl}$

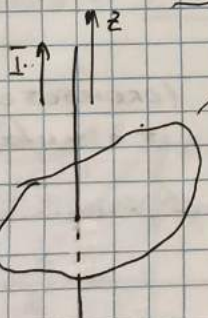


$$\vec{dl} \perp \vec{B} \rightarrow B_{\vec{l}} = B = \beta \cdot \frac{2I}{r}$$

$$\oint_{(L)} B_{\vec{l}} dl = \oint_{(L)} B dl = B \oint_{(L)} dl = B \cdot 2\pi r = \beta I \cdot 4\pi$$

$$\oint_{(L)} B_{\vec{l}} dl = \beta \cdot 4\pi I$$

11.10.2021.



Произвольный замкнутый контур

Тогда $\oint_{(L)} B_{\vec{l}} dl = ?$

Используем цилиндрическую с.к.: $\{z, r, \varphi\}$

$$\vec{dl} = dz \vec{e}_z + r d\varphi \vec{e}_\varphi + dr \vec{e}_r$$

$$\vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi$$

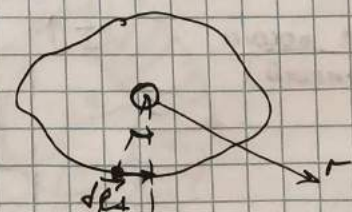
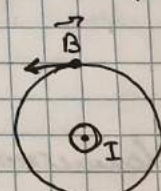
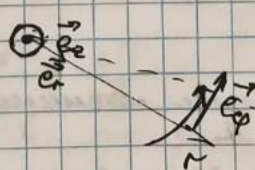
$$B_{\vec{l}} dl = (\vec{B}, \vec{dl}) = B_\varphi dl_\varphi = B \cdot dl_\varphi = B r \cdot d\varphi$$

Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен произвольному контуру в плоскости:

$$\vec{dl}_\varphi \perp \vec{e}_z$$

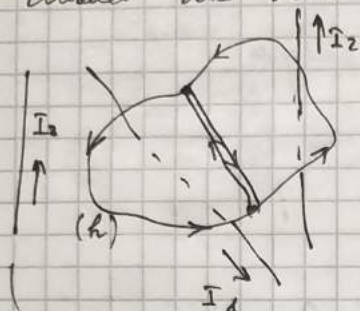
$$dl_\varphi = r d\varphi$$

$$\oint_{(L)} B_{\vec{l}} dl = \oint_{(L)} B r d\varphi = \oint_{(L)} \beta \cdot \frac{2I}{r} \cdot r d\varphi = \beta I \cdot 4\pi$$



$$\oint_{(h)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \beta \cdot 4\pi I$$

Может ток течь и в другую сторону:



~ т.е. разделим контур, для каждого тока и применим теорему о циркуляции.

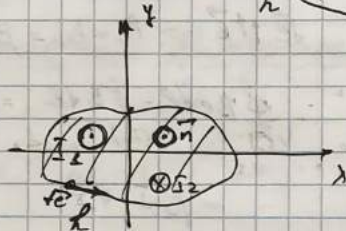
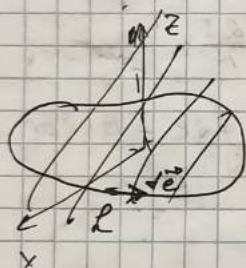
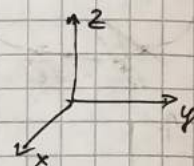
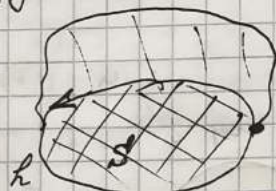
Учтем разное направление токов $\rightarrow$ пометить ток, как алгебраическую сумму

$$\Rightarrow \oint_{(h)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \beta \cdot 4\pi I_{\text{sum}}$$

Вклад в цирк. не даёт

Площадка может быть любой!

Всё сходится, лишь бы ток пронизывал эту поверхность



$\vec{I}$ связан с нормалью правой винтом

Если $\vec{j}_1 \uparrow \uparrow \vec{n} \Rightarrow I_1 > 0$

$\vec{j}_2 \uparrow \downarrow \vec{n} \Rightarrow I_2 < 0$

$$I = \iint_{(S)} j_n dS$$

Уточним:

$$\oint_{(h)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \beta \cdot 4\pi \iint_{(S)} j_n dS$$

(оказывается)

т.о. циркуляция $\vec{B}$

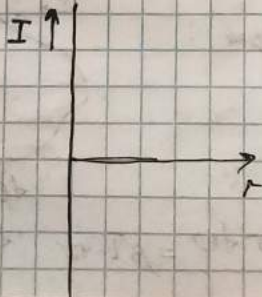
площадка, выперн. по контур

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

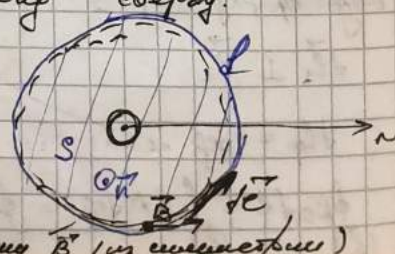
Магнитное поле — не потенциально!

Примеры применения теоремы о циркуляции $\vec{B}$.

③ Проверка с током: (беск. длинный)



Вид сверху:



линии $\vec{B}$ (из симметрии)

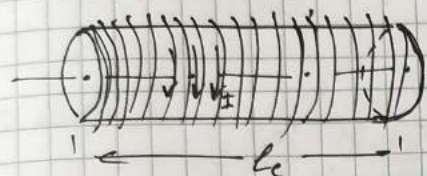
$B_e = \text{const}$ на h

$$\oint_{(L)} B_e dl = B_e \oint_{(L)} dl = 2\pi r \cdot B_e = \beta \cdot 4\pi I$$

S - плоская петля

$$\Rightarrow B_e = \beta \cdot \frac{dI}{r} > 0$$

② Магнитное поле прямого, бесконечного соленоида; (поиск узла)

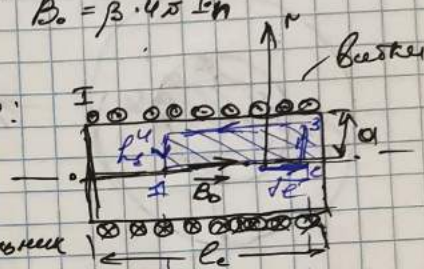


$$n = \frac{N}{l_c} \quad (\text{плотность намотки})$$

На осн соленоида:

$$B_0 = \beta \cdot 4\pi I n$$

Магнитное поле прямого соленоида:



1) $r < a$ (внутри) 2) $r > a$ (снаружи)

$B(r) = ?$ контур для интегрирования - прямоугольник

$$\oint_{(L)} B_e dl = \int_{12} B_0 dl + \int_{23} B_{\text{out}} dl + \int_{34} B_e(r) dl + \int_{41} B_{\text{in}} dl =$$

$$(L_e) \quad = B_0 \cdot l_c + B_e(r) \cdot l_c = \beta \cdot 4\pi I n \cdot l_c$$

только не пропускать петлю (контур)

Внутри соленоида $B \perp 2-3, 4-1$

$$\Rightarrow B_e(r) = -B_0$$

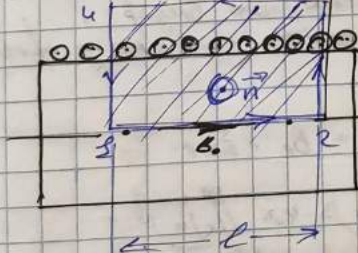
$\Rightarrow$

$$\vec{B}(r) = -\vec{B}_0$$

$$B(r) = -B_e(r) = B_0 = \beta \cdot 4\pi I n$$

$\Rightarrow$ поле в соленоиде однородное.

2) $r > a$ $l_c \Delta N$ $3\pi r$



$$\oint_{(L)} B_e dl = \int_{12} B_0 dl + \int_{23} B_{\text{out}} dl + \int_{34} B_e(r) dl + \int_{41} B_{\text{in}} dl =$$

$$= \beta \cdot 4\pi I n \cdot l_c + B_e(r) \cdot l_c =$$

$$= \beta \cdot 4\pi \cdot I \cdot \frac{\Delta N}{n l_c}$$

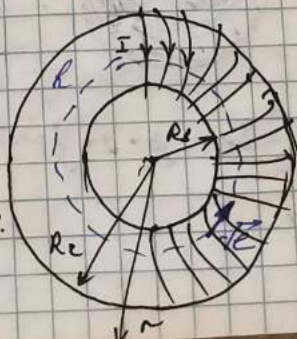
$$\Delta N = n \cdot l_c$$

$$\Rightarrow B_e(r) = 0$$

③ Магнитное поле тороида.

I, R_1, R_2, N

$\vec{B}$ - линии поля - оск. из сечения тора.



$$\oint \underline{B_e} d\ell = B_e(r) \oint d\ell = B_e(r) \cdot 2\pi r$$

(R) const (R)

~~Магнитное поле~~ магнитное поле разрешения судна:

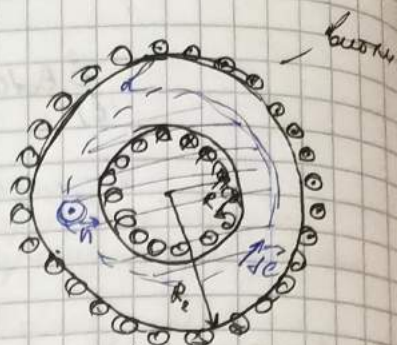
2) $R_1 < r < R_2$: $I_{\Sigma \text{int}} = -I \cdot N$

$$\Rightarrow B_e(r) \cdot 2\pi r = -\beta \cdot 4\pi I \cdot N$$

$$B_e(r) = -\beta \cdot \frac{2IN}{r}$$

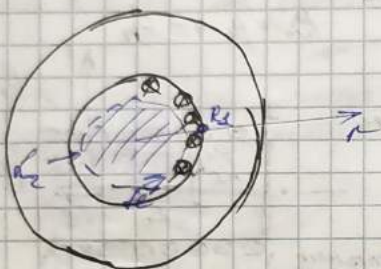
$$B \sim \frac{1}{r}$$

$\Rightarrow$ линии поля B - круги напр. против те



2) $r < R_1$: $I_{\Sigma \text{int}} = 0$

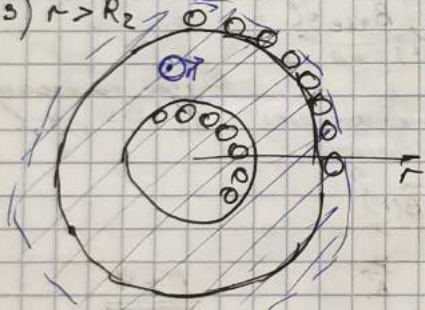
$$\Rightarrow B(r) = 0$$



3) $r > R_2$:

$$I_{\Sigma \text{int}} = \underbrace{NI}_{\text{на } R_2} - \underbrace{NI}_{\text{на } R_1} = 0$$

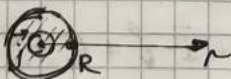
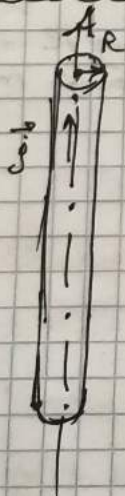
$$\Rightarrow B(r) = 0 \quad (r < R_1, r > R_2)$$



④ Магнитное поле цилиндрического тока: (j известно)

Вед сверху

Интересно, что внутри. (если считать гауссено $\rightarrow$ полоса.)



$$\oint \underline{B_e} d\ell = B_e \cdot 2\pi r =$$

(R) = const

$$= \beta \cdot 4\pi \iint \underline{j_n} dS =$$

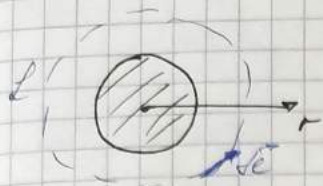
(S) $\underline{j} = \text{const}$

$$= \beta \cdot 4\pi \cdot j \cdot \iint dS = \beta \cdot 4\pi j \cdot \pi r^2$$

(S)

$$\Rightarrow B_e = \beta \cdot 2\pi j r \quad (r < R)$$

Во внешней части:

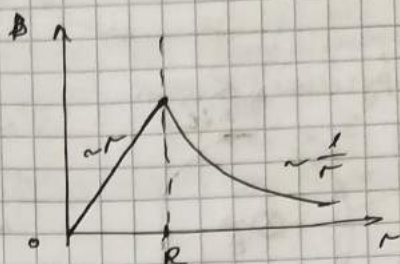


$$B_c \cdot 2\pi r = \beta \cdot 4\pi j \cdot \pi R^2$$

$$B_c(r) = \beta \cdot 2\pi j \cdot \frac{R^2}{r} = \beta \cdot \frac{2I}{r}$$

$$\pi R^2 = S$$

$$j \cdot S = I$$

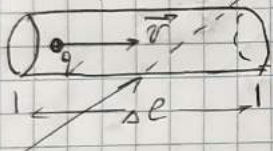


15.10.23

Силы и моменты сил,
действующие на проводник с
током во внешнем магнитном
поле.

Закон Ампера

$$\vec{F}_n = f q [\vec{v}, \vec{B}]$$



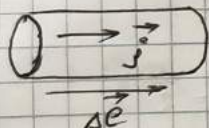
ΔN носителей

$$\vec{F}_z = \sum_{i=1}^{\Delta N} \vec{F}_n = \vec{F}_n \cdot \Delta N$$

$$\Delta N = n \cdot \Delta V = n \cdot \Delta l S \quad (\text{где } S - \text{площадь сечения})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_z = f q n \Delta l S [\vec{v}, \vec{B}] = f S \Delta l [\vec{j}, \vec{B}] = f \underbrace{j S}_{I} \Delta l [\vec{e}, \vec{B}]$$

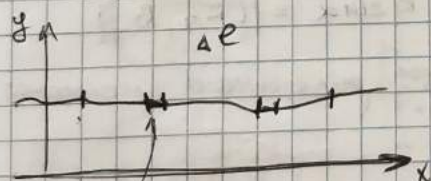
$$\vec{j} = q n \vec{v}; \quad \vec{j} \parallel \Delta \vec{e}$$



$$\Rightarrow \vec{F}_z = f I [\Delta \vec{e}, \vec{B}]$$

$$\boxed{\vec{F}_A = f I [\Delta \vec{e}, \vec{B}]}$$

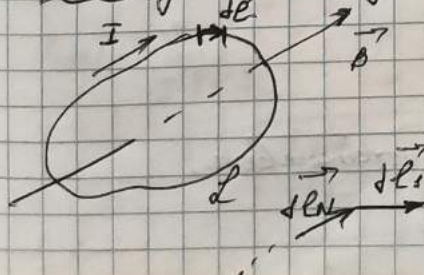
Δl - может быть любое,
важно только, чтобы Δl
было в одной и той же
поле $\vec{B}$



$$\vec{B} = \vec{B}(x, y)$$

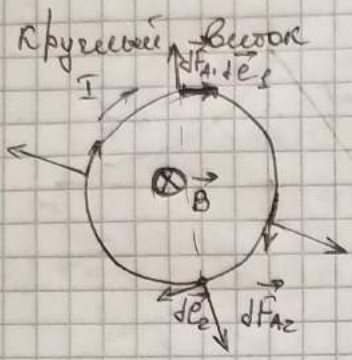
маленькие кусочки,
где $\vec{B}$ - сечет

1. Закрытый контур



важно! $\vec{B}$ - одноп.

$$\vec{F}_A = \oint_L f I [\Delta \vec{e}, \vec{B}] = f I \underbrace{[\oint_L \Delta \vec{e}, \vec{B}]}_{=0} = 0$$



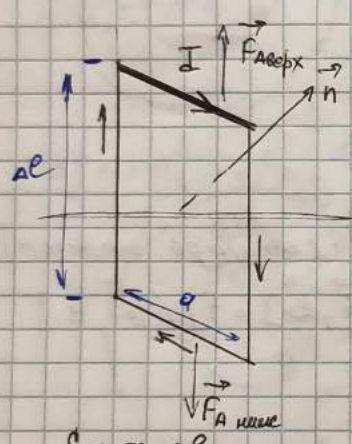
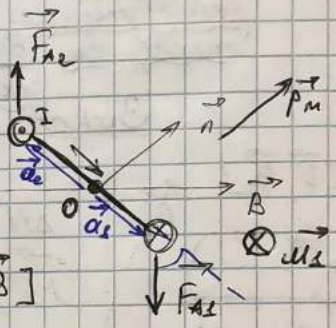
$$dF_{A1} = dF_{A2} \text{ (по модулю)}$$

Силы будут растягивать контур (если $\vec{B}$ перпендикулярно плоскости)

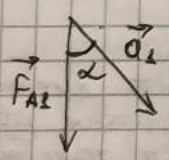
$$\text{Но } \vec{F}_A = 0$$

Векторный момент Лоренца

Вект. вверх!



$$S = a \cdot l$$



$$\vec{F}_A = I [\vec{dl}, \vec{B}]$$

$$\vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2} = 0$$

$$\vec{M}_1 = [\vec{a}_1, \vec{F}_{A1}] = [\vec{a}_1, I [\vec{dl}, \vec{B}]]$$

$$\vec{M}_2 = [\vec{a}_2, \vec{F}_{A2}]$$

$$|\vec{M}_1| = |\vec{M}_2|$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 2\vec{M}_1 \quad ; \quad a_1 = \frac{a}{2}$$

$$M = 2M_1 = 2a_1 F_{A2} \cdot \sin \alpha = f a I l \cdot B \sin \alpha$$

$$\Rightarrow M = \underbrace{f I S B}_{P_m} \sin \alpha = P_m B \sin \alpha = |[\vec{P}_m, \vec{B}]|$$

$$\vec{P}_m = f I S \vec{n} \text{ (векторный дипольный момент)}$$

$$\vec{M} = [\vec{P}_m, \vec{B}]$$

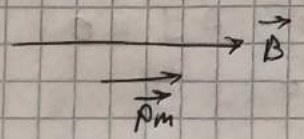
В электростатике для диполя:

$$E_{\text{дип.}} \sim \frac{1}{x^3}$$

$$B_{\text{дип.}} \sim \frac{1}{x^3}$$

$$\vec{M}_{\text{эл.}} = [\vec{p}_e, \vec{E}]$$

$$\vec{M} = [\vec{P}_m, \vec{B}]$$



$$\vec{P}_m \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{M} = 0$$

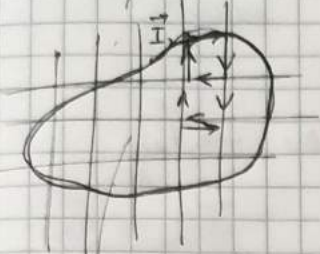
устойчивое.

или



и такое положение нулевой линии

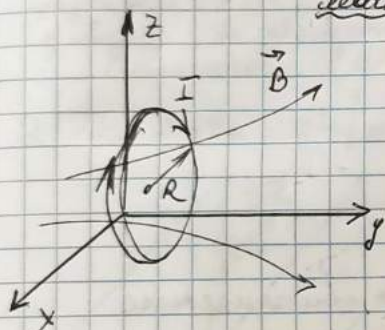
Если рамка не прямоугольная, но плоская (и $\vec{B} = \text{const}$) разбиваем ее на квадратные рамки произвольной формы.



$\Rightarrow$ Формулы результатов универсальны

Внутри вращающегося тела не будет

Слабоскоростное вращение магнитное поле.



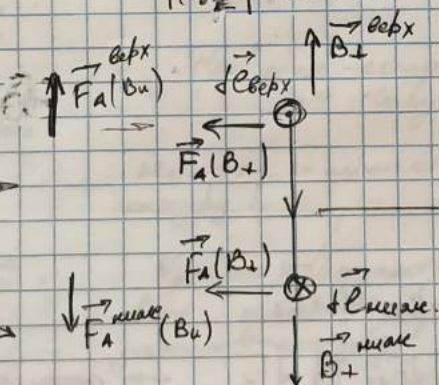
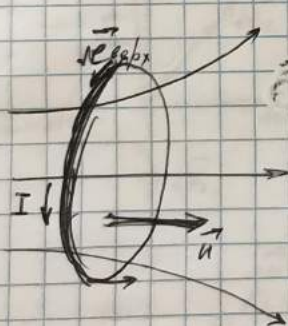
Полн слабоскоростное, если на протяжении ... малых радиусов R поле меняется незначительно.

$$\vec{B} = \vec{B}(x, z)$$

в данной точке.

$$\left| \frac{\partial B}{\partial x} \right| \cdot R \ll B$$

$$\left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| \cdot R \ll B$$



$$\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_\perp$$

$$\vec{F}_{A\Sigma} \neq 0$$

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l}, \vec{B}]$$

Рамка стремится в более сильное поле.

Что будет если I вкручено сверху? $\rightarrow$ вытягивается из более сильного поля.

Если $\vec{n} \uparrow \uparrow \vec{B}$
 $\vec{n} \uparrow \downarrow \vec{B}$

$\rightarrow$ Рамка вытягивается в более сильное поле.
 $\rightarrow$ вытягивается.

$$\vec{F}_{A\Sigma} = \vec{\rho}_m \frac{\partial B}{\partial z}$$

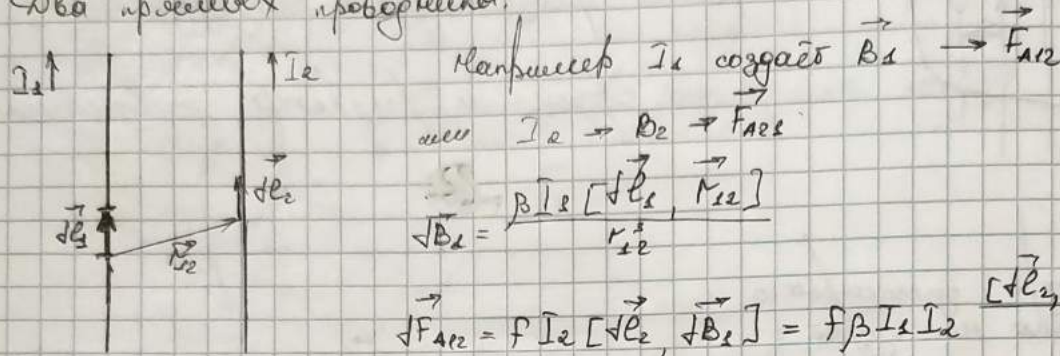
~ без док-ва.

Макроскопическое взаимодействие проводников с током.

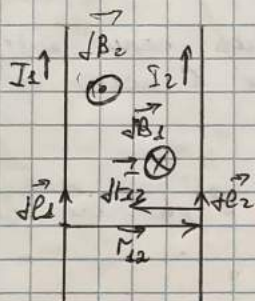
макроскопическое взаимодействие.

Макроскопические силы $\leftrightarrow$ макроскопические силы.

Два параллельных проводника.



1. Ситуация:



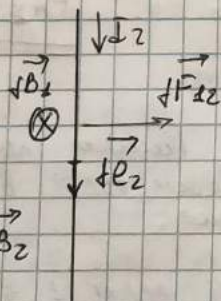
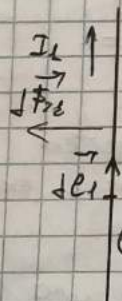
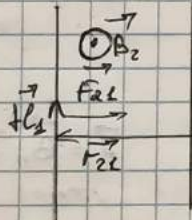
$$\vec{r}_{12} \perp \vec{e}_1$$

$$\vec{r}_{12} \perp \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1 \parallel \vec{e}_2$$

$$\vec{F}_{12} \uparrow \downarrow \vec{F}_{21}$$

$\rightarrow$ притягивание

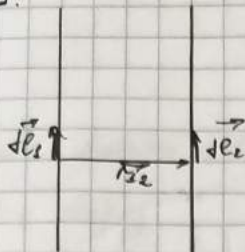


$$\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$$

$$\vec{F}_{12} \uparrow \downarrow \vec{F}_{21}$$

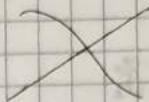
$\rightarrow$ отталкивание

②

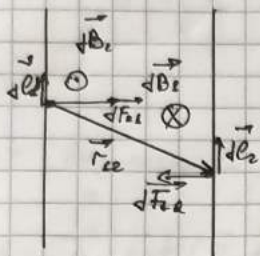


$$\vec{dl}_1 \parallel \vec{dl}_2$$

$$\vec{dl}_1 \perp \vec{r}_{12}$$



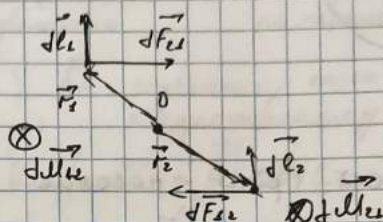
③



$$\vec{dl}_1 \parallel \vec{dl}_2$$

$$\vec{r}_{12} \times \vec{dl}_1$$

$$\vec{dF}_{12} = -\vec{dF}_{21}$$

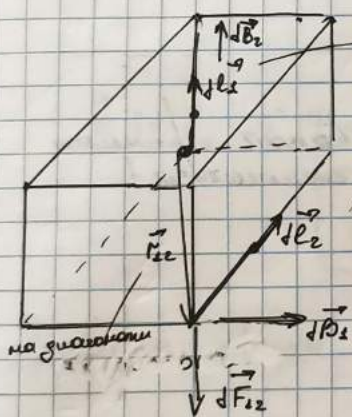


Вектр. силы даем
непосредственно $\vec{F}$ и т.е.
проверять во взаимодействии!
Нарушили закон

$$\vec{dF}_{12} = [\vec{r}_{12}, \vec{dF}_{21}]$$

$$\vec{dF}_{21} = [\vec{r}_{21}, \vec{dF}_{12}]$$

$$\vec{dF} = \vec{dF}_{12} + \vec{dF}_{21} = 2\vec{dF}_{12} \neq 0$$

③ $\vec{dl}_1 \perp \vec{dl}_2$ (скрещивание)

Здесь замкнутая вся сторона.

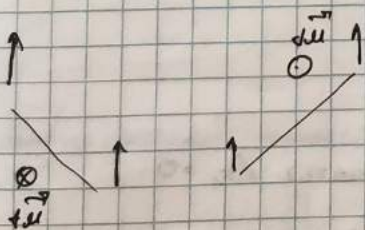
$$\vec{dF}_{12} = I_1 I_2 [\vec{dl}_1, \vec{dl}_2]$$

$$\vec{dl}_1 \parallel \vec{dl}_2 \Rightarrow \vec{dF}_{12} = 0!$$

На один-силь действует, на другой - слаб.
 $\Rightarrow$ Нарушен 3-й закон Ньютона!

Но ток - имеет тем только по замкнутой
контуру!

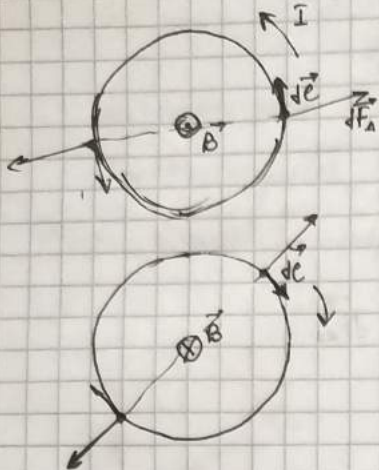
Нужно рассмотреть все участки!
Величина взаимодействует по всем элементам
замкнутой системы $\rightarrow$ парадокс разрешается.



Пример применения
3-го закона Ньютона
(самодействие тока)

① Виток с током

$$d\vec{F}_A = f I [d\vec{e}, \vec{B}]$$



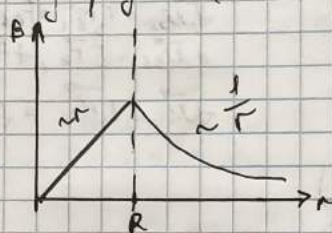
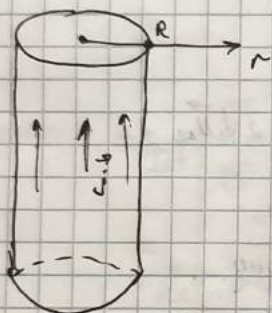
Станок
Bug

=>

$\vec{E}_{ext}$

② Пинч-эффект (pinch - сжатие)

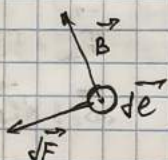
$\vec{j}$ - однородное (по сечению)



с торцов:



$$d\vec{e} \uparrow \vec{j}$$



=> Канал стремится сжаться!

$$\begin{aligned} dF &\sim B \sim I \\ dF &\sim I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dF \sim I^2$$

$$I \sim 10^5 - 10^6 \text{ A (для канала миллиметров)}$$

$$\vec{F}_A = N \vec{F}_A$$

$$\vec{F}_A = f I [\vec{v}, \vec{B}]$$

$$\vec{F}_A \perp \vec{v} \Rightarrow A_A = 0$$

, получается $A_{FA} = 0$,

но! это не так.
~ пороке.

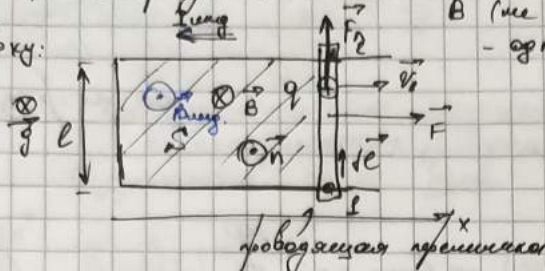
~ Нужно отказаться от статики!

Нужно, чтобы проводник в поле канал формировался.

Вычисление электромагнитной индукции Закон Фарадея

Станок Ампера (Фарадея)

Вид сверху:



$\vec{B}$ (не важно куда напр.) - однородное ($B = \text{const}$)
 $\vec{v}$ - скорость перемещения.

$$\vec{F}_A = f \varphi [\vec{v}, \vec{B}]$$

~ сила, действующая на перемычку.

$\Rightarrow$ Возникнет $\mathcal{E}$ (индукции) $\vec{F}_A$ - сила, связанная с электромагнитным взаимодействием.

