Переменное ЭМП

Описание переменного поля в общем случае.

Есть некоторые ограничения: 1) считаем, что справ. м.у.:

$$\vec D(\vec r,t) = \varepsilon \vec E(\vec r,t)$$
$$\vec B(\vec r,t) = \mu \vec H(\vec r,t)$$

т.е. рассматриваем среды без дисперсии.

2) ε, μ – независят от $t, \vec r$ ($\varepsilon, \mu = const$, однородн. и стационарная среда.)

$$\begin{cases} rot\,\vec E = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \vec H}{\partial t} & (1) \leftarrow \text{применим } rot \\ rot\,\vec H = \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \vec E}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec j & (2) \end{cases}$$

$$\underbrace{rot\,rot\,\vec E}_{\nabla div \vec E - \Delta \vec E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t} rot\,\vec H$$

$$div \vec D = 4\pi\rho \to \varepsilon\, div \vec E = 4\pi\rho \to div \vec E = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

Всё подставляем и группируем, получим:

$$\Delta \vec E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec E}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial \vec j}{\partial t} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\rho$$ ← видно что ист. явл. токи и заряды.

волновое уравнение.

Оператор обозначают:

$$\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box$$ ← даламбертиан. где $v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

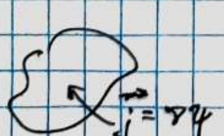
$\boxed{\sqrt{\varepsilon\mu} = n}$ ← пок-ль преломления среды

Можно получить волновое ур-е и для поля $\vec H$, применяя rot для ур-я (2):

$$\underbrace{rot\,rot\,\vec H}_{\nabla div \vec H - \Delta \vec H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{rot\,\vec E}_{-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec H}{\partial t}} + \frac{4\pi}{c} rot\,\vec j$$

Из $div \vec B = 0 \to div \vec H = 0$

$$\Delta \vec H - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec H}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} rot\,\vec j \leftrightarrow \Box \vec H = -\frac{4\pi}{c} rot\,\vec j$$



$\vec j = \nabla\psi$

Если для примера: если есть только потенц. токи. → бегущих волн создать не могут, т.к. $rot\,\vec j = 0$

$\Box f = 0$, $f(x,t)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \to f = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

по оси x против x

Описание перемен. поля с помощью векторного и скалярного потенциала.

Так же рассм-м однородную среду без дисперсии.

1) $\operatorname{div}\vec{B}=0$; $\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$, $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu}=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}=0$

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}_{=\operatorname{rot}\vec{A}} \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

$\operatorname{rot}\nabla\equiv 0$

$$\Rightarrow \vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi \Rightarrow \vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

опр.-ся доп. векторным потенциалом.

2) Берём другое ур-я Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}\right)=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)+\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Т.к. среда одн. $\frac{1}{\mu}$ - выносим

$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}\right)=\frac{1}{\mu}\left\{\nabla\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}\right\}$, после преобр-й получим:

$$\underbrace{\Delta\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}}_{\Box\vec{A}}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}+\nabla\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \qquad (\mathrm{I})$$

3) Исп-м ещё одно ур-е Максвелла:

$$\operatorname{div}\vec{D}=4\pi\rho \Rightarrow \operatorname{div}\vec{E}=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} ; \operatorname{div}\left(-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$\varepsilon\vec{E}$" $\operatorname{div}\nabla=\Delta$

$$\Rightarrow \Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} \qquad (\mathrm{II}')$$

приведём его с опер.-м даламбера, (вычтем $\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$)

$$\underbrace{\Delta\varphi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}}_{\Box\varphi}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \qquad (\mathrm{II}'')$$

Возник. вопрос. Нельзя ли, чтобы $\operatorname{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$?
Оказ. можно сделать, т.к. потенциалы вводятся неоднозн.

$\vec{A}_{нов.}=\vec{A}_{ст}-\nabla\psi$, так $\operatorname{rot}\vec{A}_{нов}=\operatorname{rot}\vec{A}_{ст}=\vec{B}$

калибровочн. должны обеспеч. инвар. не только $\vec{B}$, но теперь и $\vec{E}$. (т.е. изм. потенциал.)

$$\vec{E}=-\nabla\varphi_{нов}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_{нов}}{\partial t}=-\nabla\varphi_{ст}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_{ст}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\nabla\varphi_{нов}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}_{ст}-\nabla\psi\right)=-\nabla\varphi_{ст}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_{ст}}{\partial t}$$

$$\nabla\varphi_{нов} - \nabla\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \nabla\varphi_{ст},$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{нов} = \varphi_{ст} + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$ ~ т.е. нужно изм. скал. потенц. для $\vec{E}$

Проверим, можно ли подобрать так:

$$\operatorname{div}\vec{A}_{ст} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi_{ст}}{\partial t} \neq 0$$

$$\operatorname{div}\vec{A}_{н} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi_{н}}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div}(\vec{A}_{ст} - \nabla\psi) + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_{ст} + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0$$

учит. $\operatorname{div}\nabla\psi = \Delta\psi$

$$\underbrace{\Delta\psi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}}_{\Box\psi} = \underbrace{\operatorname{div}\vec{A}_{ст} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi_{ст}}{\partial t}}_{\neq 0 \text{ при старом выборе}}$$

~ это ур-е с отличн. от 0 правой частью всегда имеет решение. => если хотим перекалибровать, исп. это ур-е. => можно так получить

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$ ~ усл. калибровки Лоренца (L. V. Lorenz)

Это позволяет упростить ур-я (I) и (II'')

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (\mathrm{I}) & \Box\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \\ (\mathrm{II''}) & \Box\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \end{cases}$$

→ из калибровки можно сразу получить

$$\varphi = -\frac{c}{\varepsilon\mu}\int \operatorname{div}\vec{A}\,dt$$

=> Всё сводится к отысканию вект. потенциала $\vec{A}$.

Но в нек-х случаях неудобно исп. калибровку Лоренца, а исп. калибровку Кулона.

$$\operatorname{div}\vec{A}_{н} = 0 \qquad \operatorname{div}\vec{A}_{ст} \neq 0$$

$$\vec{A}_{н} = \vec{A}_{ст} - \nabla\psi$$

=> $\Delta\psi = \operatorname{div}\vec{A}_{ст}$ ~ ур-е Пуассона всегда имеет решение.

С учётом этой калибровки:

(II') $\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$ ~> сначала находится φ.

потом по φ ищем:

(I) $\Box\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ => найдём $\vec{A}$

Мы будем исп-ть калибровку Лоренца.

Векторный потенциал Герца.

Обозначают $\vec{\Pi}$: вводится как

$\vec{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}$, $\varphi = -\operatorname{div}\vec{\Pi}$ — соотв. усл-ю калибровке Лоренца

25.10.22.

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$ соотв. калибровке Лоренца.

$$\Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$$ возьмём первообразную

$$\Delta\vec{\Pi} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\int\vec{j}\,dt$$

можно вспомнить $\vec{j} = \vec{j}^{ст} = \frac{\partial\vec{P}^{ст}}{\partial t}$ — можно хар-ть сторонней поляризацией.

$$\Rightarrow \square\vec{\Pi} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{P}^{ст}$$

Если хотим найти $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{\Pi}$$

или $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \nabla\operatorname{div}\vec{\Pi} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2}$

Всё записано, когда ист. и заряды — электрические.

$\vec{j} = \vec{j}^e \to \vec{j}^m$ По принципу двойственности можем заменить

$\rho = \rho^e \to \rho^m$

$\vec{A} = \vec{A}^e \to \vec{A}^m$ $\Rightarrow$ усл. калибр. Лоренца для вект. потенц. магнитного типа:

$\varphi = \varphi^e \to \varphi^m$

$(\varepsilon, \mu) \to (\mu, \varepsilon)$

$$\operatorname{div}\vec{A}^m + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi^m}{\partial t} = 0.$$

$$\square\vec{A}^m = -\frac{4\pi\varepsilon}{c}\vec{j}^m$$

$$\square\varphi^m = -\frac{4\pi}{\mu}\rho^m$$

$\vec{B}^e = \operatorname{rot}\vec{A}^e \to -\vec{D}^m = \operatorname{rot}\vec{A}^m \Rightarrow \vec{D}^m = -\operatorname{rot}\vec{A}^m$

магн. тока

$$\vec{E}^m = \frac{\vec{D}^m}{\varepsilon}$$

обычн. эл-ие поля, просто созд. магнитными ист. переменного тока.

$\vec{E}^e = -\nabla\varphi^e - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^e}{\partial t} \to \vec{H}^m = -\nabla\varphi^m - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^m}{\partial t}$; $\vec{B}^m = \mu\vec{H}^m$

Для потенциала Герца:

$\vec{P}^{ст} \to \vec{M}^{ст}$ $\Rightarrow \vec{\Pi} = \vec{\Pi}^e + \vec{\Pi}^m \Rightarrow \square\vec{\Pi}^m = -\frac{4\pi}{\mu}\vec{M}^{ст}$

Если в ситуации (системе) есть $\vec{j}^{e,m}$ и $\rho^{e,m}$

$\vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^m$ — по принципу суперпозиции

$\vec{H} = \vec{H}^e + \vec{H}^m$

Гармонические во времени процессы.

Опр. Процесс $f(t)$ назыв. гармоническим во времени (монохроматическим), если его зависимость от t имеет следующий вид:

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \quad \text{где } A \neq A(t),\ \omega \neq \omega(t)$$

A - амплитуда.

$\omega = 2\pi\nu$, где $\nu = \frac{1}{T}$ - период процесса

Для немонохром. процессы можно представить в виде интеграла Фурье:

$$f(t) = \int\limits_0^\infty [a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t]\,d\omega = \int\limits_0^\infty A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))\,d\omega$$

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}\ ; \quad \varphi = -\operatorname{arctg}\frac{b(\omega)}{a(\omega)}$$

Общее решение как суперпозицию для всех частот.

