Работа и энергия в электростатике (часть 2)

Задача 1 (Иродов 3.143)

Имеется плоский воздушный конденсатор, площадь каждой обкладки которого равна S. Какую работу против электрических сил надо совершить, чтобы медленно увеличить расстояние между обкладками от x_1 до x_2, если при этом поддерживать неизменным:

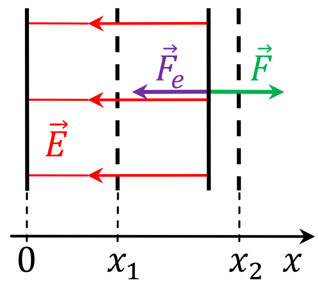
а) заряд конденсатора q;

б) напряжение на конденсаторе U?

Решение

Способ 1 – «в лоб». Положим для определённости, что левая обкладка конденсатора неподвижна, а правую квазистатически отодвигают (то есть очень медленно, скорость и ускорение пренебрежимо малы), для чего прикладывают к ней силу $\vec{F}$. Пусть левая заряжена отрицательно, а правая положительно. Ещё на правую действует с силой $\vec{F}_e$ электрическое поле, созданное левой обкладкой. Сила $\vec{F}_e$ направлена против оси x, и второй закон Ньютона в проекции на ось x для правой обкладки имеет вид

$$F_x - F_e = 0.$$



Работа силы $\vec{F}$

$$A_F = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)dx$$

Если заряды обкладок равны по модулю q, то

$$F_e = q\frac{E}{2}, \qquad \text{где } E = 4\pi k\sigma = 4\pi k\frac{q}{S}$$

– электрическое поле конденсатора. Тогда

$$A_F = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi k\frac{\left(q(x)\right)^2}{S}dx$$

– в общем случае заряд обкладок – величина переменная. В случае (а) $q = const$,

$$A_F = 2\pi k\frac{q^2}{S}\int_{x_1}^{x_2} dx = 2\pi k\frac{q^2}{S}(x_2 - x_1).$$

В случае (б) $U = const$, обозначим как $C(x)$ переменную ёмкость конденсатора, тогда

$$q(x) = UC(x) = U\frac{S}{4\pi kx},$$

$$A_F = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi k\frac{\left(\frac{US}{4\pi kx}\right)^2}{S}dx = \frac{U^2S}{8\pi k}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2} = \frac{U^2S}{8\pi k}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)$$

Полученные результаты можно выразить через ёмкости C_1 и C_2, соответствующие начальному и конечному положению обкладок:

$$\text{а) } A_F = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right), \qquad \text{б) } A_F = \frac{U^2}{2}(C_1 - C_2).$$

Способ 2 – энергетический. Случай (а) – вся работа внешней силы $\vec{F}$ (сторонней, неконсервативной) пойдёт на изменение энергии системы (потенциальной энергии заряженных тел).

$$A_F = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1} = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right)$$

Случай (б):

$$A_F = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = \frac{U^2C_2}{2} - \frac{U^2C_1}{2} = -\frac{U^2}{2}(C_1 - C_2)$$

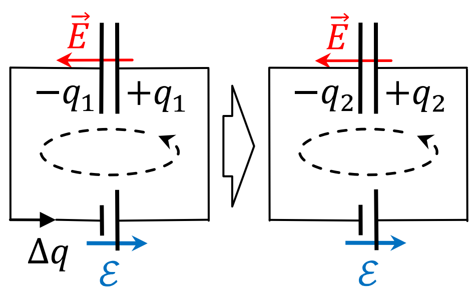
– получилось почти такое же выражение, как в 1-м способе, но знак другой! Какой ответ правильный?

Размышления. Разноимённо заряженные обкладки притягиваются друг к другу → чтобы правую обкладку двигать вправо, внешняя сила $\vec{F}$ должна быть направлена тоже вправо → направление силы совпадает с направлением перемещения → работа силы положительна, $A_F > 0$ – так должно быть, это банальная и в то же время «железобетонная» механика.

С другой стороны, расстояние между обкладками увеличивается, $x_2 > x_1$ → ёмкость конденсатора убывает $C_1 > C_2$ → 1-м способом получили $A_F > 0$, это хорошо, 2-м способом $A_F < 0$, это не сходится с выводами механики → во 2-м где-то наврали!

Изменение энергии двух заряженных обкладок (электрической потенциальной, других энергий у них либо нет, либо не меняются в данных условиях), разумеется, равно работе сторонних сил. Мы учли силу $\vec{F}$, других нет? Есть! Забыли стороннюю силу в батарейке, которая поддерживает на конденсаторе постоянное напряжение.

Исправленный случай (б)



Пусть ЭДС источника тока (батарейки) равно $\mathcal{E}$, тогда

$$A_F + A_{\mathcal{E}} = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}}$$

Запишем 2-е правило Кирхгоффа учитывая выбранное направление обхода контура (показано пунктиром)

$$\mathcal{E} = U,$$

обе величины со знаком «+», т.к. и направление поля $\vec{E}$ и направление ЭДС источника совпадают с направлением обхода.

Предположим, что положительный заряд Δq утекает с левой обкладки и приходит на правую, тогда

$$q_2 = q_1 + \Delta q, \qquad \Delta q = q_2 - q_1 = U(C_2 - C_1).$$

Работа ЭДС

$$A_\mathcal{E} = \mathcal{E}\Delta q$$

со знаком «+» – направление движения положительного заряда совпадает с направлением ЭДС.

$$A_\mathcal{E} = \mathcal{E}\Delta q = U \cdot U(C_2 - C_1) = U^2(C_2 - C_1) = -U^2(C_1 - C_2),$$

работа ЭДС получается отрицательной.

Разность начальной и конечной энергий конденсатора

$$W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = \frac{U^2 C_2}{2} - \frac{U^2 C_1}{2} = -\frac{U^2}{2}(C_1 - C_2),$$

работа силы $\vec{F}$

$$A_F = -A_\mathcal{E} + W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = U^2(C_1 - C_2) - \frac{U^2}{2}(C_1 - C_2) = \frac{U^2}{2}(C_1 - C_2).$$

Теперь результаты полученные двумя способами сошлись.

Вопрос 1. С чем и как надо сравнивать скорость и ускорение правой обкладки, чтобы можно было говорить, что они малы или, наоборот, не малы?

Вопрос 2. Почему в выражении для F_e (способ 1) электрическое поле конденсатора делится пополам?

Вопрос 3. Почему работа ЭДС отрицательная? (Способ 2, случай (б), исправленный)

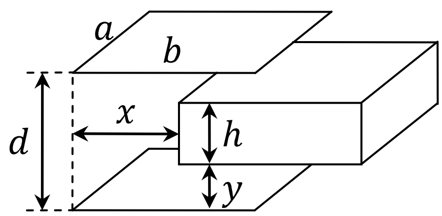
Задача 2

Найти силу, необходимую для квазистатического выдвижения металлической пластины из конденсатора при постоянном заряде на его обкладках.

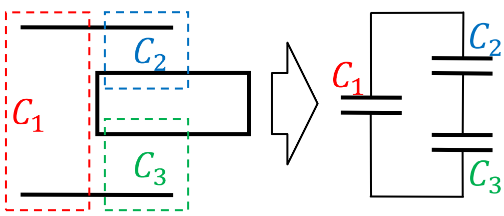
Решение

Силу можно найти из закона сохранения энергии – работа силы равна изменению электрической энергии конденсатора (ЭДС здесь нет)

$$dA_F = dW$$



Пусть обкладки конденсатора имеют ширину a и длину b, d – расстояние между ними. Длина и ширина металлической пластины такие же, а толщина её равна h. Расстояние между краем пластины и краем конденсатора равно x, между пластиной и нижней обкладкой равно y.



Будем считать, что размеры пластин много больше расстояния между ними, тогда конденсатор с пластиной внутри можно мысленно разбить на три простых конденсатора. Тогда ёмкость системы выражается через ёмкости простых плоских конденсаторов, а те, в свою очередь через геометрические размеры

$$C = C_1 + C_{23}, \qquad \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_1 = \frac{ax}{4\pi kd}, \qquad C_2 = \frac{a(b-x)}{4\pi k(d-h-y)}, \qquad C_2 = \frac{a(b-x)}{4\pi ky},$$

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{4\pi k(d-h-y)}{a(b-x)} + \frac{4\pi ky}{a(b-x)} = \frac{4\pi k(d-h)}{a(b-x)},$$

$$C(x) = \frac{ax}{4\pi kd} + \frac{a(b-x)}{4\pi k(d-h)} = \frac{a(x(d-h)+(b-x)d)}{4\pi kd(d-h)} = \frac{a(bd-hx)}{4\pi kd(d-h)}$$

Энергия системы при постоянном заряде q

$$W(x) = \frac{q^2}{2C(x)},$$

Работа внешней силы, с одной стороны, равна изменению энергии, с другой – выражается через проекцию силы и перемещение пластины dx

$$dA_F = dW(x) = F_x dx,$$

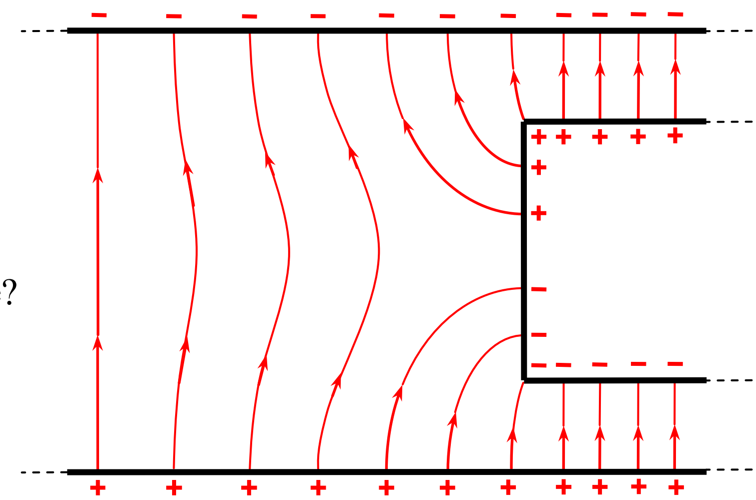
откуда

$$F_x(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{q^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C(x)}\right) = \frac{q^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{4\pi kd(d-h)}{a(bd-hx)}\right) =$$

$$= \frac{q^2}{2}\cdot\frac{4\pi kd(d-h)}{a}\cdot\frac{(-(-h))}{(bd-hx)^2} = \frac{q^2}{2}\cdot\frac{4\pi kdh(d-h)}{a(bd-hx)^2}$$

Вопрос 0. Почему необходима сила, чтобы двигать пластину параллельно обкладкам? Ведь, казалось бы, поле в конденсаторе перпендикулярно обкладкам, угол между силой и перемещением 90°, работа должна быть нулевой.