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \frac{\vec{F}_A}{q} = f [\vec{v}, \vec{B}] ; \quad \mathcal{E} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} f v B dx = f v B l$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{const}$$

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = f v B l = f B l \frac{dx}{dt} = f \frac{d(BS)}{dt} =$$

$$S = l x$$

$$= f \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$$

$$d\Phi = B_n dS = (\vec{B}, \vec{n}) dS$$

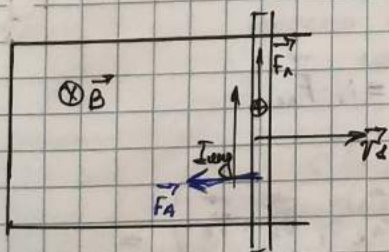
$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{E}_{\text{ind}} = f \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|}}$$

$$\vec{B} \uparrow \vec{n} \Rightarrow \Phi < 0$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{ind}} = -f \frac{d\Phi}{dt}} \quad \sim \text{з-н Фарадея}$$

Правило Ленца: направление индукционного тока (следовательно "знак $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ ") определяется тем, что индукционный ток всегда направлен так, чтобы собственное магнитное поле препятствовало изменению внешнего магнитного потока, вызывающего индукционный ток.

Энергетический смысл:



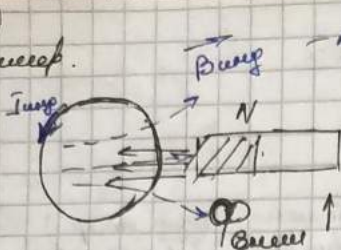
$$\text{Возникнет } \vec{F}_A = f I_{\text{ind}} [\vec{v}, \vec{B}]$$

$$\vec{F}_A \uparrow \vec{v} \quad - \text{перпендикулярно}$$

Зная кинет. энергию перемычки на ток в перемычке.

~ электромагнитная энергия в источнике равно весит.

Движение



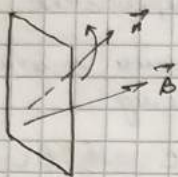
прямое движение

1) Прямое движение $\vec{F}_A$

Если движение прямолинейное

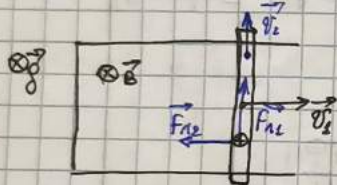
2) движение, связанное, но не связано с прямой скоростью $\vec{v}$ до по. рез-т.

22.10.81.



$$\Phi(t) \rightarrow \Phi(t) \rightarrow \mathcal{E}_{\text{инд}} = -f \frac{d\Phi}{dt}$$

Энергетические соотношения для движущихся.



$$\vec{F}_{A1} = f q [\vec{v}_1, \vec{B}] \Rightarrow \vec{v}_1 \neq 0$$

$$\vec{F}_{A2} = f q [\vec{v}_2, \vec{B}]$$

$$\text{Удобнее считать мощность: } P = \frac{dW}{dt}$$

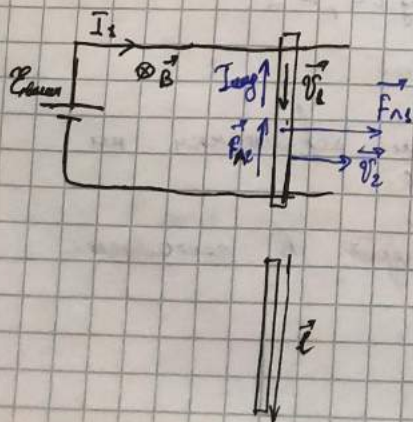
$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2}; \quad \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$P = \frac{dW}{dt} = (\vec{F}_\Sigma, \vec{v}) = (\vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{F}_{A1}, \vec{v}_1) + (\vec{F}_{A1}, \vec{v}_2) + (\vec{F}_{A2}, \vec{v}_1) + (\vec{F}_{A2}, \vec{v}_2) = f q (v_1 B v_2 - v_2 B v_1) = 0$$

Работу совершает тот, кто дает нам перемещение!

	Полезн. эффект	Сопут. эффект (налог)	кто (что) соверш. работу.
Двигатель	Э. инд.	Допол. сила $\vec{F}_A$	Сила, двигающая перемещенку.
Электрогенератор	$\vec{F}_A$ ($\Rightarrow$ макс. движение)	Э. инд. ($\vec{F}_{A1}$) $\Rightarrow$ тормоз.	Внешн. (источник)

Энергетические соотношения для движущихся.



$$\vec{F}_A = f I [\vec{e}, \vec{B}] = \sum \vec{F}_{A1} = N \cdot \vec{F}_{A1}$$

$$\vec{F}_{A1} = f q [\vec{v}_1, \vec{B}]$$

$$P = (\vec{F}_\Sigma, \vec{v}) = \left(\frac{\vec{F}_A}{N} + \vec{F}_{A2}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \right) = \left(\frac{\vec{F}_A}{N}, \vec{v}_1 \right) + \left(\frac{\vec{F}_A}{N}, \vec{v}_2 \right) + (\vec{F}_{A2}, \vec{v}_1) + (\vec{F}_{A2}, \vec{v}_2) = f \left(\frac{I}{N} B v_2 - q v_2 B v_1 \right) = f (q v_2 B v_2 - q v_2 B v_2) = 0$$

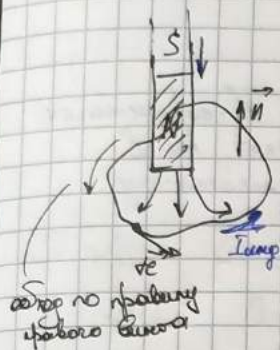
1. Вектор

$$I_e = jIS = nqV_e S$$

$$N = n e S$$

$$\frac{I_e}{N} = \frac{nqV_e S}{neS} = \frac{qV_e}{e}$$

Электромагнитная индукция
в неподвижных проводниках
индукционное эл-ое поле.

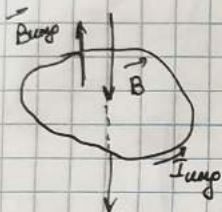


$$\vec{B} = \vec{B}(t)$$

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -f \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \iint_{(S)} B_n dS$$

$$B \uparrow \Rightarrow |\Phi| \uparrow$$



Можно создать поле просто меняя ток! Без движения.
В чем состоит причина возникн. инд. поля?

$$\vec{E} = \oint_{(L)} \frac{\vec{E}_{\text{стат}}}{r} d\vec{r}$$

$$\vec{E}_{\text{стат}} = \frac{\vec{E}_{\text{стат}}}{q'}$$

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_{(L)} \vec{E}_{\text{стат}} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

индукционное, электрическое
поле (вихревое)

Причина его возникновения $\rightarrow$ меняется $\vec{B}$
 $\vec{B} = \vec{B}(t) \Rightarrow \nabla \times \vec{E}_{\text{стат}} \neq 0$ (не выполняется з.о. циркул.)

поле не
потенциальное.

$$\oint \vec{E}_{\text{стат}} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -f \frac{d}{dt} \iint_{(S)} (\vec{B}, \vec{n}) dS$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{стат}} + \vec{E}_{\text{инд}}$$

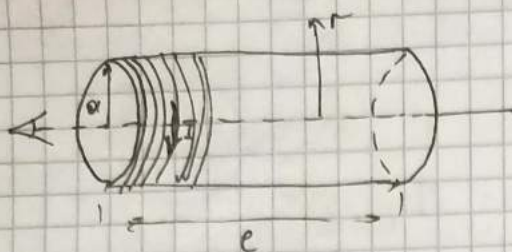
у-е Максв. описывает возникн. электромагн. индукции.

можно пов-ть, которую
можно рассчитать на вращающейся
контур.

Примеры проявления
электромагнитной индукции

1. Вихревое индукционное эл-ое поле

Самодур:



$l \gg a$ (длин. соленоида)

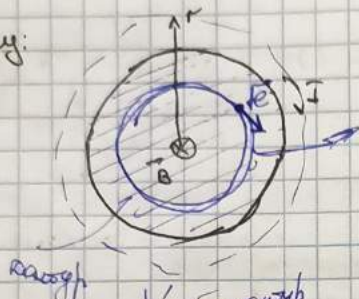
$$n = \frac{N}{l}, \text{ н-то соленоида.}$$

$$I = I(t)$$

$$B(r) = ? \quad E(r) = ? \quad (\text{инд. поле}) = E_{\text{инд}}(r)$$

$$B(r) = \begin{cases} \beta \cdot 4\pi n I, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Вид поля:



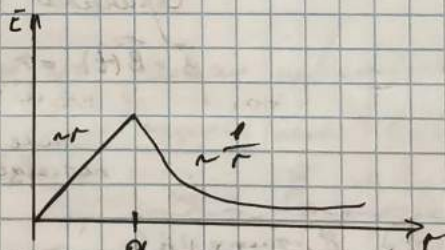
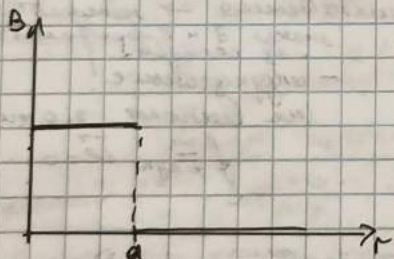
Из симметрии $\Rightarrow$ линии $\vec{E}$ - окружности.
 $\Rightarrow E_r = \text{const}$ на L
 Радиус и направление

$$\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = E_r \oint_{(L)} dl = E_r \cdot 2\pi r$$

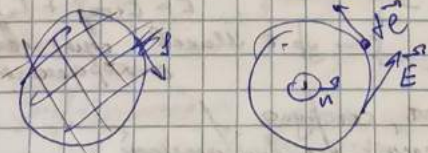
$$1) r \leq a; \quad \iint_{(S)} B_n dS = \iint_{(S)} B dS = \beta \cdot 4\pi n I \cdot \pi r^2$$

$$2) r > a \quad \iint_{(S)} B_n dS = \beta \cdot 4\pi n I \cdot \pi a^2$$

$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} -f \beta \cdot 2n\pi \frac{dI}{dt} r, & r \leq a \\ -f \beta \cdot 2n\pi \frac{dI}{dt} \frac{a^2}{r}, & r > a \end{cases}$$



Если $\vec{E}$ в другом:



2. Закон Фарадея.

$\sim$ ток, который возникает в массивных проводниках, при возникновении переменного тока.

$$I_{\text{инд}} \rightarrow Q_{\text{зар}} = I_{\text{инд}} R \cdot \Delta t$$

3. Изменение магнитного поля с помощью электромагнитов

$$B(t) = B_0 \cos \omega t \quad (\text{как пример})$$

Маленькая рамка, т.е. на C поле постоянно



$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B_{0n} \cos \omega t \cdot S$$

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -f \frac{\partial \Phi}{\partial t} = +f B_{0n} \omega \sin \omega t \cdot S$$

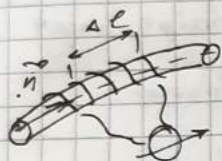
$$\underline{\underline{\mathcal{E}_{\text{инд}}} = f B_{0n} \omega \cdot S}$$

25.10.21.

Трансформатор явления
магнитной индукции (продолжение).

④ Ток Роговского (измерение $\int B \cdot d\vec{e}$)

Ток Роговского - длинный тонкий соленоид с большим числом витков, плотность намотки $n = \text{const}$.



Ось расположена по линии, вдоль которой надо измерить $\int B \cdot d\vec{e}$.

Система находится в магнитном поле.

$$B(\vec{r}, t) = B_0(\vec{r}) \cos \omega t$$

Магнитный поток через S витков соленоида

$$\Phi_S(t) = B_{0n} \cos \omega t \cdot S \quad (S - \text{площадь витка})$$

На участке Δl много витков $\Delta N = n \Delta l$

Тонкий поток через ΔN витков

$$\Delta \Phi(t) = B_{0n} S n \Delta l \cos \omega t$$

На этом участке возникает $\Delta \mathcal{E}_{\text{инд}} = f B_{0n} S n \Delta l \omega \sin \omega t$

Теперь $\Delta l \rightarrow 0$ и получим обычно где по величине потока

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \int \Delta \mathcal{E}_{\text{инд}} = \underbrace{f S n \omega \sin \omega t}_{\mathcal{E}_0} \int B_{0n} d\vec{e}$$

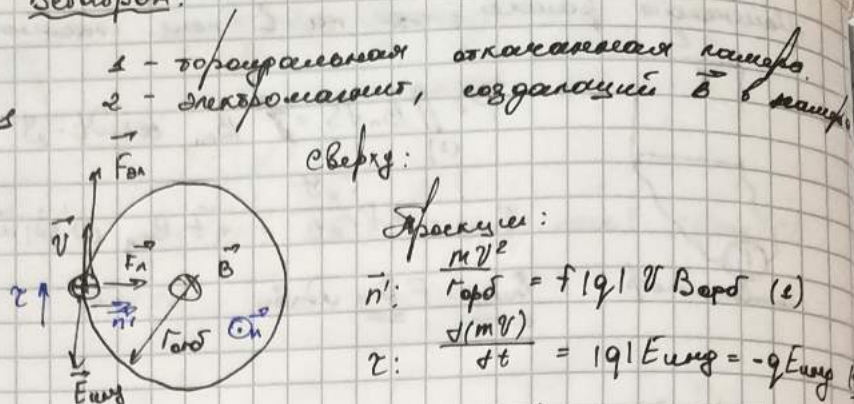
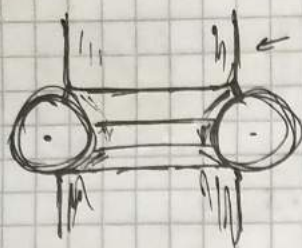
$$\text{Итого: } B_{0n} = B_{0e} \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{E}_{\text{инд}} \sim \int B \cdot d\vec{e}}}$$

⑤ Индукционный ускоритель электронов - бетатрон.

В кулоновском поле $\vec{A}_{\text{век}} = 0$. Но в индуц. эл. поле $\vec{A} \neq 0$ - это можно использовать для ускорения электронов на замкнутой траектории.

Важно постоянно радиус траектории, для этого надо $\vec{B} \perp \vec{v} \Rightarrow$ возникает F_L . Если $\vec{B} = B(r, t)$, то возникает и $\mathcal{E}_{\text{инд}} \Rightarrow \Rightarrow F_{\text{эл}} = q \mathcal{E}_{\text{инд}}$.

Бетатрон.



сверху:

Проекция:

$$\vec{n}: \quad r_{\text{фоб}} = f |q| v B_{\text{фоб}} \quad (1)$$

$$z: \quad \frac{d(mv)}{dt} = |q| E_{\text{инг}} = -q E_{\text{инг}} \quad (2)$$

Из (2) $r_{\text{фоб}} = \frac{mv}{f |q| B_{\text{фоб}}}$ - радиус фобот электрона.

Для ускорения электр. $E_{\text{инг}} \Rightarrow$ электр. $B = B(t) \Rightarrow$ будет $r_{\text{фоб}} = r(t)$.

Но удобнее $r_{\text{фоб}} = \text{const}$, для этого электр. опр. усл-е на B - бетатронное условие. Найдем его.

Из симметрии линии $\vec{E}$ - окружности в попер. сечении, когда

$$E_{\text{инг}} = \oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = E_c \cdot 2\pi r_{\text{фоб}} \quad (\text{контур } L \text{ совп. с фоботом})$$

$$\Rightarrow E_c \cdot 2\pi r_{\text{фоб}} = -f \frac{d\Phi}{dt} = -f \frac{d}{dt} \int_{(S)} B_n dS = -f \frac{dB_n}{dt} \cdot \pi r_{\text{фоб}}^2,$$

где B - среднее поле, пронизывающее поверхность, ор. контура L . Из (1):

$$B_n = -B \Rightarrow E_c = E$$

$$\Rightarrow E = +f \frac{dB}{dt} \cdot \frac{r_{\text{фоб}}}{2} \quad \text{подставим в (2)}$$

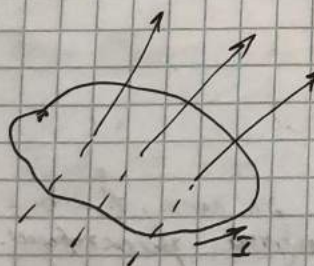
$$\frac{d(mv)}{dt} = |q| f \frac{dB}{dt} \cdot \frac{r_{\text{фоб}}}{2} \Rightarrow mv = f |q| \bar{B} \cdot \frac{r_{\text{фоб}}}{2}$$

Подставим $r_{\text{фоб}}$:

$$mv = f |q| \cdot \bar{B} \cdot \frac{mv}{2 f |q| \cdot B_{\text{фоб}}} \Rightarrow \underline{B_{\text{фоб}} = \frac{\bar{B}}{2}} \quad \text{— это бетатронное условие.}$$

1-й бетатрон был построен в 1940 г. Работало в бетатроне исп. $B(t) \sim \sin \omega t$, рабочей является $\Delta t = T/4$, когда $B(t) \geq 0$. Достигаемые энергии ≤ 300 МэВ.

Саминдукция. Индуктивность.



Видет.

Пусть есть контур с током $I(t)$.
Тогда есть $B_{\text{инд}}(t) \Rightarrow \Phi_{\text{саб}}(t)$

Тогда по 3-му закону возникает

$E_{\text{инд}} \equiv E_{\text{саминд}}$ — это саминдукция.

$$E_{\text{с-инд}} = -f \frac{d\Phi_{\text{саб}}}{dt}$$

Известно: $\Phi_{свобод} \sim B_{свобод} \sim I \Rightarrow \Phi_{свобод} \sim I$

В виде равенства:

$$\Phi_{свобод} = f L I$$

L - коэф. пропорц-ти, называется индуктивностью.

Опд:

$$L = \frac{\Phi_{свобод}}{f I}$$

L зависит от конфигурации проводника и от его размеров.

Можно переписать закон электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_{S-ind} = -f^2 \frac{d(LI)}{dt}$$

Если контур жесткий (не деформируется), то $L = const$

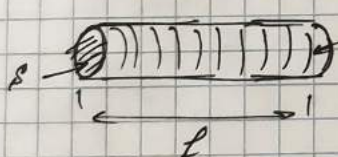
$$\Rightarrow \mathcal{E}_{S-ind} = -f^2 L \frac{dI}{dt}$$

Сделаем и измерения:

$$[L] = \begin{cases} \text{см, CGSM} \\ \text{Гн, СИ (теперь)} \end{cases}$$

$$1 \text{ Гн} = 10^9 \text{ см}$$

Пример: индуктивность длинного соленоида



N витков

Дано: N, r, l ($\Rightarrow n = \frac{N}{l}$)
Найти: L

Индукция в соленоиде $B = \beta \cdot 4\pi n I$

Поток через все витки $\Phi = \Phi_1 \cdot N = B S N = \beta \cdot 4\pi n I S N$

Индуктивность

$$L = \frac{\beta}{f} \cdot 4\pi \frac{N^2 S}{l}$$

Оценим: пусть $l = 10 \text{ см}$, $r = 1 \text{ см}$ (картинка).

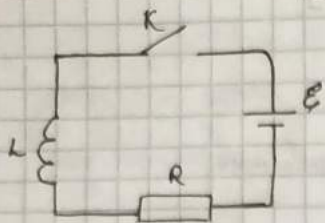
$n = 100 \text{ вит/см}$ (т.е. $N = 1000$)

$$\Rightarrow L = \frac{4\pi \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 1}{10} \approx 4 \cdot 10^8 \text{ см} \quad (\text{CGSM: } \beta = f = 1)$$

$$\text{или} \quad L = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{4\pi \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 10^{-4}}{10^{-1}} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ Гн. } (f=1, \beta = \frac{\mu_0}{4\pi})$$

Если $I = const$, то самоиндукция никак не проявляется:
 $\mathcal{E}_{S-ind} = 0$. L существенно при включении/выключении тока.

Процессы установившегося тока в цепи с индуктивностью.



Ток в начале цепи равен нулю
 $\Rightarrow I(0) = 0$

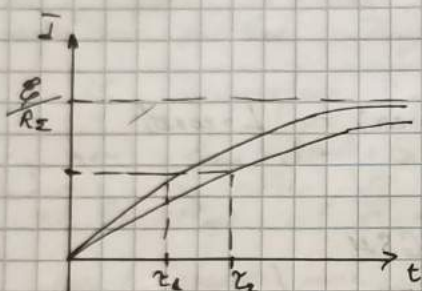
Очевидно $I(t \rightarrow \infty) = \frac{E}{R}$

Установившийся закон нарастания тока.

З-н Ома: $IR + E_{\text{ind}} = E$ $E_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}$ (СИ)

$\Rightarrow IR + L \frac{dI}{dt} = E$

$\int_0^I \frac{dI}{E - IR} = \int_0^t \frac{dt}{L} \Rightarrow I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

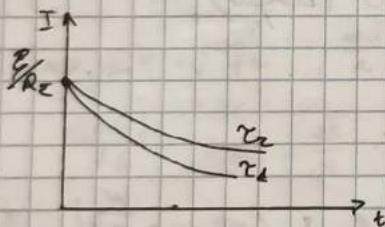


$\tau = \frac{L}{R}$ - постоянная времени

$\tau_2 > \tau_1 (L_2 > L_1)$

Самое. При выключении тока (размыкании)

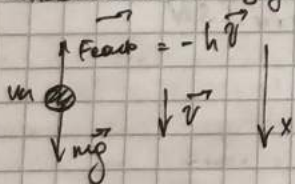
$I(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$



Чем больше индуктивность, тем больше затягивается процесс установившегося

Электромагнитные аналогии

Механическая задача: падение шарика в вязкой среде.



$m \frac{dV}{dt} = mg - hV$

$m \frac{dV}{dt} + hV = mg \Leftrightarrow L \frac{dI}{dt} + RI = E$

Аналогия не формальная!

Таблица аналогий.

Механические движ-е	Электромагнитные явления	
Механическая величина	$v(t)$	$I(t)$
Внешняя сила	mg	E
Сила сопротивления	hV	RI
Масса шарика	m	L

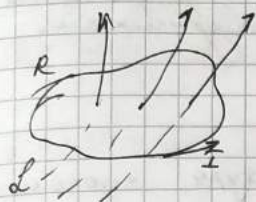
Энергия

$$\frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{h\nu^2}{2}$$

? Аналогия! Требуется доработка

Некоторые особенности индукционных явлений в сверхпроводниках.



Пусть R - контур во внешнем поле $\vec{B}(\vec{r}, t)$

По контуру течёт ток $I(t)$

$$\Rightarrow \Phi_z = \Phi_{\text{внеш}}(t) + \Phi_{\text{собст}}(t)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_z}{dt} (\Phi_{\text{внеш}} + \Phi_{\text{собст}})$$

$$I_{\text{инд}} \cdot R = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_z}{dt} (\Phi_{\text{внеш}} + \Phi_{\text{собст}})$$

Представим теперь, что R - идеальный (тогда $\vec{B}_{\text{внут}} = 0$)

сверхпроводник ($R \rightarrow 0$). Условие: $I < \infty \Rightarrow I_{\text{инд}} \cdot R \rightarrow 0$

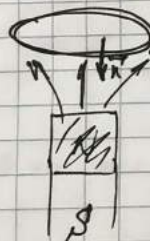
$$\Rightarrow \Phi_{\text{внеш}} + \Phi_{\text{собст}} = \text{const} (!)$$

$$\text{или } \Delta \Phi_{\text{собст}} = - \Delta \Phi_{\text{внеш}}$$

~ это "добавочное" правило Ленца

Механические последствия

Механический эксперимент: пусть есть обильный (т.е. $R > 0$) проводящий контур, ток $I(t=0) = 0$. Поместим в поле $\vec{B}$ и окладим.



$I_{\text{инд}} \leftarrow$ возникает!

$$\vec{B} = \vec{B}_{(n)} + \vec{B}_{(r)}$$

$$\Phi_{\text{собст}} = h I$$

$$\Rightarrow I = I(t) \text{ так, чтобы}$$

$$\Phi_0 = \Phi_{\text{внеш}} + \Phi_{\text{собст}} = \text{const}$$

Φ_0 определяется начальными значениями магнитного поля, который был до отключения контура.

Пусть $\Phi_0 = 0$ (контур далеко от магнита). Если приблизить контур к магниту, то $\Delta \Phi_{\text{внеш}} > 0 \Rightarrow \Delta \Phi_{\text{собст}} < 0$,

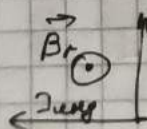
т.е.

$$\exists I_{\text{инд}}(t): \vec{B}_{\text{собст}} \uparrow \downarrow \vec{B}_{\text{внеш}}$$

Но у рамки есть $\vec{r}_m \uparrow \vec{B}_{\text{собст}} \Rightarrow \vec{r}_m \uparrow \vec{B}_{\text{внеш}}!$

- рамка должна выталкиваться из поля!

Смотрим на Билльмана - если сторону рамки:



$\vec{F}_a$ - это и есть выталкивающая сила. ($\vec{B}_r \neq 0$ - поле неоднородное)



A diagram of a closed loop with current I_2 flowing clockwise.

$J_L(t) \rightarrow \vec{B}_L(r, t) \rightarrow \vec{P}_{2L}(t)$ - поток 2-го магнитного поля через 2-й контур

$\mathcal{F}_c(t) \rightarrow \vec{B}_c(\vec{r}, t) \rightarrow \varphi_{c\Delta}(t)$ - поток 2-го магнитного поля через S -й контур

$$\mathcal{P}_{12} = -f \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial t}, \quad \mathcal{P}_{21} = -f \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial t}$$

~ это где возникшей аэродинамики

$$P_{I_2} \sim I_1 \Rightarrow P_{I_2} = f_{M_{I_2}} I_1$$
$$\mathbb{P}_{ed} \sim I_2 \rightarrow \mathbb{P}_{ed} = f_{ed} I_2$$

M_{22}, M_{23} - коэф. взвешивания продукции.

Ans:

$$h_{ij} = \frac{q_{ij}}{f \cdot I_i}$$

Uz sup. latus: $[ll] = [h]$

Мин зависит только от конфигурации координат и их взаимного расположения. В координате $\vec{r}_{12} = 0$, если $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

Далее: $\vec{B}_2 \parallel \vec{n}_2$, $\Phi_{12} = \iint_{(S_2)} (\underbrace{\vec{B}_2, \vec{n}_2}_{=0}) dS_2$

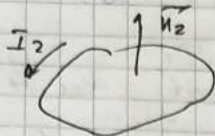
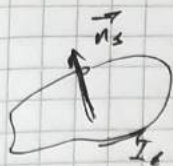
Кроме того, $\lambda_{ij} \geq 0$ (но всегда $\lambda \geq 0$)

Если контуры не являются конформными и взаимной ориентации.

$$Q_{12} = -F \frac{d\varphi_{12}}{dt} = -F^2 \mu_{12} \frac{d\varphi_{12}}{dt}$$

$$E_{21} = -f \frac{d\varphi_{21}}{dt} = -f^2 M_{21} \frac{d\tau_e}{dt}$$

Св-ва коэф-та взаимной индукции



① $M_{ij} \geq 0$ в зависимости от ориентации H_1, H_2

② $M_{ij} = M_{ji} \equiv M$ - в этом (точка для век-ва) заложена взаимность

③ $0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

Пример:



2 катушки (одна в другой)

Дано: l_1, l_2 (пусть $l_1 = l_2$), a_1, a_2 ($a_1 < l_1, a_2 < l_2$)

N_1, N_2 ($\Rightarrow n_1 = N_1/l_1, n_2 = N_2/l_2$)

Найти: $|M_{12}|, |M_{21}|$

Решаем в СИ: $f=1, \mu = \frac{\mu_0}{4\pi}$

$B_1 = \mu_0 n_1 I_1$ ($r < a_1$)

$\Rightarrow \Phi_{12} = B_1 S_2 N_2 = \mu_0 n_1 I_1 S_2 N_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{l_1} I_1$

$\Rightarrow M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{l_1} \equiv \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_2}{l}$ ($l = l_1 = l_2$)

аналогично:

$B_2 = \mu_0 n_2 I_2$ ($r < a_2$)

$\Rightarrow \Phi_{21} = B_2 S_1 N_1$ (т.е. при $r > a_2, B_2 = 0$)!

$\Rightarrow M_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1}{l}$, т.е. $M_{12} = M_{21}$

В то же время: $L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 S_1}{l}, L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 S_2}{l}$

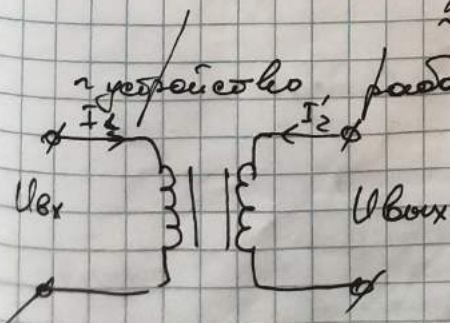
$\sqrt{L_1 L_2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \sqrt{S_1 S_2}$

$\Rightarrow M_{12} = M_{21} \leq \sqrt{L_1 L_2}$, т.к. $S_2 < S_1$

Очевидно: $M_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$, если все витки одной катушки полностью пронизывают другую и наоборот.

Трансформатор

устройство, работающее за счёт взаимной индукции.



коэф-т трансформации по напряжению

$K_u = \left| \frac{U_{вых}}{U_{вх}} \right|$

тока, т.к. напряжение переменное

Найдём K_u с помощью закона Ома:

$$\begin{cases} I_1 R_1 = U_{\text{вх}} + E_{12} - I_1 R_2 - U_{\text{вх}} - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} \\ I_2 R_2 = U_{\text{вх}} + E_{21} - I_2 R_1 - U_{\text{вх}} - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt} \end{cases}$$

(R_1, R_2 - сопр. обмотки)

Для упрощения пусть обмотки идеальные: $R_1 = R_2 = 0$,
решим хвостого хода (ХХ): $I_2 = 0$

$$\begin{cases} U_{\text{вх}}(t) = L_1 \frac{dI_1}{dt} \\ U_{\text{вх}}(t) = M_{12} \frac{dI_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow K_u = \left| \frac{M_{12}}{L_1} \right|$$

Пусть обмотки выполнены из провода в группе: $S_1 \leq S_2$, тогда

$$K_u = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

Если нет потерь рассеяния ($S_1 = S_2$ или катушки на общем сердечнике), то $S_1 = S_2$

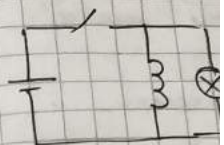


$$\Rightarrow K_u = \frac{N_2}{N_1}$$

Оказывается, это все выполняется и не в режиме ХХ, а в рабочем (обмотки нагружены)

Коэффициент трансформации по току

$$K_I = \left| \frac{I_2}{I_1} \right| = \frac{1}{K_u} = \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{это идеальн ЗСЭ})$$



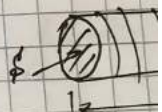
работу, не
(вихревое

Найдём
Но это ра
считаемой

Потребляе

Можно
и энергию
исчез, то
время и у

Трансформ



Индуктив

Делать
интерпрет

Важно

работу, не
(в)х/ревое

Легко сообразить: если личи разогнали, машина не
покажет сразу, а ещё какое-то время будет гореть.
Этот подтверждается за счёт эдв самонагревания.
Но для протекания тока нужна энергия или
кто-то должен совершить работу. Могли бы там
совершить, её совершил бы электрический ток
электрическое поле

Кайроном /работу:

Каждый разбег: $\Delta A = \int q \cdot E_{s,ind} = \int dt \cdot E_{s,ind} = \int dt \left(-f \frac{dP_{ind}}{dt} \right) = -f \Delta P_{ind}$.
Но это разбег совершается при раз за раз сдвиги собственной энергии.

$$\delta A = - \delta W_m \Rightarrow \delta W_m = f I \delta \Phi_{\text{cond}}$$

Подставим: $P_{\text{сост}} = fLI$, путь $L = \text{const}$

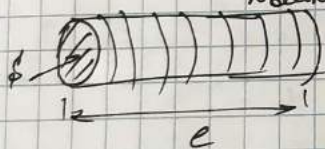
$$\Rightarrow dW_M = fI + (f h I) = f^2 h I + I$$

$$\Rightarrow W_{\text{м}} = f^2 \frac{L I^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} \quad \text{— для прямого контура!}$$

Плотность серебряной эпокси

Можно предположить, что токень ток течёт в проводнике, то и энергия сосредоточена в проводнике. Но: если ток течёт в проводнике, то поле убывает от проводника в виде электромагнитной волны и уносит энергию. Это значит, что энергия не в проводнике, а в поле.