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E_0}(\vec{r})\cos(\omega t + \varphi_E(\vec{r}))\\ \vec{H}(\vec{r},t) &= \vec{H_0}(\vec{r})\cos(\omega t + \varphi_H(\vec{r}))\end{aligned}\right\}$$ Удобно ввести компл. форму описания полей.

$$\Leftrightarrow \vec{E}(\vec{r},\omega) = \underbrace{\vec{E_0}(\vec{r})}_{\text{вещ.-ая ампл.}} e^{i\varphi_E(\vec{r})}$$

$$\vec{H}(\vec{r},\omega) = \vec{H_0}(\vec{r})\, e^{i\varphi_H(\vec{r})}$$

Если хотим получить вещественную часть:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}(\vec{r},\omega)\, e^{i\omega t}\} \qquad e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{H}(\vec{r},\omega)\, e^{i\omega t}\} \qquad \mathrm{Re}\, e^{i\alpha} = \cos\alpha$$

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд.

$$\mathrm{rot}\{\vec{E}(\vec{r},\omega)\, e^{i\omega t}\} = -\frac{1}{c}\mu \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\{\vec{H}(\vec{r},\omega)\, e^{i\omega t}\}}_{i\omega\vec{H}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}}$$

$\rightarrow \frac{\omega}{c} = k_0$ – волновое число в свободном пр-ве.

ур-е примет следующий вид:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},\omega) = -ik_0\mu\vec{H}(\vec{r},\omega)$$

проделывая аналогично, получим:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r},\omega) = ik_0\varepsilon\vec{E}(\vec{r},\omega) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},\omega)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r},\omega) = 4\pi\rho(\vec{r},\omega)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},\omega) = 0$$

Преимущество в том, что они не содержат времени ($\partial/\partial t$) и произв.

Далее будем опускать необходимо $(\vec r, \omega)$, допуская понимание по виду ур-я

Ур-е непрерывности:

$$\operatorname{div}\vec j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \operatorname{div}\vec j(\vec r,\omega) + i\omega\rho(\vec r,\omega) = 0$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость.

$$\operatorname{rot}\vec H = ik_0\varepsilon\vec E + \frac{4\pi}{c}\vec j \quad ; \quad \vec j = \underbrace{\vec j^{\,пр}}_{\sigma\vec E} + \vec j^{\,ст}$$

$$\operatorname{rot}\vec H = \underbrace{ik_0\varepsilon\vec E + \frac{4\pi\sigma}{c}\vec E}_{ik_0\left(\varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\vec E} + \frac{4\pi}{c}\vec j^{\,ст}$$

$$\longrightarrow \varepsilon_к = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

связано с диссип. потерями.

$$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec H = ik_0\varepsilon_к\vec E + \frac{4\pi}{c}\vec j^{\,ст}$$

обычно принято запис.:

$$\varepsilon_к = \varepsilon' - i\varepsilon'' \qquad \varepsilon' = \varepsilon$$

$$\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega} < 0$$

Для гармон. процессов $\left.\begin{array}{l}\varepsilon = \varepsilon(\omega)\\ \mu = \mu(\omega)\\ \sigma = \sigma(\omega)\end{array}\right\}$ пока без док-ва (справ. для временной дисперсии.)

В принципе можно учит. магнитные потери $\mu = \mu' - i\mu''$, $\mu'' \geq 0$

Волновые ур-я для комплексных амплитуд

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \to -\omega^2$$

$$\Delta\vec E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec E}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial\vec j}{\partial t} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\rho \Rightarrow \Delta\vec E + k^2\vec E = \frac{4\pi\mu}{c}ik_0\vec j + \frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\rho$$

$-\omega^2$

где $k = k_0\underbrace{\sqrt{\varepsilon\mu}}_{n} = k_0\cdot n$

неодн. ур-е Гельмгольца для компл. амплитуд ~ волновое число в среде

Для $\vec H$:

$$\Delta\vec H - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec H}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec j \Rightarrow \Delta\vec H + k^2\vec H = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec j$$

Из

$$\operatorname{div}\vec A + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \rightarrow \operatorname{div}\vec A + ik_0\varepsilon\mu\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{i}{k_0\varepsilon\mu}\operatorname{div}\vec A \quad (*)$$

Для векторного и скалярного потенциала.

$$(\mathrm{I}) \quad \Box\vec A = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec j \quad \rightarrow \quad \Delta\vec A + k^2\vec A = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec j$$

$$(\mathrm{II}'') \quad \Box\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \Delta\varphi + k^2\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

Всё также $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$; $\vec{E} = -\nabla\varphi - ik_0\vec{A}$

$\left(\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$

Если подставим (*)

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi - ik_0\vec{A} \overset{(*)}{=} -\frac{i}{k_0\varepsilon\mu}\left(\nabla\,\text{div}\vec{A} + k^2\vec{A}\right)$$

$$\Box\vec{\Pi} = -\frac{4\pi}{c}\vec{P}^{ст} \rightarrow \Delta\vec{\Pi} + k^2\vec{\Pi} = -\frac{4\pi}{c}\vec{P}^{ст}$$

$$\vec{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} \rightarrow \vec{A} = ik_0\varepsilon\mu\vec{\Pi}$$

просто отнимаем множителем.

Если у нас есть величина $\sim \cos(\omega t + \varphi)$, тогда если есть величина $\sim \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1 + \cos 2(\ldots)}{2}$.

$\sim$ неудобно, принято усреднять по периоду

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Усреднение произведения величин гармонически завис. от времени.

$a(t) = \text{Re}\{a(\omega)e^{i\omega t}\}$, $b(t) = \text{Re}\{b(\omega)e^{i\omega t}\}$ — какие-то величины

где $a(\omega) = \underbrace{|a(\omega)|}_{A}e^{i\alpha}$; $b(\omega) = \underbrace{|b(\omega)|}_{B}e^{i\beta}$

Хотим вычислить среднее:

$$\overline{a(t)\,b(t)}^{T} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} a(t)\,b(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} A\cos(\omega t + \alpha)\cdot B\cos(\omega t + \beta)\,dt =$$

$$= \frac{AB}{T}\,\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)\right]dt = \frac{1}{2}AB\cos(\alpha - \beta)$$

Точно такой же результат можно получить иначе:

$$\frac{1}{2}\text{Re}\{a(\omega)\,b^*(\omega)\} = \frac{1}{2}\text{Re}\{Ae^{i\alpha}\cdot Be^{-i\beta}\} = \frac{1}{2}AB\cos(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \overline{a(t)\,b(t)}^{T} = \frac{1}{2}\text{Re}\{a(\omega)\,b^*(\omega)\}$$

Важный частный случай:

$$\overline{a^2(t)}^{T} = \frac{1}{2}\text{Re}\{\underbrace{a(\omega)\,a^*(\omega)}_{|a(\omega)|^2}\} = \frac{1}{2}|a(\omega)|^2$$

$$q = \frac{\vec{j}^{\,2}}{\sigma} \rightarrow \overline{q}^{T} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma}|\vec{j}|^2$$

$$\vec{S}(t) = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}] \quad ; \quad \overline{\vec{S}}^{T} = \frac{c}{8\pi}\text{Re}\left[\vec{E}(\vec{r},\omega), \vec{H}^*(\vec{r},\omega)\right]$$

$$W = \int_V \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}dV \rightarrow \overline{W}^{T} = \int_V \frac{\varepsilon|\vec{E}|^2 + \mu|\vec{H}|^2}{16\pi}dV$$ — только в случае сред без дисперсии.

Комплексная теорема Пойнтинга.

$k_0 = \frac{\omega}{c}$, ε, μ – Re (веществ.), σ $\Rightarrow$ $\vec j = \vec j_{пр} + \vec j^{ст} = \overbrace{\sigma\vec E}^{\vec j_{пр}} + \vec j^{ст}$

$\text{rot}\,\vec E = -ik_0\mu\vec H \quad |\cdot \vec H^*$ $\qquad$ $\text{rot}\,\vec H = ik_0\varepsilon\vec E + \frac{4\pi}{c}\vec j_{пр} + \frac{4\pi}{c}\vec j^{ст} \quad |\,*$ компл. сопр.

$\text{rot}\,\vec H^* = -ik_0\varepsilon\vec E^* + \frac{4\pi}{c}\vec j^*_{пр} + \frac{4\pi}{c}\vec j^{ст*} \quad |\cdot\vec E$ – в компл. сопр. варианте.

Вычитаем из (1) - (2):

$$\underbrace{\text{div}[\vec E,\vec H^*]}_{\vec H^*\text{rot}\vec E - \vec E\,\text{rot}\vec H^*} = -\frac{4\pi}{c}\vec j^*_{пр}\vec E - \frac{4\pi}{c}\vec j^{ст*}\vec E + i\underbrace{k_0}_{\frac{\omega}{c}}(\varepsilon\underbrace{\vec E\vec E^*}_{|\vec E|^2} - \mu\underbrace{\vec H\vec H^*}_{|\vec H|^2}) \quad \Big|\cdot\frac{c}{8\pi}$$

Для компактности введём обозн. $\vec S_k = \frac{c}{8\pi}[\vec E,\vec H^*]$ – комплексный вектор Пойнтинга.

$$\text{Re}\,\vec S_k = \text{Re}\,\frac{c}{8\pi}[\vec E,\vec H^*] = \overline{\vec S}$$

$$\text{div}\,\vec S_k = -\frac12\frac{|\vec j_{пр}|^2}{\sigma} - \frac12\vec j^{ст*}\vec E + 2i\omega\frac{\varepsilon|\vec E|^2-\mu|\vec H|^2}{16\pi}$$

$$-\frac12\vec j^*_{пр}\vec E = -\frac12\frac1\sigma\vec j^*_{пр}\vec j_{пр} = -\frac12\frac{|\vec j_{пр}|^2}{\sigma}$$

компл. теорема Пойнтинга в дифференциальной форме.