На самом деле всё несколько иначе. Вблизи торца пластины поле направлено перпендикулярно к торцу, то есть параллельно обкладкам (см. рисунок).



Вопрос 1. Почему пару конденсаторов C_2 и C_3 можно считать соединённой последовательно, а конденсатор C_1 – подключенным параллельно к этой паре?

Вопрос 2. При каких значениях x полученное выражение для F_x не работает? Почему?

ДЗ

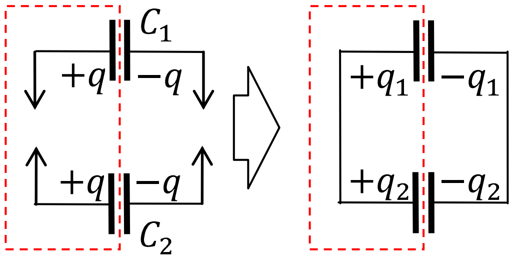
Найти силу, необходимую для квазистатического выдвижения металлической пластины из конденсатора, подключенного к батарее с постоянной ЭДС.

Работа и энергия в электростатике (часть 1)

Задача 1

Два конденсатора с емкостями C_1 и C_2, заряженные одинаковым зарядом q, соединяют параллельно. Как изменится электростатическая энергия системы.

Решение



Энергия двух конденсаторов до соединения

$$W_{\text{нач}} = \frac{q^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2} = \frac{q^2}{2} \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}.$$

После соединения заряды смогут течь по проводам и как-то по-новому поделятся между конденсаторами. НО! Пара обкладок разных конденсаторов и соединяющий их провод образуют электрически изолированную систему (например, левая пара на рисунке), полный (суммарный) заряд такой системы измениться не может, следовательно

$$q + q = q_1 + q_2.$$

Конденсаторы теперь соединены параллельно, напряжения на них равны

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

Из этих двух соотношений находим новые заряды конденсаторов

$$q_1 = \frac{2qC_1}{C_1 + C_2}, \qquad q_2 = \frac{2qC_2}{C_1 + C_2}$$

Энергия системы после соединения конденсаторов

$$W_{\text{кон}} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} = \frac{2q^2 C_1}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{2q^2 C_2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{2q^2}{C_1 + C_2}.$$

Кстати, такой же результат мы бы получили, просто посчитав энергию эквивалентного конденсатора с ёмкостью $C = C_1 + C_2$ и зарядом $2q$.

Изменение энергии

$$\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = \frac{2q^2}{C_1 + C_2} - \frac{q^2}{2} \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{q^2(4C_1C_2 - (C_1 + C_2)^2)}{2C_1C_2(C_1 + C_2)} =$$

$$= -\frac{q^2(C_1 - C_2)^2}{2C_1C_2(C_1 + C_2)} < 0,$$

энергия системы уменьшилась.

Вопрос 1. В результате каких процессов могла уменьшиться энергия системы? В какие формы она могла перейти? В каких частях системы могли протекать эти процессы?

Вопрос 1. Что изменится в данном решении, если конденсаторы соединять не «+к +», а «+к −»?

Задача 2 (Яковлев 159, 158, Иродов 3.137)

158. Вычислить электростатическую энергию заряда на шаре радиуса R в вакууме, если заряд шара q равномерно распределен по его поверхности.

159. Сделать тот же расчет для шара, заряд которого равномерно распределен по его объему.

3.137 Заряд q распределён равномерно по объёму шара радиуса R. Считая диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 1$, найти:

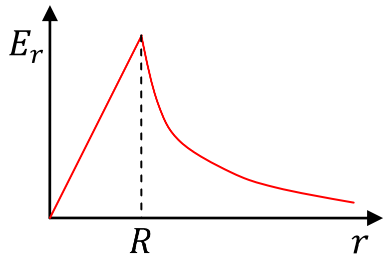
а) собственную электрическую энергию шара

б) отношение энергии W_1 внутри шара к энергии W_2 в окружающем пространстве.

Решение

Напряжённость и потенциал электрического поля снаружи шара

$$E_r = \frac{kq}{r^2}, \qquad \varphi = \frac{kq}{r}$$

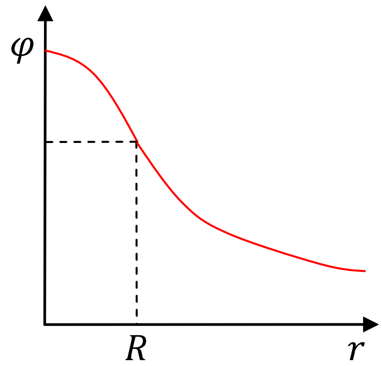


неважно, распределён заряд по поверхности или по объёму.

Если заряд распределён по поверхности, то внутри шара

$$E_r = 0, \qquad \varphi = \frac{kq}{R} = const.$$

Если заряд распределён по объёму, то внутри (см. графики)



$$E_r = \frac{kq}{R^3} r, \qquad \varphi = -\frac{kq}{R^3} \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{3kq}{2R}.$$

Энергию можно вычислить как энергию зарядов, находящихся в поле с определённым потенциалом

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV \quad \text{или} \quad W = \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS$$

Когда заряд распределён по поверхности шара

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{4\pi R^2} \cdot \frac{kq}{R} \int_S dS = \frac{kq^2}{2R}$$

Когда заряд распределён по объёму шара

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R \left(-\frac{kq}{R^3} \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{3kq}{2R}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \left(-\frac{2}{5} kq\pi R^2 + \frac{3kq}{2R} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3\right) =$$

$$= \frac{kq^2}{2R}\left(-\frac{3}{10} + \frac{3}{2}\right) = \frac{6}{5} \cdot \frac{kq^2}{2R}$$

Энергию можно вычислить через плотность энергии электрического поля

$$W = \int_V w dV, \qquad w = \frac{E^2}{8\pi k}.$$

Энергия снаружи

$$W_2 = \int_R^\infty \frac{1}{8\pi k}\left(\frac{kq}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{kq^2}{2}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{kq^2}{2R}.$$

Энергия внутри

$$W_1 = \int_0^R \frac{1}{8\pi k}\left(\frac{kq}{R^3}r\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{kq^2}{2}\cdot\frac{1}{R^6}\int_0^R r^4 dr = \frac{1}{5}\cdot\frac{kq^2}{2R}$$

Задача 3 (Иродов 3.140)

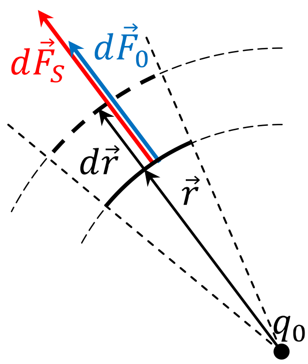
В центре сферической оболочки, равномерно заряженной зарядом $q = 5{,}0$ мкКл, расположен точечный электрический заряд $q_0 = 1{,}5$ мкКл. Найти работу электрических сил при расширении оболочки – увеличении её радиуса от $R_1 = 50$ мм до $R_2 = 100$ мм.

Решение

1-й способ – «в лоб». Найдём электрические силы, действующие на оболочку, и посчитаем их работу. Разобьём оболочку на малые участки, расширяющиеся вместе с оболочкой, заряды таких участков не будут изменяться при расширении оболочки. На малый участок оболочки, несущий заряд dq, действует две силы:

$$d\vec{F}_0 = dq\vec{E}_0 = dq\frac{kq_0}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

– со стороны точечного заряда q_0 и



$$d\vec{F}_S = dq\vec{E}_S = dq\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{kq}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

– со стороны всей остальной оболочки. Обе силы направлены радиально. При малом расширении оболочки – увеличении радиуса на величину dr – эти силы совершат работу

$$\delta A = \left(\left(d\vec{F}_0 + d\vec{F}_S\right), d\vec{r}\right) = (dF_{0r} + dF_{Sr})dr = dq\cdot k\left(q_0 + \frac{q}{2}\right)\frac{dr}{r^2}.$$

Работа над малым участком оболочки при её расширении от радиуса R_1 до радиуса R_2

$$dA = \int \delta A = dq\cdot k\left(q_0 + \frac{q}{2}\right)\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = dq\cdot k\left(q_0 + \frac{q}{2}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Суммируя по всем малым участкам (по всем dq) получим работу, совершённую электрическими силами над всей оболочкой, (суммируя все dq, получим полный заряд оболочки q)

$$A = \int dA = q\cdot k\left(q_0 + \frac{q}{2}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