Пример: энергия магнитного поля в соленоиде
Прутков



Как обычно: сильно удлинить, масса
равномерная ($n = \frac{N}{e}$)

Пусть ток в области $I \Rightarrow$ внутри соленоида

$$B = \beta \cdot 4\pi n \vec{I} = \beta \cdot 4\pi \frac{N}{e} \vec{I} \quad \Rightarrow \quad \vec{I} = \frac{Be}{\beta \cdot 4\pi N}$$

Известность сценария

известность соотношения

$$L = \frac{B}{f} \cdot 4\pi \frac{N^2 S}{e}$$
$$\Rightarrow W_{\text{из}} = f \frac{e L \bar{I}^2}{2} = f^2 \cdot \frac{B}{f} \cdot 4\pi \frac{N^2 S}{2e} \cdot \frac{B^2 e^2}{B^2 (4\pi N)^2} = \frac{f}{B} \cdot \frac{B^2}{8\pi} \cdot S e$$

Знач: $S_L = V$ - объем сосуда, тогда введем матрицу энергии (энергия в единице объема):

$$\underline{W_{\text{air}}} = \frac{f}{\lambda} \cdot \frac{B^2}{8\pi} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (\text{SI})$$

$$\frac{B^2}{8\pi} \quad (\text{CGS \& } \mu)$$

Важно: это выражение для ψ справедливо всегда! (не только в центре)

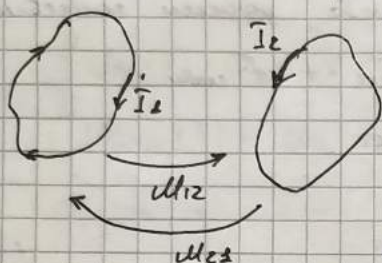
Тогда

$$W_m = \int_V w_m dV \quad (\text{где } V - \text{объем, занимаемый полем})$$

Если в данной области пространства есть и электрическое, и магнитное поле, то плотность магнитной энергии

$$w = w_m + w_e = \frac{\epsilon^2}{8\pi} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{B^2}{8\pi} = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} & (\text{СИ}) \\ \frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} & (\text{CGS}) \end{cases}$$

Энергия двух индуктивно связанных контуров



В механике: $W_{me} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$

(в системе 2 м.т.)

Будет ли справедлива микромеханическая аналогия:

$$W_m = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} \quad ? \quad \text{НЕТ!}$$

|| Надо учитывать взаимное внешнее контуров

По закону Ома для замкнутой цепи

$$I_i R_{\Sigma i} = \sum \mathcal{E} = \underbrace{\mathcal{E}_{\text{внеш},i}}_{\text{внеш. (батарея)}} + \underbrace{\mathcal{E}_{\text{self},i}}_{-L_i \frac{dI_i}{dt}} + \underbrace{\mathcal{E}_{\text{ind},i}}_{-M_{ji} \frac{dI_j}{dt}} \quad (\text{СИ})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 R_{1\Sigma} = \mathcal{E}_{\text{внеш},1} - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} \\ I_2 R_{2\Sigma} = \mathcal{E}_{\text{внеш},2} - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{12} \frac{dI_1}{dt} \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot I_1 dt \\ \cdot I_2 dt \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (I_1^2 R_{1\Sigma} + I_2^2 R_{2\Sigma}) dt = (\mathcal{E}_{\text{внеш},1} I_1 + \mathcal{E}_{\text{внеш},2} I_2) dt - (L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 + M_{12} I_1 dI_2 + M_{12} I_2 dI_1)$$

1) $(I_1^2 R_{1\Sigma} + I_2^2 R_{2\Sigma}) dt = dQ_{\text{ген}}$ - суммарное джоулево тепло

2) $(\mathcal{E}_{\text{внеш},1} I_1 + \mathcal{E}_{\text{внеш},2} I_2) dt = dA_{\text{внеш}}$ - суммарная работа батарей

$$\begin{aligned} 3) L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 + M_{12} I_1 dI_2 + M_{12} I_2 dI_1 &= \\ &= d\left(\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2}\right) + M_{12} I_1 dI_2 + M_{12} I_2 dI_1 \equiv dW_m(I_1, I_2). \end{aligned}$$

~ изменение магнитной энергии

$$\Rightarrow dA_{\text{внеш}} = dQ_{\text{ген}} + dW_m(I_1, I_2)$$

Итак,

$$\begin{aligned} dW_{\text{м}} &= d\left(\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2}\right) + M_{12} I_1 dI_2 + M_{21} I_2 dI_1 = \\ &= (L_1 I_1 + M_{12} I_2) dI_1 + (L_2 I_2 + M_{21} I_1) dI_2. \end{aligned}$$

Итак: $W_{\text{м}}$ - функция состояния $\Rightarrow dW_{\text{м}}$ - полным дифференциал

$$\Rightarrow \text{необходимо: } dW_{\text{м}} = \frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial I_2} dI_2,$$

$$\text{т.е. } \frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial I_1} = L_1 I_1 + M_{12} I_2, \quad \frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial I_2} = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$

$$\text{Тогда, } \frac{\partial^2 W_{\text{м}}}{\partial I_1 \partial I_2} = \frac{\partial^2 W_{\text{м}}}{\partial I_2 \partial I_1} \Rightarrow \underline{M_{12} = M_{21}}$$

Обобщим: $M \equiv M_{12} = M_{21}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dW_{\text{м}} &= d\left(\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2}\right) + M(I_1 dI_2 + I_2 dI_1) = \\ &= d\left(\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2\right) \end{aligned}$$

Окончательно: $W_{\text{м}}(I_1, I_2) = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2$

Обобщение электродинамики на случай диэлектрических (непроводящих) тел. Уравнения Максвелла в интегральной форме.

$$\textcircled{3} \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- в таком виде теорема о циркуляции $\vec{E}$ годится для случая медленно меняющихся полей. Действительно,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\text{ст}}(\vec{r}) + \vec{E}_{\text{инд}}(\vec{r}, t),$$

$$\text{но } \oint_{(L)} \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\textcircled{2} \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q_{\text{инт}}$$

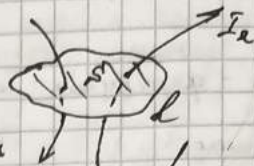
- мы получили теорему О.-Г. из закона Кулона, т.е. для статически распределенных зарядов. Но оказывается, что это справедливо и для полей медленно меняющихся полей $q(\vec{r}, t)$ (и токовых движущихся зарядов $j(\vec{r}, t)$). Т.е. $Q_{\text{инт}}$ понижается те заряды которые оказались внутри S в данный момент времени.

Замечание: сам закон Кулона для быстро движущихся зарядов не выполняется!

$$\textcircled{3} \oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

сферично враща, т.е. для $\vec{B} = \text{const}$ и для $\vec{B}(r, t)$.
 Это просто следствие отсутствия магнитных зарядов

$$\textcircled{4} \oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \beta \cdot 4\pi I_{\text{ток}} = \beta \cdot 4\pi \iint_{(S)} j_n \cdot d\vec{S}$$



Максвелл первым интуитивно предположил, что для $\vec{B}$ должна выполняться теорема о циркуляции $\vec{E}$:

т.е. если $I = I(t)$ то есть, действительно, вращающийся заряд $\vec{B}$ и $\vec{E}$;

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \vec{E}$$

Предположение: должно быть симметрично, т.е.

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{B}$$

Но истинными поля $\vec{B}$ - тока. Значит, должны быть какие-то дополнительные ("не настоящие" электрические токи, т.е. не ток проводимости).

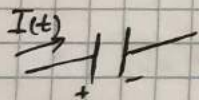
Максвелл ввел такие ток в вакууме и назвал их токами смещения.

Ток смещения

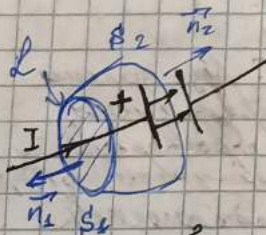
Максвелл не доказал, а практически угадал выражение для тока смещения.

Пусть в цепи уже течет "настоящий" ток проводимости $I(t)$, сеп конденсатор (непроводящий промежуток $\Leftrightarrow$ разрыв в цепи для тока проводимости).

Ток протекает к левой обложке $\Rightarrow$ там накапливается заряд.



Будем рассуждать так же, как Максвелл, т.е. попробуем записать теорему о циркуляции $\vec{B}$.



По теор. о цирк. $\vec{B}$

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \beta \cdot 4\pi I_{\text{ток вех}} = \beta \cdot 4\pi \iint_{(S)} j_n \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

Здесь $\oint$ - $\oint$ по поверхности, натянутой на контур L . Но для S_1 и S_2 рез-т будет разный! Выходит contradiction как устранить противоречие?

Используем теор. О-Г. (сферично враща и для перем. полей!)

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \kappa \cdot 4\pi q_{\text{охват}} \quad (2)$$



$$\oint_{(S)} \frac{\partial E_n}{\partial t} dS = \kappa \cdot 4\pi \frac{dq}{dt}$$

С др. стороны, по 3-му сохр. эл. заряду.

$$\frac{dq}{dt} = - \oint_{(S)} j_n dS \quad (2) \quad (\text{здесь } \vec{j} - \text{плотность тока проводимости})$$

Из (2), (3)

$$\oint_{(S)} \frac{\partial E_n}{\partial t} dS = -\kappa \cdot 4\pi \oint_{(S)} j_n dS \quad (\text{считаем, что } S \text{ в (2), (3) одна и та же})$$

или

$$\oint_{(S)} (j_n + \kappa \cdot 4\pi \dot{E}_n) dS = 0 \quad (4)$$

Из (4) $\Rightarrow$ оба, слаг. д.б. одной размерности, имеют одинаковый физ. смысл. По опр. назовём 2-е слаг. плотностью тока смещения: (в вакууме):

$$\text{Опр: } \left\{ j_{см} = \frac{1}{\kappa \cdot 4\pi} \dot{E}_n \right\} \quad \text{или} \quad \vec{j}_{см} = \frac{1}{\kappa \cdot 4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Таким же опр. введём полный ток:

$$\text{Опр: } \boxed{\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \vec{j}_{см}} \quad (\vec{j} - \text{свободное} - \text{плотность тока проводимости})$$

Из (4) $\Rightarrow$ имеем полный ток пер. (замкнуты): токи проводимости замыкаются токами смещения. При этом, если $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ (см. рис.), то $j_n \neq 0$ для $\vec{S}_1$, $j_{смn} \neq 0$ для $\vec{S}_2$. Тогда формулу с др-е (1) устраним, если в пр. частн. будем использовать $\vec{j}_{полн}$:

$$\oint_{(R)} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \beta \cdot 4\pi \oint_{(S)} (j_n + j_{смn}) dS = \beta \cdot 4\pi \oint_{(S)} \left(j_n + \frac{1}{\kappa \cdot 4\pi} \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) dS$$

$$\text{СГС: } \kappa = 1, \beta = \frac{1}{c}$$

$$\oint_{(R)} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \frac{4\pi}{c} \oint_{(S)} j_n dS + \frac{1}{c} \oint_{(S)} \frac{\partial E_n}{\partial t} dS$$

$$\text{СИ: } \kappa = 4\pi\epsilon_0, \beta = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$\oint_{(R)} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \oint_{(S)} j_n dS + \mu_0\epsilon_0 \oint_{(S)} \frac{\partial E_n}{\partial t} dS$$

μ_0, ϵ_0 - физические константы, но $\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ (с-ность электромагнитной волны в вакууме)

Итак: Плотность полного тока

$$\vec{j}_E = \vec{j}_{пр} + \vec{j}_{см}$$

① Плотн. тока $\vec{j}_E$ всегда замкнута

② Добавление в уравнение $\vec{j}_{см}$ замыкает все контуры:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{B} \quad (\text{поля создают друг друга или друг друга})$$

Еще раз введем:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} =$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} =$$

$$\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{S} =$$

$$\oint \vec{B}_n \cdot d\vec{S} =$$

$$\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{S} =$$

$$\oint \vec{B}_n \cdot d\vec{S} =$$

$$\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{S} =$$

$$\oint \vec{B}_n \cdot d\vec{S} =$$

система:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B}_n \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{4\pi}{c} \int \rho_n \cdot d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}_n \cdot d\vec{S}$$

$$4\pi \int \rho \cdot dV$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B}_n \cdot d\vec{S}$$

$$\mu_0 \int \vec{j}_n \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}_n \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \cdot dV$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

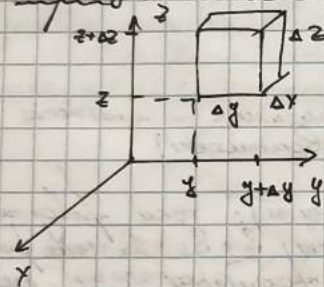
$$0$$

$$0$$

$$0$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

1. Проверка с помощью векторного поля и дифференциалов.

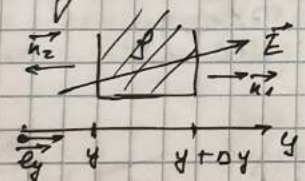


В декартовой системе координат возьмем элементарный объем: $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

Пусть в этом объеме заряд с объемной плотностью ρ , он создает поле

$$\vec{E} = \{E_x, E_y, E_z\}$$

Найдем поток $\vec{E}$ через 2 грани, расположенные по y на расстоянии Δy .



$$\text{Ищем: } \vec{E}_{y1} = E_y \cdot \vec{e}_y \quad (\vec{e}_y \text{ — ось})$$

$$\vec{e}_y \uparrow \uparrow \vec{n}_1, \quad \vec{e}_y \downarrow \downarrow \vec{n}_2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi_{y1} &= (E_y)_{n_1} \Delta x \Delta z + (E_y)_{n_2} \Delta x \Delta z = \\ &= (E_y(y+\Delta y) - E_y(y)) \cdot \Delta x \Delta z = \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta y \Delta x \Delta z = \\ &= \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \Delta V \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично } \Phi_{x1} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \Delta V, \quad \Phi_{z1} = \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot \Delta V$$

Полный поток через все грани

$$\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \cdot \Delta V = \text{div } \vec{E} \cdot \Delta V \quad (1)$$

$$\text{По теореме О.Г.: } \Phi = k \cdot 4\pi Q_{\text{int}} = k \cdot 4\pi \rho \Delta V \quad (2)$$

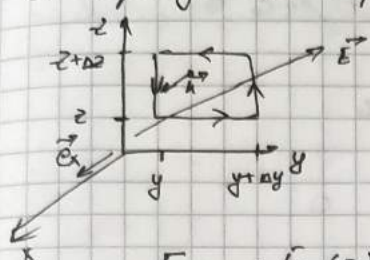
$$U_3 \quad (1), (2)$$

$$\boxed{\text{div } \vec{E} = k \cdot 4\pi \rho}$$

Очевидно:

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

② Переход от циркуляции векторного поля к ротору:



Возьмем прямоугольный контур в плоскости (yoz), пусть обход против ч.с. тогда нормаль к поверхности, охватываемой контуром $\vec{n} \parallel \vec{e}_x$

Найдем циркуляцию $\vec{E}$ по этому контуру:

$$\begin{aligned} \Gamma_{yz} &= E_y(z) \cdot \Delta y + E_z(y+\Delta y) \Delta z - E_y(z+\Delta z) \Delta y - E_z(y) \Delta z = \\ &= (E_z(y+\Delta y) - E_z(y)) \cdot \Delta z - (E_y(z+\Delta z) - E_y(z)) \cdot \Delta y = \\ &= \frac{\partial E_z}{\partial y} \Delta y \Delta z - \frac{\partial E_y}{\partial z} \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

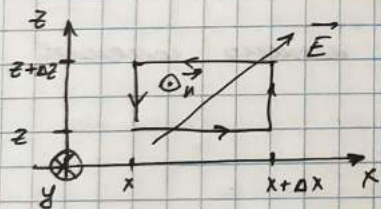
В правой части, согласно с циркуляцией $\vec{E}$ входит

$$\oint \frac{\partial B_x}{\partial t} dS, \text{ где } dS = \Delta y \Delta z \text{ (поверхность перпендикулярна контуру),}$$

$$B_n = B_x$$

Тогда
$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} = -f \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (1)$$

Аналогично в плоскости (xoz):



$$\begin{aligned} \Gamma_{xz} &= E_x(z) \cdot \Delta x + E_z(x+\Delta x) \Delta z - E_x(z+\Delta z) \Delta x - \\ &- E_z(x) \Delta z = \frac{\partial E_z}{\partial x} \Delta x \Delta z - \frac{\partial E_x}{\partial z} \Delta x \Delta z \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } B_n = -B_y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = f \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (2)$$

В плоскости (xoy) - симметрия. Дополнив предыдущие:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -f \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (3)$$

Допишем (1) на $\vec{e}_x$, (2) на $\vec{e}_y$, (3) на $\vec{e}_z$ и все сложим:

$$\vec{e}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -f \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Слева стоит $\text{rot } \vec{E}$:

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E} = -f \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Аналогично
$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \beta \cdot 4\pi \vec{j}_{\text{уп}} + \frac{\beta}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Итак,

	CGS	SI
$\text{rot } \vec{E}$	$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\text{rot } \vec{B}$	$\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
$\text{div } \vec{E} =$	$4\pi \rho$	ρ / ϵ_0
$\text{div } \vec{B} =$	0	0

На
среде со
Плот
связанности
прч

Примеры применения:

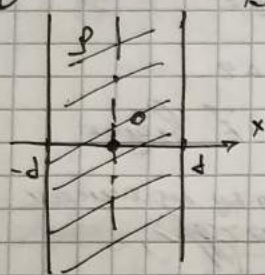
① В слое при $|x| < d$ заряд $\rho = \text{const} > 0$. Найти $\vec{E}$.

Из симметрии $\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$, $E_x(x=0) = 0$

$\Rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE_x}{dx} = \kappa \cdot 4\pi \rho \Rightarrow E_x(x) = \kappa \cdot 4\pi \rho x$

$|x| < d$

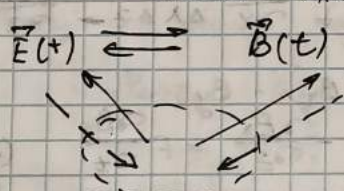
$E_x(|x| > d) = \pm \kappa \cdot 4\pi \rho d$



② Дано $\vec{E}(\vec{r})$. Найти ρ

Заряд находится сразу: $\rho(\vec{r}) = \frac{\text{div } \vec{E}(\vec{r})}{\kappa \cdot 4\pi}$

Физический смысл: всей системы ур-в можно писать такой схемой:



Заряды и токи являются источниками полей $\vec{E}, \vec{B}$ (см. соотношение стрелки). Точка обнаруживается по внешнему виду зарядов и токов (абрикковен стрелки). Но есть у них связь полей $\vec{E}(t), \vec{B}(t)$ - они созданы друг друга и поддерживают друг друга.

Важно, что есть запаздывание: если заряд поведет, то поле в точке $\vec{r}$ "узнает" об этом в момент $t + r/c$ - возмущение должно добраться до этой точки. Аналогично для $\vec{B}$: так изменяется в момент $t \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t + r/c)$.

Но есть ситуация, когда запаздывание можно пренебречь.

Обозначим: $\Delta t = r/c$, τ - характерное время изменения тока $I(t) (\Rightarrow \vec{B}(t), \vec{E}(t))$

Тогда $\Delta t \ll \tau$ - необход. условие для пренебр. запаздыванием.

На "фотографическом языке": путь возмущения движется в
среде со скоростью c , тогда за T оно пройдет $\lambda = cT$

Это характерное расстояние $r = \lambda$ (например это диаметр
сечения). Тогда заданной длины можно переписать

$$\lambda \ll r$$

Раздел 5. квазистационарные токи.

§1. Квазистационарные токи. СВ-во
идеальных элементов электрической цепи.
Интересен двухполюсников.

① Рассматриваем теперь случай, когда ток в цепи зависит от времени. Однако при этом характерное время T , за которое изменяется ток, будет много больше времени Δt , за которое носители заряда проходят через элемент цепи:

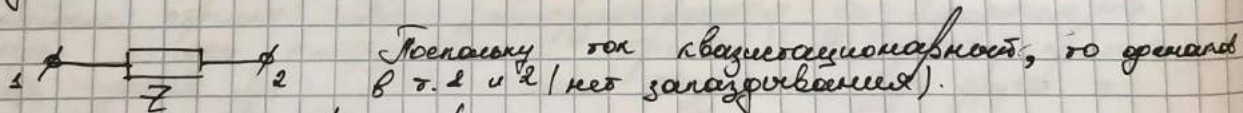
$$T \gg \Delta t.$$

Такой ток называется квазистационарным ("почти" постоянным). Для такого тока в каждый момент времени справедливы те же законы, что и для постоянного тока (з-н Ома, формула Кирхгофа). Это справедливо в электротехнике и в УКВ-диапазоне. Однако в сантиметровом диапазоне, а тем более в опике такими подходами пользоваться уже нельзя: там скорости изменения тока ($\Rightarrow$ "скорость изменения полей" B и E уже велика).

② В качестве элементов электрической цепи рассматриваем, R, C, L .

1. Идеальный источник сопротивления, которое не обладает индуктивными и емкостными свойствами.
2. Идеальный конденсатор обладает только емкостными св-вами (накапливает заряд на обкладках), индуктивных и резистивных св-в нет.
3. Идеальная катушка обладает св-вами индуктивными и не обладает резистивными и емкостными. Это означает, что мы идеализируем только ЭДС самоиндукции.

③ Любой элемент в цепи - это двухполюсник. Стандартное обозначение двухполюсника таково:



Добавляемся рассматривать зависимость от времени только в виде

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I),$$

т.е. гармонические процессы.

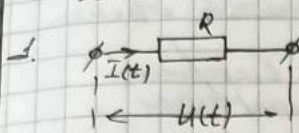
Аналогично напряжения записаны в виде

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U).$$

Частота сигнала, а фаза в общем случае произвольна. Для характеристического двухполюсника (для связи тока и напряжения) вводит аналог сопротивления. Он называется импедансом и по о-р-но равен:

$$Z = \frac{U_0}{I_0}$$

Рассчитаем напряжения переменных электрических:



Для мгновенных значений (т.е. в каждый момент времени). Выполним з-н Ома:

$$U(t) = R I(t), \quad R = \text{const}$$

При

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I)$$

имеем

$$U(t) = R I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U),$$

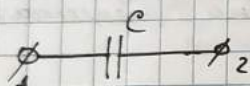
где

$$U_0 = R I_0$$

Отсюда

$$Z_R = R, \quad \varphi_U = \varphi_I$$

2.



з-н для емкости $U(t) = \frac{q(t)}{C}$

$$\Delta \varphi_{12} = U$$

где

$$q(t) = \int I(t) dt = \int I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) dt = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi_I) = \frac{I_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi_I - \frac{\pi}{2})$$

Тогда

$$U(t) = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi_I - \frac{\pi}{2}) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U),$$

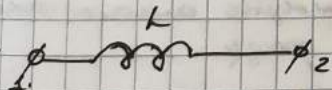
где

$$U_0 = \frac{I_0}{\omega C}, \quad \varphi_U = \varphi_I - \frac{\pi}{2}$$

Отсюда

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi_U - \varphi_I = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{напряжение на } C \text{ отстает от тока на } \frac{\pi}{2})$$

3.



Согласно закону з-н Ома для участка 12:

$$IR = U_{12} + \mathcal{E}_{\text{с-инд}} = U_{12} - L \frac{dI}{dt}$$

Но для идеальной катушки $R=0 \Rightarrow U = L \frac{dI}{dt} = -L I_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_I) =$

$$= L I_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_I + \frac{\pi}{2}) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U)$$

где:

$$U_0 = L \omega I_0, \quad \varphi_U = \varphi_I + \frac{\pi}{2}$$

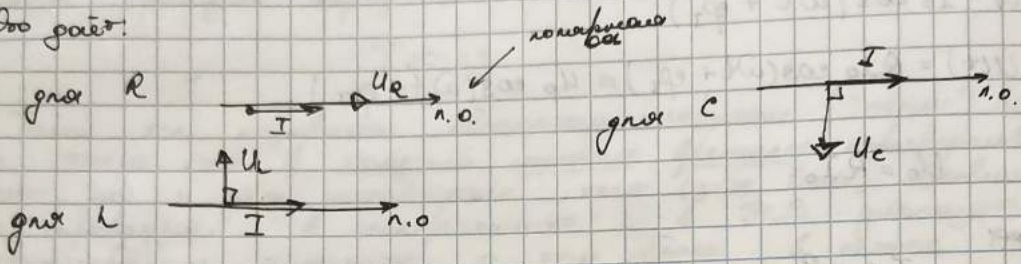
т.е.

$$Z_L = \omega L, \quad \varphi_U - \varphi_I = \frac{\pi}{2} \quad (\text{напр. на } L \text{ опережает ток на } \frac{\pi}{2})$$

4) Получением соотношения между I и U мы занимаемся, чтобы иметь возможность векторной диаграммой. Прежде всего поставим векторы в соответствие вектор по правилу: длина вектора пропорциональна амплитуде, угол между вектором и положительной осью равен начальной фазе комплексного. При этом начальная фаза соответствует углу против часовой стрелки.

вектор векторных диаграмм

Пусть $\varphi_I = 0$ для каждого из рассмотренных элементов. Это даёт:



5) Другой удобный способ описания цепей переменного тока - способ комплексных амплитуд. Он позволяет сразу учитывать сдвиг фазы направления относительно тока на элементах R, C, L .

Основы МКА - формула Эйлера $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$

Для использования этой формулы сначала перейдём к комплексному току $\hat{I}$, формально добавив мнимую часть:

$$\hat{I}(t) = I_0 [\cos(\omega t + \varphi_I) + i \sin(\omega t + \varphi_I)]$$

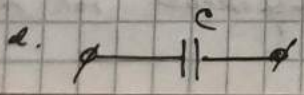
здесь $\hat{}$ означает комплекс. величину.

Тогда: $\hat{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)} = I_0 e^{i\varphi_I} e^{i\omega t} = \hat{I}_0 e^{i\omega t}$

где $\hat{I}_0 = I_0 e^{i\varphi_I}$ - комплексная амплитуда, она учитывает и величину ампл. тока, и его начальную фазу.

Вернёмся к вычислению impedances и найдём их теперь с помощью МКА: по определению $\hat{Z} = \hat{U}_0 / \hat{I}_0$

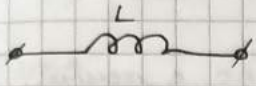
1. $I(t) \rightarrow \hat{I}(t) = \hat{I}_0 e^{i\varphi_I} \cdot e^{i\omega t} \Rightarrow$ по 3-му закону Ома $\hat{U}(t) = R \hat{I}(t) = R \hat{I}_0 \cdot e^{i\varphi_I} e^{i\omega t}$, откуда $\hat{Z}_R = R$



$$I(t) \rightarrow \hat{I}(t) = I_0 e^{i\varphi_I} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \hat{q}(t) = \int \hat{I}(t) dt = \frac{I_0}{i\omega} e^{i\varphi_I} e^{i\omega t}$$

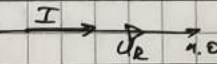
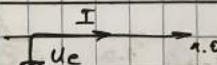
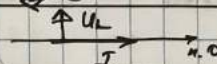
$$\Rightarrow \hat{U}(t) = \frac{\hat{q}(t)}{C} = \frac{I_0}{i\omega C} e^{i\varphi_I} e^{i\omega t} \rightarrow \hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$$

3. 

$$I(t) \rightarrow \hat{I}(t) = I_0 e^{i\varphi_I} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \hat{U}(t) = L \frac{d\hat{I}}{dt} = L i \omega I_0 e^{i\varphi_I} e^{i\omega t} \Rightarrow \boxed{\hat{Z}_L = i\omega L}$$

Таблица результатов:

Эл-т	Обозн-е	Z	$\hat{Z}$	Вект. диагр.
Резистор		R	R	
Конденсатор		$\frac{1}{\omega C}$	$-\frac{i}{\omega C}$	
Катушка		ωL	$i\omega L$	

§2. Упрощение сложного двухполюсника. Вычисление МВА и МКА.

Расс-м сложное (соединение) двухполюсника. Желю, что для вычисления их импедансов нам потребуются складывать ток и/или напряжения. Для этого у нас есть 2 способа: МВА и МКА.

Метод сложения: 1) сложение синфазных колебаний

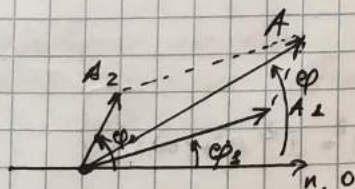
Имем

$$S_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$S_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Найти $S(t) = S_1 + S_2$

Известно, что $S(t)$ — тоже колебание, частота равна частоте исходных. По правилу сложения векторов получим рис.



$$S(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Из элементарной математики:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

е) Сложение колебаний МКА:

Имем

$$S_1(t) \rightarrow \hat{S}_1 = A_1 e^{i\varphi_1} e^{i\omega t}$$

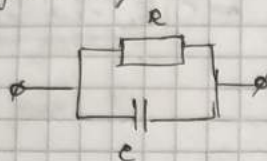
$$S_2(t) \rightarrow \hat{S}_2 = A_2 e^{i\varphi_2} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \hat{S}(t) = \hat{S}_1 + \hat{S}_2 = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) e^{i\omega t} \equiv (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) e^{i\omega t}$$

Преимущество этого метода в том, что можно просто считать комплексные амплитуды. Однако чтобы выполнить это сложение придется снова использовать формулы Эйлера и выполнять сложение по правилам комплексной арифметики, а затем найти модуль и фазу функции.