Получим в интегральной форме:

$$\oint_S \vec S_k\, d\vec s = -\frac12\int_V\frac{|\vec j_{пр}|^2}{\sigma}dv - \frac12\int_V \vec j^{ст*}\vec E\, dv + 2i\omega\int_V\frac{\varepsilon|\vec E|^2-\mu|\vec H|^2}{16\pi}dv \quad (*)$$

– в интегральной форме

$$\vec j_{пр} = \sigma\vec E \to \frac12\int_V\frac{|\vec j_{пр}|^2}{\sigma}dv = \frac12\int_V\sigma|\vec E|^2dv = 2\omega\int_V\frac{\varepsilon''|\vec E|^2}{16\pi}dv$$

$$\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

Мы док-ли их в случае чисто вещ-х величин: $\varepsilon=\varepsilon'$, $\mu=\mu'$, $\sigma\leftrightarrow\varepsilon''$; $\mu''=0$

Д/З: док-ть при $\mu_к = \mu' - i\mu''$; $\varepsilon_к = \varepsilon' - i\varepsilon''$ – для высок. оценки

– если проделать выкладки, то теорема примет вид:

$$(**)\quad \oint_S \vec S_k\, d\vec s = -2\omega\int_V\frac{\varepsilon''|\vec E|^2+\mu''|\vec H|^2}{16\pi}dv - \frac12\int_V\vec j^{ст*}\vec E\, dv + 2i\omega\int_V\frac{\varepsilon'|\vec E|^2-\mu'|\vec H|^2}{16\pi}dv$$

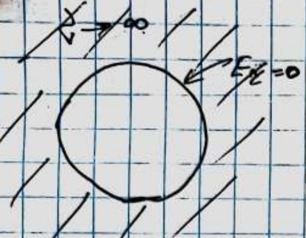
Из (*): $\text{Re}\,\vec S_k = \frac{c}{8\pi}\text{Re}[\vec E,\vec H^*] = \overline{\vec S}$ – здесь учтены электр-ие, не вкл. в μ'' магнитные потери.

$$\underbrace{\oint_S \overline{\vec S}\, d\vec s}_{\overline{\Pi}} = \underbrace{(-)\frac12\int_V\frac{|\vec j_{пр}|^2}{\sigma}dv}_{\overline{Q}} + \underbrace{\left(-\frac12\right)\text{Re}\int_V\vec j^{ст*}\vec E\, dv}_{\overline{A^{ст}}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ЗСЭ: $\overline{\Pi} + \overline{Q} = \overline{A^{ст}}$

$\overline{W}^T = const$ (гармонический процесс → амплитуды полей постоянны)

$$\mathrm{Im}\oint_S \vec S_n\, d\vec s = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_V \vec j^{\,ст *}\vec E\,dV + 2\omega\int_V \frac{\varepsilon|\vec E|^2-\mu|\vec H|^2}{16\pi}\,dV$$



$$\vec S_n\cdot\vec n = \frac{c}{8\pi}\underbrace{[\vec E,\vec H^*]\,\vec n}_{[\vec E_\tau,\,\vec H_\tau^*]\,\vec n}\Big|_S = 0$$

$$\omega\ne0 \Rightarrow \int_V \frac{\varepsilon|\vec E|^2}{16\pi}\,dV = \int_V\frac{\mu|\vec H|^2}{16\pi}\,dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{W^e}^T = \overline{W^m}^T$$

↳ аналог акустического резонатора для электромагнитных волн, потерь нет, электр-ая энергия перетекает в магнитную энергию и наоборот (как в колебательном контуре)

Теорема единственности решения ур-ий Максвелла для гармонич. процессов.

Теорему приходится переформулировать, т.к. для гармонических процессов нельзя задать начальное условие.

Решение ур-ий Максвелла для гарм. полей внутри V огр. замкн. S, если задано:

1) V: $\vec j^{ст}$
2) S: $\vec E_\tau$ либо $\vec H_\tau$
3) V: $\sigma\ne0$

Док-во: Есть $(\vec E_1,\vec H_1)$, $(\vec E_2,\vec H_2)$

Вводим разностное поле: $\vec E_3=\vec E_1-\vec E_2$; $\vec H_3=\vec H_1-\vec H_2$

1) $\vec j_3^{ст}=0$
2) S: либо $E_{3\tau}=0$, либо $H_{3\tau}=0$
3) $\sigma\ne0$

Запишем Re{теорема Пойнтинга для поля 3}

$$\oint_S \vec S_3\, \underbrace{d\vec s}_{\vec n\, ds} = 0$$

$$\vec S_3\cdot\vec n = \frac{c}{4\pi}\underbrace{[\vec E_3,\vec H_3^*]\cdot\vec n}_{[\vec E_{3\tau},\,\vec H_{3\tau}^*]\cdot\vec n}=0$$

$$0 = -\frac12\int_V \frac{|\vec j_{пр}|^2}{\sigma}\,dV \qquad \vec j_{3пр}=\sigma\vec E_3$$

$$\int_V \underbrace{\sigma}_{\ne0}\,\underbrace{|E_3|^2}_{\geq0}\, dV = 0 \Rightarrow \vec E_3=0 \quad \blacksquare$$

Но это выполняется для $\vec E_3$, а что для $\vec H_3$?

$$\mathrm{rot}\,\underbrace{\vec E_3}_{0} = -i\frac{\omega}{c}\mu\vec H_3 \qquad \omega\ne0 \Rightarrow \mu\vec H_3=0 \Rightarrow \vec H_3=0 \quad \blacksquare$$

$\mathrm{Re}\,\mu = 0$ в средах с дисперсией → есть потери → нужно $\mu=\mu'-i\mu''=-i\mu''\ne0$ аналогично для $\varepsilon=\varepsilon'-i\varepsilon''$)

$$0 = -\frac{1}{2}\int_V \frac{\varepsilon''|\vec E_3|^2+\mu''|\vec H_3|^2}{16\pi}\,dV \qquad \text{наличие потерь}$$

$\Rightarrow \varepsilon'' > 0, \ \mu'' > 0 \Rightarrow \vec{E}_3 = 0, \ \vec{H}_3 = 0$ ☒

Физический смысл: разностное поле не возникает, т.к.
1) Для него нет источников
(внутри нет источников энергии)
2) Нет потока энергии (из вне в V энергия не приходит) $\Rightarrow$ если нет потерь то возникают свободные колебания.

Импедансное условие: $\vec{E}_\tau = \eta_s [\vec{H}, \vec{n}]|_s \quad Re\,\eta_s > 0$

$[\vec{H}_{\tau}, \vec{n}]$

$$\vec{S} \cdot \vec{n} = \frac{c}{8\pi} Re [\vec{E}_{3\tau}, \vec{H}^*_{3\tau}] \vec{n} = \frac{c}{8\pi} Re\,\eta_s \{ \vec{n} (\vec{H}_{3\tau}, \vec{H}^*_{3\tau}) - $$

$$- \vec{H}_{3\tau} (\vec{n}, \vec{H}^*_{3\tau}) \} \cdot \vec{n} = \frac{c}{8\pi} Re\,\eta_s \cdot |H_{3\tau}|^2$$

$$\frac{c}{8\pi} \oint_s Re\,\eta_s |\vec{H}_{3\tau}|^2 ds = -\frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dV$$

$$\frac{c}{8\pi} Re \oint \eta_s |\vec{H}_{3\tau}|^2 ds + \frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dV = 0 \Rightarrow \vec{E}_3 = 0, \ \vec{H}_{3\tau} = 0$$

Квазистационарные процессы в сплошных проводящих средах

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ Квазистационарность: характерный временной масштаб задачи $\tau \ll T$

Уравнение квазистационарного поля внутри проводника:

Максвелловское время релаксации заряда $\tau = \tau_M \quad \rho(\vec{r}, t) - ?$
Нач. распр-е заряда: $\rho(\vec{r}, 0) = \rho_0(\vec{r})$

Заряд „растекается" по среде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma\, div\,\vec{E} = 0$$

$\sigma \vec{E}$

$div\,\vec{D} = 4\pi\rho$
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
$\varepsilon = const$

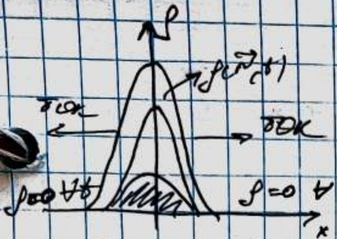
$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma \cdot \frac{4\pi\rho}{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t}$$

В каждой точке пр-ва величина пл-ти заряда спадает по exp, там где $\rho_0(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \rho(\vec{r}, \forall t) = 0$

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t = \frac{t}{\tau_M} \Rightarrow \tau_M = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$$

$\hookrightarrow$ в терминах квазистац. времени.

Но: незаряженные области НЕ ЗАРЯЖАЮТСЯ, т.к. из заряж. области заряды наружу на ∞ возникают, так, но в изначально незаряженных областях проводника заряд накапливаться не будет



к этому же

это не диффузия, т.к. диффузионный процесс предполагает „$\frac{\partial}{\partial t} + \Delta \ldots$", а у нас „$\Delta$" нет.

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = i k_0 \mu \vec{H}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \underbrace{i k_0 \varepsilon \vec{E} + \frac{4\pi}{c}\sigma \vec{E}}_{i k_0 \varepsilon_к \vec{E}} \qquad \varepsilon_к = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

$$\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}}_{0} = i k_0 \mu\, \mathrm{div}\,\vec{H}$$

$$\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{0} = i k_0 \varepsilon_к\, \mathrm{div}\,\vec{E} \implies \boxed{\begin{matrix}\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{H} = 0\end{matrix}} \quad \boxed{\varepsilon_к = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}}$$

Квазистац. в терминах Re и Im констант

$$\tau \gg \underbrace{\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}}_{\tau_м} \qquad \varepsilon \ll 4\pi\sigma\tau \implies \varepsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$ — условие хорошего проводника.

$$\varepsilon_к \approx -i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

— чем лучше проводник, тем лучше условие вып-ся.