2-й способ – через плотность энергии. Работа консервативных сил, в том числе электростатических, связана с изменением соответствующей потенциальной энергии

$$\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = -A_{\text{конс}}$$

При расширении оболочки плотность энергии электрического поля меняется в сферическом слое с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2, в остальных областях пространства напряжённость поля и плотность энергии не изменяются. До начала расширения напряжённость определялась, в указанном слое, суммарным зарядом системы $q_\Sigma = q_0 + q$, а плотность энергии была

$$w_\Sigma(r) = \frac{E_\Sigma^2}{8\pi k} = \frac{1}{8\pi k}\left(\frac{kq_\Sigma}{r^2}\right)^2 = \frac{kq_\Sigma^2}{8\pi}\cdot\frac{1}{r^4}.$$

После расширения напряжённость определяется только центральным зарядом q_0, а плотность энергии теперь

$$w_0(r) = \frac{E_0^2}{8\pi k} = \frac{1}{8\pi k}\left(\frac{kq_0}{r^2}\right)^2 = \frac{kq_0^2}{8\pi}\cdot\frac{1}{r^4}.$$

Интегрируя плотности по всему объёму слоя и вычитая один интеграл из другого, найдём изменение потенциальной энергии системы

$$\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = \int\limits_V w_0 dV - \int\limits_V w_\Sigma dV = \int\limits_V (w_0 - w_\Sigma) dV =$$

$$= \int\limits_{R_1}^{R_2} \big(w_0(r) - w_\Sigma(r)\big) 4\pi r^2 dr = \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{k(q_0^2 - q_\Sigma^2)}{8\pi}\cdot\frac{1}{r^4}\cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{k(q_0^2 - (q_0+q)^2)}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{k(-2q_0 q - q^2)}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) =$$

$$= -k\left(q_0 q + \frac{q^2}{2}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Работа электрических сил

$$A = -\Delta W = k\left(q_0 q + \frac{q^2}{2}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

выражение совпадает с тем, что было получено 1-м способом.

Вопрос 1. Откуда в формуле для $d\vec{F}_s$ (см. 1-й способ) появляется коэффициент $1/2$?

Вопрос 2. Почему напряжённость поля и плотность энергии меняются <u>только</u> в указанном слое (см. 2-й способ) и не меняются в остальных областях пространства?

Вопрос 3. Решите задачу 3-м способом – с помощью формул, выражающих энергию через плотность заряда и потенциал (см. Задачу 2) $W = \frac{1}{2}\int \sigma\varphi dS$

ДЗ

Иродов 3.131, 3.129, 3.133, 3.142

Закон Био-Савара-Лапласа

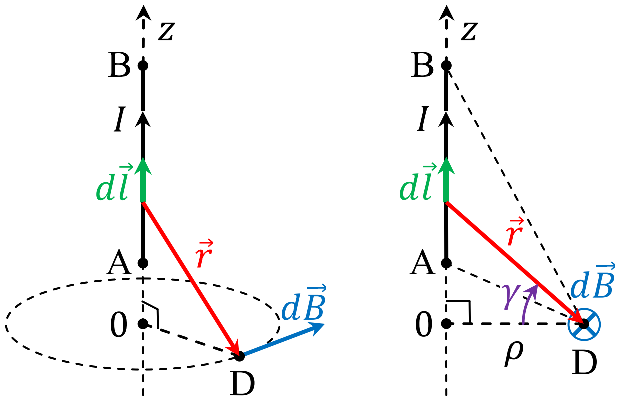
Задача 1

Найти магнитное поле, создаваемое конечным участком прямого провода с током.

Решение

Понятно, что ток, не меняющийся со временем, и одинаковый по всей длине провода, не может существовать в отдельном проводнике – должна быть замкнутая электрическая цепь с источником тока. Но мы ограничимся частью этой цепи – прямым куском провода – и найдём магнитное поле, созданное этой выделенной частью.

Пусть провод длиной l лежит на оси z и по нему от конца A до конца B течёт ток I, направление тока совпадает с осью z (см. рисунок). Точка наблюдения D, где мы хотим найти магнитное поле, находится на расстоянии ρ от оси z. Малый участок провода $d\vec{l}$ создаёт в точке D магнитное поле с индукцией $d\vec{B}$, которая, по закону Био-Савара-Лапласа, определяется выражением



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3} \qquad \text{(в системе СИ)}$$

Вектор $d\vec{B}$ направлен по касательной к окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной к оси z. Магнитные поля, созданные другими участками провода, имеют точно такое же направление, и такое же направление будет у магнитного поля, созданного всем проводом. Поэтому вместо суммирования векторов $d\vec{B}$ можно просто сложить (то есть проинтегрировать) их модули.

$$B = \int\limits_{\text{AB}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Irdl\sin(\gamma + 90°)}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{\text{AB}} \frac{dl\cos\gamma}{r^2}$$

Выразим r и dl через расстояние ρ, угол γ и его приращение $d\gamma$, соответствующее вектору $d\vec{l}$ (не показано на рисунке)

$$r = \frac{\rho}{\cos\gamma}, \qquad dl = \frac{rd\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\rho d\gamma}{\cos^2\gamma},$$

тогда интеграл можно брать по углу γ в пределах, соответствующих крайним точкам провода – от $\gamma_\text{A} = \alpha$ до $\gamma_\text{B} = \beta$.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho d\gamma\cos\gamma}{\cos^2\gamma\left(\frac{\rho}{\cos\gamma}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\cos\gamma\, d\gamma = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}(\sin\beta - \sin\alpha)}$$

В частности, для бесконечного провода получается

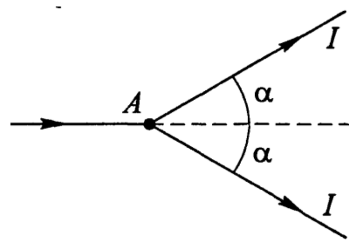
$$\alpha = -\frac{\pi}{2}, \qquad \beta = +\frac{\pi}{2}, \qquad \sin\beta - \sin\alpha = 2,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

Вопрос 1. Докажите, что все вектора $d\vec{B}$, созданные разными участками провода, имеют одинаковое направление – по касательной к окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной к оси z.

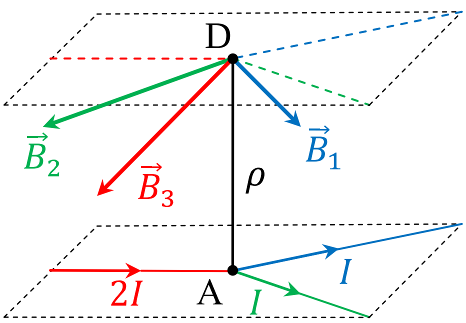
Вопрос 1. Постройте графики зависимости $B(\rho)$ для разных положений точки 0 на оси z – как попадающих на отрезок провода, так и нет.

Задача 2 (Яковлев 302)

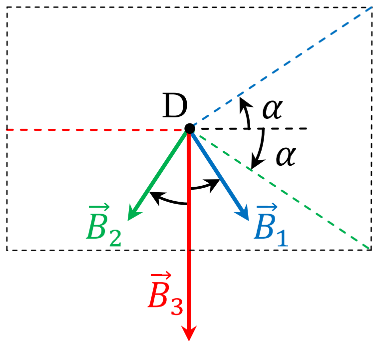


На рисунке 76 показана схема симметричного разветвления токов. Все проводники прямолинейны, бесконечны и лежат в одной плоскости. Определить индукцию магнитного поля на линии, перпендикулярной к плоскости токов и проходящей через точку А, если сила тока в каждой ветви равна I.

Решение



На рисунке показана плоскость проводников, параллельная ей плоскость, проходящая через точку наблюдения D, и вид сверху на вторую из них. Каждый из трёх проводов, соединяющихся в точке A, создаёт в точке D свое магнитное поле (провод и его поле показаны на рисунке одинаковым цветом). Вектора индукции этих полей лежат в плоскости параллельной плоскости проводников. Модули векторов индукции найдём с помощью формулы, полученной в Задаче 1. Входящие в формулу углы α и β для 1-го и 2-го проводов оказываются такими:



$$\alpha = 0, \qquad \beta = \pi/2,$$

а для 3-го провода –

$$\alpha = -\pi/2, \qquad \beta = 0.$$

Для всех трёх проводов разность синусов в формуле равна единице. Тогда

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}, \qquad B_3 = \frac{\mu_0 \cdot 2I}{4\pi\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}.$$

Сложим три вектора (не забываем, что в условии угол между направлениями токов в проводах обозначен как α) и получим модуль результирующего поля в точке D

$$B = 2B_1 \cos\alpha + B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}(\cos\alpha + 1)$$

Вопрос 1. Почему вектора $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ лежат в плоскости параллельной плоскости проводников?

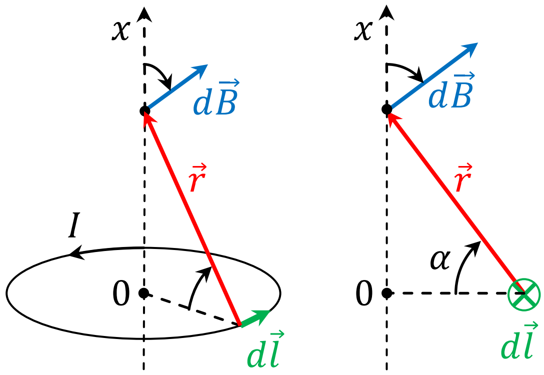
Задача 3 (Иродов 3.222)

По круговому витку радиуса $R = 100$ мм из тонкого провода циркулирует ток $I = 1{,}00$ А. Найти магнитную индукцию

а) в центре витка;

б) на оси витка в точке, отстоящей от его центра на $x = 100$ мм.