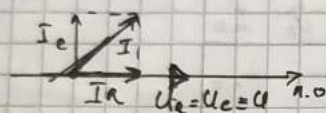
Примеры:

1) Параллельная RC-цепочка - модель реального (т.е. с утечкой) конденсатора



Дано: R, C, ω
Найти: $Z(\omega)$

а) МВА



$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 = \frac{U^2}{R^2} + \frac{U^2}{Z_C^2} = U^2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{Z_C^2} \right)$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{I}{U} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} = \frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}{R}$$

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \text{ коэф. отрабат от оска.}$$

$$\text{или } \text{коэф. } \frac{I_C}{I_R} = \frac{U/Z_C}{U/R} = \frac{R}{Z_C} = \omega RC$$

б) МКА

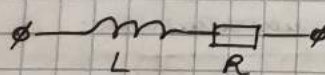
$$\hat{I} = \hat{I}_R + \hat{I}_C = \frac{\hat{U}}{R} + \frac{\hat{U}}{Z_C} = \hat{U} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_C} \right) = \hat{U} \left(\frac{1}{R} + i\omega C \right)$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} = \frac{1}{R} + i\omega C = \frac{1 + i\omega RC}{R}$$

$$Z^{-1} = |\hat{Z}^{-1}| = \sqrt{\text{Re}^2(\hat{Z}^{-1}) + \text{Im}^2(\hat{Z}^{-1})} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{(\omega RC)^2}{R^2}} = \frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}{R}$$

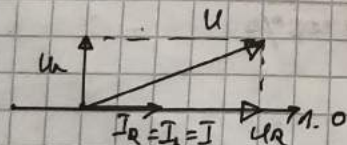
$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \text{ } \varphi = \frac{\text{Im } \hat{Z}^{-1}}{\text{Re } \hat{Z}^{-1}}$$

2) Последовательная LR-цепочка - модель реальной катушки



Дано: L, R, ω
Найти: $Z(\omega)$

а) МВА



$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = I^2 R^2 + I^2 (\omega L)^2 = I^2 (R^2 + (\omega L)^2)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

коэф. - е определяется по фазе так же

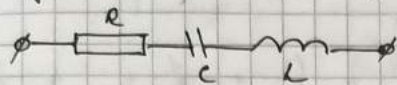
$$\text{коэф. } \varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{I Z_L}{I R} = \frac{\omega L}{R}$$

б) МКА

$$\hat{U} = \hat{I} R + \hat{I} Z_L = \hat{I} (R + i\omega L) \Rightarrow \hat{Z} = R + i\omega L$$

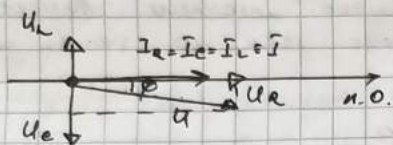
$$Z = |\hat{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

3) Последовательный контур



а) МРА

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 = I^2 (R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)$$



$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

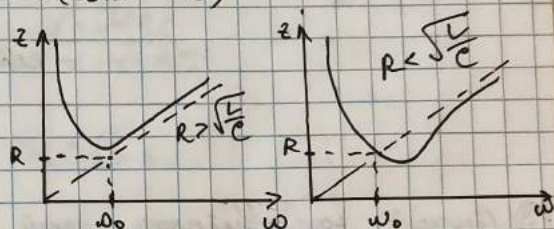
б) МКА

$$\hat{U} = \hat{I} (R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}) \Rightarrow \hat{Z} = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$Z = |\hat{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Видно, что $Z = Z_{\min}$ при $\omega L = \frac{1}{\omega C}$,

$$\text{т.е. } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Кроме того, $Z \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow 0$ (сеть катушек)
и $\omega \rightarrow \infty$ (внешние конденсаторы)

3.3. Расчет цепи переменного тока.

1) Вычисление комплексного импеданса элементов (составляющих) двухполюсников.

а) послед. соедин.: $\phi - \hat{Z}_1 - \hat{Z}_2 - \dots - \hat{Z}_N - \phi$ - все $\hat{Z}_n$ даны ($n = \overline{1, N}$)

Найти: $Z_{\text{экв}} - ?$

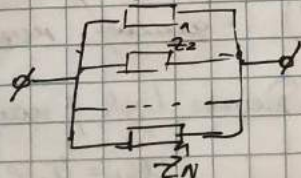
Действуем по опр.: $\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$, при последовательном соедин. в каждый момент времени.

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \dots = \hat{I}_N \equiv \hat{I}$$

$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \dots + \hat{U}_N$$

$$\text{тогда } \hat{Z}_{\text{экв}} = \frac{\hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \dots + \hat{U}_N}{\hat{I}} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \dots + \hat{Z}_N$$

б) паралл.-е соедин.:



- снова все $\hat{Z}_n$ ($n = \overline{1, N}$) даны, найти $Z_{\text{экв}}$.

как и для постоянного тока (но, теперь для комплексных значений в каждый момент времени)

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 = \dots = \hat{U}_N = \hat{U}$$

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \dots + \hat{I}_N$$

тогда $\frac{1}{\hat{Z}_{общ}} = \frac{1}{\hat{U}} = \frac{\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \dots + \hat{I}_N}{\hat{U}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\hat{Z}_N}$

② Закон Ома для участка цепи, содержащего источник. Аналогия по аналогии со случаем постоянного тока, но теперь для комплексных значений

$\hat{I} \hat{Z} = \hat{U}_2 + \hat{\mathcal{E}}_2$

Отсюда видно: - если источника на участке нет, то

$$\hat{I} \hat{Z} = \hat{U}$$

- если цепь замкнута, то $\hat{U}_2 = 0$,

$$\hat{I} \hat{Z} = \hat{\mathcal{E}} \quad (\text{здесь } \hat{Z} = \hat{Z}_{внеш} + \hat{Z}_{внут})$$

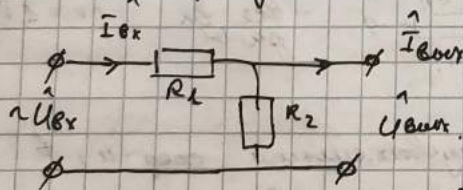
③ Случай разветвленных цепей (правило Кирхгофа). Ток в узлах (узлы, ветви) сохраняется, и по аналогии

$$\sum_k \hat{I}_k = 0 \quad (\text{на } 1 \text{ ур-е элементов, если много узлов})$$

$$\sum_k \hat{I}_k \hat{Z}_k = \sum_n \hat{\mathcal{E}}_n \quad (\text{для всех неразрывных контуров})$$

Примеры: В качестве примеров рассмотрим 4-полюсника с разорванными выходами (применяемые к выходящей нагрузке).

1. Потенциометр (делитель напряжения).



Дано: R_1, R_2 .
Найти: $K = \frac{U_{вых}}{U_{вх}}$

В режиме х.х. (разомкн. выходы)

$$\hat{I}_{вых} \rightarrow 0, \text{ поэтому } \hat{U}_{вх} = \hat{I}_{вх} (R_1 + R_2)$$

$$\hat{U}_{вых} = \hat{I}_{вх} \cdot R_2$$

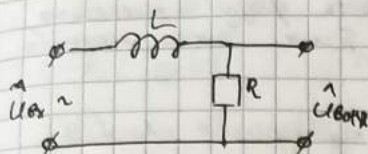
$$K = \frac{\hat{U}_{вых}}{\hat{U}_{вх}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

2. Частотный фильтр (ФЧФ) - фильтр низких частот

Дано: L, R ; напряжение на входе

$$\hat{U}_{вх} = U_0 e^{i\omega t}$$

Найти: $K(\omega)$

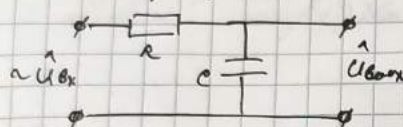


$$\hat{U}_{0x} = \hat{I}_{0x} (i\omega L + R), \quad \hat{U}_{0y} = \hat{I}_{0x} \cdot R$$

$$K = \frac{\hat{U}_{0y}}{\hat{U}_{0x}} = \frac{R}{i\omega L + R}, \quad K = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$



3. Интегрирующая цепочка



Дано R, C ; $\hat{U}_{0x} = U_0 e^{i\omega t}$
Найти $K(\omega)$

$$\hat{U}_{0x} = \hat{I}_{0x} (R + \frac{1}{i\omega C}), \quad \hat{U}_{0y} = \frac{\hat{I}_{0x}}{i\omega C}$$

$$K = \frac{\hat{U}_{0y}}{\hat{U}_{0x}} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + i\omega RC} = \frac{1 - i\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

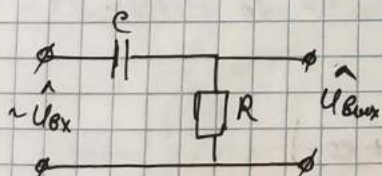
$$K = |K| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \sim \frac{1}{\omega} \text{ при } \omega RC \gg 1,$$

$$\arg K = -\omega RC \quad (R \gg \frac{1}{\omega C}) \Rightarrow \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

С другой стороны, если $\hat{U}_{0x} = U_0 e^{i\omega t}$, то $\int \hat{U}_{0x} dt = \frac{U_0}{i\omega} e^{i\omega t} \sim \frac{1}{\omega}$
т.е. данный 4-плоский даёт вых. сигнал, пропорциональный интегралу от входного.

↓ продолжение (4-ой случай)

4. Дифференцирующая цепочка Получаем элементы R и C



Снова найти $K(\omega)$.

$$\hat{U}_{0x} = \hat{I}_{0x} (i\omega C + R), \quad \hat{U}_{0y} = \hat{I}_{0x} R$$

$$K(\omega) = \frac{R}{i\omega C + R} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}, \quad K = |K| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

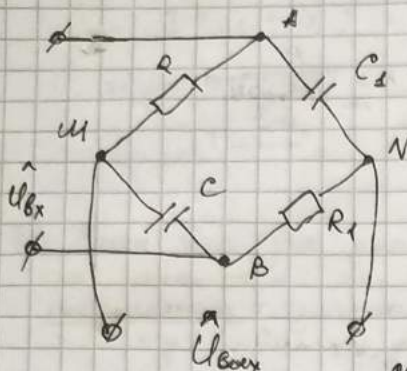
Здесь при $\omega RC \ll 1$ получим $\arg K = \frac{1}{\omega RC} \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$
 $K \rightarrow \omega RC \sim \omega$

С другой стороны, при $\hat{U}_{0x} = U_0 e^{i\omega t}$

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U_0 e^{i\omega t} \sim \omega,$$

т.к. при $\omega RC \ll 1$ данный 4-плоский осуществляет дифференцирование сигнала.

5. Разобраться. Часто требуется иметь фазу сигнала не изменяя при этом амплитуду. Для этого можно использовать, например, такую схему:



Входное напряжение подводится к A, B, выходное снимается с MN. Меняя R_1, C_1 (вместе или что-то одно), можно менять первую фазу $U_{вых}$ относительно $U_{вх}$.

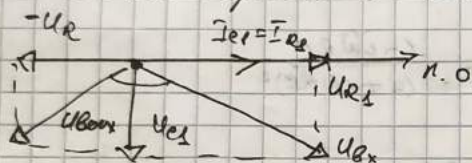
Конкретно, при $R_1 C_1 = RC$ получим

$$|U_{вых}| = |U_{вх}|$$

$$\text{счит.-м. } (U_{вых} = U_{вх} \cdot \frac{1 - i\omega RC}{1 + i\omega RC})$$

Если при этом $R = \frac{1}{\omega C}$, то $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

Доказать просто и наглядно это можно получить МВА:



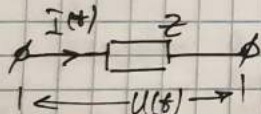
$$\text{Здесь } U_{вх} = U_{с1} + U_{е}$$

$U_{вых} = (-U_{е}) + U_{с1}$ — знак “-” соотв. тому, что A — общий ток,

$$U_{вых} = U_{MN} = U_{с1} - U_{е}$$

5.4. Работа и мощность в цепи переменного тока

Основная задача цепи переменного тока — двухполюсник. Рассмотрим работу по перемещению заряда q .



$$dA = U(t) dq = U(t) \cdot I(t) dt$$

$$\text{Отсюда мгновенная мощность } P = \frac{dA}{dt} = U(t) \cdot I(t)$$

В случае гармонических процессов

$$P(t) = U_0 I_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$$

Ясно, что в зависимости от φ_u, φ_I найдутся моменты времени, когда $P > 0, P < 0, P = 0$, т.е. P меняет знак. Поэтому имеет смысл среднюю по времени мощность. Преподнесем:

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 [\cos(\varphi_u - \varphi_I) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_I)]$$

Составляющая на удвоенной частоте при усреднении даст 0, в итоге

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\varphi_u - \varphi_I) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi$$

Рассчитаем для идеального элемента:

$$1) Z=R: \varphi=0, \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0 = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R}$$

Можно "спрятать" $\frac{1}{2}$, если ввести $I_{эфф} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$; $U_{эфф} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$

$$2) Z=\omega L \text{ или } Z=(\omega C)^{-1}: \varphi=\frac{\pi}{2} \text{ или } \varphi=-\frac{\pi}{2}, \quad \langle P \rangle=0 -$$

мощность на этих элементах не выделяется. ωL называют реактивной нагрузкой, а R - активный.

Для произвольного, составного двухполюсника $Z=Z(\omega)$, $\langle P \rangle$ вычисляется по общей формуле. Важно, что в нее входит $\cos \varphi \Rightarrow \langle P \rangle$ всегда будет не больше, чем на активной нагрузке.

8.11.23.

Электромагнитные поля и процессы в веществе. Электрическое поле в веществе.

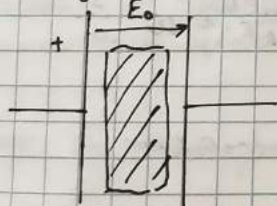
Проводник - вещество, содержащее очень много свободных зарядов. Диэлектрик - вещество, в котором свободных зарядов нет. Но, как и проводники, диэлектрики изменяют поле, в которое помещены.

Например: из опыта известно, что диэлектрик уменьшает пер. электрического и отпало чуждого конденсатора.

Пусть поле в пустом пространстве $\vec{E}_0$. Если внести диэлектрик, в нем создается поле $\vec{E}'$, результирующее будет

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

Характеристика свойств диэлектрика - диэлектрическая проницаемость ϵ . Введем ее по Гауссу:



Конденсатор заряжен и отключен, тогда заряд на обкладках q постоянен (это свободный заряд). В пустом конденсаторе разность потенциалов между обкладками U_0 , емкость $C_0 = \frac{q_{своб}}{U_0}$

Если конденсатор заполнить диэлектриком, разность потенциалов U , емкость $C = \frac{q_{своб}}{U}$

Из опыта $U < U_0$, т.е. $C > C_0$. Тогда по опр. Гаусса:

$$\epsilon = \frac{C}{C_0}$$

В СИ вводят относительную диэлектрическую проницаемость:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

В электростатике ($\omega=0$):

вакуум
воздух (ш.г.)
стекло
вода

$\tilde{\epsilon}$
1
1,006
5-7
81

Макроскопическое (усреднённое) поле в веществе.

В вакууме было: ρ - скопления (свободные) заряды создают $\vec{E}_0$, а поле обнаруживается по действию на заряды. В веществе есть заряды (атомы, молекулы) - это микрозаряды. Но

$$f_{\text{микро}} = f_{\text{микро}}(\vec{r}, t) -$$

случайные, случайные ф-ны из-за теплового движе-я молекул. движения электронов в атомах (время обхода электрона вокруг ядра $\sim 10^{-15}$ с). Тогда заряд, помноженный на все атомов и всех электронов невозможно в принципе $\Rightarrow$ невозможно напрямую использовать ур. Максвелла для нахождения $\vec{E}, \vec{B}$.

Но: наблюдатели в макромире изучают макрополе - т.е. усреднённое (сглаженное). Можно усреднить по объёму.

Опр.
$$\vec{E}_{\text{макро}} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \vec{E}_{\text{микро}} dV,$$

где ΔV - физически бесконечно малый объём вещества (но в нём очень много частиц!)

Обычно $|\vec{E}_{\text{макро}}| \ll |\vec{E}_{\text{микро}}|$

Характерные значения масштабов:

в атоме $H \sim 10^{-8}$ м $\Rightarrow E_{\text{микро}} \approx \frac{k|e|}{r^2} \sim 10^8 \frac{В}{м}$

Для электрического поля в воздухе $U \sim 10$ кВ, $d \sim 0,1$ мм.

$$\Rightarrow E_{\text{макро}} = \frac{U}{d} \sim 10^8 \frac{В}{м}$$

Напряжённость поля земли $E_{\text{макро}} \sim 100 \frac{В}{м}$.

Очевидно, $E_{\text{микро}}$ принципиально невозможно найти, но это и не нужно - нужно макрополе.

Для количественного описания поля в веществе введём новое понятие.

Вектор поляризации

Процесс, происходящий с веществом во внешнем поле - поляризация (среды поляризуется)

Есть 2 типа веществ $\rightarrow$ 2 типа поляризации

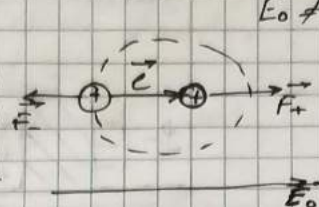
1) Симметричные молекулы (все одноатомные)

$$\vec{E}_0 = 0$$



$$\vec{P} = q\vec{E} = 0 \quad (E=0)$$

$$\vec{E}_0 \neq 0$$



$$\vec{P} = q\vec{E} \neq 0$$

$$\vec{P} \parallel \vec{E}_0$$

2) Молекулы с "готовыми" дипольными моментами ($H_2O, \dots$)

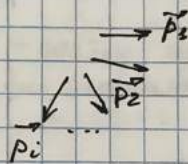
$$\vec{E}_0 = 0$$



Все направления равновероятны,

$$\langle \vec{P} \rangle_t = 0$$

$$\vec{E}_0 \neq 0$$



$$\vec{P} \parallel \vec{E}_0 \Rightarrow \langle \vec{P} \rangle_t \neq 0$$

В любом из этих случаев у объема ΔV появляется результирующий дипольный момент $\Delta \vec{P}$. Очевидно:

$$\Delta \vec{P} \sim \Delta V$$

$$\Delta \vec{P} = \vec{P} \cdot \Delta V$$

$\vec{P}$ - коэф. пропор-ти, называется вектором поляризации

Опр:

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta V}}$$

Символ $\vec{P}$ - дипольный момент единицы объема вещества. Единица измерения (СИ):

$$[P] = \frac{Кл}{м^2}$$

Если все молекулы одинаковые, то

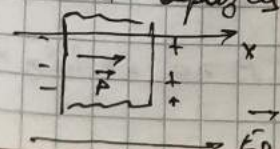
$$\boxed{\vec{P} = n \vec{p}} \quad (n - \text{концентрация молекул})$$

Если молекулы разные: $\vec{P} = \sum_i n_i \vec{p}_i$

Связанные (поляризационные) заряды

Рассе-м образец диэлектрика, ориентированный по полю.

Во внешнем поле $\vec{P} \parallel \vec{E}_0$.

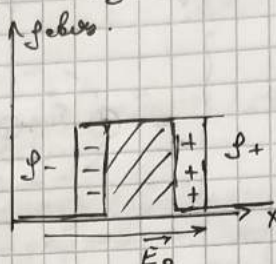
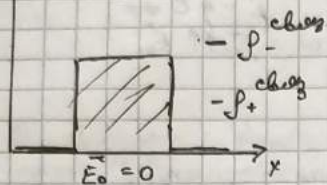


Пусть: 1) диэлектрик первоначально не заряжен.

2) $\vec{E}_0$ - однородное

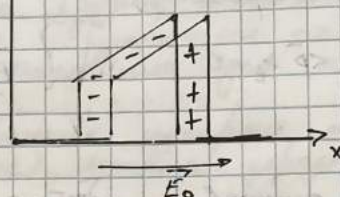
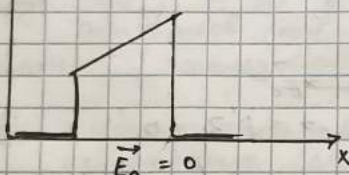
Каков будет представление о том, как возникли поверхностные и объемные связанные заряды:

а) диэлектрик однородный. $\rho_{\text{связ}} = |\rho_-^{\text{связ}}|$
 $\rho_{\text{связ}}$



В толще $\rho_{\text{связ}} = 0$, на пов-ти есть $\rho_-^{\text{связ}}, \rho_+^{\text{связ}}$

б) диэлектрик неоднородный, $\rho = \rho(x)$, $\rho_+(x) = |\rho_-(x)|$
 $\rho_{\text{связ}}$



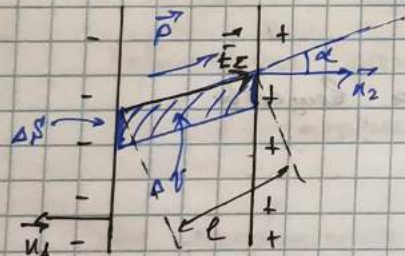
Есть связ. заряд и на поверхности, и в объеме.

В подобии случаев это поляризованные заряды.

Связь $\vec{r}_{\text{связ}}$ и $\vec{P}$

Рассмотрим бесконечную плоскопараллельную пластину из однородного диэлектрика в однородном поле E_0

Возьмем элемент объема ΔV - тонкий цилиндр, образующий $\parallel E_z$, оснований ΔS по поверхности пластины.



Объем косого цилиндра

$$\Delta V = \Delta S \cdot l \cos \alpha$$

$$(\alpha = (\vec{E}_z, \vec{n}_2))$$

Дипольный момент объема ΔV :

$$\Delta p = \vec{P} \cdot \Delta V = P \Delta S l \cos \alpha \quad (1)$$

С другой стороны:

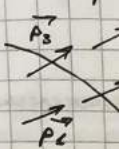
$$\Delta p = \Delta q \cdot l = \vec{r}_{\text{связ}} \cdot \Delta S \cdot l \quad (2)$$

Из (1), (2)

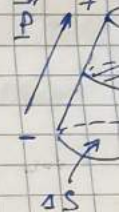
$$\vec{r}_{\text{связ}} = P \cos \alpha = P_n$$

То же самое $P_n < 0 \Rightarrow \vec{r}_{\text{связ}} < 0$, если $P_n > 0 \Rightarrow \vec{r}_{\text{связ}} > 0$

Пусть
Рассмотр



Наибр
единиц



Из

Тогда

Здесь

Делая

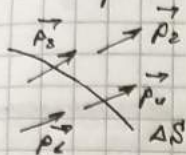
Затем

1) Если

Объёмные связанные заряды

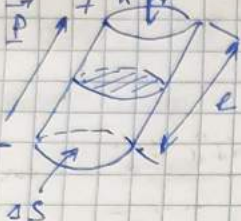
Пусть диэлектрик однородный или $\vec{E}_0 = \vec{E}_0(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E}_\Sigma = \vec{E}_\Sigma(\vec{r})$

Рассмотрим произвольную площадь ΔS в толще.



Если все диполь по одну сторону от ΔS (как $\vec{p}_1, \vec{p}_2$), то это ничего интересного не даёт, т.к. $q_\Sigma = 0$. Интересно, когда ΔS разделяет диполь (как $\vec{p}_3, \vec{p}_4$).

Найдём $\Delta q_{связ}$, который выторч (т.е. над поверхностью ΔS), единичный заряд обозначим $|e|$



Заряд над поверхностью отрицательный

$$\Rightarrow \Delta q_{связ} = -|e| \Delta N$$

ΔN - число разрезанных диполей

$\Delta N = n \cdot \Delta V$ (ΔV - объём шара, в котором молекулы разрезаются, n - концентрация)

Из геометрии

$$\Delta V = \Delta S l \cos \alpha \quad (\alpha = (\vec{n}, \vec{P}))$$

Тогда

$$\Delta q_{связ} = -|e| l \Delta S \cos \alpha \cdot n = -p n \cos \alpha \cdot \Delta S = -P \cos \alpha \Delta S$$

Учтём: $P_n = P \cos \alpha > 0 \Rightarrow \Delta q_{связ} = -P_n \Delta S$

Теперь запишем поверхность (параллельно в толще диэла.):

$$q_{связ} = - \oint_{(S)} P_n dS$$

Замечания: ① $q_{связ}$ - полный связанный заряд внутри замкнутой поверхности (S)

② Запись универсальная (и в СИ, и в CGSE)

③ Можно перейти к диф-ой форме:

$$q_{связ} = - \nabla \cdot \vec{P}$$

Основные уравнения электростатики в диэлектрике

① Баланс в вакууме:

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \phi}{\partial t} \oint_{(S)} B_n dS \quad \text{или} \quad \text{rot } \vec{E} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ясно, что для микрополей это также выполняется. Для перехода к макрополюсам надо переписать по ΔV . Учтем: интеграл в этом уравнении независим и перестановочен. Тогда эти чл-ы справедливы всегда.

$$\textcircled{2} \oint_{(S)} \vec{E}_n dS = \kappa \cdot 4\pi Q_{int} = \kappa \cdot 4\pi \iiint_V \rho_{int} dV$$

Для микрополей кажется справедливым, но при вычислениях макрополей надо учесть: $Q_{int} = q_{своб} + q_{связ}$.

Т.о., в данном уравнении неизвестны $\vec{E}_n$ и $q_{связ}$.

Но

$$q_{связ} = - \oint_{(S)} P_n dS$$

Выберем одну и ту же поверхность:

$$\oint_{(S)} \vec{E}_n dS = \kappa \cdot 4\pi q_{своб} - \kappa \cdot 4\pi \oint_{(S)} P_n dS.$$

$$\Rightarrow \oint_{(S)} (\vec{E}_n + \kappa \cdot 4\pi P_n) dS = \kappa \cdot 4\pi q_{своб}.$$

Введем вектор напряженности вектор:

Опр.:

$$\vec{D} = \begin{cases} \vec{E} + 4\pi \vec{P} & (CGSE) \\ \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} & (SI) \end{cases}$$

Ед. измерения $[D] = [P] = \frac{Cm}{m^2} (SI)$

Вектор $\vec{D}$ не имеет самостоятельного физ-ого смысла, это просто линейная комбинация $\vec{E}$ и $\vec{P}$. Но зато

$$\oint_{(S)} \vec{D}_n dS = \begin{cases} 4\pi q_{своб} & (CGSE) \\ q_{своб} & (SI) \end{cases}$$

т.е. поток $\vec{D}$ опр-ся только свободными зарядами внутри замкнутой поверхности.

! Важное замечание: сам вектор $\vec{D}$ зависит от всех зарядов (и $q_{своб}$ и $q_{связ}$).

Но есть еще проблема: нужна связь $\vec{D}$ и $\vec{E}$. И эта связь разная для разных сред (!) Уравнение такой связи называется материальным уравнением. Самый простой вид оно имеет для линейных изотропных диэлектриков.

Линейное изотропное диэлектрик

① Линейность: $\vec{P} \sim \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \sim \vec{E}$

② Изотропия: $\vec{P} \parallel \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \parallel \vec{E}$

Эти св-ва независимы!

В виде равенства:

$$\begin{cases} \vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E} & (SI) \\ \vec{P} = \alpha \vec{E} & (CGSE) \end{cases}$$

α - коэффициент поляризуемости (зависит от вещества), вводится феноменологически.

Тогда:

SI: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \alpha \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} (1 + \alpha)$

CGSE: $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \vec{E} + 4\pi \alpha \vec{E} = \vec{E} (1 + 4\pi \alpha)$

Вводя коэф-т - диэлектрическая проницаемость

среды:

$$\epsilon = (1 + \alpha) \epsilon_0 \quad (SI)$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi \alpha \quad (CGSE)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость (SI)

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \alpha$$

Окончательно:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

~ только в линейном изотропном диэлектрике.
(но ϵ разное в SI и CGSE)

Итак:

$$\oint_{(K)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{B}_n \cdot d\vec{S}$$

← справедливо всегда!

$$\iint_{(S)} \vec{D}_n \cdot d\vec{S} = q_{своб}$$

(SI)

или:

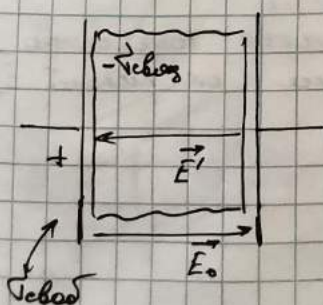
$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

← справедливо всегда!

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{своб}$$

+ материальное уравнение $\vec{D} = \epsilon_0 \tilde{\epsilon} \vec{E}$ (мат)

Покажем, что наше определение ϵ совпадает с опр Фарадея (через ёмкость конденсатора).



1) По Фарадею

$$\epsilon = \frac{C}{C_0}$$

Имеем:

$$C_0 = \frac{q_{своб}}{U_0}, \quad U_0 = E_0 d$$

$$C = \frac{q_{своб}}{U}, \quad U = E d$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E = \frac{E_0}{\epsilon}}} \quad - \text{т.е. } E \text{ показывается, во сколько раз ослабляется поле.}$$

2) По нашим рассуждениям: $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_0 + \vec{E}'$, $\vec{E}' \perp \vec{E}_0$

$$E_0 = \kappa \cdot 4\pi \zeta_{\text{своб}}$$

Аналогично $E' = \kappa \cdot 4\pi \zeta_{\text{своб}}$ (т.к. $\vec{E}'$ создано связанными зарядами)

$$\Rightarrow E_\Sigma = E_0 - E' = \kappa \cdot 4\pi (\zeta_{\text{своб}} - \zeta_{\text{своб}})$$

$$\text{Учитем: } \zeta_{\text{своб}} = P_n, \quad P = \alpha \epsilon_0 E_\Sigma$$

$$\Rightarrow E_\Sigma = E_0 - \kappa \cdot 4\pi \alpha \epsilon_0 E_\Sigma = E_0 - \alpha E_\Sigma \quad (\text{СИ})$$

$$E_\Sigma = \frac{E_0}{1 + \alpha} = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (\text{где } \epsilon = 1 + \alpha)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{E} = \frac{E_0}{\epsilon}}} \quad - \text{т.е. считаем так же!}$$

Некоторые дополнительные уравнения для переходных изотропных диэлектриков.