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \sigma\vec{E}$$

из этого след. возможно $\mathrm{Re}\,\varepsilon_к = \varepsilon$ — $\mathrm{Im}\,\varepsilon_к$

квазистац. в терминах слагаемых

Квазистационарное приближение:

$$\left|\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right| \ll \frac{4\pi}{c}|\vec{j}| \qquad \sigma\vec{E}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{см} \implies |\vec{j}_{см}| \ll |\sigma\vec{E}|$$

Проводник настолько хороший, что ток проводимости всегда оказывается много больше тока смещения. Чем поле квазистационарнее, тем меньше $j_{см}$, т.к. $\frac{\partial D}{\partial t}$ меньше (при прочих равных условиях)

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -i k_0 \mu \vec{H}$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = i k_0 \varepsilon_к \vec{E}$$
$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0$$

$$\varepsilon_к = -i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

$$\varepsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega} \implies \omega \ll \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$$ выполняется вплоть до УФ

для меди $\to \sigma \approx 5{,}4\cdot 10^{17}\,с^{-1}$; $\varepsilon \sim 1$.

$$\omega \ll 10^{17}\,с^{-1}$$

Неучет. запаздыв. поля:

$\tau \gg \tau_{уст} \sim \tau_{своб.\,проб.} \sim 10^{-13}\,с$.

$\implies \omega \ll 10^{13}\,с^{-1}$ — конкретное условие применимости (до ИК диапазона).

Но мы не учитывали не только временную, но и пространственную дисперсию.

$$L_E \gg l_{своб.\,проб.} \qquad \omega \ll 10^{10}\,с^{-1}.$$

„$\sigma(\omega)$"

хар-ый масштаб изменения поля в пр-ве (функция частоты.)

$\underbrace{\text{rot}\,\text{rot}\,\vec E}_{\nabla \text{div} \vec E - \Delta \vec E} = -i k_0 \mu \underbrace{\text{rot}\,\vec H}_{i k_0 \varepsilon_\kappa \vec E}$ $\to$ $\Delta \vec E + k_0^2 \varepsilon_\kappa \mu \vec E = 0$

$\tilde k^2 = k_0^2 \varepsilon_\kappa \mu$ (было $k^2 = k_0^2 \varepsilon \mu$.)

$\varepsilon_\kappa \approx -i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ ← компл. диэл. проницаемость.

Аналогично можно вывести: $\Delta \vec H + k_0^2 \varepsilon_\kappa \mu \vec H = 0$

$$\sqrt{\tilde k^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\left(-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mu} = \left\{\sqrt{-i} = \pm\frac{1-i}{\sqrt2}\right\} = \pm(1-i)\frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}{c} =$$

$= \pm\frac{1-i}{\delta}$, где $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}$ → глубина проникновения поля в проводник.

Переобозначим $\tilde k = \frac{1-i}{\delta}$ ($\pm$ подразумевается)

$$\text{rot}\,\vec H = \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t}}_{} \ll \underbrace{\frac{4\pi}{c}\sigma\vec E}_{} \quad \text{(квазистац.)} \qquad \text{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\mu\frac{\partial \vec H}{\partial t}$$

$T \gg \tau_m$
↳ характерное время изменения поля (не обяз. гармон. поле м.б.)

$$\underbrace{\text{rot}\,\text{rot}\,\vec H}_{\nabla \underbrace{\text{div}\vec H}_{0} - \Delta \vec H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\,\underbrace{\text{rot}\,\vec E}_{-\frac{1}{c}\mu\frac{\partial H}{\partial t}} \Rightarrow \Delta \vec H = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec H}{\partial t}.$$

Для немонохром-ого процесса при $T \gg \tau_m$ получим

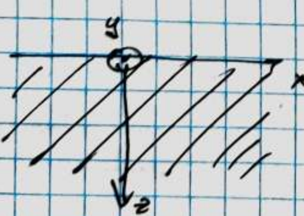
$\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec H}{\partial t} - \Delta \vec H = 0$ ← уже уравнение диффузии. Поле диффундирует через проводник.

Обратный ход: $\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$ (через $\tilde k^2$)

Скин - эффект:

В хороший проводник проникает переменное поле на очень малую глубину. Возникает тонкий слой поля (skin - слой)

$\Delta \vec E + \tilde k^2 \vec E = 0$; $\vec E \parallel \vec x_0$ $\quad \vec j = \sigma \vec E = \vec x_0 j(z)$



$\Delta E_x + \tilde k^2 E_x = 0$

$\Delta j + \tilde k^2 j = 0$ $\quad (\vec j = \sigma \vec E;\ \sigma = \text{const})$

$\frac{d^2 j}{dz^2} + \tilde k^2 j = 0$ $\qquad$ Г.У: $j(0) = j_0 = \text{const}$

$\tilde k = \frac{1-i}{\delta}$; $\quad \delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\mu\omega}}$

$$j(z) = A_1 \underbrace{e^{-i\frac{1-i}{\delta}z}}_{e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}}} + \underbrace{A_2}_{\to 0} \underbrace{e^{i\frac{1-i}{\delta}z}}_{e^{\frac{z}{\delta} + i\frac{z}{\delta}}}$$

спадает. $\qquad$ растёт.

$j(0) = j_0 \Rightarrow A_1 = j_0 \Rightarrow j(z) = j_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}} = j_0 e^{-i\frac{1-i}{\delta}z}$

$$E_x = \frac{j}{\sigma} = \underbrace{\frac{j_0}{\sigma}}_{E_0} e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}}$$

$z=\delta \Rightarrow$ амплитуда поля спадает в „e" раз — характерная величина проникн. поля в проводник.

$\vec H = \frac{i}{k_0\mu}\operatorname{rot}\vec E$; $\operatorname{rot}\vec E = -ik_0\mu\vec H$ — чтобы найти неизвестное поле, нужно посчитать ротор от уже известн. поля.

$$\vec H = \frac{i}{k_0\mu}[\nabla, E_x\vec x_0] = \frac{i}{k_0\mu}[\underbrace{\nabla E_x}_{\frac{\partial E_x}{\partial z}\cdot\vec z_0}, \vec x_0] = \frac{i}{k_0\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(E_0 e^{-i\frac{1-i}{\delta}z}\right)\vec y_0 =$$

$[\vec z_0, \vec x_0] = \vec y_0$

$$= \vec y_0 \underbrace{\frac{1-i}{k_0\mu\delta}E_0 e^{-i\frac{1-i}{\delta}z}}_{H_y} \qquad \boxed{H_0 = \frac{1-i}{k_0\mu\delta}E_0} \Rightarrow H_y = H_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}}$$

$$\mathrm{Re}\{j e^{i\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\underset{|j_0|e^{i\varphi}}{j_0}\, e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}} e^{i\omega t}\} = |j_0| e^{-\frac{z}{\delta}}\cdot\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right)$$

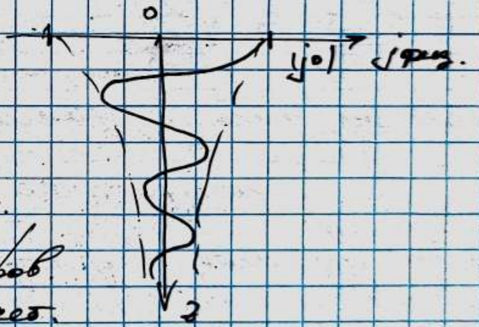
$$\mathrm{Re}\, e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi)} = \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right)$$

Пусть $\varphi = 0$, $t = 0$ $\quad j_{фаз} = \mathrm{Re}\{j e^{i\omega t}\} = |j_0| e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\frac{z}{\delta}$

Скин эффект: $\delta(\omega)$ уменьш. с ростом частоты:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}$$

— вел. показ. на каком простр. масштабе поле спадает в e раз.



при $\sigma \to \infty$ $\delta \to 0$ → в ид. пров. поле не проникает.

7.11.22

Запишем ур-я Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec E = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec H}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot}\vec H = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\sigma\vec E}_{\vec j}$$

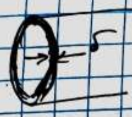
при переменном $\vec H$ возникает $\vec E$ => возникает $j_{пр.}$ но тогда изменяется $\vec H$ (как правило Ленца) и всё сначала.

Например для меди: $\mu = 1$, $\varepsilon \simeq 1$, $\sigma = 5{,}4\cdot 10^{17}$ ед. СГС.

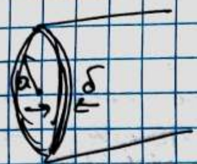
ν, Гц	$3\cdot 10^{10}$	$3\cdot 10^{8}$	$3\cdot 10^{6}$	$3\cdot 10^{4}$	0
λ_0 (длин. волны в вакууме)	1 см	1 м	100 м	10 км	∞
δ, мм	$4\cdot 10^{-4}$	$4\cdot 10^{-3}$	$4\cdot 10^{-2}$	$4\cdot 10^{-1}$	∞

3,75

длина проникновения мала. => Для связи с подлодками можно исп-ть низкие частоты.

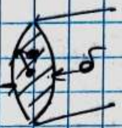


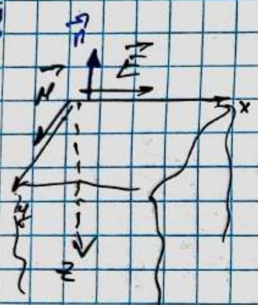
Уточнение понятия хорошего проводника.



$\delta << a$ – не подходит

нужно $\delta >> a$, чтобы ток распределялся равномерно?





ГУ на пов-ти хорошего проводника (импедансные условия М.А. Леонтовича)

~пов-ть хор. проводника.

Было ранее: $E_x(0) = E_0$

$H_y(0) = H_0 = \frac{1-i}{k_0 \mu \delta} E_0$.