Решение



Каждый участок $d\vec{l}$ данного витка создаёт точке наблюдения магнитное поле с индукцией

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}.$$

Нам важна только -проекция вектора индукции

$$dB_x = dB\cos\alpha.$$

Интегрируя по всему витку, получим

$$B_x = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\cos\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\alpha}{r^2}\int dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\alpha}{r^2}\cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 IR\cos\alpha}{2r^2}.$$

Выразим r и $\cos\alpha$ через радиус витка R и расстояние x:

$$r = R^2 + x^2, \qquad \cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}.$$

Тогда

$$B_x = \frac{\mu_0 IR}{2(R^2+x^2)}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

В частности, в центре витка, где $x = 0$,

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Вопрос 1. Почему важна только -проекция вектора индукции, а другие – нет?

Задача 4 (Иродов 3.227)

Ток I течёт вдоль длинной тонкостенной трубы радиуса R, имеющей по всей длине продольную прорезь ширины h. Найти индукцию магнитного поля внутри трубы, если $h \ll R$.

ДЗ

Иродов 3.225, 3.228

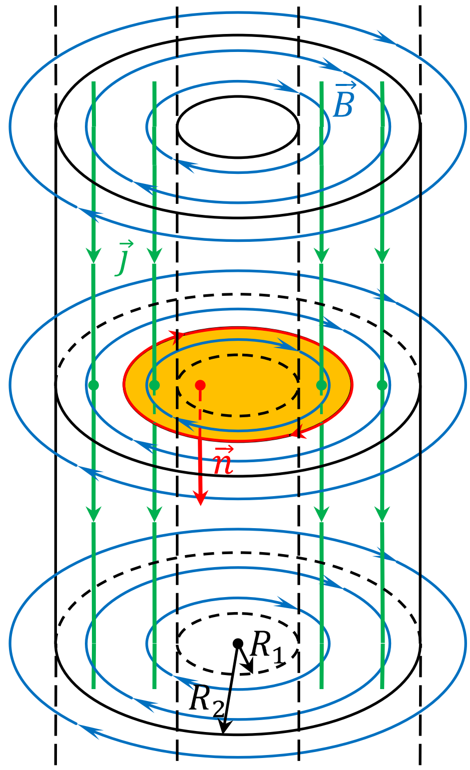
Яковлев 304

Циркуляция магнитного поля. Сила Ампера

Задача 1

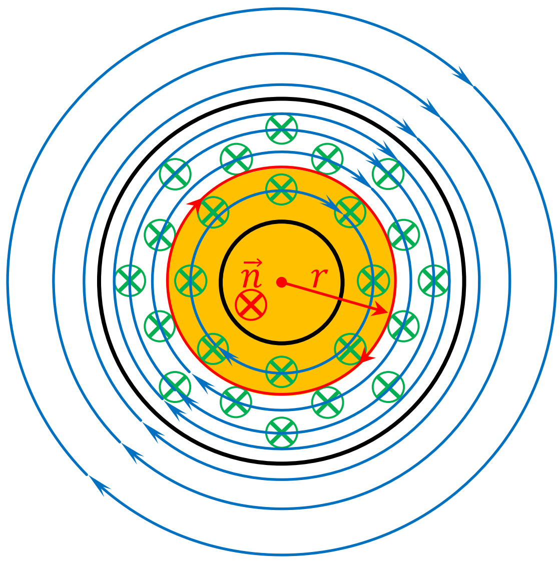
Ток течет по очень длинной трубе с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2. Плотность тока постоянна по сечению и равна j. Найти индукцию магнитного поля в зависимости от расстояния до оси трубы. Рассмотреть предельные случаи.

Решение



Трубу с током можно рассматривать как совокупность тонких прямолинейных проводников. Каждый такой проводник создаёт магнитное поле, вектор индукции которого направлен перпендикулярно проводнику. Вектор индукции поля всей совокупности, т.е. трубы, также будет перпендикулярен к оси трубы.

В силу круговой симметрии трубы вектор $\vec{B}$ в разных точках, находящихся на одинаковом расстоянии от оси трубы, должен иметь одинаковую величину и одинаковое направление по отношению к радиусу, проведённому от оси в данную точку. Рассмотрим контур, состоящий из таких точек, лежащих в одной перпендикулярной к оси плоскости, т.е. окружность. Радиус окружности обозначим как r. Поверхность, ограниченную этим контуром возьмём самую простую – круг. Выберем направление положительной нормали $\vec{n}$ к поверхности совпадающим с направлением тока в трубе и соответствующее ему направление обхода контура. Запишем теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$:



$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \iint_S (\vec{j}, \vec{n}) dS$$

Левая часть сильно упрощается, т.к. во всех точках конкура вектор $\vec{B}$ имеет одинаковую величину и одинаковое по отношению к контуру направление.

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = B_l \oint_L dl = B_l \cdot 2\pi r,$$

Сразу отметим, что теорема Гаусса для магнитного поля –

$$\oiint_S (\vec{B}, \vec{n})\, dS = 0$$

– вкупе с симметрией запрещают вектору $\vec{B}$ иметь радиальную компоненту, т.е. $B_r = 0$.

Примечание. В теореме Гаусса и в правой части теоремы о циркуляции имеются в виду разные поверхности и разные нормали.

Выражение для интеграла в правой части теоремы о циркуляции зависит от того, где проходит контур – внутри трубы, в её толще или снаружи.

$$\iint_S (\vec{j}, d\vec{n})dS = \begin{cases} 0, & r \le R_1 \\ j \cdot \pi(r^2 - R_1^2), & R_1 \le r \le R_2 \\ j \cdot \pi(R_2^2 - R_1^2), & r \ge R_2 \end{cases}$$

Откуда

$$B_l = \begin{cases} 0, & r \le R_1 \\ \dfrac{\mu_0 j}{2} \cdot \left(r - \dfrac{R_1^2}{r}\right), & R_1 \le r \le R_2 \\ \dfrac{\mu_0 j}{2r} \cdot (R_2^2 - R_1^2), & r \ge R_2 \end{cases}$$

Вопрос 1. Как изменится решение задачи и его результат, если вместо плоского круга взять другую поверхность, не плоскую?

Вопрос 2. Докажите, что $B_r = 0$.

Вопрос 3. Рассмотрите предельные переходы. Из выражения для B_l получите

а) формулу для магнитного поля прямого бесконечного провода.

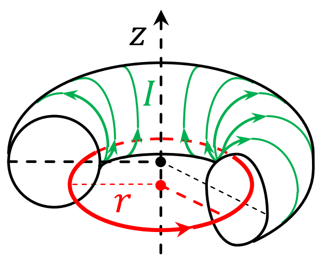
б) выражение для поля тонкостенной трубы ($\Delta R = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2$)

Задача 2

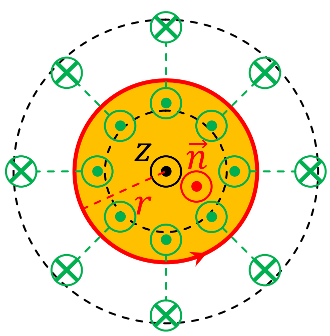
Найти магнитное поле тороидальной катушки из N витков, по которой течёт ток I.

Решение

Некоторые размышления и приближения.



1. Если на такой бублик наматывать проволоку постоянного сечения, укладывая в «дырке» витки плотно один к другому, то на внешней стороне бублика плотной укладки не получится, между витками будут промежутки. <u>Первое приближение</u> – пренебрежём этими промежутками.



2. Витки не замкнуты, начало и конец одного витка не соединены друг с другом, они соединяются с соседними витками. <u>Второе приближение</u> – будем считать витки замкнутыми.

3. Витки можно наматывать по-разному, например, под углом к оси бублика. <u>Третье приближение</u> – будем рассматривать случай, когда плоскости витков проходят через ось (содержат в себе ось).

С такими приближениями катушка обладает <u>круговой симметрией</u> относительно своей оси z, что позволяет легко решить задачу с помощью теоремы о циркуляции. Контур интегрирования возьмём, разумеется, в форме окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной к оси z. (Радиус окружности обозначен как r, направление обхода и положительной нормали $\vec{n}$ показаны на рисунке.) Интегрируя по контуру магнитное поле, получим с одной стороны

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = B_l \cdot 2\pi r.$$

С другой стороны в теореме о циркуляции стоит полный ток пронизывающий поверхность, ограниченную контуром. Этот ток либо равен нулю, если контур находится снаружи бублика (в «дырке» – это тоже снаружи). Либо, если контур внутри, равен произведению количества витков N в катушке и тока I, проходящего через неё (тока, текущего в каждом витке). Тогда

$$B_l \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{полн}} = \begin{cases} 0, & \text{контур снаружи} \\ \mu_0 N I, & \text{контур внутри} \end{cases},$$

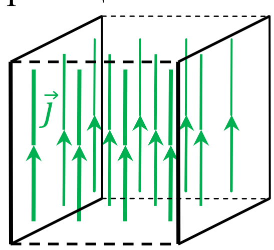
$$B_l = \begin{cases} 0, & \text{снаружи катушки} \\ \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}, & \text{внутри катушки} \end{cases},$$

Вопрос 1. Изобразите линии индукции магнитного поля тороидальной катушки.

Вопрос 2. Что изменится в решении, если отказаться от сделанных приближений? От всех вместе и от каждого по отдельности.

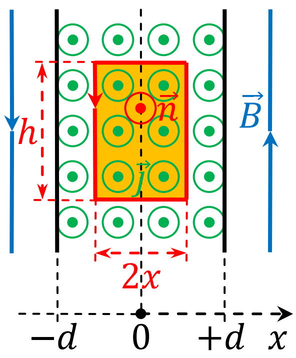
Задача 3 (Иродов 3.233)

Однородный ток плотности j течёт внутри неограниченной пластины толщины $2d$ параллельно её поверхности. Найти индукцию магнитного поля этого тока как функцию расстояния x от средней плоскости пластины. Магнитную проницаемость всюду считать равной единице.