① Пусть поле статическое $\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \oint_{(R)} \vec{E} d\vec{l} = 0$, $\text{rot } \vec{E} = 0$

- т.е. поле $\vec{E}$ потенциально. Потенциальны ли $\vec{P}$, $\vec{D}$?

$$\text{ИТА} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$

$$\oint_{(R)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{l} = 0$$

Если диэлектрик однородный, то $\epsilon = \text{const}$ во всем объеме $\Rightarrow$ можно вынести за знак $\oint$ $\Rightarrow \oint_{(R)} \vec{D} d\vec{l} = 0$

Потенциальность означает, что линии поля не замкнуты.

$$\textcircled{2} \oint_{(S)} \vec{D}_n dS = q_{\text{своб}} \quad (\text{СИ})$$

- т.е. линии $\vec{D}$ начинаются и заканчиваются только на $q_{\text{своб}}$ (и "не замкнута" $q_{\text{своб}}$). В этом смысле об линии $\vec{E}$, т.к.

$$\oint_{(S)} \vec{E}_n dS = \kappa \cdot 4\pi (q_{\text{своб}} + q_{\text{связ}})$$

$$\text{ИТА: } \vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \oint_{(S)} \epsilon \vec{E}_n dS = q_{\text{своб}}$$

раз

В однородной среде

$$\oint_{(S)} \vec{E}_n dS = q_{своб}$$

$$\text{или } \oint \vec{E}_n dS = \frac{q_{своб}}{\epsilon}$$

т.е. поток ослабляется в ϵ раз. Тогда, если все пространственно заданно однородным диэлектриком, поле $\vec{E}$ в каждой точке ослабляется в ϵ раз. Это значит, что в этом случае структуры полей $\vec{E}_0$ и $\vec{E}$ подобны, меняется только масштаб.

Что будет для поля $\vec{D}$?

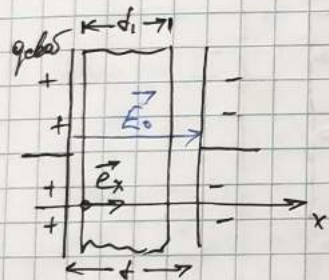
Самостоят. (распространяет. МД)

$$\left. \begin{aligned} \oint \vec{D}_n dS &= ? \\ \oint \vec{P}_n dS &= ? \end{aligned} \right\}$$

12.11.23.

Проверки вычисления полей в диэлектриках.

- ① В плоском конденсаторе находится МД. Свободный заряд на обкладках $q_{своб}$ (концентрация плотности $\epsilon_{своб} = \frac{q_{своб}}{S}$), диаметр $2R$, толщина пластины $d_1 \ll d$, толщина диэлектрика d_2 . Конденсатор отключен от источника. Найти $\vec{D}(x)$, $\vec{E}(x)$, $\vec{P}(x)$, $\epsilon_{своб}$.



Предварительные соображения:

$$1) q_{своб} = const \Rightarrow \text{поле статическое.} \\ \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \right) \Rightarrow \text{пот } \vec{E} = 0$$

Это задание обеспечено, если поле $\vec{E} = \vec{E}(x)$, причем вне пластин может быть ноль!

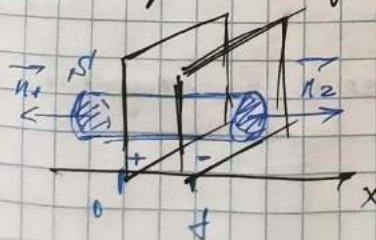
- а) без диэлектрика $\vec{E}_0 \parallel \vec{E}_x$. Логично тогда из соображений симметрии предположить $\vec{E} \parallel \vec{D} \parallel \vec{P} \parallel \vec{E}_x$

Теперь можно искать поля:

- 1) В ур-е для $\vec{D}$ входит только $q_{своб}$:

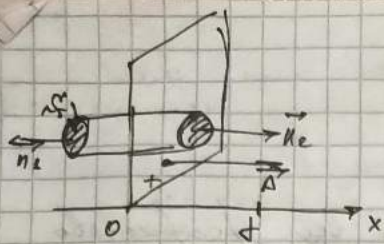
$$\oint_{(S)} \vec{D}_n dS = q_{своб} \quad (SI)$$

Выбираем гауссову пов-ть - огранич. цилиндр, образующая вдоль x .



- а) только за пределами конденсатора

$$\Rightarrow \epsilon_{своб} = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0 \text{ вне конденсатора}$$



б) если пореза внутри, другой все конденсатор

$$D_{xz} = 0, D_{xz} = D = \text{const}$$

$$\oint D_k dS = D \cdot S_T = \int_{\text{своб.}} \rho_T dV$$

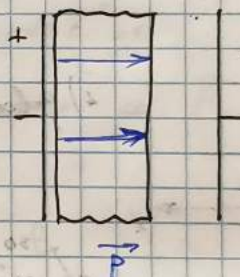
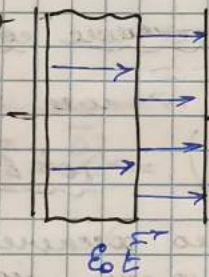
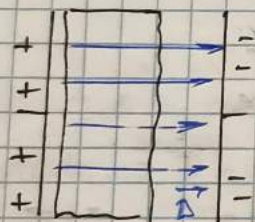
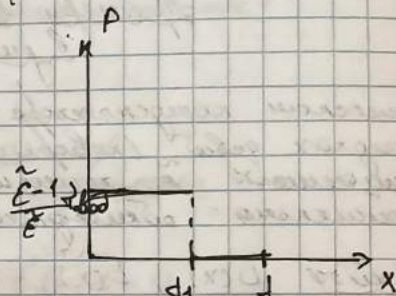
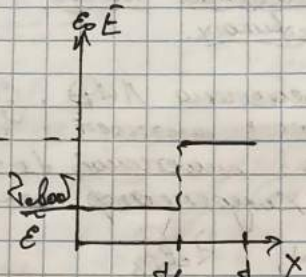
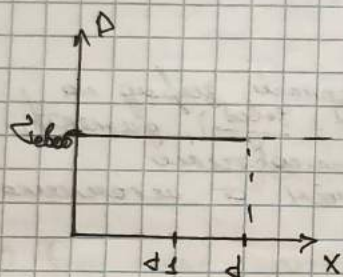
$$(2) \quad D = \int_{\text{своб.}} \rho_T dV, \text{ при } x \in [0; d]$$

2) а) ЛУА $\Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}$ в материале ($x \in [0; d_1]$)

б) в конденсаторе все материалы вакуум $\Rightarrow \vec{E} = \vec{D} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}, x \in (d_1; d]$$

3) По орг. $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \begin{cases} \frac{\tilde{\epsilon} - 1}{\tilde{\epsilon}} \vec{D}, x \in [0; d_1] \\ 0, x \in (d_1; d] \end{cases}$

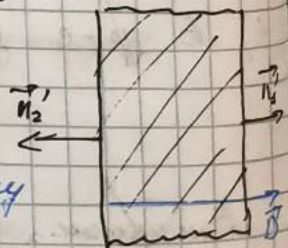


4) $\int_{\text{своб.}} = P_n \Big|_{x=0+}^{x=d_1}$ ($\vec{n}^T$ из диэлектрика в вакуум)

$$\Rightarrow \int_{\text{своб.}} = \frac{\tilde{\epsilon} - 1}{\tilde{\epsilon}} D_n = \frac{\tilde{\epsilon} - 1}{\tilde{\epsilon}} \int_{\text{своб.}}, x = d_1$$

$$\int_{\text{своб.}} = - \frac{\tilde{\epsilon} - 1}{\tilde{\epsilon}} \int_{\text{своб.}}, x = 0_+$$

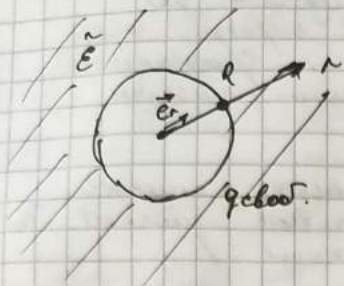
Конкретный вопрос: что изменилось, если материал отодвинуть от обкладок?



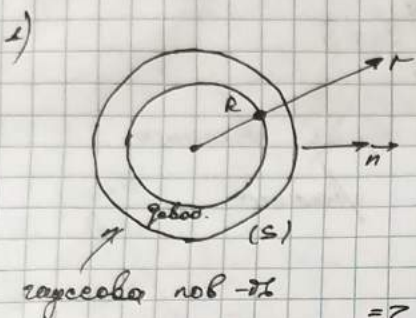
2) Сфера заряжена зарядом q свобод и находится в вакууме

ЛУА ϵ известное ϵ . Радиус сферы R.

Найти $\vec{E}(r), \vec{D}(r), \vec{P}(r), q_{\text{своб.}}$



Будем считать $\vec{E}_0 \parallel \vec{e}_r$, тогда поле потенциально ($\text{rot } \vec{E}_0 = 0$). Тогда предположим, что $\vec{P}$ сферически симметрично.
 $\vec{E} \parallel \vec{D} \parallel \vec{P} \parallel \vec{e}_r$ - поле потенциально и удовлетворяет э.в. симметрии.



1) $\oint_{(S)} D_n dS = q_{\text{своб}}(S)$
 Гауссова пов-сть - сфера $\rightarrow$
 $D_n = D$ (т.к. $\vec{D} \parallel \vec{e}_r$), $D = \text{const}$ на (S)
 в силу симметрии

$$\Rightarrow \oint_{(S)} D_n dS = D \oint_{(S)} dS = D \cdot 4\pi r^2 = q_{\text{своб}}(r \geq R)$$

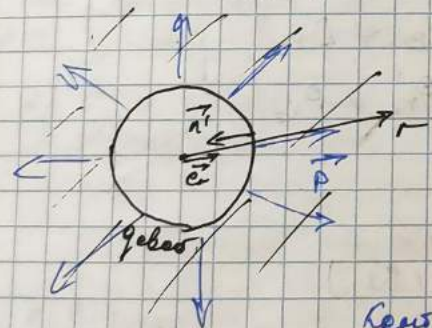
$$D = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{q_{\text{своб}}}{4\pi r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

2) $\Delta U \Rightarrow E_n = \frac{D_n}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q_{\text{своб}}}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon}, \quad r \geq R$

3) $P_n = D_n - \epsilon_0 E_n = \frac{q_{\text{своб}}}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)$

Полн. заряд (дип. заряды на пов-ти)

4) $\vec{q}_{\text{своб}} = P_n|_{r=R}$, где $\vec{n}'$ - из диэлектрика (!), т.е. $\vec{n}' \parallel \vec{e}_r$



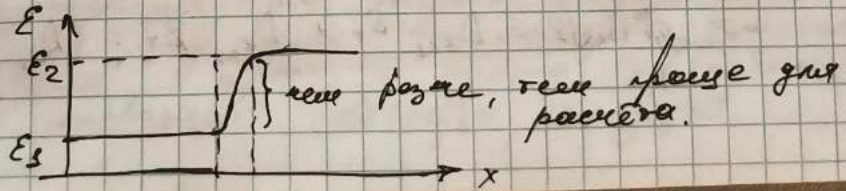
$$\Rightarrow P_n = -P_n|_{r=R} = -\frac{q_{\text{своб}}}{4\pi R^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)$$

$$q_{\text{своб}}(r=R) = \frac{q_{\text{своб}}}{4\pi R^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) < 0 \quad (\epsilon > 1)$$

Контр. вопрос: диэлектрик не был заряжен, но $q_{\text{своб}} < 0$. Противоречит ли это 3-му сохранению электрического заряда?

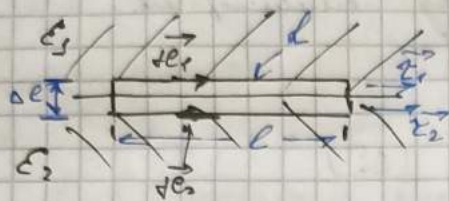
Граничные условия для поля в диэлектрике

До сих пор мы рассматривали однородный диэлектрик (ϵ не зависит от координат). Зарядовое усложнение, если $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$. Расчет поля упрощается только в случае разл. (слоистой)



В случае разойти границы раздела получим две кусочно-однородные среды. Тогда с одной стороны со стороны границы (ГЧ) - свободными между этими полыми.

① ГЧ для E_z



На небольшом участке можно считать E однородным о циркуляции E

$$\oint E_{\text{ср}} dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int B_n dS \quad (1)$$

1) Контур (1) - прямоугольный, вытянутой вдоль границы.

2) $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = E$, $\vec{E}_{1,2}$ - по касательной к границе.

3) $\frac{\Delta l}{l} \ll 1$; в пределах l $E = \text{const}$

Т.к. $\vec{E}_1 \uparrow \vec{E}_2$, $\vec{E}_2 \uparrow \vec{E}_1$:

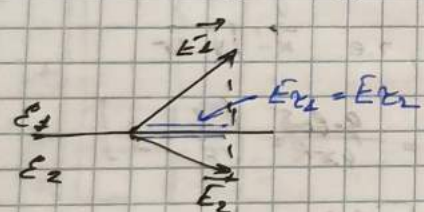
$$\oint E_{\text{ср}} dl = E_{x1} l - E_{x2} l + O\left(\frac{\Delta l}{l}\right) \quad (2)$$

Т.к. $\Delta l \ll l$

$$\int B_n dS = \langle B_n \rangle l \Delta l \rightarrow 0 \quad \text{при } \Delta l \rightarrow 0, \quad (B_n < \infty)$$

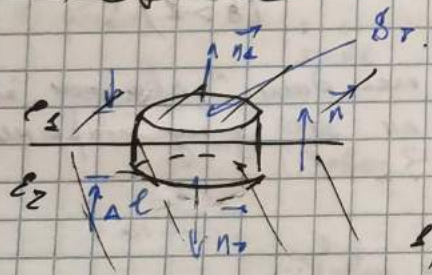
$$\rightarrow E_{x1} l - E_{x2} l = 0$$

$$E_{x1} = E_{x2} \quad \text{всегда!}$$



Заключение: $D_{x1} \neq D_{x2}$, $P_{x1} \neq P_{x2}$!

② ГЧ для D_n



По т. О-Г для $\vec{D}$ (СИ)

$$\oint D_n dS = q_{\text{своб}} \quad (3)$$

1) Заусовка пов-ов - короткий ($h \ll \sqrt{S_{\text{ст}}}$) орг. цилиндр.

(и плоск., её площадь покрывает границу)

2) $\vec{n}$ - дуга для век нормаль к границе (всегда из я-й в ± -10), $\vec{n}_1 \uparrow \vec{n}$, $\vec{n}_2 \uparrow \downarrow \vec{n}$

$$\rightarrow \oint D_n dS = D_{x1} S_{\text{ст}} + D_{x2} S_{\text{ст}} = (D_{x1} - D_{x2}) \cdot S_{\text{ст}} \quad (4)$$

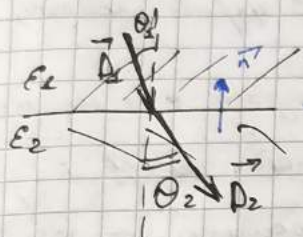
$$q_{своб} = \iiint_{(V)} \rho_{своб} dV + \iint_{(S)} \sigma_{своб} dS = \langle \rho_{своб} \rangle \cdot S \cdot \frac{\Delta l}{\rightarrow} + \langle \sigma_{своб} \rangle \cdot S =$$

$$= \langle \sigma_{своб} \rangle \cdot S$$

$$\Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{своб}$$

Если $\sigma_{своб} = 0$, то $D_{1n} = D_{2n}$

Преломление силовых линий на границе раздела диэлектриков (ЛЦА)



Здесь $\sigma_{своб} = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$

$$\tan \theta = \frac{D_{\tau}}{D_n}$$

$$\Rightarrow \tan \theta_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} = \frac{A_{\tau}}{D_{2n}}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1 E_{1\tau}}{\epsilon_2 E_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \Rightarrow \tan \theta_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tan \theta_2$$

Т.к. это ЛЦА, то линии одинаковы для $\vec{D}$ и $\vec{E}$.

Силы, действующие на макрозаряды в диэлектриках.

Как практически измерять $\vec{E}_{макр}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$ в диэлектриках? Можно ли это сделать в принципе?

- 1) Целя косвенных измерений: если конденсатор заполнен диэлектриком, то

$$C = |\vec{E}_{макр}| \cdot d$$

(в плоском конденсаторе) $\Rightarrow$ измерим $C \rightarrow$ найдем $\vec{E}_{макр}$.

- а) Возможности по прямому измерению? В вакууме $\vec{E}$ - силовая хар-ка:
- $$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}$$

Справедливо ли это в диэлектрике? Здесь q' - пробный заряд, $\frac{q}{F}$ надо найти (измерить!) действующую на него силу.

Но:

Проблема 1: если q' - элементарный заряд (или ион), то за такой часовой невозможность измерить. [Замечание: Купон заряженной ниточки]. И даже если сделать удержание, то F случайная сила в среде, а нужно определенное поле. Значит, нужен макрозаряд. Опасно измерять.

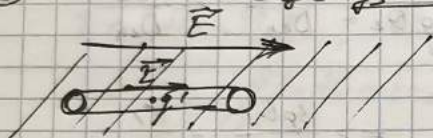
1) Проблема 2: измерение заряженного проводящего тела (хотя бы за счёт ГЧ). Если тело сплошной формы, поле станет неоднородным. Отсюда следует

1) Проблема 3: В неоднородном поле диполь вытянется в сторону сильного поля - т.е. диполь будет приближаться к проводящей телу. Но тогда кроме эл-их появятся другие силы! И возможно $F_{эл} > F_{др}$ - т.е. померить только электрическую силу нельзя!

Единственная возможность что-то измерить - вырезать в среде полость и в неё поместить заряд. В полости вакуум! Но форма полости должна быть такой, чтобы поле не искажалось. Существует 3 формы полости, когда поле не искажается.

Тогда направление $\vec{E}$ известно, и $\vec{E}$ достаточно малая ф-я координат

1) Полость в виде узкого цилиндра с образующей вдоль $\vec{E}$



ГЧ: $E_z = \text{const}$

Проблемой заряд q' далеко от края. Наблюдать связь измеренного и истинного поля.

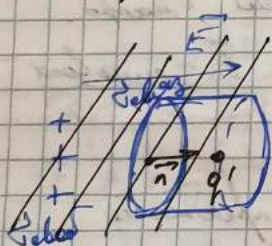
В полости случай $E = E_z \Rightarrow \vec{E}_{пол} = \vec{E}$

т.е. здесь возможно прямое измерение $\vec{E}$. Но $\vec{D}$ искажается.

В полости $\vec{\epsilon} = 1 \Rightarrow \vec{D}_{пол} = \epsilon_0 \vec{E}_{пол}$,

в среде (ЛНА) $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon} \vec{E} \Rightarrow \vec{D}_{пол} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$

2) Полость в виде короткого широкого цилиндра ("монетки") с образующей вдоль $\vec{E}$



ГЧ: $D_n = \text{const}$ (всё $\epsilon = 0$ на границе)

В полости случай $D = D_n \Rightarrow \vec{D}_{пол} = \vec{D}$

Рассмотрим ЛНА $\Rightarrow \epsilon_0 \vec{E}_{пол} = \epsilon_0 \vec{\epsilon} \vec{E}$

$\vec{F} = q' \vec{E}_{пол} = q' \vec{\epsilon} \vec{E} = q' \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}$, т.е. $\vec{F} \sim \vec{D}$

т.о., здесь напрямую измеряют $\vec{D} \Rightarrow$ можно $\vec{E}$.

3) Сферическая полость. В случае ЛНА можно связать $\vec{E}$ с $\vec{E}_{пол}$:

$\vec{E}_{пол} = \frac{\vec{E} + 2}{3} \vec{E}$ (СИ)

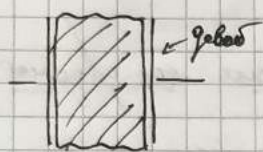
а в случае произвольного однородного диэлектрика

$$\vec{E}_{пол} = \vec{E} + \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \vec{P}$$

Рассчет флуксуэнт (см. приложения)

Энергия эл-ого поля в диэлектрике

Вспомним, как наличие диэлектрика влияет на энергию эл-ого поля. Рассмотрим плоский конденсатор с диэлектриком.



Эта сторона силы совершает работу по зарядке конденсатора:

$$A = \int W_{эл}$$

Как посчитать эту работу?

Удобно: $W_{эл} = W_{л} - \text{с.е. энергии ф-и взаимодействия}$, потому что безразлично, как переносить заряд. Можно через диэлектрик (но тогда не знаем, как A записать), а можно через пустое пространство вокруг конденсатора, тогда

$$A_{стор} = U dq \quad (\text{переносим } q_{воб}!)$$

$$\rightarrow \int W_{эл} = U dq \rightarrow W_{эл} = \int U dq$$

- с.е. не зависит от наличия диэлектрика!

Опр-е C универсально:

$$C = \frac{q}{U} = \epsilon$$

$$W_{эл} = \frac{1}{C} \int q dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

Как же повлиял диэлектрик? Что зависит от ϵ ?

По Парадю: $C = \epsilon C_0$

Тогда по всем формулам результат разный?!

На самом деле парадокс не:

а) если $U = \text{const}$ (конденсатор всё время подключен к источнику), то $W_{эл}$ растет за счёт работы источника;

б) если $q_{воб} = \text{const}$ (конденсатор заряжен и отключен), то $W_{эл}$ уменьшается.

Контрольный вопрос: куда "исчезает" $W_{эл}$ (на что расходуется)?

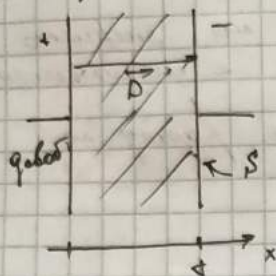
Локализация электрической энергии

В вакууме: энергия в поле (локализована в пространстве, занимаем полем), т.е.

$$W_{эл} = \iiint_{(V)} w_{эл} dV$$

Что такое $w_{эл}$ при наличии диэлектрика?

Рассмотрим на примере плоского конденсатора, полностью заполненного диэлектриком.



Снова используем:

$$W_{эл} = \int_0^{q_{обл}} U dq \quad (1)$$

1) В плоском конденсаторе поле однородное

$$\Rightarrow U = \int_0^d E_x dx = Ed \quad (2)$$

2) Найдем dq . Знаем внешними (см. теорему Э.-Г.)

$$D = D_n = \begin{cases} \frac{q_{обл}}{S} \quad (СИ) \\ \frac{4\pi q_{обл}}{S} \quad (CGSE) \end{cases}$$

$$\Rightarrow dq = dq_{обл} = \begin{cases} S dD \quad (СИ) \\ \frac{S}{4\pi} dD \quad (CGSE) \end{cases} \quad (3)$$

Подставим (2), (3), в (1):

$$W_{эл} = \begin{cases} \int_0^D EdS \cdot dD \quad (СИ) \\ \int_0^D Ed \frac{S}{4\pi} dD \quad (CGSE) \end{cases} = \begin{cases} S \cdot d \int_0^D E dD \\ \frac{S \cdot d}{4\pi} \int_0^D E dD \end{cases}$$

Учтем: $S \cdot d = V$ - объем плоского конденсатора (это и есть объем, занимаемый полем!) $\Rightarrow$ можно записать плотность энергии.

$$\parallel w_{эл} = \begin{cases} \int_0^D E \cdot dD \quad (СИ) \\ \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^D E dD \right) \quad (CGSE) \end{cases}$$

- это общее выражение, справедливое всегда, в любой среде.

В случае ЛД $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, тогда

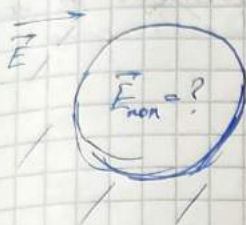
$$\parallel w_{эл} = \begin{cases} \int \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon} = \frac{ED}{2} \quad (СИ) \\ \int \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\epsilon} = \frac{ED}{8\pi} \quad (CGSE) \end{cases}$$

Важное замечание: полученные выражения справедливы справедливо всегда (не только в плоском конденсаторе), в т.ч. и для переменных полей (если ϵ не зависит от ω)

Формирование:

Возникновение поля в сферич. полости.

Дугой диэлектрик поляризован однородно, т.е. поляризация, внеш. поле сферическая $\vec{E}$ и внешнее поле $\vec{E}$ в диэлектрике тоже однородно (т.к. $\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$).



Ищем $\vec{E}_{пол}$, для этого представим, что полость заполнена тем же диэлектриком, что и снаружи.

Полное поле состоит:

$$\vec{E}_{пол} + \vec{E}_{ин} = \vec{E} \quad \text{как и}$$

внешнее поле.

Ищем $\vec{E}_{ин}$ - поле равн. поляризов. шара. Для этого его представим как 2 шара с $+q$ и $-q$, центры совмещены на $\vec{E}$.

Принцип суперпозиции: $\vec{E}_{ин} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

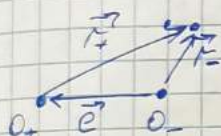


По т. О.-Г.:

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \kappa \cdot 4\pi \int_{(V)} \rho dV$$

$$E_+ = \kappa \cdot \frac{4\pi}{3} \rho \cdot r_+ \quad \text{или} \quad \vec{E}_+ = \kappa \cdot \frac{4\pi}{3} \rho \vec{r}_+ \quad (\text{где } \rho = \rho_+)$$

аналогично $\vec{E}_- = -\kappa \cdot \frac{4\pi}{3} \rho \vec{r}_-$



$$\vec{E}_{ин} = \kappa \cdot \frac{4\pi}{3} \rho (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\kappa \cdot \frac{4\pi}{3} \rho \vec{E}$$

Уточн:

$$\rho \vec{E} = \vec{P} \Rightarrow \vec{E}_{ин} = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3} \vec{P} & (\text{CGSE}) \\ -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} & (\text{SI}) \end{cases}$$

(т.к. $\rho \vec{E} = \frac{q_m}{V} \vec{E} = \frac{|\epsilon| \cdot N}{V} \vec{E} = n \vec{p} = \vec{P}$)

Тогда $\vec{E}_{пол} = \vec{E} - \vec{E}_{ин} = \begin{cases} \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} & (\text{CGSE}) \\ \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} & (\text{SI}) \end{cases}$

Если задано ϵ , можно еще исключить $\vec{P}$:

(SI) $\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 (1 + \alpha) \quad \text{или} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 (1 + \alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{E} - \vec{E}_0}{\vec{E}_0}$$

тогда $\vec{P} = (\vec{E} - \vec{E}_0) \epsilon_0$

$$\vec{E}_{пол} = \vec{E} + \frac{1}{3} (\vec{E} - \vec{E}_0) = \frac{2 + \epsilon}{3} \vec{E}$$

то же еще в CGSE: $\vec{P} = \alpha \vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 (1 + 4\pi\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{E} - \vec{E}_0}{4\pi \vec{E}_0} \Rightarrow \vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}$$

$$\vec{E}_{пол} = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E} = \frac{\epsilon + 2}{3} \vec{E}$$

- ① Точечные (свободные) заряды q_1, q_2 в диэлектрике (ЛУД) с заданным ϵ . Можно найти силу:

 $W_{эл} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon} \sim \frac{1}{\epsilon r^4}$ (используем $\vec{D}$, т.к. поток $\vec{D}$ зависит только от $q_{воб}$)

$\Rightarrow W_{эл} = \iint_V W_{эл} dV \sim \frac{1}{\epsilon r}$

$\Rightarrow F \sim \frac{1}{\epsilon r^2}$

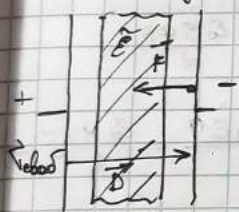
нолько если св-ва диэ. не изменяются в объёме + однородной.

Важно (!) 1) Найти результирующую силу (и упр., и эл.)!

2) Диэлектрик должен занимать всё пространство (не учитывать ГУ)

3) Заряды должны быть точечными или из сферических телесх.

- ② Сила, действующая на обкладки плоского конденсатора.



а) непосредственный расчёт (без использования $W_{эл}$)

ЛУД с известным ϵ в конденсаторе $\Rightarrow$

$D = q_{воб} \quad (SI)$

$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon} \Rightarrow E = \begin{cases} \frac{q_{воб}}{\epsilon_0} & \text{в диэ.} \\ \frac{q_{воб}}{\epsilon_0 \epsilon} & \text{в ЛУД} \end{cases}$

$|\vec{F}| = q_{воб} \cdot \frac{1}{2} \frac{q_{воб}}{\epsilon_0}$

($\frac{1}{2}$ из-за того, что $\vec{E}$ создано зарядом обеих обкладок; поле больше в диэ., т.к. обкладка не касается пластин) ~ электрическая сила

б) энергетический расчёт:

ЛУД занимает весь конденсатор

$W_{эл} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \epsilon} \sim \frac{1}{\epsilon} \quad (C = \frac{\epsilon_0 S}{x})$



Пусть обкладка сместилась на dx :

$F_x = - \frac{\partial W_{эл}}{\partial x} \Big|_q$

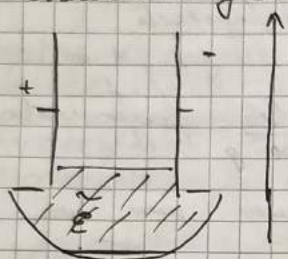
$W_{эл} = \frac{q^2 x}{2\epsilon_0 \epsilon S} \Rightarrow F_x = - \frac{q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S} = - \frac{q \cdot \sqrt{\epsilon_0 S}}{2\epsilon_0 \epsilon} \sim \frac{1}{\epsilon}$

Знак "-" в формуле автоматически учитывает притяжение.

Но теперь $F_x \sim \frac{1}{\epsilon^2}$, в случае (а) ϵ никак не зависит.
Какой ответ верный?

Оба верны, камерой соответствует своему случаю. В 1-м случае $F_{эл}$ — сила притяжения ЛКД с обкладкой $\Rightarrow$ найдена правильно, $F_{эл}$. Во 2-м случае диэлектрик $\Rightarrow$ взаимодействует с зарядами обкладок, есть F_m и $F_{пр}$, т.е. найдена F_{ϵ} и разделив компоненты этой силы невозможно!

③ Втягивание диэлектрика в конденсатор.