Хар-ый импеданс тангенц. компонент:

$$\eta_s = \frac{E_x(0)}{H_y(0)} = \frac{k_0\mu\delta}{1-i} = \frac{k_0\mu\delta}{\sqrt{2}\sqrt{-i}} = \left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}} \\ k_0 &= \omega/c \end{aligned} \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_к}}$$

комплексное

Введём нормаль к границе: $\boxed{\vec{E}_\tau = \eta_s [\vec{n}, \vec{H}]\big|_s}$ пов-ть хор. пров.

импедансное ГУ Леонтовича.

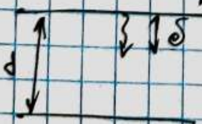
Можно переписать в др. виде: $\vec{E}_\tau = \eta_s[\vec{n}, \vec{H}]\big|_s = \frac{c}{4\pi} Z_{ск} [\vec{n}, \vec{H}]\big|_s$.

где $Z_{ск} = \frac{4\pi}{c}\eta_s$

также для $\eta_s = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_к}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}\,(1+i)$

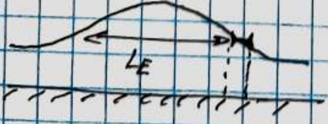
если $\sigma \to \infty$; $\eta_s \to 0 \Rightarrow \vec{E}_\tau = 0$ (как раз для идеального проводника.)

1) Пусть есть проводник конечной толщины.



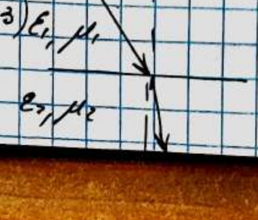
Если $\delta << d$ и среда не полубесконечная, а конечная, то тоже приближённо вып-ся ГУ.

2)



$\delta << L_E$ – измен. поле вдоль границы раздела, можно выбрать отрезок, где E мен. мало и вып. доп. $\delta << L_E$ → так же справедливо.

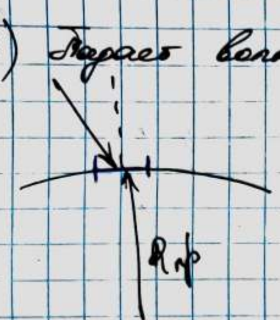
3)



$$\underbrace{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}_{n_2} >> \underbrace{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}_{n_1}$$

Если $|\varepsilon_{2к}|\mu_2 >> \varepsilon_1\mu_1$ → то внешн. среда прохожд. почти по нормали. (если в нижн. среде так же высокая проводимость), то импедансное ГУ → справ.

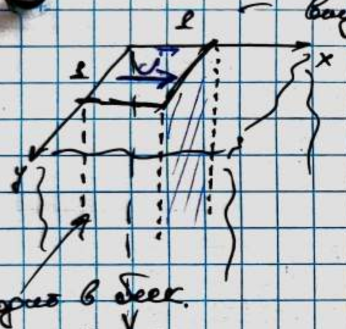
4) Падает волна на искривл. границу.



Если $\delta \ll R_{кр.}$ → т.е. волна спадёт быстрее, чем почувств. кривизну. => то по срав/ процессов пример. ГУ → справ.

Знач. приближ. ГУ неадекватна, что они позв. не рассм-ть поле внутри пров-ка, а учесть его наличие с пом-но ГУ на его пов-ти.

Энергетические соотношения при скин эффекте.



— выделим пл-ку с единичными размерами.

Мощность дис. потерь, приход на ед. пл-ди пов-ти.

$$Q = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma} dz$$

(dx, dy — не счит. т.к. с 1ной длиной)

$$j = j_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}}$$

уходит в беск.

$$\Rightarrow |j| = |j_0| e^{-\frac{z}{\delta}}$$

$$\rightarrow Q = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma} dz = \frac{1}{2\sigma}|j_0|^2\int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}} dz = \frac{\delta}{4\sigma}|j_0|^2$$

~ вообще говоря средн. по времени.

Найдём ток. (течёт $\parallel$ => Ox)

$$I = \int_0^\infty j\, dz = j_0\int_0^\infty e^{-i\frac{1-i}{\delta}z} dz = \frac{j_0\delta}{1+i}$$

$$\Rightarrow |I| = \frac{|j_0|\delta}{\sqrt{2}} \Rightarrow |j_0| = \frac{\sqrt{2}}{\delta}|I|$$

подставим в Q:

$$Q = \frac{|I|^2}{2\sigma\delta} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{\sigma\delta}}_{R_{ск.}}|I|^2$$

вспомним $Q = \frac{1}{2}R|I|^2$

Можно было дог-ся раньше: $R_{ск} = \frac{l}{\sigma S} = \frac{1}{\sigma \cdot 1 \cdot \delta}$ уч-ть, что нужного состав.

=> На нагрев работает только „нормальная" часть.

Магнитная часть энергии

Если будем считать средн. $W^м$ и $W^е$, в усл. сильного скин эффекта $W^м \gg W^е$. ~ в качестве тренировки самост.

$$W^m = \int_0^\infty \frac{\mu |H|^2}{16\pi}\,dz = \frac{\mu}{16\pi}\int_0^\infty \Big|\underbrace{\frac{1-i}{k_0\mu\delta}E_0}_{H_0} e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}}\Big|^2 dz =$$

$E_0 = j_0/\sigma$

$$= \frac{\mu}{16\pi}\cdot\frac{2}{k_0^2\mu^2\delta^2}\cdot\frac{|j_0|^2}{\sigma^2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}}\,dz}_{\delta/2} = \Big\{\text{если подставить все величины}\Big\} =$$

учтём $|j_0| = \frac{\sqrt{2}}{\delta}|I|$

$$= \frac{1}{2c^2}\underbrace{2\pi\mu\delta}_{L_{ск.}}\frac{|I|^2}{2} = \frac{1}{2c^2}L_{ск}\frac{|I|^2}{2}$$

сравним.

сравним $W^m = \frac{1}{2c^2}LI^2 \to \overline{W^m} = \frac{1}{2c^2}L\cdot\frac{|I|^2}{2}$

$L_{ск.}$ – индуктивность скин-эффекта. $\Rightarrow \boxed{L_{ск} = 2\pi\mu\delta}$

Размерный импеданс скин эффекта:

$$Z_{ск} = \frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_\perp}} = \frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}\,(1+i) = \{\text{разделим реал. и мним. части}\} =$$

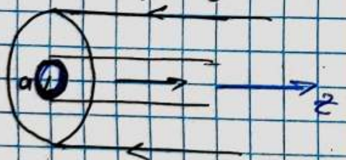
$$= \underbrace{\underbrace{\frac{1}{c}\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}_{1/\delta}\cdot\frac{1}{\sigma}}_{R_{ск}} + i\,\frac{\omega}{c^2}\underbrace{\sqrt{\frac{2\pi\mu}{\sigma\omega}}\cdot c}_{L_{ск.}} = R_{ск} + i\,\frac{\omega L_{ск}}{c^2}$$

$$L_{ск.} = 2\pi\mu\cdot\underbrace{\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}}_{\delta}$$

Сам-но проверить $Z_{ск} = \frac{4\pi}{c}\frac{E_x(0)}{H_y(0)} = \frac{E_x(0)}{\frac{c}{4\pi}H_y(0)} = \frac{E_x(0)}{I} = \frac{\overset{U}{E_x(0)\cdot l}}{\underbrace{I\cdot l}_{I_\Sigma}}$

фактически скачок H на гр. раздела $\leftarrow \frac{c}{4\pi}H_y(0) = I \rightarrow$ в лаб. рассчитать по формулам.

Пример: расчёт коэф. самоинд. на ед. длины цилиндр. проводника — рассм-м коаксиальный проводник.



В статике $\omega = 0$

$j = \frac{I_\Sigma}{\pi a^2}$, по т. о цирк.:

$$H_\varphi\, 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j\pi r^2, \quad r \le a$$

$$\Rightarrow H_\varphi = \frac{2I_\Sigma}{ca^2}\,r \quad \text{– внутри пров.}$$

$$W_1^m = \int_0^a \frac{\mu H_\varphi^2}{8\pi}\,2\pi r\,dr = \{\text{все подставить и посчитать}\} = \frac{1}{2c^2}\underbrace{\frac{\mu}{2}}_{L_1} I_\Sigma^2$$

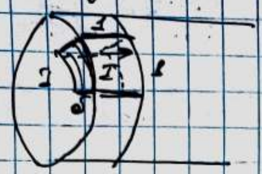
на ед. длины

$$\Rightarrow L_1 = \frac{\mu}{2} \quad \text{– в статике.}$$

В пер. поле: Если $\delta \gg a$ → всё так же ток распр. равномерно.

Рассмотрим сильный скин эффект $\delta \ll a$, $\omega \neq 0$

$W_1^m = \frac{1}{2c^2}L_1\cdot\frac{|I_\Sigma|^2}{2}$ – считаем все величины более крупно



$$I_\Sigma = I\, 2\pi a \;, \quad I = \frac{I_\Sigma}{2\pi a}$$

$$W_1^M = \left(\frac{1}{2c^2} L_{сл} \frac{|I|^2}{2}\right) \cdot 2\pi a = \frac{1}{2c^2}\, 2\pi\mu\delta\, \frac{1}{2} \frac{|I_\Sigma|^2}{(2\pi a)^2} \cdot 2\pi a = \frac{1}{2c^2}\left(\mu \frac{\delta}{a}\right) \frac{|I_\Sigma|^2}{2} = \frac{1}{2c^2} L_1 \frac{|I_\Sigma|^2}{2}$$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{\mu\delta}{a}\;, \quad \frac{\delta}{a} \ll 1$$

~ меньше, чем в прошлом случае.

Квазистац. процессы в квазилин. пр-х со сосредоточенными параметрами.

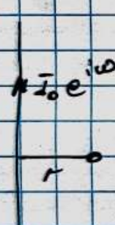
Считаем, что ток распр. равномерно.