Решение

Пластину с током можно рассматривать как совокупность тонких прямолинейных проводников. Вектор индукции магнитного поля пластины должен быть направлен перпендикулярно направлению тока. Вектор индукции не может иметь компонент перпендикулярных к поверхности пластины (x-компонент), это запрещено симметрией и теоремой Гаусса. Аналогичные рассуждения у нас были в задаче 1.



Контур интегрирования для теоремы о циркуляции возьмём в форме прямоугольника, лежащей в плоскости перпендикулярной к линиям тока. Одна пара сторон параллельна поверхности пластины, вторая пара параллельна оси x. Расположим контур симметрично относительно средней плоскости пластины (см. рисунок). Тогда вклады в циркуляцию вектора $\vec{B}$ от первой пары сторон (от левой и правой) будут одинаковы и равны $B_l h$ каждый. Вклады от второй пары (от верхней и нижней) будут нулевые. Следовательно

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = B_l h + 0 + B_l h + 0 = 2B_l h$$

С другой стороны,

$$\iint_S (\vec{j}, d\vec{n}) dS = \begin{cases} j \cdot 2hx, & x \le d \\ j \cdot 2hd, & x > d \end{cases}$$

Откуда

$$B_l(x) = \begin{cases} \mu_0 j \cdot x, & x \le d \\ \mu_0 j \cdot d, & x > d \end{cases}$$

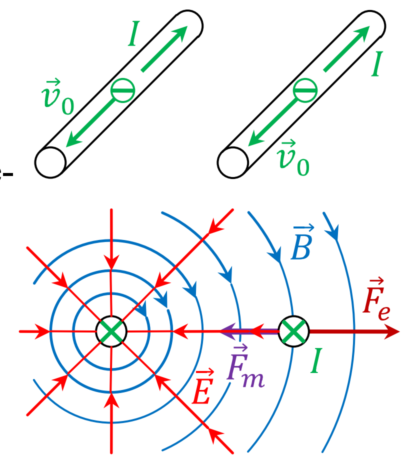
Вопрос 1. Постройте график зависимости $B_l(x)$.

Вопрос 1. Как симметрия и теорема Гаусса запрещают вектору $\vec{B}$ иметь компоненты перпендикулярные к поверхности пластины?

Задача 4

Сравнить силы электрического и магнитного взаимодействия двух одинаковых параллельных пучков электронов, если расстояние между пучками много больше их диаметра.

Решение



Пусть в каждом пучке все электроны имеют одинаковую продольную скорость $\vec{v}_0$, и через поперечное сечение пучка проходит N_1 электронов за единицу времени. Тогда электрический ток пучка направлен противоположно скорости и равен

$$I = eN_1,$$

линейная плотность заряда (заряд единицы длины пучка)

$$\lambda = -\frac{eN_1}{v_0}$$

Будем считать, что пучки находятся настолько далеко друг от друга, что увеличением толщины пучков вдоль направления движения электронов можно пренебречь по сравнению с расстоянием между пучками. (Увеличение толщины вызвано кулоновским отталкиванием между электронами внутри пучка.) То есть, с точки зрения одного пучка можно считать другой бесконечно тонким.

Рассмотрим поля, создаваемые левым пучком, и силы, с которыми эти поля действуют на правый пучок (см. рисунок). Сразу отметим очевидный факт: электрическая сила будет отталкивать пучки, а магнитная – притягивать. Левый пучок на расстоянии r от своей оси создаёт электрическое и магнитное поле

$$|\vec{E}| = \frac{2k|\lambda|}{r}, \qquad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Электрическая и магнитная силы, действующие на участок правого пучка длины l,

$$\left|\vec{F}_e\right| = \left|\lambda l \vec{E}\right| = \frac{2k\lambda^2 l}{r} = \frac{2kl}{r}\left(\frac{eN_1}{v_0}\right)^2, \qquad \left|\vec{F}_m\right| = Il\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r} = \frac{\mu_0 l}{2\pi r}(eN_1)^2$$

Отношение этих сил

$$\frac{\left|\vec{F}_e\right|}{\left|\vec{F}_m\right|} = \frac{2kl}{r}\left(\frac{eN_1}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{2\pi r}{\mu_0 l (eN_1)^2} = \frac{4\pi k}{v_0^2 \mu_0} = \frac{1}{v_0^2 \varepsilon_0 \mu_0} = \frac{c^2}{v_0^2}$$

Вопрос 1. Получите исходные выражения для I и λ.

Вопрос 2. Найдите силы, которые действуют на отдельно взятый электрон правого пучка со стороны всего левого пучка. Найдите отношение этих сил.

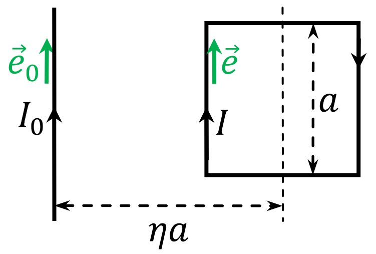
Задача 5 (Иродов 3.261)

Квадратная рамка с током $I = 0{,}90$ А расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником, по которому течёт ток $I_0 = 5{,}0$ А. Сторона рамки $a = 8{,}0$ см. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстояние, которое в $\eta = 1{,}5$ раза больше стороны рамки. Найти:

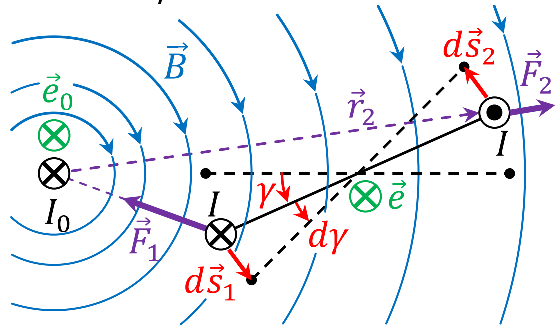
а) амперову силу, действующую на рамку;

б) механическую работу, которую нужно совершить при медленном повороте рамки вокруг её оси на 180°.

Решение



Толщиной провода и рамки пренебрегаем по сравнению с длинной стороны рамки, чтобы не учитывать перераспределение тока в проводниках под действием магнитного поля.



Введём единичные вектора $\vec{e}_0$ и $\vec{e}$, задающие направление тока в проводе и рамке, (в той стороне рамки, которая вначале была ближе к проводу). Эти же вектора позволяют записать в векторной форме выражения для магнитного поля и силы Ампера.

На расстоянии r от прямого провода создаётся магнитное поле с индукцией

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\left[\vec{e}_0, \frac{\vec{r}}{r}\right]$$

Это магнитное поле действует на все четыре стороны рамки, но силы, приложенные к верхней и нижней сторонам (см. рисунок), уравновешивают друг друга – их рассматривать не будем. На изначально ближнюю к проводу сторону рамки действует сила

$$\vec{F}_1 = aI\left[\vec{e}, \vec{B}(\vec{r}_1)\right] = aI\,\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r_1}\left[\vec{e}, \left[\vec{e}_0, \frac{\vec{r}_1}{r_1}\right]\right] = \frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi r_1}\left(\vec{e}_0\left(\vec{e}, \frac{\vec{r}_1}{r_1}\right) - \frac{\vec{r}_1}{r_1}(\vec{e}, \vec{e}_0)\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi r_1}\left(0 - \frac{\vec{r}_1}{r_1}(\vec{e},\vec{e}_0)\right) = -\frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi r_1}\cdot\frac{\vec{r}_1}{r_1}(\vec{e},\vec{e}_0).$$

На изначально дальнюю –

$$\vec{F}_2 = aI\left[-\vec{e},\vec{B}(\vec{r}_2)\right] = \frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi r_2}\cdot\frac{\vec{r}_2}{r_2}(\vec{e},\vec{e}_0)$$

Заметим, что сила ампера направлена радиально, а к проводу или от него – зависит от скалярного произведения векторов $\vec{e}$ и $\vec{e}_0$, т.е. от взаимного направления токов в рамке и проводе.

При начальном положении рамки обе силы направлены вдоль одного радиуса, их сумма в проекции на этот радиус

$$F_r = F_{1r} + F_{2r} = -\frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi}(\vec{e},\vec{e}_0)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$r_1 = \eta a - \frac{a}{2}, \qquad r_2 = \eta a + \frac{a}{2}, \qquad \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2}{(2\eta-1)a} - \frac{2}{(2\eta+1)a} = \frac{4}{(4\eta^2-1)a},$$

При $\eta = 1{,}5$

$$F_r = \frac{\mu_0 a I I_0}{4\pi a}(\vec{e},\vec{e}_0)$$

При повороте рамки на малый угол $d\gamma$, сторона рамки (изначально ближняя) совершит перемещение $d\vec{s}_1$, а сила Ампера совершит работу

$$dA_1 = \left(\vec{F}_1, d\vec{s}_1\right) = -\frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi r_1^2}(\vec{r}_1, d\vec{s}_1)(\vec{e},\vec{e}_0).$$

Поскольку при повороте рамки вокруг оси параллельной проводу $d\vec{s}_1 = d\vec{r}_1$, то

$$(\vec{r}_1, d\vec{s}_1) = (\vec{r}_1, d\vec{r}_1) = r_1 dr_1, \qquad \text{и}$$

$$dA_1 = \left(\vec{F}_1, d\vec{s}_1\right) = -\frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi r_1^2} r_1 dr_1(\vec{e},\vec{e}_0) = -\frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi}(\vec{e},\vec{e}_0)\frac{dr_1}{r_1}.$$

При повороте рамки на 180°

$$A_1 = -\frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi}(\vec{e},\vec{e}_0)\int\limits_{\eta a - a/2}^{\eta a + a/2}\frac{dr_1}{r_1} = -\frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi}(\vec{e},\vec{e}_0)\ln\frac{2\eta+1}{2\eta-1}.$$

Рассуждая аналогично, для дальней стороны получим, что

$$A_2 = \frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi}(\vec{e},\vec{e}_0)\int\limits_{\eta a + a/2}^{\eta a - a/2}\frac{dr_2}{r_2} = -\frac{\mu_0 a I I_0}{2\pi}(\vec{e},\vec{e}_0)\ln\frac{2\eta+1}{2\eta-1}.$$

То есть $A_2 = A_1$. Работа <u>против</u> сил Ампера

$$A' = -(A_1 + A_2) = \frac{\mu_0 a I I_0}{\pi}(\vec{e},\vec{e}_0)\ln\frac{2\eta+1}{2\eta-1}$$

Вопрос 1. Судя по полученным выражениям, сила Ампера ведёт себя как потенциальная. Всегда ли это так?