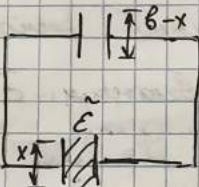
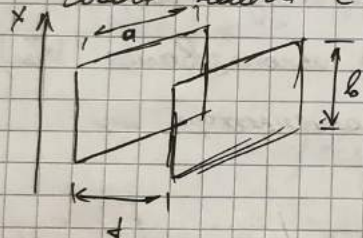


Конденсатор заряжен, отключен от источника, затем погружен на малую глубину в ЛКД.

Какая сила действует на диэлектрик?

$$F_x = - \frac{\partial W_{эл}}{\partial x} \Big|_q = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2C} \right) \Big|_q = + \frac{q^2}{2C^2} \frac{dC}{dx}$$

Зная зависимость $C(x)$, используем эквивалентную схему:



$$C = \frac{\epsilon_0 a(b-x)}{d} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\epsilon} a x}{d}$$

$$\frac{dC}{dx} = - \frac{\epsilon_0 a}{d} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\epsilon} a}{d} = \frac{\epsilon_0 a}{d} (\tilde{\epsilon} - 1)$$

П.к. $\tilde{\epsilon} > 1$, то $\frac{dC}{dx} > 0 \Rightarrow F_x > 0$ — втягивается!

(кроме роли краевые эффекты)

б) Проведя все время считая подключенным к источнику. Снова можем найти силу из энергетических соображений

$$\Delta A_{ист} = \Delta W_{эл} + \Delta A_{мех}$$

$\Delta A_{мех}$ — работа эл. поля (максимум, по втягиваемому диэлектрику)

$$\left\{ \begin{aligned} W_{эл} &= \frac{CU^2}{2} \Rightarrow \Delta W_{эл} = \frac{U^2}{2} \Delta C \\ \Delta A_{мех} &= F_x \Delta x \end{aligned} \right.$$

$$\Delta A_{ист} = \xi \cdot dq = U dq = U^2 \Delta C \quad (\text{п.к. } q = UC)$$

$$\Rightarrow U^2 \Delta C = \frac{U^2}{2} \Delta C + F_x \Delta x$$

$$\Rightarrow F_x = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial W_{эл}}{\partial x} \Big|_U$$

Окончательно:

$$F_x = - \frac{\partial W_{эл}}{\partial x} \Big|_q = + \frac{\partial W_{эл}}{\partial x} \Big|_u$$

Вернёмся к примеру ⑤ (втягивание диэлектрика в конденсатор). Получим

$$F_x = - \frac{\partial W_{эл}}{\partial x} \Big|_q = \frac{q^2}{2\epsilon^2} \frac{d\epsilon}{dx} = \frac{U^2}{2} \frac{d\epsilon}{dx} = \frac{\partial W_{эл}}{\partial x} \Big|_U$$

т.е. сила одинаковая при q -const и U -const. Но самым дал втягивание происходит за счёт правых эффеов, они есть всегда, поэтому диэлектрику, всё равно, что постоянно (q или U)

Различные механизмы поляризации диэлектриков.

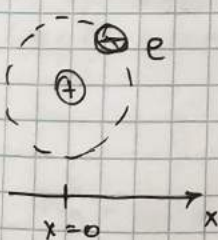
Мы ввели раньше α и ϵ феноменологически. Но надо выяснить от чего они зависят, как зависят от времени (в частости от T или p). Кратчайший строгий расчёт - квантовый, мы же рассмотрим (приближённо) классическую модель.

Квантирование ("электронный") механизм поляризуемости газов.

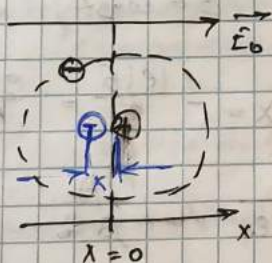
Рассмотрим газ с неполярными молекулами, т.е. при $\vec{E}_0 = 0$ средний дипольный момент каждой молекулы $\langle \vec{p} \rangle_0 = 0$. Когда $E_0 \neq 0$, атом малого (!) деформируется.

Пример: атом $M \rightarrow 2$ электрона.

$$\vec{E}_0 = 0$$



$$\vec{E}_0 \neq 0$$



Если $\vec{E}_0$ великочет, деформация исчезает.

т.к. $m_+ \gg m_-$, то смещение + пренебрежимо мало, вся деформация из-за смещения -.

Мера деформации - $|x|$ (сдвиг от центра $x=0$).

Тогда при $\vec{E}_0 \neq 0$ появляется дипольный момент

$$p = |e|x, \text{ очевидно } x \sim E_0$$

Введём коэф-т пропорциональности:

$$p = \beta E_0$$

- дипольный момент сродного атома. В многоэлектронных атомах всё происходит аналогично.

1. Коэффициент β называется поляризуемостью молекулы.

Из опыта известно: β различен у разных молекул.

Выразим поляризуемость β $\propto$ через β :

$$P = \alpha \epsilon_0 E_0$$

Из опр.

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N P_i = \frac{N}{\Delta V} P = n P = (\text{все молекулы})$$

$$= n \beta \epsilon_0 E_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = n \beta}$$

Но реально - то мы пока ничего не нашли! Просто выразили форму неизвестную величину (α) через другую (β). И всё-таки кое-какая информация о свойствах поляризуемости тут есть! По ф-ле составлена идеальная модель

$$P_g = n k T \quad (P_g - \text{давление})$$

$$\Rightarrow n = \frac{P_g}{k T}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{P_g}{k T} \beta}$$

- откуда следует, что β не должно зависеть от T (по крайней мере при не слишком больших T). Теперь учтём "квазиупругость" ($|x| \sim E_0$). Введём κ - эффективный коэффициент "жёсткости" молекулы, тогда

$$F_{упр} x = -\kappa x$$

Закон движения электрона:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{эл} x + F_{упр} x = -|e| E - \kappa x$$

$$\text{В статическом поле } E \neq E(t) \quad (E = \text{const}) \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$(\text{статическая деформация}) \Rightarrow x = -\frac{|e| E}{\kappa} = \frac{e E}{\kappa}$$

$$\text{Учтём: } E = \frac{P}{\alpha \epsilon_0} = \frac{P}{n \beta \epsilon_0} = \frac{n P}{n \beta \epsilon_0} = \frac{P}{\beta \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow x = \frac{e P}{\kappa \beta \epsilon_0} = \frac{e^2 x}{\kappa \beta \epsilon_0} \quad (P = |e| x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{e^2}{\kappa \epsilon_0}}$$

Оказывается, κ можно оценить: если $E = E(t)$, то будет колебания с $\omega^2 = \frac{\kappa}{m_e}$, величина ω опр-ся из экспериментов (спектроскопия). Тогда $\kappa = m_e \omega^2$

$$\Rightarrow \beta = \frac{e^2}{m \omega^2 \epsilon_0}$$

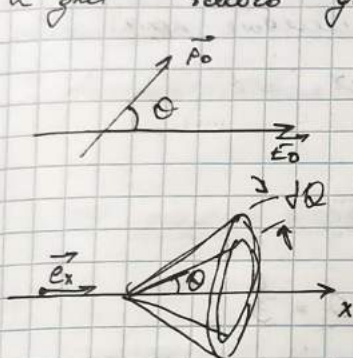
Обычно $\beta \sim 10^{-24}$ (CGSE)

Ориентационный механизм поляризации (случай полярных молекул)

Рассмотрим диполь, у которого молекулы имеют дипольный момент $\vec{p}_0$ даже при $E_0 = 0$. Деформация при $E_0 \neq 0$ здесь тоже есть, но слабая (пренебрежем).

При $E_0 = 0$ из-за теплового движения $\langle \vec{p}_0 \rangle_t = 0$.

Внешнее поле E_0 ориентирует диполь. Найдем поляризуемость α для такого диполя.



Тепловое движение стремится раскидать диполь, поэтому θ - случайный угол. Тогда сначала найдем вклад в поляризуемость тех диполей, у которых $\vec{p}_0$ составляет угол θ до $\theta + d\theta$ с осью x ($\vec{E}_0 \parallel E_0$):

$$dP_x = dn \cdot p_{0x} = dn \cdot p_0 \cos \theta \quad (\text{т.к. } \vec{P} = n \vec{p}),$$

dn - число нулевых диполей в единице объема. Они имеют в тесенном угле

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta,$$

$$dn = f(\theta) \cdot d\Omega \cdot n = f(\theta) \cdot 2\pi \sin \theta d\theta \cdot n,$$

$f(\theta)$ - функция распределения.

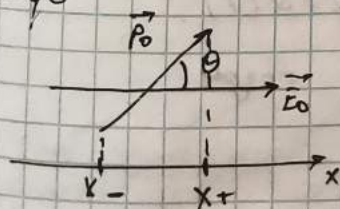
Поскольку надо фиксировать тепловое движение, то $f(\theta)$ должна быть функцией распределения по энергиям, т.е. распределение Больцмана.

$$f(\theta) = A_0 e^{-\frac{W_n}{kT}},$$

W_n - потенциальная энергия диполя в поле E_0 .

Найдем W_n и $f(\theta)$

$$\vec{p}_0 = q\vec{r}$$



$$\begin{aligned} W_n &= q_+ \varphi_+ + q_- \varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-) = q \int_{x_-}^{x_+} E_0 dx = \\ &= q E_0 (x_- - x_+) \end{aligned}$$

Здесь $\varphi_+ \equiv \varphi(x_+)$, $\varphi_- \equiv \varphi(x_-)$ - в этих точках находятся заряды $+q$ и $-q$.

Пусть $x_- = 0 \Rightarrow x_+ = \rho \cos \theta$

$$\Rightarrow W_x = -q \rho E_0 \cos \theta = -\rho_0 E_0 \cos \theta$$

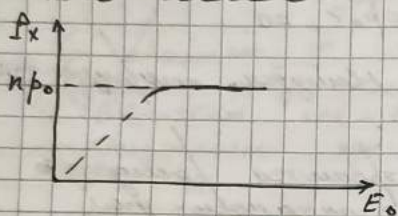
Тогда $f(\theta) = A_0 \exp\left(+\frac{\rho_0 E_0 \cos \theta}{kT}\right)$

Все собираем: $d n = A_0 \exp\left(\frac{\rho_0 E_0 \cos \theta}{kT}\right) \cdot 2\pi \sin \theta d\theta \cdot n$

$$P_x = \int_{(P_x)} dP_x = \int_{(n)} d n \rho_0 \cos \theta = 2\pi A_0 n \rho_0 \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta \exp\left(\frac{\rho_0 E_0 \cos \theta}{kT}\right) d\theta$$

Если поле сильное (т.е. $\rho_0 E_0 \cos \theta \gg kT$), то все вычисляется

уже поляризованное



Нам интереснее процесс поляризации

$\Rightarrow$ рассмотрим слабые поля:

$$\rho_0 E_0 \cos \theta \ll kT \Rightarrow$$

$$\exp\left(\frac{\rho_0 E_0 \cos \theta}{kT}\right) \approx 1 + \frac{\rho_0 E_0 \cos \theta}{kT}$$

Сделаем срещивание:

$$\int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{2}{3}$$

Тогда

$$P_x = 2\pi A_0 n \rho_0 \cdot \frac{\rho_0 E_0}{kT} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \pi A_0 \frac{n \rho_0^2 E_0}{kT}$$

Постоянную A_0 найдем из условия нормировки:

$$\int_0^\pi f(\theta) \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = 1$$

$$\Rightarrow 2\pi A_0 \int_0^\pi \left(1 + \frac{\rho_0 E_0 \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta = 4\pi A_0 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{4\pi}$$

Окончательно

$$P_x = \frac{n \rho_0^2 E_0}{3kT} \quad \left| \begin{array}{l} \text{С другой стороны, } \vec{P} = \alpha E_0 \vec{E}_0 \end{array} \right| \Rightarrow \alpha = \frac{n \rho_0^2}{3kT}$$

Теперь видно, что с квазиуругим механизмом здесь принципиальная разница: при $n = \text{const}$, $\alpha = \alpha(T)$.

Пусть диэлектрик - газ и пусть $\rho_g = \text{const}$, тогда

$$n = \frac{\rho_g}{kT}$$

Тогда

$$\alpha \sim \frac{n}{\tau} \sim \frac{1}{\tau^2}$$

Это зависимость показана: чем больше τ , тем больше случайные столкновения разбрасывают диполь $\Rightarrow$ флуктуация сильнее $\Rightarrow \alpha$ уменьшается.

Важно: всегда в статистических полях $\alpha > 0$ при любых механизмах

Диэлектрическая проницаемость конденсированных сред.

Рассмотрим жидкий диэлектрик. Для $\tau \ll \tau_{\text{дф}}$, $r_{\text{дф}} \gg r_2 \Leftrightarrow n_{\text{дф}} \gg n_2$. Но чем больше n , тем больше α при любом механизме поляризации. У жидкостей $\alpha \approx 1$. Но при этом зависимость α не только в конденсированных.

Рассмотрим теперь только вращательный механизм:

$$\alpha = n\beta$$

$\Rightarrow$ должно быть $\frac{\alpha_{\text{ж}}}{\alpha_2} = \frac{n_{\text{ж}}}{n_2}$, но мы опыте это не так!

На опыте $\frac{\alpha_{\text{ж}}}{\alpha_2} > \frac{n_{\text{ж}}}{n_2}$.

Объяснение дан Лоренцем. Он ввел:

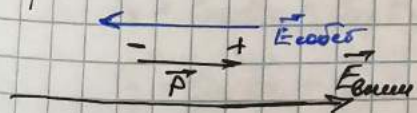
Плотность действующего (эффективного) поля.

То есть для $\vec{E}_0$ поминим $\vec{E}_{\text{макр}}$, но надо брать не это поле, а $\vec{E}_{\text{эф}}$, и оно больше. $\vec{E}_{\text{макр}}$. Что это за поле?

Мысленно выделим 1 молекулу (диполь). Но сам по себе диполь не действует, но него действует все остальные диполи. Т.о., $\vec{E}_{\text{эф}}$ - это полное (результатирующее) поле без $\vec{E}_{\text{собств}}$:

$$\vec{E}_{\text{эф}} = \vec{E}_{\text{внеш}} + \vec{E}_{\text{других дип.}}$$

Для этого $\vec{E}_{\text{собств}} \perp \vec{E}_{\text{внеш}}$. Но в $\vec{E}_{\text{макр}}$, входит $\vec{E}_{\text{собств}}$ поэтому результирующее поле было меньше.



Теперь

$$|\vec{E}_{\text{эф}}| > |\vec{E}_{\text{макр}}|$$

Для изотропных сред $\vec{E}_{\text{эф}}$ можно вычислить. Мысленно выделим в среде сферическую область, в ней находится 1 диполь.

В лекции 12.11.21 было:

$$\vec{E}_{\text{пол}} = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} = \vec{E}_{\text{макро}} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

Вот это и есть $\vec{E}_{\text{эф}}$, т.е. мы вырезаем пометку и это искомое собственное поле диполя. Т.о.,

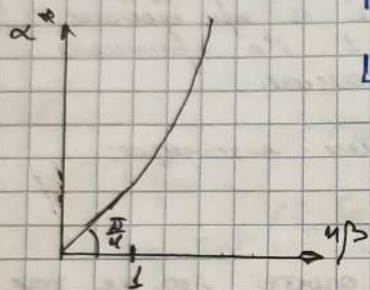
$$\vec{E}_{\text{эф}} = \vec{E}_{\text{макро}} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

Тогда $\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_{\text{эф}} = \alpha \epsilon_0 \left(\vec{E}_{\text{макро}} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \right)$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{\alpha \epsilon_0}{1 - \frac{\alpha}{3}} \vec{E} = \frac{n^2 \epsilon_0}{1 - \frac{n^2}{3}} \vec{E}$$

Тогда при постоянной поляризуемости надо написать

$$\alpha^* = \frac{n^2}{1 - \frac{n^2}{3}}$$



При $\frac{n^2}{3} \rightarrow 1$ формально $\alpha^* \rightarrow \infty$

Еще перепишем:

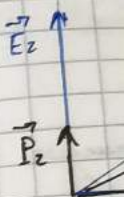
$$\vec{P} \left(1 - \frac{n^2}{3} \right) = n^2 \epsilon_0 \vec{E}$$

Отсюда видно: при $\frac{n^2}{3} = 1$ получили возможность $\vec{P} \neq 0$ при $\vec{E} = 0$ - т.е. возможна самопроизвольная поляризация!

Важно! для полярных молекул (т.е. для ориентационного механизма) эта теория не годится!

Криво
принадле
молеку
разнос
уши
возро
т.е.

Ем
разнос



Но
Вел

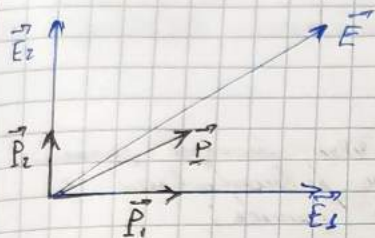
Свойства диэлектрических свойств кристаллов. Тензор диэлектрической проницаемости.

Кристаллы состоят из атомов, эти атомы образуют пространственную периодичность. В природе кристаллы могут быть с атомами/молекулами/ионами в узлах. При этом оказывается, что св-ва в разных направлениях могут отличаться: нас интересует ϵ (или $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$) - оно разное. Это значит, что кристалл анизотропен. В изотропной среде ϵ не зависит от направления, т.е.

$$\vec{P} \parallel \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \parallel \vec{E}$$

Если кристалл не симметричен, то ϵ в разных направлениях разное - это анизотропный диэлектрик. Теперь

$$\vec{P} \nparallel \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \nparallel \vec{E}$$



Разложим по компонентам:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

Если $\frac{P_1}{E_1} \neq \frac{P_2}{E_2}$ - это и есть анизотропия

Но как же теперь вывести материальное уравнение?

Вспомогательная ситуация была в механике т.д.: при вращении кристалла т.д. возможно $\vec{N} \nparallel \vec{\omega}$. Для связи $\vec{N}$ и $\vec{\omega}$ использовали тензор инерции:

$$N_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$N_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$$

$$N_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$

Здесь аналогично:

(в СИ)

$$P_x = \epsilon_0 (\alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z)$$

$$P_y = \epsilon_0 (\alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z)$$

$$P_z = \epsilon_0 (\alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z)$$

Тогда ϵ свмещается с $\vec{E}$:

$$D_x = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z$$

$$D_y = \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z$$

$$D_z = \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z$$

Т.д., в общем случае $n = 1$, а 9 значений ϵ определяются, связи нет. Но известно, что в статических полях тензор симметричен:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (i, j = x, y, z)$$

1. - тогда надо задавать всего 6 элементов. С другой стороны, из алгебры известно, что любой симметрический тензор можно свести к диагональному виду, т.е. привести к главному осам. Тогда остается 3 элемента:

$$\epsilon_x = \epsilon_{xx} ; \epsilon_y = \epsilon_{yy} ; \epsilon_z = \epsilon_{zz},$$

и связь упрощается:

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_x E_x \\ D_y &= \epsilon_y E_y \\ D_z &= \epsilon_z E_z \end{aligned}$$

В общем случае $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$. Такие кристаллы называются двуосными. Но встречаются вещества, у которых $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$. Это одноосные кристаллы.

Плотность энергии в анизотропных средах.

В изотропном диэлектрике выражение для $w_{эл}$ можно записать через E^2 или D^2 или (E, D) - все формулы равноправны. В анизотропной среде справедливо только одна запись:

$$\begin{aligned} w_{эл} &= \int \vec{E} \cdot d\vec{D} \quad (SI) \\ \text{или} \quad w_{эл} &= \frac{1}{4\pi} \int \vec{E} \cdot d\vec{D} \quad (CGSE) \end{aligned}$$

т.е. здесь нет никаких допущений о свойствах диэлектрика. Но если тензор диагональный, т.е.

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix}, \quad \text{то}$$

$$\begin{aligned} w_{эл} &= \int (\epsilon_x \vec{e}_x + \epsilon_y \vec{e}_y + \epsilon_z \vec{e}_z) \cdot (D_x \vec{e}_x + D_y \vec{e}_y + D_z \vec{e}_z) = \\ &= \int \epsilon_x \cdot E_x \cdot dE_x + \int \epsilon_y \cdot E_y \cdot dE_y + \int \epsilon_z \cdot E_z \cdot dE_z = \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2) \quad (SI) \end{aligned}$$

Нелинейные диэлектрики. Сегнетоэлектрики.

Теперь пусть диэлектрик анизотропный (!). В линейной среде $\vec{P} \sim \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \sim \vec{E}$

В нелинейных полях все вещества становится нелинейными:

$$\alpha = \alpha(\vec{E}) \Rightarrow \epsilon = \epsilon(\vec{E})$$

Механизмы нелинейности.

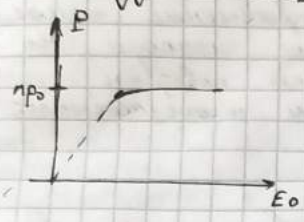
2) Косинусный - дипольный момент сд. объема P достигает максимума.

Для ориентационного механизма поляризации важно соотношение между $(\vec{p}_0, \vec{E}_0)$ и kT . Если

$$(\vec{p}_0, \vec{E}_0)/kT \geq 1.$$

будет косинусный - все диполи выстроились вдоль $\vec{E}_0$.

Тогда E_0 растет, а $P = \text{const}$



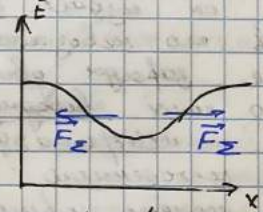
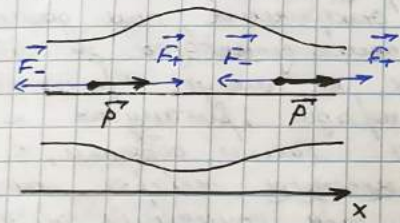
3) Тепловая нелинейность: если T меняется в процессе поляризации, то меняется α :

для электронного механизма $\alpha = \frac{p_0}{kT} \beta$

для ориентационного механизма $\alpha = \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 kT} = \frac{p_0 \cdot p_0^2}{3\epsilon_0 (kT)^2}$

~ в любом случае при $p_0 = \text{const}$, $\alpha \neq \text{const} \Rightarrow P \neq E$.

3) Градиентный механизм нелинейности. Пусть поле $\vec{E}$ неоднородное. Диполи выстраиваются в области сильного поля.



Это приводит к уменьшению мощности среды (сдвиги в областях, где E больше, разреженные тем, где E меньше).

Такое явление называется электрофривиней. При этом $n = n(\vec{r}) \Rightarrow \alpha = \alpha(\vec{r})$

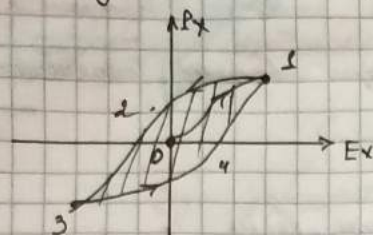
4) Тройной (удельная поляризация) - типично нелинейнейшей процесс, само состояние вещества меняется под действием поля.

Уникальные нелинейные св-ва проявляет сегнетово соль ($KNaC_4H_4O_4 \cdot 4H_2O$, открыта в 1855г.) Позднее (~30е годы XX в.) такие же свойства были выявлены у других веществ. Все они получили название сегнетоэлектриков.

Св-ва сегнетоэлектриков:

- 1) в слабых полях $D \sim E$ (линейность!)
- 2) даже в слабых полях $\epsilon = \epsilon + \alpha \sim 10^3 - 10^4$ (рекорд!)
- 3) в сильных полях - сильная нелинейность: $P = P(E)$, $D = D(E)$.

4) многозначность связи $D(E)$, зависит от предистории.



Дает сложную зависимость не параметризовано (≈ 0). При увеличении E связь диктор достигает насыщения. При уменьшении E в начальном состоянии вещество не придет!

Или в какое произвольное поле! При изменении E (и модуль, и направление) меняем кривую не проходит по тем же точкам. Но если процесс смены E многократно, диктор повернется, установится петля гистерезиса. Хорошо видно многозначность зависимости $P(E)$.

5) свойства зависят от температуры. Петля существует только при $T < T_k$. (T_k - температура или точка Кюри). При $T > T_k$, но $T - T_k \ll T_k$ известно, что $\chi(T) \sim \frac{1}{T - T_k}$

При обратном охлаждении петля восстанавливается, т.е. это обратимый процесс. У сегнетовой соли 2 точки Кюри: -15°C и $+22,5^\circ\text{C}$, гистерезис есть только между ними.

6) На графике $P(E)$ есть точки, где $E=0$, а $P \neq 0$. Это аномальная связь полюсов постоянных магнитов. Такие в-ва (с остаточной поляризацией) называются электретными. Образцы электрета - это готовые макродиэлектрики, он создает свое электрическое поле даже при $E_0=0$. Но использовать его невозможно: поле существует за счет связи, а связанные заряды двигаться не могут. Кроме того, под действием этого поля свободные заряды притянутся и "помогут" электрету и нейтрализуют их. Таким образом, в качестве источника постоянного напряжения электрет использовать не удастся. Но их можно применять для получения импульсов тока.

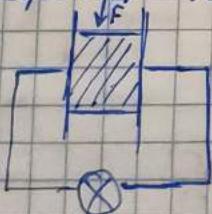
7) у электретов существует пьезоэффект, он ч.б. прямой и обратный.



Если образцы деформировать (сжать, растянуть) силой F , то появляются заряды связи, это даст $U(F)$ между обкладками конденсатора (прямой пьезоэффект).

Обратный пьезоэффект - появление деформаций при появлении внешнего поля. Такая электромеханическая связь используется (в пьезодатчиках, пьезоэлементах, в гидролокаторах для создания звукового акустического излучения, ...)

Контактный эффект (парадокс, связанный с пьезоэффектом):



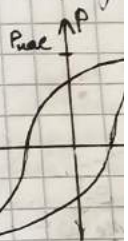
Если под действием силы F на образец (сжмать, растянуть), то появится ток (лампа загорится). Но на поверхности диэлектрика связанные заряды, они не могут сбежать по проводу. Откуда же берется ток?

Чем больше из образцов - где уже есть возможность

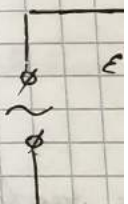
При пр...

Но даем внешнего поля твердое, поэтому ток образцов не возникает, линия, даем природы

Матрицу



Петли под действием



Плоская свободная масса

Джет

Устойчивое движение

1)

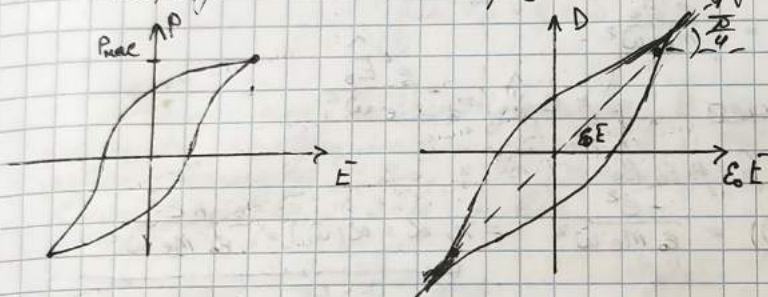
Чем объясняются такие св-ва сегнетоэлектриков? Для в-ва сегнетоэлектриков - доменов (они достаточно крупные, видны в микроскоп), где уже есть предварительная поляризация почти до насыщения. Возможность существования таких областей следует из соотношения

$$\vec{P} \left(1 - \frac{\eta \beta}{3}\right) = \eta \beta \epsilon_0 \vec{E}$$

При $\frac{\eta \beta}{3} \rightarrow 1$ получаем $P \neq 0$ при $E = 0$.

Но домены при $E = 0$ не ориентированы. При наложении внешнего поля E домены поворачиваются или по E , но вещество твердое, поэтому изменяются границы областей: растут границы тех областей, где $\vec{P} \uparrow \uparrow \vec{E}$, это энергетически выгодно, невыгоднее области "сворачиваются". В результате весь образец превращается в 1 сплошной "выгодный" домен. При выключении поля домены снова разориентуются. Но настоящее объяснение природы и свойств сегнетоэлектриков должно быть квантовым.

Нарисуем петлю гистерезиса на двух плоскостях:



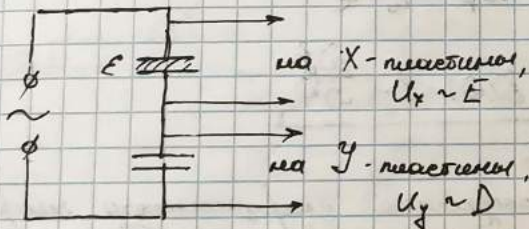
Из оц. $\vec{D}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$\Downarrow$

при $P = P_{max}$ у $D(E)$ есть асимптота

Петлю $D(E)$ можно наблюдать на осциллографе! Схемы подключения:



Контрольный вопрос: объясните схему (по чему $U_x \sim E$, $U_y \sim D$; почему 1 конденсатор пустой, а другой заряжен; почему они включены последовательно).

Диэлектрическая проницаемость плазмы

Плазма - это ионизированный газ. Главное св-во плазмы - наличие свободных электронов. Рассмотрим простейшую модель св-ва плазмы проявляющих в переменных полях $\vec{E} = E^0(t)$.

Пусть

$$\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Условие, что масса ионов $\gg m_e$, т.е. ионы в поле почти не двигаются (не успевают за $T = \frac{2\pi}{\omega}$). Значит, св-ва плазмы определяются электронами. Поэтому:

1) пренебрегаем силами ионов;

2) рассматриваем скорости $v \ll c$;

3) не учитываем столкновения.

Тогда уравнение движения электрона

$$m_e \ddot{x} = -e \vec{E} = -e E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Пусть $\vec{E}_0 \parallel \vec{e}_x$ (орд осей) $\Rightarrow m_e \ddot{x} = -e E_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Используем для решения метод комплексных амплитуд,

$$\hat{E}(t) = \hat{E}_0 e^{i\omega t}, \text{ где } \hat{E}_0 = E_0 \cdot e^{i\varphi}$$

Решение ищем в виде $\hat{x}(t) = \hat{x}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{\hat{x}} = -\omega^2 \hat{x}$

Уравнение примет вид $-m_e \omega^2 \hat{x}_0 e^{i\omega t} = -e \hat{E}_0 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \hat{x}_0 = -\frac{e \hat{E}_0}{m_e \omega^2}$$

Найдём дипольный момент: $\hat{p} = e \hat{x}_0 = -\frac{e^2 \hat{E}_0}{m_e \omega^2}$

С другой стороны: $\hat{p} = \beta \epsilon_0 \hat{E}_0$

$$\Rightarrow \beta = \beta(\omega) = \frac{-e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} \Rightarrow \alpha = \alpha(\omega) = -\frac{n e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2}$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \alpha(\omega) \Rightarrow \tilde{\epsilon}(\omega) = 1 - \frac{n e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2}$$

Введём плазменную частоту: $\omega_p^2 = \frac{n e^2}{\epsilon_0 m_e}$

Тогда можно ещё переписать: $\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

1) Зависимость от частоты - это проявление инерционности электронов. Видно, что при $\omega \gg \omega_p$ будет $\tilde{\epsilon} \rightarrow 1$ - важна полярность в вакууме.