Хар-ный масштаб измен. поля: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $T \gg \tau_{запазд.}$

запазд. эл-м сигнала

ℓ, $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ => оценочно $\tau_{зап.} \sim \frac{\ell}{v}$

Рассм-м пример.



$$\vec{H} = \vec{H_0}\, e^{i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)} = \vec{H_0}\, e^{i\omega t} \underbrace{e^{-i\frac{\omega r}{v}}}$$

запазд. (не может колеб. также в такт.)

пренебр. если $\frac{\omega r}{v} \ll \pi \sim 1$

$\tau_{зап} \ll T$ ~ а это $\Leftarrow \frac{2\pi}{T} \cdot \underbrace{\frac{r}{v}}_{\tau_{зап.}} \ll \pi$

и есть усл. квазистац. поля.

=> временем зап. можно пренебречь.

=> $\vec{H} \approx \vec{H_0}\, e^{i\omega t}$ восп. приб. решением статич. задачи.

$$H_\varphi = \frac{2 I_0}{c r} e^{i\omega t}$$

Квазистационарный → $T \gg \tau_{зап.}$

Квазистатическое → в зав-ти от пространств. коорд. ведут себя как в статике.

Временное условие: $T \gg \tau_{зап.}$

$$\frac{\omega r}{v} \ll 1 \;; \quad \frac{\omega r}{v} = \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k_0}\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot r = kr$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ => $\boxed{kr \ll 1}$ ~ выделяет огранич. пр-во (зона квазистатики) → поле там квазистационарно

=> $\boxed{r \ll \lambda}$ ~ зона квазистатики

С точки зрения ур-ний Максвелла:

$$\mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{1}{c}\mu\frac{\partial \vec H}{\partial t} \quad \vec H \approx \vec H_{кв.ст}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec H_{кв.ст.} = \frac{4\pi}{c}\vec j \qquad \vec H = \vec H_{кв.ст} + \vec H_{доп.}$$ — из-за учёта приближ. прибл.; дополняет кв.ст.

$$\mathrm{rot}\,\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec j + \frac{1}{c}\varepsilon\frac{\partial \vec E}{\partial t}$$

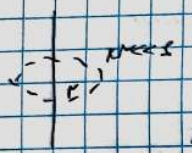
$$\vec j \to \vec H_{кв.ст}, \ \vec B_{кв.ст.} \xrightarrow{\dot{\vec B}(t)} \vec E, \ \vec D \xrightarrow{\dot{\vec D}(t)} \vec H_{доп.}$$

вихревое $\vec E = \vec E_{вихр}$ $(\mathrm{rot}\,\vec E \neq 0)$ → пренебр. в квазист. прибл.

14.11.22.

$\mathrm{rot}\,\vec H_{кв.ст.} = \frac{4\pi}{c}\vec j$, полное поле $\vec H = \vec H_{кв.ст.} + \vec H_{доп}$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec H_{доп} = ik_0\varepsilon\vec E$$



$$\mathrm{rot}\,\vec E_{вихр} = -ik_0\mu\vec H_{кв.ст.}$$

ℓ - некоторый хар-ный простр. масштаб (зона квазистатики)

$$\Rightarrow \frac{|\vec E_{вихр}|}{\ell} \sim k_0\mu|\vec H_{кв.ст.}| \Rightarrow |\vec E_{вихр}| \sim k_0\ell\mu|\vec H_{кв.ст.}| \qquad (*)$$

~ можно сделать такую оценку, когда находимся в зоне квазистатики.

$$k\ell \ll 1; \quad k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Теперь можем оценить добавку $\vec H_{доп}$.

$$\Rightarrow \frac{|\vec H_{доп}|}{\ell} \sim k_0\varepsilon|\vec E_{вихр.}|$$, тогда

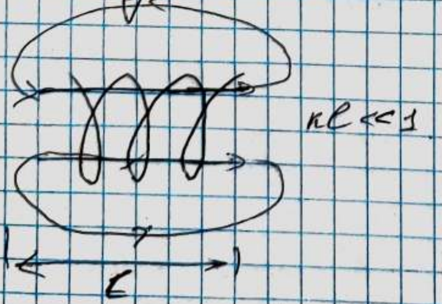
$$|\vec H_{доп}| \sim k_0\ell\varepsilon|\vec E_{вихр}| \sim (k_0\ell)^2\varepsilon\mu\cdot|\vec H_{кв.ст}| = (k\ell^2)|\vec H_{кв}|$$

, т.е. $\vec H_{доп}$ величина 2го порядка малости → можно пренебречь ⇒ док. точность квазистатического поля

Оценим соотношение $\frac{W_Э}{W_М} \sim \frac{\varepsilon|\vec E_{вихр.}|^2}{\mu|\vec H_{кв.ст.}|^2} \sim \frac{\varepsilon(k_0\ell)^2\mu^2}{\mu} = (k\ell)^2 \ll 1$

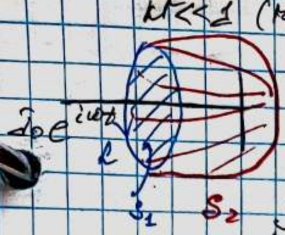
подставляя (*)

В зоне квазист. в основном энергия магнитная.



Пусть в проводе с перем. током есть разрыв.

$kl \ll 1$ ($l \ll \lambda$)



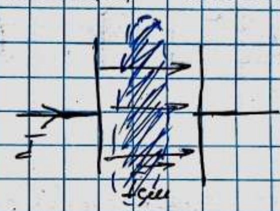
$$\oint_l \underbrace{\vec H}_{\approx \vec H_{кв.ст}} d\vec l = \frac{4\pi}{c} I + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec D d\vec S}_{\frac{4\pi}{c} I_{см\,S_1}}$$

$$\oint_l \vec H_{кв.ст}\, d\vec l = \frac{4\pi}{c} I, \quad |I_{см_{S_1}}| \ll |I|$$

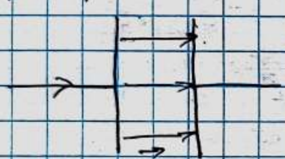
Теперь изменим пов-ть, натянутую на контур S_2

$$\Rightarrow \underbrace{\oint_l \underbrace{\vec H}_{\approx \vec H_{кв.ст}} d\vec l}_{\text{из прошлого } = \frac{4\pi}{c} I} = \frac{4\pi}{c} I_{см} \quad \Rightarrow \boxed{I \approx I_{см_{S_2}}}$$

строгое рав-во: $I + I_{см_{S_1}} = I_{см_{S_2}}$, но ошибка мала



Пример 3.



$\vec E \approx \vec E_{кв.ст}$, $\mathrm{rot}\,\vec E_{кв.ст} = 0$, $\mathrm{div}\,\vec D_{кв.ст} = 4\pi\rho$

ρ — плот. перемен. зарядов на обкладках при усл. $kl \ll 1$.

$$\rho \to \vec E_{кв.ст}, \vec D_{кв.ст} \xrightarrow{\vec D(t)} \vec H, \vec B \xrightarrow{\vec B(t)} \vec E_{вих}, \vec D_{вихр}$$

(*) будем пренебр. этой добавкой, покажем это.

$$\mathrm{rot}\,\vec H = ik_0\varepsilon \vec E_{кв.ст} \Rightarrow \frac{|\vec H|}{l} \sim k_0\varepsilon|\vec E_{кв.ст}|$$

$$|\vec H| \sim k_0 l \varepsilon |\vec E_{кв.ст.}|$$

$$\mathrm{rot}\,\vec E_{вихр.} = -ik_0\mu|\vec H|$$

Измен. на хар-ом масштабе:

$$\frac{|\vec E_{вихр.}|}{l} \sim k_0\mu|\vec H| \Rightarrow |\vec E_{вихр}| \sim k_0 l \mu |\vec H| \sim \underbrace{k_0^2 \varepsilon\mu l^2}_{(kl)^2} |\vec E_{кв.ст}|$$

т.е. $\vec E_{вихр.}$ явл. величиной 2-го порядка малости по отн. к $\vec E_{кв.ст.}$

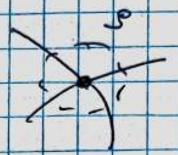
$$\frac{W^m}{W^e} \sim \frac{\mu|\vec H|^2}{\varepsilon|\vec E_{кв.ст}|^2} = \{\text{подставляем значение}\} \sim \frac{\mu k_0^2 l^2 \varepsilon^2}{\varepsilon} = (kl)^2 \ll 1.$$

$\Rightarrow$ в ёмкостях в основном накапливается электрическая энергия.

Правило Кирхгофа для квазистац. цепей

1 правило

$$\text{rot}\,\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec j + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t}}_{\frac{4\pi}{c}\vec j_{см}}$$



$\text{div}\,\text{rot}\,\vec H = 0$

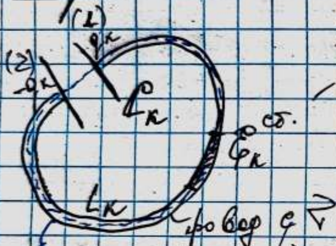
$\text{div}\,(\vec j + \vec j_{см}) = 0$

ранее док-ли $\vec j \gg \vec j_{см}$ $\Rightarrow$ $\text{div}\,\vec j = 0$, тогда проинт. по пов. S и по S.

$$\int_V \text{div}\,\vec j\, dV = 0 \Rightarrow \oint_S \vec j\, d\vec S = 0$$

формально ничего не изменилось $\sim \Rightarrow$ $\boxed{\sum_k I_k = 0}$

2 правило



L_k – контур интегр.

~ пусть есть сторонняя $\mathcal{E}$

$$\oint_{L_k} \vec E\, d\vec l_k = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec B\, d\vec S = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_k}{\partial t}$$

мат. ур-е: $\vec j = \sigma(\vec E + \vec E^{ст})$

$$\frac{\vec j}{\sigma} = \vec E + \vec E^{ст}$$

~ проинт. по проводу от т. 1 до т. 2.