Вопрос 2. Можно ли так повернуть рамку (не вокруг заданной в условии оси, а как-нибудь иначе), чтобы ближняя и дальняя стороны поменялись местами, а работа силы Ампера была бы нулевой?

ДЗ

Иродов 3.234, 3.238, 3.263, 3.267, 3.279

1. Закон электромагнитной индукции (индукция в движущихся проводниках)

1. Прямоугольный контур, имеющий площадь S и сопротивление R, вращают с постоянной угловой скоростью ω в однородном постоянном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном оси вращения. Определить индукционный ток и момент внешних сил, действующих на виток.
2. 382, 383, 392

На дом: [1] 418; [2] 3.308, 3.309, 3.312, 3.304, 3.305, 3.311

2. Закон электромагнитной индукции (вихревое электрическое поле)

1. В очень длинной катушке ток нарастает пропорционально времени: $i = at$. Число витков n на единицу длины и радиус витка R известны. Пренебрегая сопротивлением катушки, найти электрическое поле в произвольной точке. Что покажет вольтметр, если его клеммы соединить проводом, охватывающим соленоид один или два раза?
2. Длинный прямой провод и прямоугольный виток лежат в одной плоскости. Две стороны витка параллельны проводу. В проводе течет ток, линейно нарастающий во времени. Вычислить э.д.с. индукции в витке.

На дом: [2] 3.313, 3.314, 3.318, 3.319, 3.320; [3] 32-13

Литература

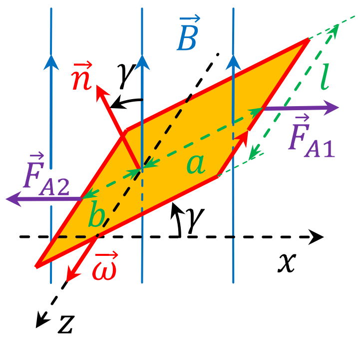
1. Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм. Под ред. **И.А. Яковлева**. М.:Наука, 1977.
2. **Иродов И.Е**. Задачи по общей физике. М.:Наука, 1988.
3. **Сахаров Д.А**. Сборник задач по общей физике. М., 1967.

Закон электромагнитной индукции
Часть 1. Индукция в движущихся проводниках

Задача 1.1

Прямоугольный контур, имеющий площадь S и сопротивление R, вращают с постоянной угловой скоростью ω в однородном постоянном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном оси вращения. Определить индукционный ток и момент внешних сил, действующих на виток.

Решение



Пусть стороны рамки параллельные оси вращения z имеют длину l и находятся одна расстоянии a, другая на расстоянии b от оси z. Во вращающемся контуре возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Ток I в контуре связан с ЭДС законом Ома

$$\mathcal{E}_{ind} = IR.$$

Поток вектора магнитной индукции через ограниченную контуром поверхность

$$\Phi = (\vec{B}, \vec{n})S = BS\cos\gamma, \qquad S = l(a+b)$$

Тогда ток в контуре

$$I = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BS}{R}\frac{d\cos\gamma}{dt} = +\frac{BS}{R}\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt} = \frac{BS}{R}\sin\gamma\cdot\omega.$$

Полученное выражение для тока может принимать как положительные так и отрицательные значения, т.е. ток может быть направлен как по так и против выбранного направления обхода.

На стороны рамки параллельные оси z действуют силы Ампера, их проекции на ось x

$$F_{A1x} = IlB, \qquad F_{A2x} = -IlB.$$

Эти силы создают моменты, в проекции на ось z равные

$$M_{A1z} = -F_{A1x}a\sin\gamma = -IlBa\sin\gamma, \qquad M_{A2z} = F_{A2x}b\sin\gamma = -IlBb\sin\gamma.$$

Поскольку контур вращается равномерно суммарный момент всех действующих на него сил (амперовых + внешних) должен равняться нулю

$$M_{A1z} + M_{A2z} + M_z^{\text{внеш}} = 0,$$

$$M_z^{\text{внеш}} = -(M_{A1z} + M_{A2z}) = +IlB(a+b)\sin\gamma = IBS\sin\gamma = \frac{(BS)^2\omega}{R}\sin^2\gamma.$$

Тот же результат можно получить, используя понятие **магнитного момента** контура.

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}.$$

Момент амперовых сил, действующих на контур

$$\vec{M}_A = [\vec{p}_m, \vec{B}], \qquad M_{Az} = -p_m B\sin\gamma$$

Дальше аналогично:

$$M_z^{\text{внеш}} = -M_{Az} = +p_m B\sin\gamma = IBS\sin\gamma = \frac{(BS)^2\omega}{R}\sin^2\gamma$$

Вопрос 1. Поверхность, ограниченная контуром, может быть произвольной, не обязательно плоской. Докажите, что поток вектора $\vec{B}$ не зависит от формы поверхности.

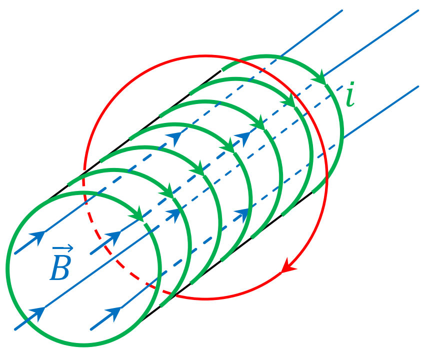
Вопрос 2. Почему не учитываются силы Ампера, действующие на стороны контура перпендикулярные к оси z?

Часть 2. Индукция в движущихся проводниках

Задача 2.1

В очень длинной катушке ток нарастает пропорционально времени: $i = at$. Число витков n на единицу длины и радиус витка R известны. Пренебрегая сопротивлением катушки, найти электрическое поле в произвольной точке. Что покажет вольтметр, если его клеммы соединить проводом, охватывающим соленоид один или два раза?

Решение



Линии напряжённости вихревого электрического поля будут, в силу симметрии, представлять собой окружности, «насаженные» на ось катушки. Возьмём одну такую линию радиуса r (см. рисунок) и проинтегрируем вдоль неё вектор напряжённости $\vec{E}$, получим

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 2\pi r E_l.$$

С другой стороны

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad \text{где } \Phi = \iint_S (\vec{B}, \vec{n})dS$$

Магнитное поле бесконечной катушки равно нулю снаружи, а внутри постоянно по всему объёму катушки

$$B = \mu_0 n i.$$

Тогда поток магнитного поля

$$\Phi = BS(r) = \mu_0 n i S(r), \qquad \text{где } S(r) = \begin{cases} \pi r^2, & \mathrm{r < R}, \\ \pi R^2, & \mathrm{r > R}. \end{cases}$$

$S(r)$ – площадь той части поверхности интегрирования, которая пронизана магнитным полем. Учитывая, что $i = at$, получим

$$2\pi r E_l = -\frac{d}{dt}\big(\mu_0 n i S(r)\big) = -\mu_0 n S(r)\frac{di}{dt} = -\mu_0 n S(r) a.$$

Откуда

$$E_l = -\frac{\mu_0 n S(r) a}{2\pi r} = -\frac{1}{2}\mu_0 n a \cdot \begin{cases} r, & \mathrm{r} < \mathrm{R}, \\ \dfrac{R^2}{r}, & \mathrm{r} > \mathrm{R}. \end{cases}$$

Вопрос 1. О чём говорит знак «–» в полученном выражении?

Вопрос 2. Постройте график зависимости $E_l(r)$.

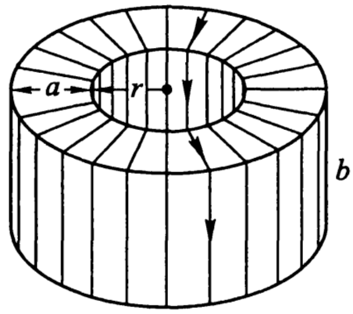
Вопрос 3. Найдите показания вольтметра (см. условие).

Вопрос 4. Что изменится, если <u>не</u> пренебрегать сопротивлением катушки?

Взаимная индукция. Свободные контуры

Задача 1 (Яковлев 410)

В предыдущей задаче (409, см. ниже) по оси катушки протянут бесконечно длинный прямолинейный провод. Вычислить взаимную индуктивность M между катушкой и этим проводом.