2) $\kappa(\omega) < 0 \Rightarrow \vec{p} \uparrow \downarrow \vec{E}$!

3) $\tilde{\epsilon}(\omega) < 1$ всегда (в металле!)

4) Если $\omega < \omega_p$, то $\tilde{\epsilon} < 0 \Rightarrow \vec{D} \uparrow \downarrow \vec{E}$ - это важно для радиосвязи, т.к. происходит отражение радиоволн от ионосферы.

Ток смещения в диэлектриках.

В вакууме или в металле

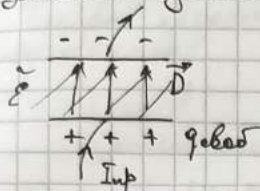
$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{тогда}$$

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \beta \cdot 4\pi \oint_{(S)} \left(\vec{j}_n + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}_n}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

(L) (S)

Что будет в диэлектриках? Максвелл постулировал, что ток смещения тоже есть, и он должен дополнять ток проводимости, чтобы магнитное поле определялось всегда однозначно.

Снова рассмотрим процесс зарядки конденсатора (теперь он жидкостной диэлектриком). Ток падает на иголки (по рис.) обкладкам, там конится свободный заряд.



По орг. тока проводимости

$$I_{пр}(t) = \frac{dq_{своб}}{dt}$$

Тогда по Максвеллу, получим

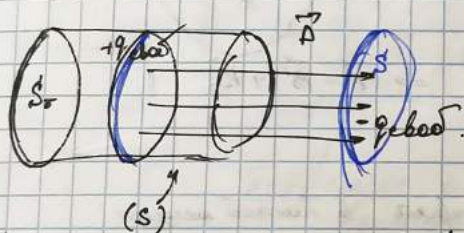
$$I_{см}(t) = I_{пр}(t)$$

~ ток смещения возникает собой ток проводимости в разрыве.

Найдём $\frac{dq_{своб}}{dt}$ по формуле О.-Г. для $\vec{D}$:

$$\oint_{(S)} \vec{D}_n dS = q_{своб} (SI)$$

Учтём, что, вне конденсатора $\vec{D} = 0$ и выберем (S) - цилиндр с образующей вдоль $\vec{D}$, форма сечения соответствует форме обкладок, $S_{\pi} = S$ (S - площадь обкладок), один торцы в конденсаторе, 2-й - вне.



$$\begin{aligned} \frac{dq_{своб}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \oint_{(S)} \vec{D}_n dS = \oint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}_n}{\partial t} dS = \\ &= \frac{\partial D_n}{\partial t} S_{\pi} = \frac{\partial D_n}{\partial t} S \quad (1) \end{aligned}$$

Учтём:

$$I_{см} = I_{пр} = \frac{dq_{своб}}{dt} \quad (2)$$

$$I_{см} = \oint_{(S)} j_{см,n} dS \quad (3)$$

Тогда из (1), (2) и (3):

$$j_{см,n} = \frac{\partial D_n}{\partial t}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right\} !!$$

По орг. $\vec{D} (SI)$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \Rightarrow \vec{j}_{см} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{aligned}$$

Слагаемое $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ было и в вакууме. Добавка $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ - поляриза-
ционный ток смещения (потоки тока). В вакууме смещается
ничего, а в диэлектрике название "ток смещения" состоит
полностью.

Частная формула, проверяемая только в МД при
ε-соедв:

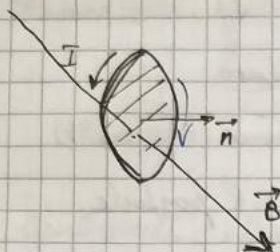
$$\text{т.к. } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \text{ то } \vec{j}_{см} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Самостоятельно: получить $\vec{J}_{\text{мш}}$ в CGSE [для которого:

$$\vec{J}_{\text{мш}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}] \sim \text{в CGSE}$$

21.11.21.

Магнитные поля в веществе.



Пусть есть виток с током,

$$\vec{p}_m = I \vec{S} \vec{n}$$

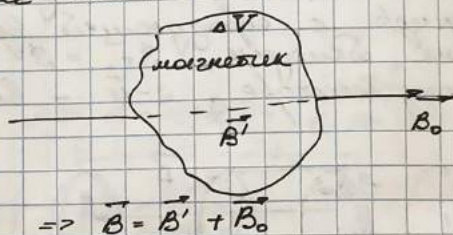
~ имеет дипольный момент.

$$\vec{M} = [\vec{p}_m; \vec{B}]$$

~ ориентирован виток в более выгодное энергетическое положение

$\vec{B}_0$ - без вещества.

Помещаем магнитик в это внешнее поле:



$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}' + \vec{B}_0$$

$$\text{Отр } \vec{B}_{\text{макро}} = \frac{1}{\Delta V} \int_V \vec{B}_{\text{микро}} dV$$

(вычисляете или измерять в каждой точке практически невозможно)

Эл. поле	Символическая хар-ка	Вектор-характеристика среды	Дополнит. вектор
Магн. поле	$\vec{E}$	$\vec{P}$ - вектор поляризации	$\vec{D}$
	$\vec{B}$	$\vec{J}$ - вектор намагниченности	$\vec{H}$ - вектор напряженности

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{ci} = \left\{ \text{если мал. диэлектрик} \right\} = \frac{N}{\Delta V} \vec{p}_c = n \vec{p}_c$$

По аналогии: $\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{mi} = \left\{ \text{если все атомы} \right\} = \frac{N}{\Delta V} \vec{p}_m = n \vec{p}_m$

"Молекулярные токи" - аналогия со "свободными токами"

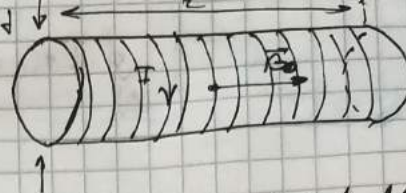
обусловлены движением электронов в атомах, т.е. "молекулярные токи".

Пример прямого вычисления $\vec{B}'$ -
связь $\vec{B}$ и $\vec{J}$.

$\ell \gg r$, N витков

$$B_0 = \beta \cdot 4\pi n I = \beta \cdot 4\pi \frac{N}{L} I \equiv \beta \cdot 4\pi I_1,$$

$$\text{где } I_1 \equiv \frac{N}{L} I$$



Теперь представим, что заменим магнитосол.

$\Rightarrow I_{\text{мол}} \uparrow \uparrow$, т.к. на границе нет компенсирующей мол. ток. токов.

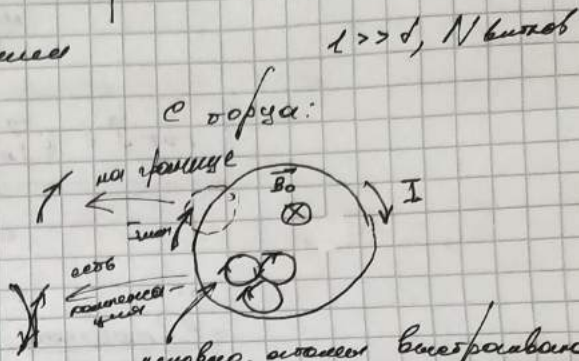
По аналогии:

$$B' = \beta \cdot 4\pi I_{\text{мол}}$$

$$J = n \cdot p_m = \frac{\text{Плотность}}{S \ell} = f I_{\text{мол}} \cdot S_{(z)} \quad (\text{ок, в 1 векторе})$$

$$\ominus f I_{\text{мол}}$$

$$\Rightarrow B' = \beta \cdot 4\pi I_{\text{мол}} = \beta \cdot 4\pi \frac{J}{f} = \frac{\beta}{f} \cdot 4\pi \cdot J$$



условно, считать векторизованным (вектор с током) по диаметру магнитот.

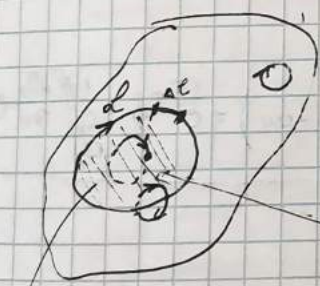
$$\vec{B}' = 4\pi \vec{J} \quad (\text{CGSM})$$

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{SI})$$

$$\beta = \begin{cases} \frac{4\pi}{c}, & \text{CGSM} \\ \frac{\mu_0}{4\pi}, & \text{SI} \end{cases}$$

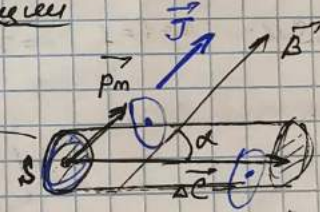
$$f = \begin{cases} \frac{c}{4\pi}, & \text{CGSM} \\ 1, & \text{SI} \end{cases}$$

Теорема о циркуляции вектора $\vec{J}$



магнитоток

произвольный вектор



$$\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$$

потенциал магнитоток

вектор не делится

Проеция намагничиваемости совпадает в том, что вектор $\vec{B}$ взаимодействует "линии" по диагональному компоненту.

$$\alpha = (\vec{p}_m, \vec{dS})$$

$$\Delta I_{\text{мол}} = I_{(z)} \cdot \Delta N = I_{(z)} \cdot n \cdot \Delta V = n I_{(z)} S_{(z)} \Delta \ell \cos \alpha$$

Пусть в-во однородное: n° ,

$$\Delta V = S_{(z)} \Delta \ell \cos \alpha$$

$$p_m = f I S^o \Rightarrow \Delta I_{\text{мол}} = \frac{1}{f} n p_m \cdot \Delta \ell \cdot \cos \alpha = \frac{1}{f} J \cos \alpha \cdot \Delta \ell = \frac{1}{f} I_e \cdot \Delta \ell = \frac{1}{f} (\vec{J}, \vec{dS})$$

$$\oint_{(L)} \vec{J}_e d\vec{e} = f I_{\text{мон}} \quad \sim \text{с. о. циркуляции } \vec{J}$$

полный ток, который пронизывает контур,

$$\text{rot } \vec{J} = f \vec{J}_{\text{мон}}$$

обобщенная лм-тк
магнетизм-у ток

Основное уравнение для
магнитного поля в вакууме.

$$\oint_{(S)} \vec{B}_n dS = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\oint_{(S)} \vec{B}_{\text{вектор}} dS = \frac{1}{\Delta V} \oint_{(S)} \left(\int_{(V)} \vec{B}_{\text{вектор}} dV \right) dS =$$

$$= \frac{1}{\Delta V} \int_{(V)} \left(\oint_{(S)} \vec{B}_{\text{вектор}} dS \right) dV = 0$$

~ равномерно и в вакууме

$$\oint_{(L)} \vec{B}_e d\vec{e} = \beta \cdot 4\pi I_{\text{мон}} = \beta \cdot 4\pi (I_{\text{пр}} + I_{\text{см}} + I_{\text{мон.}}) = \beta \cdot 4\pi (I_{\text{пр}} + I_{\text{см}} + f \oint_{(L)} \vec{J}_e d\vec{e})$$

$$\oint_{(L)} \left(\vec{B}_e - \frac{\beta \cdot 4\pi}{f} \vec{J}_e \right) d\vec{e} = \beta \cdot 4\pi (I_{\text{пр}} + I_{\text{см}})$$

$$\text{CGSM: } \beta = f = 1 \Rightarrow \vec{B}_e - 4\pi \vec{J}_e = \vec{H}_e$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{J}$$

$$\Rightarrow \oint_{(L)} \vec{H}_e d\vec{e} = \frac{4\pi}{c} (I_{\text{пр}} + I_{\text{см}}) = \frac{4\pi}{c} I_{\text{пр}} + \frac{1}{c} \oint_{(S)} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

$$\text{СИ: } f=1; \beta = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$\oint_{(L)} (\vec{B}_e - \mu_0 \vec{J}_e) d\vec{e} = \mu_0 (I_{\text{пр}} + I_{\text{см}}) \quad | \cdot \frac{1}{\mu_0}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

$$\Rightarrow \oint_{(L)} \vec{H}_e d\vec{e} = I_{\text{пр}} + I_{\text{см}} = I_{\text{пр}} + \oint_{(S)} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

$$\text{в групп-е уравн: } \left\{ \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \oint \frac{4\pi}{c} (\vec{J}_{\text{пр}} + \vec{J}_{\text{см}}) \\ &\vec{J}_{\text{пр}} + \vec{J}_{\text{см}} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &(\text{CGSM}) \\ &(\text{СИ}) \end{aligned}$$

Материальное уравнение
линейные изотропные материалы.

1) Линейность: $\vec{J} \sim \vec{H}$

$$\vec{J} = \chi \vec{H}$$

магнитная восприимчивость в-ва.

2) Изотропность: $\vec{J} \parallel \vec{H}$

в СИ: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ (СИ)

$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{J}$ (CGSM), подставим $\vec{J} = \chi \vec{H}$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \tilde{\mu} \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$\tilde{\mu} = 1 + \chi$ ~ относительная магнитная проницаемость

μ - магнитная проницаемость. $\rightarrow \mu = \mu_0 \tilde{\mu}$
~ в СИ

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \chi \vec{H} = (1 + 4\pi \chi) \vec{H}$$

$\mu = 1 + 4\pi \chi \rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$

~ в CGSM

$\vec{B} = \mu \vec{H}$

~ только для линейных изотропных сред.

в СИ	воздух	Al	Pb	Ос (жидк.)	H ₂ (газ)	Bi
χ	$0,77 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$-0,06 \cdot 10^{-6}$	$-1,5 \cdot 10^{-4}$

$|\chi| \ll 1$

$\chi > 1$ - намагничивание
происходит по полю
 $\vec{J} \parallel \vec{H}$

Парамагнетики

$\chi < 0$ - намагничивание
против поля
 $\vec{J} \uparrow \vec{H}$

Диамагнетики

Ферромагнетики ~ магнитная восприимчивость
зависит от условий (температуры!)

($\mu \gg 1$)
большое μ

Fe: $\chi = (5-10) \cdot 10^3$

Некоторые великогабаритные
уравнения для линейных изотропных
сред.

③ $\oint \vec{B}_n \cdot d\vec{S} = 0$
(3)

② $\oint \vec{H}_n \cdot d\vec{S} = ?$
(5)

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\oint_{(S)} B_n dS = \oint_{(S)} \mu H_n dS$$

Если сфера однородная $\rightarrow \mu \neq \mu(\vec{r})$

$$\Rightarrow \oint_{(S)} B_n dS = \mu \oint_{(S)} H_n dS = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{(S)} H_n dS = 0$$

$$\textcircled{1} \oint_{(L)} H_n dl = \{ \oint_{(L)} S dl \} = I_{\text{вн}} + I_{\text{вн}}$$

1 способ. Для проводящего нити $I_{\text{вн}} = 0$ (полюс статического)

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\Rightarrow \oint_{(L)} \frac{B_n}{\mu} dl = I_{\text{вн}}, \text{ если сфера однородная, т.е. } \mu = \text{const}$$

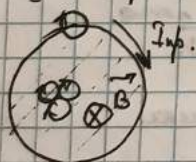
$$\rightarrow \oint_{(L)} B_n dl = \mu I_{\text{вн}} = \mu_0 \vec{H} I_{\text{вн}}$$

Вывод. $\mu = 0 \rightarrow \vec{H} = 0 \rightarrow \oint_{(L)} B_n dl = \mu_0 I_{\text{вн}}$

$\Rightarrow$ В случае $\mu = 0$ поле в канале также будет в $\vec{H}$ раз

2 способ. $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{вн}}; \text{rot } \vec{B} = \text{rot}(\mu \vec{H}) = \mu \text{rot } \vec{H} + [\nabla \mu, \vec{H}] =$
 если $\text{grad } \mu = 0$
 $= \mu \text{rot } \vec{H} = \mu \vec{j}_{\text{вн}}$

3) Вид с торца на соленоид



$$\vec{j}_{\text{вн}} = ? \text{ (куда сего?)}$$

$$\text{rot } \vec{J} = \vec{j}_{\text{вн}}$$

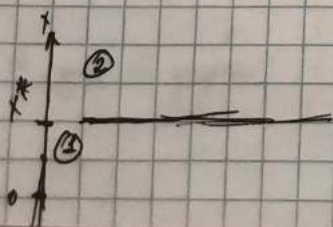
$$\text{rot}(\mu \vec{H}) = \mu \text{rot } \vec{H} + [\nabla \mu, \vec{H}] = \mu \vec{j}_{\text{вн}} + [\nabla \mu, \vec{H}]$$

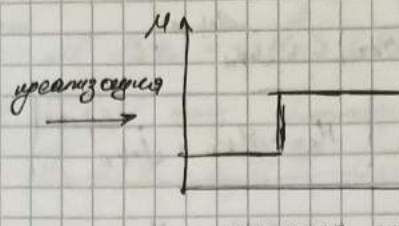
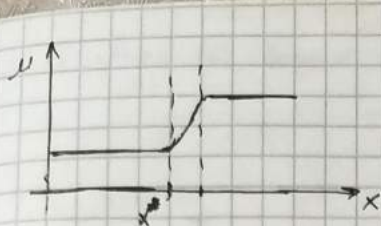
1) Если проводящий канал внутри соленоида

$$\vec{j}_{\text{вн}} \neq 0 \Rightarrow \vec{j}_{\text{вн}} \neq 0 \text{ где-то при } \mu \neq \mu(\vec{r})$$

2) Если в-во однородно: $\mu = \mu(\vec{r}) \Rightarrow \vec{j}_{\text{вн}} \neq 0$ где-то при $\vec{j}_{\text{вн}} = 0$

Уравнения для $\vec{B}$ и $\vec{H}$.

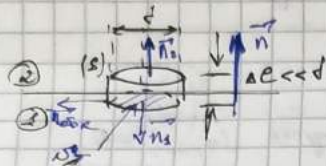




~ нулевой гидродинамической среде.

① $\vec{B}$

Дифференциал Гаусса: $\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$



$$\vec{n}_1 \uparrow \uparrow \vec{n}$$

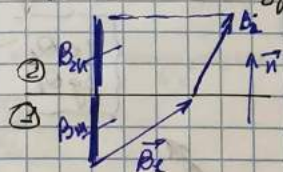
$$\vec{n}_2 \uparrow \downarrow \vec{n}$$

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{(S_1)} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{(S_2)} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{(S_3)} \vec{B} \cdot d\vec{S} =$$

$$= -B_{zn} \cdot S_r + B_{zn} \cdot S_r + 0 \left(\frac{\Delta l}{r} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \{ B_{zn} = B_{zn} \}$$

~ выполняется безусловно.

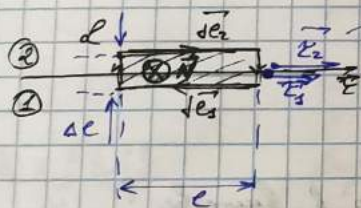


Волновая модель:

$$\mu_k M_{zn} = \mu_z M_{zn}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{M_{zn}}{M_{zn}} = \frac{\mu_z}{\mu_k} \right\}$$

$$\oint_{(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{(S)} \vec{S} \cdot d\vec{S} = I_{np} + I_{см} = \oint_{(S)} (j_{npN} + j_{смN}) dS$$



замкнутый контур с движущимся вектор.

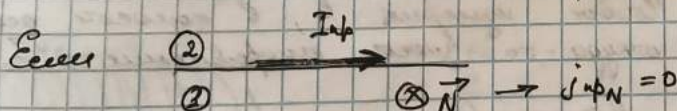
$l \gg \Delta l$; N - нормаль к пов-ти

$$\vec{S}_1 \uparrow \uparrow \vec{n}$$

$$\vec{S}_2 \uparrow \downarrow \vec{n}$$

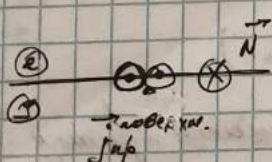
$$(M_{z2} - M_{z1})l + 0 \left(\frac{\Delta l}{l} \right) = j_{npN} \cdot l \cdot \Delta l + j_{смN} \cdot l \cdot \Delta l \rightarrow 0$$

$$j_{см} \sim \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \text{ но } \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| < \infty$$



$$\vec{N} \rightarrow j_{npN} = 0$$

Если



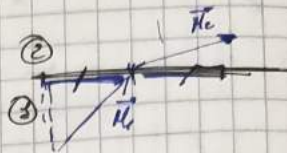
$$j_{npN} = \frac{j_{npN}}{\Delta l}$$

$$\rightarrow (M_{2z} - M_{1z}) \ell = \int_{\text{поверхн.}} \cdot \ell$$

$$M_{1z} - M_{2z} = \int_{\text{поверхн.}} \cdot$$

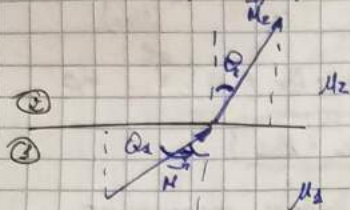
$$\text{Сумма } \int_{\text{поверхн.}} = 0$$

$$\rightarrow \{ M_{1z} = M_{2z} \}$$



$$\text{Null: } \frac{B_{1z}}{\mu_1} = \frac{B_{2z}}{\mu_2} \rightarrow \frac{B_{1z}}{B_{2z}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

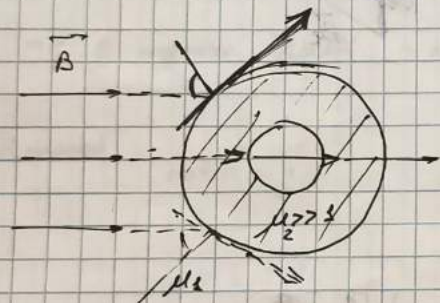
$$1-2 - \text{Null: и пусть } \int_{\text{поверхн.}} = 0$$



Связь θ_1 и θ_2 :

$$\tan \theta = \frac{M_z}{M_n}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\frac{M_{1z}}{M_{1n}}}{\frac{M_{2z}}{M_{2n}}} = \frac{M_{1z} M_{2n}}{M_{2z} M_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{B_{2n}}{B_{1n}}$$



20.11.21.

Силы магнитных
(в СИ)

$$\vec{F}_n = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

$$\vec{F}_d = I[\vec{dl}, \vec{B}]$$

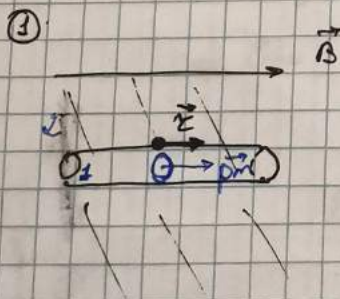
$$\vec{M} = [\vec{r}_m, \vec{B}]$$

~ Сохраняется ли это в вакууме?

Измерить только силу со стороны магн. поля ~ невозможно. Можно измерить F_n и $F_{др}$. только в вакууме $\rightarrow$ результат.

Чтобы измерить $\vec{B}$, в плоскости должны откуда-то знать направление $\vec{B}$.

Всё основано на граничных условиях.



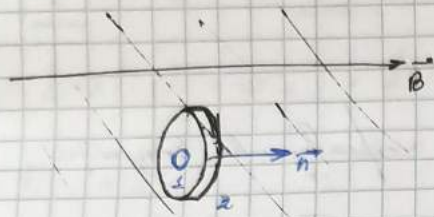
$$M_{1z} = M_{2z} (\vec{j}_{др} = 0)$$

$\Rightarrow$ помещаем рамку с током.

$$B_1 = \mu_0 M_1 ; B_2 = ?$$

В среде (±) - вакуум $\rightarrow \vec{M} \Rightarrow \vec{B}_1 \Rightarrow \vec{M}_2$ ($M_1 = M_{1z}$)
 $\Rightarrow \vec{M}_2$ в силу граничного условия.)
 $\vec{M}_2 \Rightarrow \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{M}_2$ (или)

② Мы снова откуда-то знаем направление $\vec{B}$



$B_{1n} = B_{2n}$ ~ выполнено гранич. условие

$\vec{M}$ в среде ± (вакуум)

$B_1 = B_{1n} \Rightarrow B_{2n} = B_2$

Энергия магнитного поля в вакууме.

$A_n \neq 0$ ($\vec{F}_n \perp \vec{r}$)
 $A_{\text{амп}} = 0$

Работает только индукционное поле!

$\oint \vec{A}_{\text{инд}} = \oint d\vec{q} \cdot \vec{r}_{\text{инд}} = -I \oint \vec{r} \cdot \frac{d\vec{\Phi}_B}{dt}$
 $\oint_{\text{инд}} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$
 $I = \frac{dq}{dt}$

$\Rightarrow dW_{\text{ин}} = -dA_{\text{инд}} ; \Phi_B = LI$

$dW_{\text{ин}} = I d\Phi_B = \{ \text{если } L = \text{const} \} = LI dI$

$W_{\text{ин}} = \frac{LI^2}{2}$

$\Phi_B = \iint_{(S)} B_n dS$

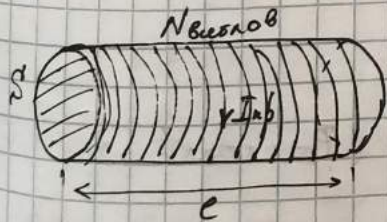
Выражение такое же, но известна L !

Плотность магнитной энергии

$W_{\text{ин}} = ?$

в вакууме:

$W_{\text{ин}} = \frac{B^2}{2\mu_0} (SI)$



$n = \frac{N}{l}$

$dW_{\text{ин}} = I d\Phi_B$

$B_{\text{вак}} = \mu_0 n I$

$B_{\text{вак}} = \mu_0 M_{\text{вак}} (\mu_{\text{вак}} = 1)$

$\Rightarrow M_{\text{вак}} = n I$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{л}} \vec{j} \cdot d\vec{l} \Rightarrow M = M_{\text{век}} = nI$$

$$dW_{\text{ин}} = \int_{\text{л}} d\Phi_B = \frac{M}{n} \cdot S \cdot dB \cdot N = \underbrace{M \cdot S \cdot dB}_{dW_{\text{ин}}} = M \cdot dB \cdot V$$

V - объем замкнутой цепи

$$dW_{\text{ин}} = dW_{\text{век}} \cdot V$$

$$\Rightarrow \boxed{dW_{\text{ин}} = M \cdot dB}$$

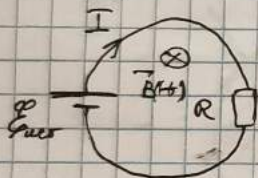
$$\boxed{W_{\text{ин}} = \int M \cdot dB} \sim \text{справедливо всегда.}$$

В каноническом случае (|| || || ||):

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \times \vec{r} = \mu \vec{H}$$

$$\boxed{W_{\text{ин}} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{BH}{2}}$$

Интегральный расчет поперечных сил в магнитном поле.



$$\mathcal{E}_{\text{век}} = IR \quad | \quad I dt$$

$$\mathcal{E}_{\text{век}} \cdot I dt = I^2 R dt$$

$$\underbrace{\mathcal{E}_{\text{век}} \cdot dq}_{dA_{\text{век}}} = \underbrace{I^2 R dt}_{dQ_{\text{же}}} \rightarrow dA_{\text{век}} = dQ_{\text{же}}$$

в ленте концы
разрываются и соединяются
проводами

$$dA_{\text{век}} + dA_{\text{суп}} = dQ_{\text{же}} + dW_{\text{ин}} \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_{\text{век}} + \mathcal{E}_{\text{инд}} + \mathcal{E}_{\text{с-инд}} = IR \quad | \cdot I dt$$

$$\underbrace{\mathcal{E}_{\text{век}} I dt}_{dA_{\text{век}}} - \underbrace{\frac{d\Phi_B}{dt} I dt}_{dQ_{\text{же}}} = I^2 R dt \quad (2)$$

$$\Phi_B = \Phi_{\text{своб}} + \Phi_{\text{век}}$$

$$(1) - (2): dA_{\text{суп}} + I d\Phi_B = dW_{\text{ин}}$$

Возможны два частных случая:

$$dA_{\text{суп}} = F_x^{\text{суп}} dx; \quad F_{\text{ин}} = -F_x^{\text{суп}}$$

① Если все магнитное поле постоянно (Φ_B = const ~ сверхпроводник)

$$F_x^{\text{суп}} = \left. \frac{dW_{\text{ин}}}{dx} \right|_{\Phi_B = \text{const}}$$

$$F_{\text{ин}} = - \left. \frac{dW_{\text{ин}}}{dx} \right|_{\Phi_B = \text{const}}$$

② Потенциал взаимодействия сил тока ($I = \text{const}$) ~ по одной из контуров: ~ две контура

$$W_{\text{ин}} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2 =$$

$$\sim \text{так же и в магнетике.}$$

$$= \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{1}{2} (M I_1 I_2 + M I_1 I_2) =$$

$$= \frac{1}{2} I_1 (L_1 I_1 + M I_2) + \frac{1}{2} I_2 (L_2 I_2 + M I_1) = \frac{1}{2} I_1 \Phi_{12} + \frac{1}{2} I_2 \Phi_{22}$$

$$\Phi_{11}^{\text{внеш}} = L_1 I_1$$

$$\Phi_{21} = M_{21} I_2 = M I_2$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21}^{\text{внеш}} + \Phi_{22}^{\text{внеш}}$$

$$F_x^{\text{внеш}} dx + I_1 d\Phi_{12} + I_2 d\Phi_{22} = \frac{1}{2} I_1 d\Phi_{12} + \frac{1}{2} I_2 d\Phi_{22}$$

$$\left. \frac{dW_{\text{ин}}}{dx} \right|_{I_1, I_2} = \frac{1}{2} I_1 \frac{d\Phi_{12}}{dx} + \frac{1}{2} I_2 \frac{d\Phi_{22}}{dx}$$

$$\Rightarrow F_x^{\text{внеш}} dx = - \left(\frac{1}{2} I_1 \frac{d\Phi_{12}}{dx} + \frac{1}{2} I_2 \frac{d\Phi_{22}}{dx} \right) = - dW_{\text{ин}}$$

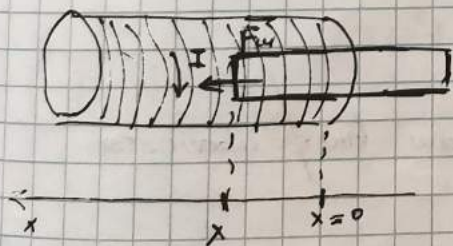
$$\Rightarrow F_x^{\text{внеш}} = - \frac{dW_{\text{ин}}}{dx} \Big|_I$$

$$F_{\text{ин}} = - F_x^{\text{внеш}} = \frac{dW_{\text{ин}}}{dx} \Big|_I$$

~ универсальная.
(справедливо всегда)

Примеры:

① Соленоид



магнетизм.

$$L = L(x)$$

$$W_{\text{ин}} = \frac{L(x) I^2}{2}$$

$$F_{\text{ин}} = \frac{dW_{\text{ин}}}{dx} \Big|_I = \frac{I^2}{2} \frac{dL}{dx}$$

$x > 0$ - парамагнетик
 $x < 0$ - диамагнетик

$$\tilde{\mu} = 1 + \chi$$

Если $\chi > 0 \Rightarrow \tilde{\mu} > 1$

$$\vec{B} = \mu_0 \tilde{\mu} \vec{H}$$

$$\rightarrow B \uparrow \Rightarrow \Phi_0 \uparrow \Rightarrow L \uparrow$$

$$\frac{dL}{dx} > 0$$

$$\Rightarrow F_{\text{мх}} > 0 \sim \text{притягив.}$$

Аналогично рассуждая, для $\epsilon < 0$ (диэлектрик.) $\rightarrow \frac{dL}{dx} < 0$
 $\Rightarrow F_{\text{мх}} < 0 \sim \text{выталкик.}$

9.12.21.