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec j}{\sigma}\, d\vec l_k = \int_{(1)}^{(2)} \vec E\, d\vec l_k + \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec E^{ст}\, d\vec l_k}_{\mathcal{E}_k^{ст}}$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec j}{\sigma}\, d\vec l_k = \int_{(1)}^{(2)} \frac{j}{\sigma}\, dl_k = \left\{\begin{matrix}\text{слаб., что самост. эф. не} \\ \text{влияет, квазист. ток}\end{matrix}\right\} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{I_k}{\sigma S}\, dl_k = (!)$$

$$= I_k \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \frac{dl_k}{\sigma S}}_{R_k}$$

вынесем Это если ток I_k меняется одинак. на всех dl_k (если ток колеб. синфазно, нет запаздывания), это возможно, когда $kl \ll 1$.

$$\Rightarrow I_k R_k = \oint_{L_k} \vec E\, d\vec l_k - \underbrace{\int_{(2)}^{(1)} \vec E\, d\vec l_k}_{\text{внутри } C_k} + \mathcal{E}_k^{ст}$$

$$\Rightarrow I_k R_k = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} + \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec E\, d\vec l_k}_{\text{внутри } C_k} + \mathcal{E}_k^{ст}$$

V_k – напр. на k-ом конденсаторе

$V_k = \frac{q_k}{C_k}$ ~ можно ли пользов. для переменн. полей?

Изменение q_k в общем случае не синфазно с V_k, но $kl \ll 1$ $\Rightarrow$ нет запаздыв. $\Rightarrow$ можем пользоваться

$\dot{q}_k = -I_k \Rightarrow q_k = -\int I_k\,dt$

$V_k = -\frac{1}{C_k}\int I_k\,dt$

Что делать с I_k?

$\Phi_k = \Phi_{kk} + \underbrace{\sum_{m\neq k}\Phi_{km}}_{\text{влияние других контуров}}$

Можно по опр-ю $\Phi_{kk} = \frac{1}{c}L_{kk}I_k$

$\Phi_{km} = \frac{1}{c}L_{km}I_m$, т.к. нет запаздывания $kl \ll 1 \Rightarrow$ приближ. выполняется

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(L_{kk}I_k) + R_k I_k + \frac{1}{C_k}\int I_k\,dt = \mathcal{E}_k^{ст} + \underbrace{(-1)\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m\neq k}\underbrace{\Phi_{km}}_{\frac{1}{c}L_{km}I_m}}_{\mathcal{E}_k^{ind}}$$

$\frac{\partial}{\partial t}(L_{kk}I_k) = L_{kk}\dot{I}_k$

$\frac{\partial}{\partial t}(L_{km}I_m) = L_{km}\dot{I}_m$

$$\frac{1}{c^2}\sum_m L_{km}\dot{I}_m + R_k I_k + \frac{1}{C_k}\int I_k\,dt = \mathcal{E}_k^{ст}$$ – 2 пр. Кирхгофа

Пример для 1го контура с ёмкостью

$\frac{1}{c^2}L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = \mathcal{E}^{ст}$

будем искать в виде $\mathcal{E}^{ст} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$

$I = I_0 e^{i\omega t}$

$\frac{1}{c^2}L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{\mathcal{E}}^{ст}$

$\left\{\frac{1}{c^2}L(i\omega)^2 + R\cdot i\omega + \frac{1}{C}\right\}I_0 = i\omega\mathcal{E}_0 \quad /: i\omega$

$\underbrace{\left(\frac{i\omega L}{c^2} + R + \frac{1}{i\omega C}\right)}_{Z\text{ – импеданс}} I_0 = \mathcal{E}_0$

c^2 из-за сист. СГС.

$Z = R + i\omega\left(\frac{L}{c^2} - \frac{1}{\omega^2 C}\right)$

Рассмотрим свободные колебания.

$\mathcal{E}_0 = 0;\ I_0 \neq 0$

$Z I_0 = 0 \Rightarrow Z = 0 \Rightarrow R = 0$ – диссипации искл. полностью (потерь)

и $\frac{L}{c^2} = \frac{1}{\omega^2 C} \rightarrow \omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}$ – и это возможно только на одной „собственной" частоте.

Быстропеременное ЭМП.
Плоские электромагнитные волны.

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -ik_0 \mu \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\mu \vec{H}) = 0$$
$$\operatorname{rot}\vec{H} = ik_0 \varepsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = 0$$

т.к. $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$, $k_0 = \frac{\omega}{c} \neq 0$

если $\varepsilon, \mu = \text{const}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{div}\vec{H} = 0$, $\operatorname{div}\vec{E} = 0$

Получение ур-я Гельмгольца:

$$\underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}}_{\nabla \operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}} = -ik_0\mu \underbrace{\operatorname{rot}\vec{H}}_{ik_0\varepsilon\vec{E}}, \quad k_0^2 \varepsilon\mu = k^2$$

$\operatorname{div}\vec{E} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \quad (1) \\ &\Delta\vec{H} + k^2\vec{H} = 0 \quad (2) \end{aligned}}$$

Начнём с (1):

$\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$ — решение в виде плоской волны.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}, \quad \vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z,$$ где k — волновое число.

Пусть поле зависит только от коорд. z: $\vec{E}(z) = \vec{x}_0 E_x(z)$

т.е. необх. потреб. $k_x = 0$, $k_y = 0$

$$E_x(z) = E_0 e^{-ik_z z}$$

проверим выполнение ур-я:

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + k^2 E_x(z) = 0$$

$$\{(-ik_z)^2 + k^2\} \underbrace{E_0}_{\neq 0} e^{-ik_z z} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_z^2 = k^2 \quad \Rightarrow \quad k_z = k$$

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_0 e^{-ikz}, \quad k_z = k$$
$$\sim e^{-i\vec{k}\vec{r}}, \quad \vec{k} = k\vec{z}_0$$

Удобна такая замена: $\nabla e^{-i\vec{k}\vec{r}} = -i\vec{k} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = (\nabla, \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}) = (\underbrace{\nabla e^{-i\vec{k}\vec{r}}}_{-i\vec{k} e^{-i\vec{k}\vec{r}}}, \vec{E}_0) = (-i\vec{k}, \vec{E})$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = [\nabla, \underbrace{\vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}}_{\vec{E}}] = [-i\vec{k}, \vec{E}]$$

$\Rightarrow$ вспоминаем: $\operatorname{rot}\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{i}{k_0\mu}\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{i}{k_0\mu}[\underbrace{\nabla}_{-i\vec{k}}, \vec{E}] =$$

$\vec{k} = k\vec{z}_0$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{i}{k_0\mu}\left[-ik\vec{z}_0, \vec{x}_0 E_0 e^{-ikz}\right] = \frac{k}{k_0\mu}\vec{y}_0 E_0 e^{-ikz}$$

$$\frac{k}{k_0\mu} = \frac{k_0\sqrt{\varepsilon\mu}}{k_0\mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}; \quad \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta$$ ~ импеданс

$$\Rightarrow \vec{H} = \vec{y}_0 \underbrace{\frac{1}{\eta}E_0 e^{-ikz}}_{H_y}$$

$$\Rightarrow H_y = \frac{1}{\eta}\underbrace{E_0 e^{-ikz}}_{E_x} = \frac{1}{\eta}E_x$$

Домнож. на $e^{i\omega t}$ и возьмём Re часть.

$$E_x(z,t) = Re\{E_0 e^{-ikz}\cdot e^{i\omega t}\} = |E_0|\cos(\omega t - kz + \varphi)$$

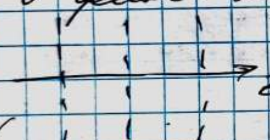
аналогично: $H_y(z,t) = \frac{1}{\eta}|E_0|\cos(\omega t - kz + \varphi)$

$\omega t - kz + \varphi$ ~ полная фаза волны

φ ~ нач. фаза

Пов-ть пост. фазы: $\omega t - kz + \varphi = const$

в фикс. момент времени t: $z = const$
~пл-ть $\perp Oz$

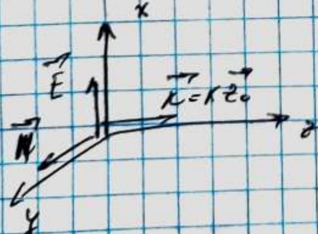


~поэтому она и наз-ся плоской.
+ однородная.

Оп. Плоской монохромат. ЭМВ назыв. волна фаза которой в опр. момент времени принимает пост. знач. на системе паралл. плоскостей.

Волны → однородные (пов-ть пост. фазы совп. с пов-тью пост. амплитуды.)
→ неоднородная. (в противном случае.)

$\vec{E} = \vec{x}_0 E_0 e^{-ikz}$



$[\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}]$ - обр. прав. тройку

вдоль $\vec{k}$ волна распр.

$\left.\begin{array}{l}\vec{E}\perp\vec{k}\\ \vec{H}\perp\vec{k}\end{array}\right\}$ T - transverse ~ в данном случае TEM - поляризация (волна TEM пол.)

Видно: $\vec{E} = \eta[\vec{H}, \vec{z}_0]$ ⟵ $\vec{E}_\perp = \eta_\perp[\vec{H}, \vec{n}]$
$[\vec{H}_\perp, \vec{n}]$

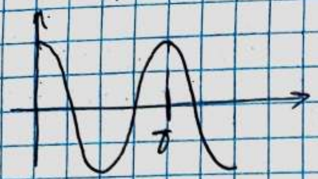
В нашем случае: $\vec{z}_0 = \vec{n}$, $\eta = \eta_\perp$

$\eta_\perp$ ~ поперечный хар-кий импеданс. (отн. $E_\perp$ и $H_\perp$ по отн. к попер. напр-ю. Вводится для будущих волн)

$$\vec{E}_\perp = \eta[\vec{H}, \underbrace{\vec{z}_0}_{\vec{n}}]$$

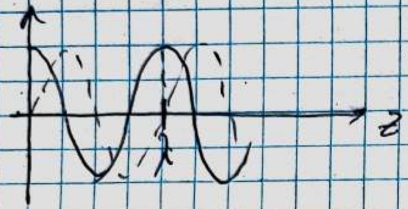
Имея действительные сост. можем построить осциллограммы и простр. моментальные снимки.