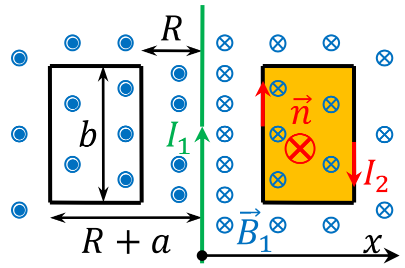


409. Вычислить индуктивность L тороидальной обмотки, намотанной на цилиндр высоты b с внутренним радиусом r и наружным $r + \text{a}$. Число витков катушки равно N, магнитная проницаемость $\mu = 1$

Решение

Способ 1. Найдём поток через катушку магнитного поля, созданного проводом. Рассмотрим сечение катушки плоскостью, в которой лежит провод. Провод с током I_1 создаёт вокруг себя и, в том числе, внутри катушки поле с индукцией

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}.$$



Поток этого поля через один виток катушки

$$\Delta\Phi_{1-2} = \int_R^{R+a} B_1(x) b dx = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln\frac{R+a}{R}$$

(индекс 1–2 обозначает «1-й ток/поле через 2-й контур»). Поток через все N витков

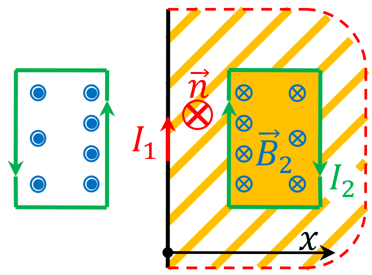
$$\Phi_{1-2} = N\Delta\Phi_{1-2}.$$

Взаимная индуктивность

$$M_{1-2} = \frac{\Phi_{1-2}}{I_1} = \frac{\mu_0 N b}{2\pi} \ln\frac{R+a}{R}.$$

Способ 2. Найдём поток магнитного поля катушки, через контур, образованный проводом. Но замкнутого контура, вроде бы, не получается! Однако провод бесконечный, и можно считать, что где-то в бесконечности он замыкается сам на себя. В качестве поверхности, ограниченной таким контуром, возьмём полуплоскость, на краю которой лежит провод. Магнитное поле катушки существует только внутри неё и пронизывает не всю полуплоскость, а лишь её часть. Индукция поля катушки

$$B_2(x) = \frac{\mu_0 N I_2}{2\pi x},$$



поток этого поля через контур провода

$$\Phi_{2-1} = \int_R^{R+a} B_2(x) b dx = \frac{\mu_0 N I_2 b}{2\pi} \ln\frac{R+a}{R},$$

взаимная индуктивность

$$M_{2-1} = \frac{\Phi_{2-1}}{I_2} = \frac{\mu_0 N b}{2\pi} \ln\frac{R+a}{R}.$$

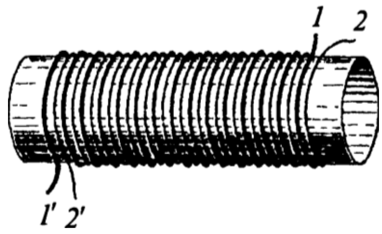
Вопрос 1. Почему $M_{1-2} = M_{2-1}$?

Вопрос 2. Что изменится в решении, если поменяется направление тока в проводе или в катушке?

Вопрос 3. Как изменится взаимная индуктивность, если провод деформировать, например, замкнуть в кольцо конечного радиуса?

Задача 2 (Яковлев 407)

На длинный цилиндр намотаны вплотную две обмотки 1–1' и 2–2' так, как показано на рисунке. Индуктивность каждой обмотки равна 0,05 Гн. Чему будет равна индуктивность L всей цепи, если: 1) концы 1' и 2' соединить, а в цепь включить концы 1 и 2; 2) концы 1 и 2' соединить, а в цепь включить концы 1' и 2; 3) концы 1' и 2' и 1 и 2 соединить и обе пары концов включить в цепь?



Решение

Положительным будем считать направление тока текущего от штрихованных концов к нештрихованным. При такой намотке, если одна катушка создаёт магнитный поток через себя, то такой же поток она создаёт через другую катушку, следовательно, взаимная индуктивность равна индуктивности одной катушки $M = L_0 = 0{,}05$ Гн.

Вычислим энергию соединённых катушек

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2 = \frac{L_0}{2}(I_1^2 + I_2^2 + 2 I_1 I_2) = \frac{L_0}{2}(I_1 + I_2)^2$$

Откуда сможем найти их эквивалентную индуктивность L (индуктивность всей цепи)

$$W = \frac{L I^2}{2}, \qquad L = \frac{2W}{I^2} = L_0 \frac{(I_1 + I_2)^2}{I^2}.$$

1) Соединили концы 1' и 2', в цепь включили концы 1 и 2. Пусть ток I втекает через конец 1, проходит по первой катушке до соединённых концов 1' и 2'. Тогда, учитывая выбранное положительное направление токов, получим

$$I_1 = -I, \qquad I_2 = +I, \qquad I_1 + I_2 = 0, \qquad L = 0.$$

2) Соединили концы 1 и 2', в цепь включили концы 1' и 2. Ток втекает через конец 1', вытекает через конец 2.

$$I_1 = +I, \qquad I_2 = +I, \qquad I_1 + I_2 = 2I, \qquad L = 4L_0.$$

3) Соединили 1' с 2' и 1 с 2, соединённые пары включили в цепь. Путь ток I втекает через нештрихованную пару, а вытекает через штрихованную. Каждой катушке достанется половина этого тока.

$$I_1 = -\frac{I}{2}, \qquad I_2 = -\frac{I}{2}, \qquad I_1 + I_2 = I, \qquad L = L_0.$$

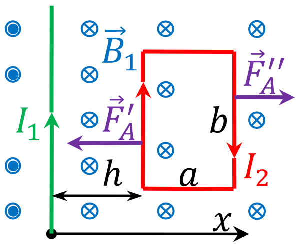
Как можно заметить, результат не зависит от полярности включения катушек в цепь.

Вопрос 1. Где могут пригодиться такие соединения катушек?

Задача 3

Длинный прямой провод и прямоугольный виток со сторонами a и b лежат в одной плоскости, стороны b параллельны проводу. Расстояние от провода до ближней к нему стороны витка равно h. Токи в проводе I_1и в витке I_2 поддерживаются постоянными. Найти работу, которую нужно выполнить, чтобы а) увеличить расстояние между витком и проводом до H; б) повернуть виток вокруг его оси симметрии, параллельной проводу, на углы 90° и 180°.

Решение



а) Способ 1, силовой.

Провод с током I_1 создаёт магнитное поле с индукцией

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}.$$

Со стороны этого поля на ближнюю и дальнюю стороны витка действуют силы Ампера. Проекции этих сил на ось x при заданных на рисунке направлениях токов

$$F'_{Ax} = -I_2 b B_1(x'), \qquad F''_{Ax} = +I_2 b B_1(x''),$$

где x' и x'' – координаты ближней и дальней сторон витка. Чтобы передвинуть виток к нему надо приложить внешнюю силу

$$F_x = -(F'_{Ax} + F''_{Ax}).$$

Работа этой силы

$$A = \int F_x dx = \int_h^H I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx - \int_{h+a}^{H+a} I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi}\left(\int_h^H \frac{dx}{x} - \int_{h+a}^{H+a} \frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi}\left(\ln\frac{H}{h} - \ln\frac{H+a}{h+a}\right) = \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi} \ln\frac{H(h+a)}{h(H+a)}.$$

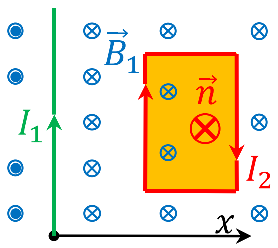
Способ 2, энергетический.

Работа внешней силы равна изменению энергии системы

$$A = \Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}}.$$

Энергия взаимодействующих контуров – витка и провода –

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2$$



Поскольку токи поддерживаются постоянными, то

$$\Delta W = (M_{\text{кон}} - M_{\text{нач}}) I_1 I_2.$$

Найдём начальную взаимную индуктивность провода и витка

$$\Phi_{1-2} = \int_h^{h+a} B_1(x) b dx = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln\frac{h+a}{h},$$

$$M_{\text{нач}} = \frac{\Phi_{1-2}}{I_1} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{h + a}{h}.$$

Аналогично, конечная взаимная индуктивность

$$M_{\text{кон}} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{H + a}{H}.$$

Искомая работа

$$A = \Delta W = I_1 I_2 \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left(\ln \frac{H + a}{H} - \ln \frac{h + a}{h} \right) = \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{h(H + a)}{H(h + a)} =$$
$$= -\frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{H(h + a)}{h(H + a)}.$$

Получилась такая же величина, как 1-м способом, но с противоположным знаком! Почему? Пока не будет решён это вопрос, решать вторую часть задачи бессмысленно.

Задача 4

Два сверхпроводящих витка с индуктивностями L_1 и L_2 расположены так, что их коэффициент взаимоиндукции равен M. В одном витке течет ток I_1, в другом ток равен нулю. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы разнести витки на бесконечно большое расстояние друг от друга.

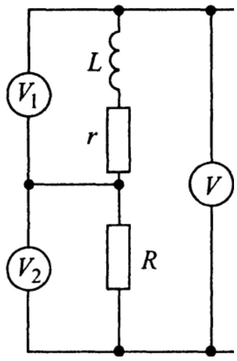
ДЗ

Иродов 3.358, 3.359, 3.340

Яковлев 406, 438 – 441

Расчет цепей переменного тока

Задача 1 (Яковлев 484)

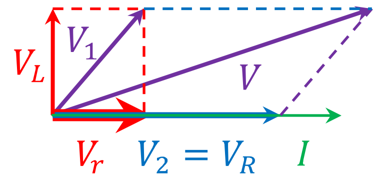


Для определения мощности, выделяемой переменным током в катушке (индуктивность L, сопротивление r), применяют иногда метод трех вольтметров, заключающийся в следующем. Последовательно с катушкой включают известное сопротивление R и присоединяют к цепи три вольтметра так, как показано на рисунке. Измеряют с помощью этих вольтметров эффективные напряжения V_1 – на катушке, V_2 – на сопротивлении и V – между концами цепи. Определить искомую мощность N.