② Соленоид (заполненный магнетиком изотропным материалом)

МММ:

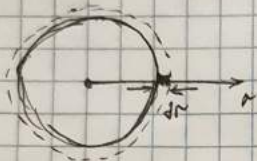
от поля:



$$\vec{F}_A = I [\vec{A} \vec{B}, \vec{B}]$$

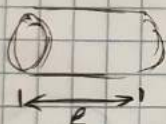
$$F_{\text{мх}} = \frac{dW_{\text{м}}}{dx} \bigg|_I$$

$$W_{\text{м}} = w_{\text{м}} \cdot V = \frac{\mu_0 H^2}{2} V$$



$$dW_{\text{м}} = w_{\text{м}} \cdot dV = 2\pi r l dr \cdot w_{\text{м}}$$

$$\Rightarrow F_{\text{мх}} = w_{\text{м}} \cdot 2\pi r l = \frac{\mu_0 H^2}{2} \cdot \frac{2\pi r l}{S_{\text{пол.}}}$$

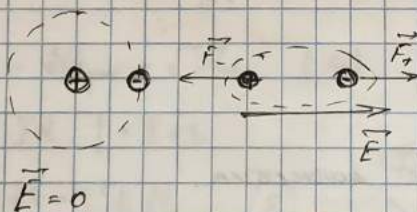


$$F_{\text{мх}}(z) = \frac{F_{\text{м}}}{S_{\text{пол}}} = \frac{\mu_0 H^2}{2} = w_{\text{м}}$$

Различные механизмы магнетизации

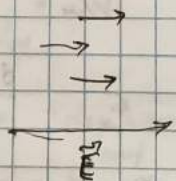
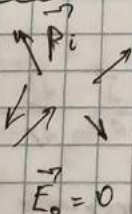
Различия

① Эл. механизм:



а токному механизму
определяет в магн. поле
ист.

② Фригидионный



здесь взаимодействует.

Сравнение ур-й для эл-ого
и магнетного поля в
вакууме.
(таблица аналогий)
в СИ.

Эл. поле

Магн. поле

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} B_n \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{пр}} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} D_n \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{(S)} D_n dS = \iint_{(V)} \rho_{св} dV$$

$$\epsilon_r = \text{const}$$

$D_n = \text{const}$, когда по формуле
разрешено / у нас
своб. зарядов ($\rho_{св} = 0$)

или: $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$

$$\oint_{(S)} B_n dS = 0$$

$$B_n = \text{const}$$

$$M_x = \text{const} \quad (\rho_{св} = 0)$$

или: $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$

Формально!

или: $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$
 $\vec{D} \leftrightarrow \vec{B}$

Физические соотношения:

$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$ - первичные! (элементарные хар-ки полей)

$\vec{P} \leftrightarrow \vec{J}$ - вектор-харак. среды.

$\vec{D} \leftrightarrow \vec{H}$ - вспомогат. вектор

$\vec{E} \leftrightarrow \frac{1}{\mu}$

Продолжим аналогию:
поверх.

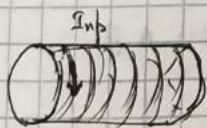
$\vec{D}_n dS = q_{св} dS$

$\oint D_n dS = q_{св} dS$

$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$

Если все поперечное /
поверх $\vec{D} \sim$ безразлично.

$\vec{E} = \frac{\vec{E}_{век.}}{\epsilon}$



$M = n I_{in}$

$\oint M dl = I_{in}$

$\vec{B} = \mu \vec{B}_{век.}$

Ин. поле: ($\epsilon \delta I$)

$\epsilon_0 \alpha = \frac{n p_c^2}{3 \epsilon_0}$

Матри. поле:

$\frac{\epsilon}{\mu_0} = \frac{n p_m^2}{3 \epsilon_0} > 0$

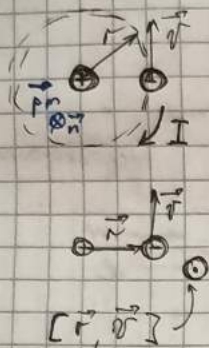
$\vec{p}_c \leftrightarrow \vec{p}_m$

$W_{эл} = (\vec{p}_c, \vec{E}) \leftrightarrow W_{мг} = (\vec{p}_m, \vec{B})$

$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i = n \vec{p}_c \leftrightarrow \vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_{mi} = n \vec{p}_m$

Ориентационной фазе не мешает
вектор даёт направление осей.

Рассмотрим классических эффектов
в квантовой механике.
Уравнение Шрёдингера.



$$\vec{p}_m = f |\vec{S}| \vec{n}$$

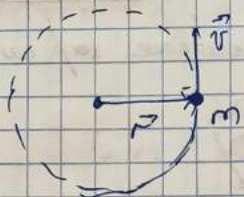
$$J = \frac{dq}{dt} = \frac{|\vec{e}|}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$S = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \vec{p}_m = f \frac{|\vec{e}| v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 \vec{n} = \frac{1}{2} f |\vec{e}| v r \vec{n} =$$

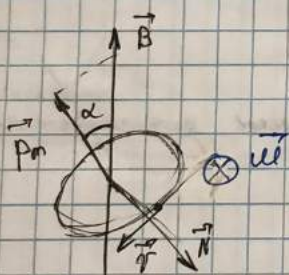
$$\Rightarrow \vec{p}_m = -f \frac{|\vec{e}|}{2} [\vec{r}, \vec{v}]$$



$$\vec{N} = m [\vec{r}, \vec{v}] \sim \text{момент импульса}$$

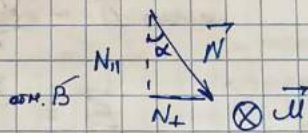
$$\gamma = f \frac{|\vec{e}|}{2m} \sim \text{гиромагнетическое отношение}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_m = -\gamma \vec{N} \rightarrow \vec{p}_m \perp \vec{N}$$



$$\vec{\omega} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$$

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{\omega}$$



Сверху:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dN_{\perp}}{N_{\perp}} = \frac{\omega dt}{N \sin \alpha} =$$

$$= \frac{p_m B \sin \alpha dt}{N \sin \alpha} = \frac{p_m B}{N} dt$$

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_m B}{N} = \gamma B \text{ частота прецессии}$$

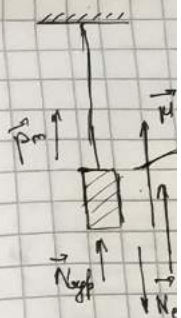
$$\vec{L} = \gamma \vec{B}$$

$$\vec{N}_{\text{гон}} = m r^2 \vec{L} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{p}_{\text{гон}} = -\gamma \vec{N}_{\text{гон}}$$

$$\vec{N}_{\text{гон}} \parallel \vec{L} \Rightarrow \vec{p}_{\text{гон}} \parallel \vec{L} \parallel \vec{B}$$

~ появляется гон-ый момент
или гравитационный момент.



② Эффект

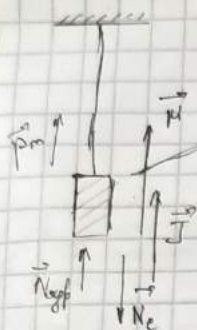
③

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{дон}} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{J}_{\text{дон}} = n \cdot \vec{p}_{\text{дон}}$$

$$\vec{J}_{\text{дон}} \parallel \vec{B}$$

~ все в.в. проявится в-во диамагн.,
но не очень сильно. Все дело в
температуре!

① Опыт Гессельмана - Де-Гауза (1852.)



компенсия из
парамагнетизма ($\chi > 0$)

$$\vec{J} = n \vec{p}_m \Rightarrow \vec{p}_m \parallel \vec{H} \quad \text{эксперимент}$$

$$\vec{N}_z = 0 = \text{соект} = \underbrace{\vec{N}_e}_{\neq 0} + \vec{N}_{\text{эф}}$$

$$\vec{p}_m = -\chi \vec{N}_e$$

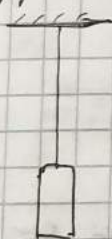
Этот эффект должен
привести к равновесию

$\Rightarrow$ образцы должны качаться.
блуждать.

Из эксперимента:

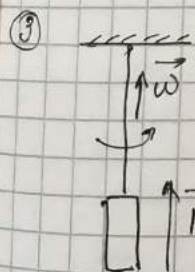
$$\frac{|e|}{4\pi} < \chi < \frac{|e|}{m}$$

② Опыт Барнетта (1914г.)



$t=0$ ~ образец намагничивается ($\vec{J} \neq 0$)

Если размагнитивать (магнитное поле убавлять.)
~ образец начинает вращаться.



образец, наоборот, вращается $\rightarrow$ образец
намагничивается

$$\vec{N} \parallel \vec{\omega}$$

$$\omega \approx 100 \text{ c}^{-1} \rightarrow B \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ Тл. (} B_{\text{земли}} \approx (0.3-0.7) \cdot 10^{-4} \text{)}$$

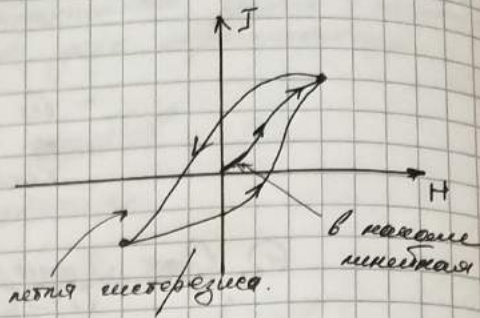
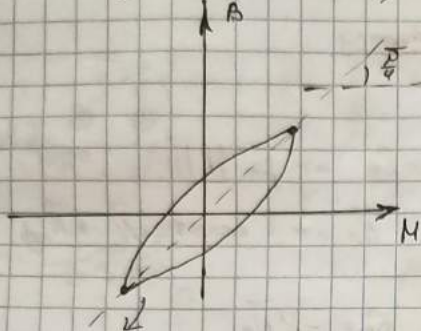
§ 12.21

Ферромагнетики: ① $\chi \gg 1$; $F_e: \chi \approx (5-10) \cdot 10^3$

② $\vec{J} = \vec{J}(\vec{H})$

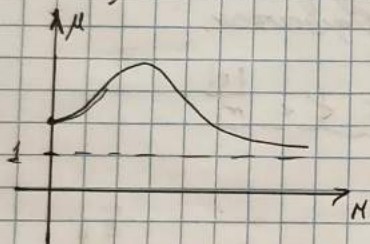
③ Негидзмякнесть связи $J(H)$

$\vec{H} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{H})$



④ Остаточная намагниченность: $J \neq 0$ при $H=0$

⑤ $\chi \rightarrow \mu = 1 + \chi$



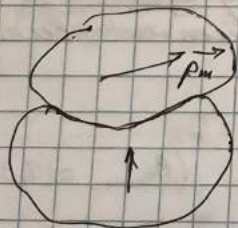
⑥ $T < T_k$; Fe: $T_k = 770 \text{ K}$

св-ва ферромагн.; Co: $T_k = 1150 \text{ K}$

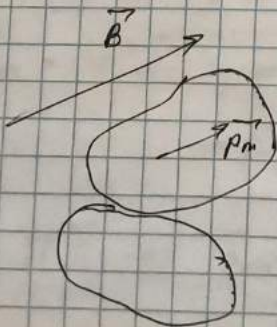
при $T > T_k$ - св-ва парамагнет.

при $T \gg T_k$ - св-ва диамагнет. (акт. б. не проявляется)

⑦ Кристаллическая структура:



$\vec{H} = 0 \rightarrow \langle \vec{\mu} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{J} \rangle = 0$



$\vec{B} \neq 0 \rightarrow \vec{H} \neq 0 \rightarrow \langle \vec{J} \rangle \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ намагничивание

Но почему есть статическое намагничивание?

Теория Лоренца-Вейсса
(древнейшая классическая теория)

$H_{эфф} = H + \beta J$, где β - константа Вейсса

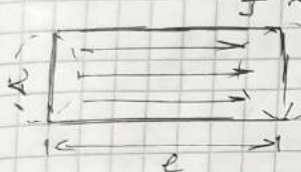
$J = \chi H_{эфф} = \chi H + \chi \beta J$

$J = \frac{\chi H}{1 - \chi \beta}$

$\chi H = J(1 - \chi \beta)$

т.е. при $H=0$ $J \neq 0$
 $\Rightarrow$ есть стат. намагничивание.

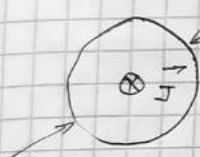
Плоть постоянных магнитов



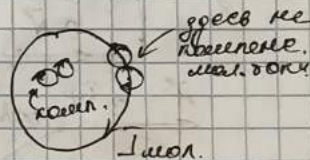
$\vec{B} = ?$
 $\vec{H} = ?$
 $[L \gg \sqrt{S}]$

$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$
из-за тока превращения (Iпр.)

из-за мал. токов (Iмал.)



Но $I_{пр.} = 0 \rightarrow \vec{B}_0 = 0$



$\Rightarrow$ аналогия с полем соленоида.

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J}$

$\vec{H}_{вн} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} =$

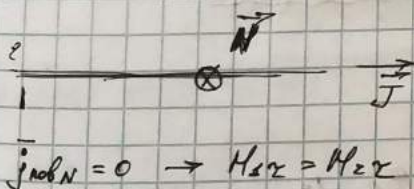
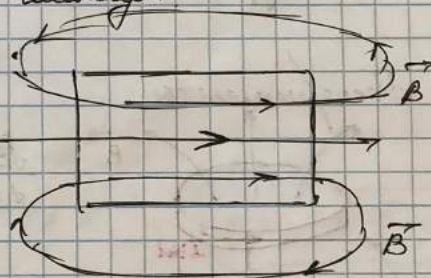
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{мал}$

(1) $\vec{B}'$

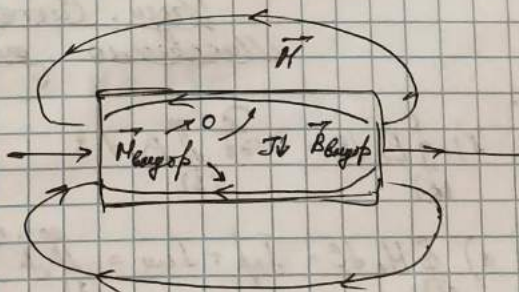
$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = I_{мал} \rightarrow \vec{B} = \vec{B}' = \mu_0 \vec{J}$

(2)

$\vec{H}_{внутр.} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \rightarrow 0$



$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow H_{\perp r} = H_{\parallel r}$



Магнитное св-во сверхпроводников:

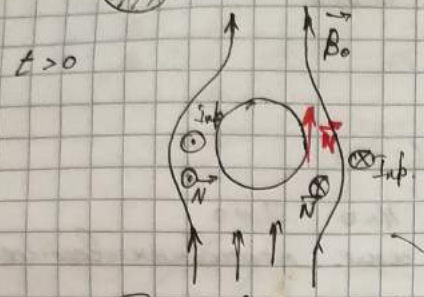
$\vec{P}_{инд} = - \frac{d\vec{P}_E}{dt}$

$I_{пр} = \frac{P_{инд}}{R}$

сверхпроводник : $R \rightarrow \infty \Rightarrow \text{кратк}$ $\left| \frac{d\Phi_z}{dt} \right| = 0 \rightarrow \Phi = \text{const}$

$t=0: \vec{B}_0 = 0 \rightarrow \Phi = 0$

из сверхпроводника.



$\Phi_{\Sigma} = 0$

$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{\text{внеш}} + \Phi_{\text{внутри}} = 0 \rightarrow \vec{B} = 0$

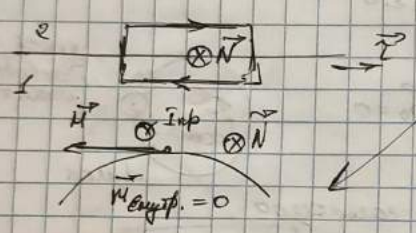
$\vec{B} = 0 = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{внутри}}$

$\rightarrow \vec{B}^{\text{ind}} = -\vec{B}_0$

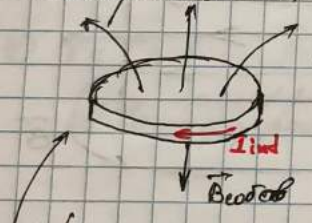
генерация тока выполняется
только при условии:

$B_{\text{вн}} = B_{\text{крит}}$
 $H_{\text{кз}} - H_{\text{кз}} = j_{\text{с}} \cdot N$

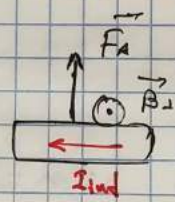
$\Rightarrow \text{т.к. } H_{\text{кз}} = 0 \rightarrow H_{\text{кз}} = j_{\text{с}} / N$



Эксперименты:



$\frac{dB}{dt} > 0$



магнитная индукция

$F_A = I_{\text{ind}} [\Delta \vec{L}, \vec{B}_0]$

сверхпроводник - ползунок в магнитном поле.

Итоги. Система уравнений Максвелла для полей в веществе.

СИ:

1) $\oint_{(L)} \vec{E}_c d\vec{L} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} B_n dS$

2) $\oint_{(L)} \vec{H}_c d\vec{L} = I_{\text{вн}} + I_{\text{св}} = \iint_{(S)} \vec{j}_n \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} D_n dS$

3) $\oint_{(S)} D_n dS = q_{\text{своб}} = \iiint_{(V)} \rho dV$

4) $\oint_{(S)} B_n dS = 0$

В диф-ных формах:

$$\begin{aligned}
 1) & \rightarrow \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 2) & \rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{up}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
 3) & \rightarrow \text{div } \vec{D} = \rho_{\text{своб}} \\
 4) & \rightarrow \text{div } \vec{B} = 0
 \end{aligned}$$

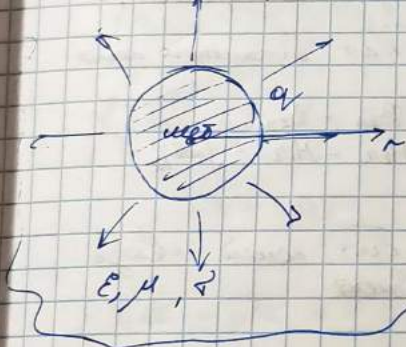
CGS : 1) $\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{B}_n dS$

2) $\oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \iint_{(S)} \vec{j}_n \cdot d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{D}_n dS$?

3) $\iint_{(S)} \vec{D}_n dS = 4\pi \iint_{(V)} \rho_{\text{своб}} dV$

4) $\iint_{(S)} \vec{B}_n dS = 0$

Примеры симметрии:



$H - ?$

« безр. сфера »

$$\vec{B} = \beta \vec{I}_{\text{up}} \quad \frac{[\vec{E}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$\vec{E} \uparrow \vec{j}, \quad \vec{B} \perp \vec{E} \perp \vec{r}$$

$$\rightarrow \vec{B} \perp \vec{j}, \quad \rightarrow \vec{j} \uparrow \vec{r} \rightarrow \boxed{\vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = 0 \text{ ???}}$$

Универсальное ф-е Максвелла 2):

$$\oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{up}} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{D}_n dS$$

Загрузка роб-ств ~ сфера

$$\iint_S \vec{D}_n dS = q \rightarrow D = D_n = \text{const}$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = q \rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$q = q(t) \rightarrow D = D(t)$$

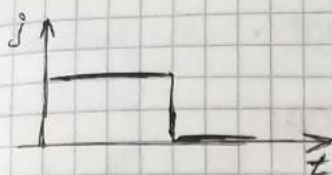
$$\frac{\partial D_n}{\partial t} = - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dt} = - \frac{1}{4\pi r^2} \cdot I_{\text{up}}$$

$$\frac{dq}{dt} < 0, \text{ но } \frac{dD_n}{dt} > 0$$

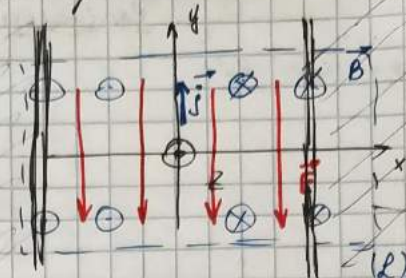
$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{D}_n dS = 4\pi r^2 \frac{\partial D}{\partial t} = -I_{\text{up}} = -I_{\text{св}}$$

$$\rightarrow \underline{I_{\text{up}} + I_{\text{св}} = 0}$$

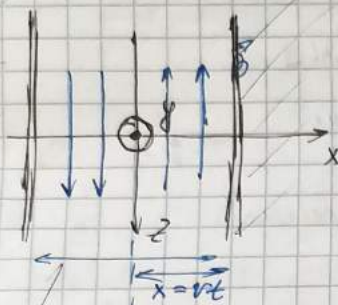
$$\Rightarrow \vec{H} = 0 \rightarrow \underline{\vec{B} = 0}$$



Со стороны оси z:



Со стороны ox:



$$B_z(x) = -B_z(-x)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(t) \Rightarrow \exists \vec{E}(t)$$

Среднее значение
поперек поперек коэф
 $\Phi_z = 0$

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Согласно закону возмущения

Полом чинено коэф.

$$\oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{e} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{s} + I_{up}$$

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{e} = -E \ell = -B \cdot \ell \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow E = Bv$$

$$\oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{e} = -H \ell = -D \ell \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow H = Dv$$

Понятие изотропные среды:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\frac{B}{\mu} = \epsilon E v$$

$$\Rightarrow B = \mu \epsilon B v^2 \rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{\rho}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cdot \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

(ск-ть света.)

$$\Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} < \infty!$$

Ток выключили $\rightarrow$ по линия не исчезают!

Система единиц

Основная единица СИ:

$$[L] = м$$

$$[T] = с$$

$$[M] = кг$$

$$[I] = А$$

СГС:

$$[L] = см$$

$$[T] = с$$

$$[M] = г$$

$$F_k = \frac{10^9 \cdot 10^1}{10^2} \rightarrow [q]$$

Когда-то: $[F] = кг \cdot м / с^2 \equiv кг \cdot с^{-2} \cdot м$ "килограмм-сила"

$$F = m \cdot a$$

$$F = m \cdot g \cdot \alpha$$

$$m = 1 кг, \frac{1}{g} F_{SI} = 9,81 Н$$

пусть введем коэф., чтобы сделать, что сила = "кг"

$$\alpha = \frac{1}{9,81}$$

Все силы измеряются коэф. в коэф. в:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Пусть $G = 1$

$$F = m \cdot a$$

$$[F] = \frac{кг \cdot м}{с^2} = \frac{[M]}{[L^2]}$$

$$[F] = \frac{[M] \cdot [L]}{[T^2]}$$

$$\frac{[M]}{[L^2]} = \frac{[M][L]}{[T^2]}$$

$$[M] = \frac{[L^3]}{[T^2]} \left(\frac{м^3}{с^2} \right)$$

$$② c = 1$$

$$\downarrow [L] = [T]$$

Система единиц Планка:

$$G = 1, c = 1$$

$\hbar$ - постоянная Планка

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1$$

$\kappa = 1$ ~ повс. Больцмана

$$СГС \rightarrow СГСЕ$$

+
СГСМ
полюбо мителю ер.

Хевисайд (1860)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \rightarrow \frac{Н}{[q]} \\ [E] = \frac{Н}{[q]}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$F_n = q[\vec{E}, \vec{B}]$$

$$СГСЕ: \vec{E} =$$

$$\vec{F}_n =$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \text{вакуум}$$

в СГС:

$$③ \text{ ПМТ:}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Хейсавуд (1850 - 1925) ~ первоначально все в SI ~ удобно для инженерных расчетов.

В SI:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \rightarrow [E] = \frac{N}{C}$$

$$\vec{F}_A = q[\vec{E}, \vec{B}]$$

$$[B] = \frac{N}{C \cdot m}$$

в SI:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \rightarrow [E] = \frac{[F]}{[q]}$$

$$\vec{F}_A = q[\vec{E}, \vec{B}] \rightarrow [B] = \frac{[F]}{[q] \cdot [L]}$$

CGS:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \rightarrow [E] = \frac{[F]}{[q]}$$

$$\vec{F}_A = \frac{1}{c} q'[\vec{E}, \vec{B}] \rightarrow [B] = \frac{[F]}{[q]}$$

в SI:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

вакуум $\vec{P} = 0 \rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$? Раз в-во, а поля разные!

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \rightarrow \text{в вакууме } \vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

В вакууме констант не бывает!

в CGS:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

$$\vec{H} = \vec{B} + 4\pi \vec{J}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \\ \vec{H} = \vec{B} + 4\pi \vec{J} \end{array} \right\} \text{ в вакууме } \vec{P} = 0, \vec{J} = 0 \rightarrow \vec{D} = \vec{E}$$

$$\vec{H} = \vec{B} \quad \text{и что логично}$$

③ МА:

$$\vec{B} = (\epsilon_0 \tilde{\epsilon}) \vec{E} \quad (SI)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (CGSE)$$

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_{CGSE}$$

$$\epsilon_{SI} \neq \epsilon_{CGSE}$$

МА:

$$\vec{B} = \mu_0 \tilde{\mu} \vec{H} = \mu_{SI} \vec{H} \quad (SI)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (CGSM)$$

$$\mu = \tilde{\mu}$$

$$\mu_{SI} \neq \mu$$

Способ перевода формул из CGS в SI или наоборот.

$$I = \frac{q}{4\pi r^2} ; \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E_0 dl$$

коэффициент перехода для
электронов, фотоэлектронов,
среднего перехода, фотоэлектронов, ...

Величина	$E (V)$	D	B	h	$I (A)$	$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$
коэф-т	e	d	b	h	i	c скорость света
	$\frac{E_0}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$	$\sqrt{4\pi\mu_0}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	

$e = \frac{E_0}{E(e)}$ и т.д.

Затем.

$$\vec{F} = q'\vec{E}$$

$$\vec{F}_A = \frac{1}{c} q' [\vec{v}, \vec{B}]$$

$$W_{An} = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{8\pi}$$

$$W_{An} = \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{8\pi}$$

СИ

$$\vec{F} = q'\vec{E}$$

$$\vec{F}_A = q' [\vec{v}, \vec{B}]$$

$$W_{An} = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}$$

$$W_{An} = \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2}$$

$$\frac{e}{\sqrt{\epsilon_0}} = \frac{h}{\sqrt{\mu_0}} \sim \text{коэф-т симметрии (гравитации)}$$

$$\Rightarrow q' \cdot i \cdot e E = q' E \quad \rightarrow i \cdot e = 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{c} i b = 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{c} i b = 1 \Rightarrow \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} i b = 1 \quad (2)$$

Решения из 5-й
ур-ий с 5-го неизвест-
ными.

$$\frac{e d}{8\pi} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{b h}{8\pi} = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{e}{\sqrt{\epsilon_0}} = \frac{h}{\sqrt{\mu_0}} \quad (5)$$

Решение:

$$(1) \rightarrow i = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{1}{e} b = 1 \Rightarrow e = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} b$$

$$\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} b d = 4\pi \Rightarrow b = \frac{4\pi}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} d}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi h}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} d} = 4\pi \Rightarrow h = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} d$$

$$\frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} d}{\sqrt{\mu_0}} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} b}{\sqrt{\epsilon_0}} = \sqrt{\mu_0} \cdot \frac{4\pi}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} d}$$

$$\sqrt{\epsilon_0} d = \frac{4\pi}{\sqrt{\epsilon_0} d}$$

$$d = \sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$$

$$\rightarrow \delta = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$$

$$h = \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}} = \sqrt{4\pi\mu_0}$$

$$\rightarrow h = \sqrt{4\pi\mu_0}$$

$$c = \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$$

$$\rightarrow c = \sqrt{4\pi\epsilon_0}$$

$$\rightarrow i = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$$

Примеры:

① SI: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$; $\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p} = \frac{N}{\Delta V} \vec{p}$; $\vec{p} = q\vec{L}$
 из SI в CGS

$$[P] = \frac{1}{[L^3]} \cdot [q] \cdot [L] = \frac{[q]}{[L^2]}$$

$$\frac{1}{\Delta V} \vec{P} = \epsilon_0 \cdot \frac{1}{\epsilon} \vec{E} + \frac{1}{i} \vec{P}$$

$$\frac{\sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{4\pi}} \vec{D} = \epsilon_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{E} + \sqrt{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \rightarrow \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

② из CGS в SI:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{np}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$h \cdot \text{rot } \vec{H} = 4\pi \cdot \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cdot i \vec{j}_{\text{np}} + \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} \cdot \sqrt{4\pi\mu_0} = 4\pi \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{j}_{\text{np}} + \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\sqrt{4\pi\mu_0} \cdot \text{rot } \vec{H} = \sqrt{4\pi\mu_0} \cdot \vec{j}_{\text{np}} + \sqrt{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{np}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

В теории относительности поля - объединяются:

$$(\vec{E}; \vec{B})$$

$$(\vec{D}; \vec{H})$$

тензор (инвариант)

и в CGS выполняется соотношение размерности сразу.

Найду Ent.