Решение

Пусть через катушку и сопротивление R течёт переменный ток с эффективным значением I, т.е. мгновенный ток меняется по закону

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos \omega t,$$



начальную фазу можно принять равной нулю. Тогда активная мощность, выделяющаяся на катушке

$$N = I^2 r$$

Векторная диаграмма для данной цепи показана на рисунке. Из диаграммы

$$V_1^2 = V_r^2 + V_L^2,$$

$$V^2 = V_L^2 + (V_r + V_2)^2.$$

При этом

$$V_2 = IR, \qquad V_r = Ir, \qquad \text{откуда } I = \frac{V_2}{R}, \qquad r = R\frac{V_r}{V_2}.$$

Тогда

$$V_L^2 = V_1^2 - V_r^2,$$

$$V^2 = V_1^2 - V_r^2 + V_r^2 + 2V_r V_2 + V_2^2,$$

$$V_r = \frac{V^2 - V_1^2 - V_2^2}{2V_2},$$

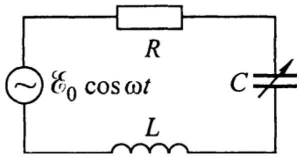
$$N = \left(\frac{V_2}{R}\right)^2 \cdot R\frac{V_r}{V_2} = \frac{V_2 V_r}{R} = \frac{V^2 - V_1^2 - V_2^2}{2R}$$

Вопрос 1. Можно ли методом трёх вольтметров найти индуктивность катушки?

Задача 2 (Яковлев 508)

Емкость конденсатора в цепи, показанной на рисунке, может плавно изменяться в широких пределах. ЭДС источника равна $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ 1) Определить мощность, отдаваемую источником, в зависимости от величины емкости. 2) При каком значении емкости эта мощность будет максимальной и чему она равна?

Решение



Пусть по цепи течёт ток

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

тогда активная мощность, отдаваемая источником

$$N = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 I_0 \cos\varphi = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2|z|}\cos\varphi,$$

где z – комплексный импеданс цепи, связанный с комплексными амплитудами тока и ЭДС соотношением

$$z = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\hat{I}}, \qquad |z|e^{j\arg(z)} = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0 e^{j\varphi}},$$

откуда

$$\varphi = -\arg(z), \qquad \cos\varphi = \cos\big(\arg(z)\big).$$

Комплексный импеданс данной цепи, его модуль и косинус аргумента:

$$z = R + z_c + z_L = R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

$$|z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\cos\big(\arg(z)\big) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{R}{|z|}.$$

Тогда

$$N = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2|z|}\cdot\frac{R}{|z|} = \frac{\mathcal{E}_0^2 R}{2|z|^2} = \frac{\mathcal{E}_0^2 R}{2\left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)}.$$

Примечание. На формулу для мощности можно смотреть иначе

$$N = \frac{\mathcal{E}_0^2 R}{2|z|^2} = \frac{1}{2} I_0^2 R,$$

т.е. активная мощность, отдаваемая источником равна тепловой мощности, выделяющейся на активном сопротивлении.

Очевидно, что наибольшего значения мощность достигает, когда второе слагаемое знаменателя равно нулю:

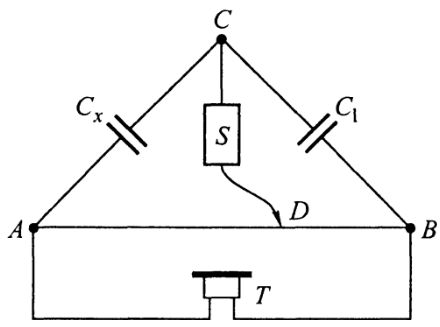
$$C^* = \frac{1}{\omega^2 L}, \qquad N_{max} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R}$$

Вопрос 1. Почему в формуле для мощности стоит коэффициент $1/2$?

Вопрос 2. В каких случаях активная мощность, отдаваемая источником НЕ равна тепловой мощности, выделяющейся на активном сопротивлении (сумме всех тепловых мощностей на всех активных сопротивлениях цепи)?

Задача 3 (Яковлев 517)

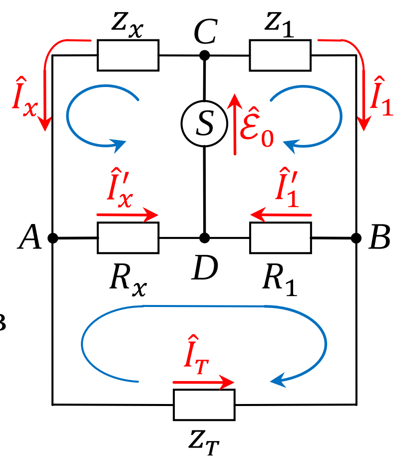
Для измерения емкости конденсатора применяют иногда метод моста, показанного на рисунке. AB – реохорд, S – звуковой генератор (источник переменного тока), T – телефон, C_x – измеряемая емкость, C_1 – эталонный конденсатор. Вывести условия баланса моста (т е условия, при которых в телефоне нет звука). Можно ли в схеме моста поменять местами звуковой генератор S и телефон T?



Решение

Звука в телефоне не будет, если амплитуда тока в нём (или напряжения) равна нулю.

Пусть генератор создаёт ЭДС с частотой ω и комплексной амплитудой $\hat{\mathcal{E}}_0$. Обозначим: сопротивления участков AD и DB реохорда – R_x и R_1, комплексные импедансы конденсаторов – z_x и z_1, комплексный импеданс телефона – z_T. Запишем правила Кирхгоффа для комплексных амплитуд токов и напряжений. (Положительные направления токов и ЭДС показаны на схеме красными стрелками, направления обходов контуров – синими, токи в плечах реохорда – со штрихами, токи через конденсаторы – без штрихов.)



$$\begin{cases} \hat{I}_x z_x + \hat{I}'_x R_x = \hat{\mathcal{E}}_0 & \text{левый контур} \\ \hat{I}_1 z_1 + \hat{I}'_1 R_1 = \hat{\mathcal{E}}_0 & \text{правый контур} \\ \hat{I}'_x R_x - \hat{I}'_1 R_1 = \hat{I}_T z_T & \text{нижний контур} \\ \hat{I}_x - \hat{I}'_x - \hat{I}_T = 0 & \text{узел } A \\ \hat{I}_1 - \hat{I}'_1 + \hat{I}_T = 0 & \text{узел } B \end{cases}$$

Нас интересует комплексная амплитуда тока $\hat{I}_T$ или напряжения $\hat{I}_T z_T$ на телефоне. Выразим напряжения $\hat{I}'_x R_x$ и $\hat{I}'_1 R_1$ на плечах реохорда, стоящие в 3-м уравнении системы. Сначала левая часть схемы, из 1-го и 4-го уравнений получим

$$\hat{I}_x = \hat{I}'_x + \hat{I}_T,$$

$$(\hat{I}'_x + \hat{I}_T) z_x + \hat{I}'_x R_x = \hat{\mathcal{E}}_0,$$

$$\hat{I}'_x z_x + \hat{I}'_x R_x = \hat{\mathcal{E}}_0 - \hat{I}_T z_x,$$

$$\hat{I}'_x (z_x + R_x) = \hat{\mathcal{E}}_0 - \hat{I}_T z_x,$$

$$\hat{I}'_x R_x = \frac{(\hat{\mathcal{E}}_0 - \hat{I}_T z_x) R_x}{z_x + R_x}.$$

Аналогично, для правой части схемы берём 2-е и 5-е уравнения:

$$\hat{I}_1 = \hat{I}'_1 - \hat{I}_T,$$

$$(\hat{I}'_1 - \hat{I}_T) z_1 + \hat{I}'_1 R_1 = \hat{\mathcal{E}}_0,$$

$$\hat{I}'_1 (z_1 + R_1) = \hat{\mathcal{E}}_0 + \hat{I}_T z_1,$$

$$\hat{I}_1' R_1 = \frac{(\hat{\mathcal{E}}_0 + \hat{I}_T z_1) R_1}{z_1 + R_1}.$$

Тогда

$$\frac{(\hat{\mathcal{E}}_0 - \hat{I}_T z_x) R_x}{z_x + R_x} - \frac{(\hat{\mathcal{E}}_0 + \hat{I}_T z_1) R_1}{z_1 + R_1} = \hat{I}_T z_T,$$

$$\hat{\mathcal{E}}_0 \left(\frac{R_x}{z_x + R_x} - \frac{R_1}{z_1 + R_1} \right) = \hat{I}_T \left(\frac{z_x R_x}{z_x + R_x} + \frac{z_1 R_1}{z_1 + R_1} \right),$$

$$\hat{\mathcal{E}}_0 \big(R_x (z_1 + R_1) - R_1 (z_x + R_x) \big) = \hat{I}_T \big(z_x R_x (z_1 + R_1) + z_1 R_1 (z_x + R_x) \big),$$

$$\hat{I}_T = \hat{\mathcal{E}}_0 \frac{R_x z_1 - R_1 z_x}{R_1 R_x (z_1 + z_x) + z_1 z_x (R_1 + R_x)}.$$

Ток (и звук) в телефоне отсутствуют, если

$$R_x z_1 - R_1 z_x = 0,$$

$$\frac{R_x}{j\omega C_1} - \frac{R_1}{j\omega C_x} = 0,$$

$$R_x C_x = R_1 C_1$$

Вопрос 1. Можно ли в схеме моста поменять местами генератор *S* и телефон *T*?

Вопрос 2. Почему не учитываем ток через генератор *S* и не пишем 1-е правило Кирхгоффа для узлов *C* и *D*?

ДЗ

Яковлев 485, 510, 518, 519