$z=0 \sim \cos\omega t$



$\omega T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$t=0, \sim \cos kz$



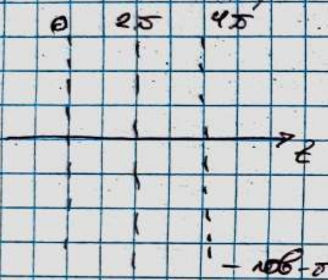
$k\lambda = 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$

~ период напр.-я волны.

15.11.22.

TEM: $\vec{n} = \vec{z}_0$, $\vec{E} = \vec{E}_\perp$, $\vec{H} = \vec{H}_\perp$ $\Rightarrow \vec{E} = \eta[\vec{H}, \vec{z}_0]$ $\quad \eta_+ = \eta$

для однородных волн.



— пов-ть пост. фазы.

$\frac{d}{dt} \Big| \; \omega t - kz + \varphi = const$

$\omega - k\underset{v_\varphi}{\dot{z}} = 0$ $\Rightarrow$ найдём ск-ть перемещения пов-ти пост. фазы.

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}} = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}_{v} = \frac{c}{n}}$$

$\Rightarrow$ Фазовая ск-ть совп. с v.

Полезные соотношения:

$v = \frac{\omega}{k} \rightarrow k = \frac{\omega}{v}$ подставим в $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega/v} = \underbrace{\frac{2\pi}{\omega}}_{T} \cdot v = v \cdot T$

за период во времени смещается на длину волны λ.

Ск-ть распр-я энергии (информации): $\boxed{v_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial k}}$

Вычислим $\frac{1}{v_{гр}} = \frac{\partial k}{\partial \omega}$

$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{v}$, $\quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, т.б. $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$

$\Rightarrow \frac{1}{v_{гр}} = \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\omega}{v}\right) = \frac{1}{v} - \frac{\omega}{v^2}\frac{\partial v}{\partial\omega} = \frac{1}{v}\left(1 - \frac{\omega}{v}\frac{\partial v}{\partial\omega}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{v_{гр} = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v}\frac{\partial v}{\partial \omega}}}$$

— при наличии дисперсии

Без дисперсии: $v_{гр} = v_\varphi$

В каком направлении распространяется энергия?

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} Re[\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi} Re\{\vec{z}_0 \underbrace{(\vec{H}, \vec{H}^*)}_{|H|^2} - \vec{H}(\underbrace{\vec{z}_0, \vec{H}^*}_{0})\} =$$

$\vec{E} = \eta[\vec{H}, \vec{z}_0]$

$$= \frac{c}{8\pi} \eta |\vec{H}|^2 \vec{z}_0 = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\eta} |\vec{E}|^2 \vec{z}_0$$

– энергия бежит по фазе. (предположение, что поле бежит по $\vec{z}_0$)

Рассм-ем плоские волны в общем случае.

1) $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$, $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ $\qquad \nabla \to -i\vec{k}$

$\underbrace{rot \vec{E}}_{[\nabla, \vec{E}]} = -ik_0 \mu \vec{H}$

$[\vec{k}, \vec{E}_0] = k_0 \mu \vec{H}_0$ (на экспон. сократили.)

2) Рассм-м др. ур-е Максвелла

$\underbrace{rot \vec{H}}_{[\nabla, \vec{H}]} = ik_0 \varepsilon \vec{E} \longrightarrow [\vec{k}, \vec{H}_0] = -k_0 \varepsilon \vec{E}_0$

3) Для одн. среды $div \vec{D} = 0 \to \underbrace{div \vec{E}}_{(\nabla, \vec{E})} = 0$

$\Rightarrow (\vec{k}, \vec{E}_0) = 0$

4) $div \vec{B} = 0 \to div \vec{H} = 0$

$(\nabla, \vec{H}) = 0 \longrightarrow (\vec{k}, \vec{H}_0) = 0$

Для опред-ти будем выражать всё через поле $\vec{E}$.

$\vec{H}_0 = \frac{1}{k_0 \mu} [\vec{k}, \vec{E}_0]$

$$\left.\begin{array}{l}\underbrace{[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{E}_0]]}_{\vec{k}(\vec{k}, \vec{E}_0) - (\vec{k}, \vec{k})\vec{E}_0} = -k_0^2 \varepsilon \mu \vec{E}_0 \\ (\vec{k}, \vec{E}_0) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \{(\vec{k}, \vec{k}) - k_0^2 \varepsilon \mu\} \vec{E}_0 = 0$$

если $\vec{E}_0 \neq 0 \Rightarrow$

дисперс. уравнение для плоских волн в однор. изотропной среде. $\boxed{(\vec{k}, \vec{k}) = k_0^2 \varepsilon \mu}$

$k_0 = \frac{\omega}{c}$ $\quad \varepsilon(\omega), \mu(\omega)$

$\omega = \omega(\vec{k})$ – решение (дисп. соотн.)

<u>Анализ дисперсионного уравнения</u>.

– не огранич. частными случаями.

$\vec{k} = \vec{k}_1 - i\vec{k}_2$ – считаем, что $\vec{k}$ компл. в общем случае.

$$\Rightarrow \underbrace{k_1^2 - k_2^2}_{Re} - \underbrace{2i(\vec{k}_1, \vec{k}_2)}_{Im} = k_0^2 \varepsilon \mu$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1^2 - k_2^2 = k_0^2 \varepsilon \mu \\ (\vec{k}_1, \vec{k}_2) = 0 \end{cases}$$

1) Пусть вектор действ. (частн. случай), $\vec{k_2} = 0 \Rightarrow \vec{k} = \vec{k_1}$

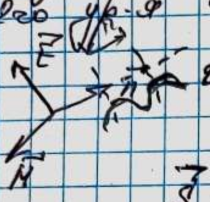
$$\underbrace{k_1^2 = k_0^2 \varepsilon \mu}_{k^2} \Rightarrow \vec{k} = k \cdot \vec{n}$$

произв. направление.

– случай однородной плоской волны.

Если $\vec{E_0} \parallel \vec{n}$ придём ко всем прошлым ф-лам.

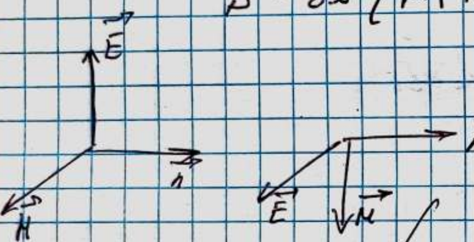
2) Пусть $\vec{k_2} \neq 0$, $\vec{k_1} \neq 0$, но возможно (при $\vec{k_1} \perp \vec{k_2}$ (из 2го ур-я системы) – случай неоднор. плоской волны.



$\{\vec{E}, \vec{H}, \vec{n}\}$ – правая тройка

$$\vec{E} = \eta [\vec{H}, \vec{n}] \longrightarrow \vec{H} = \frac{1}{\eta}[\vec{n}, \vec{E}]$$

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \eta |\vec{H}|^2 \vec{n} = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\eta} |\vec{E}|^2 \vec{n}$$



Независимо от поляриз. волны обл. ~~одной~~ и той же фаз. ск-ть вдоль $\vec{k}$ (поляриз. вырождение.)

Если сделать среду не изотропной вырождение пропадает.

<u>Замечание</u>: пусть $E_x \neq 0$, $E_y = E_z = 0$

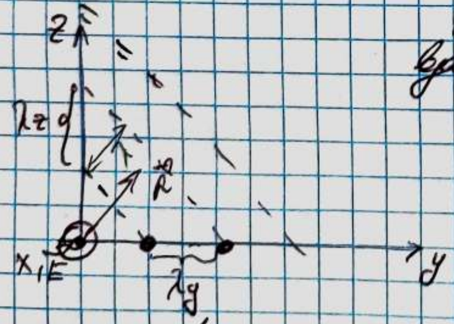
$$E_x = E_0 e^{-ik_y y - ik_z z}$$

$$\underset{0}{k_x^2} + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2 \varepsilon \mu \longrightarrow \cdot e^{i\omega t}$$

$$E_0 = |E_0| \cdot e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow E_x(\vec{r}, t) = |E_0| \cos(\omega t - k_y y - k_z z + \varphi)$$

схематически



Если хотим, посм. как ~~чтобы~~ волна распр. вдоль какой-то оси.

$$k_y \lambda_y = 2\pi$$

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}, \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z}$$

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x = 0} = \infty$$ – если период измен. по коор. $\to \infty$ значит от этой коорд. поле не зависит.

Геометр. видно, что $\lambda_y, \lambda_z > \lambda \Rightarrow$ ск-ти распр. будут больше вдоль λ и φ.

Посмот. ск-ть распр-я точек пер. фаз. фронта с осями коорд.

Ось y: $x = 0$, $z = 0$

$$\frac{d}{dt} \Big/ \quad \omega t - k_y y - k_z \underset{0}{z} + \varphi = \text{const}.$$

$\omega - k_y \dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \dot{y} = v_\varphi^{(y)} = \frac{\omega}{k_y}$

аналогично $\quad v_\varphi^{(z)} = \frac{\omega}{k_z}$

$v_\varphi^{(x,y,z)} > v$, но их нельзя ~~интерпр.~~ как вектор. (они не преобр. правильно, как и координаты.)

$\Rightarrow$ только k_x, k_y, k_z могут быть объединены в вектор.

Б) Рассм-м ~~неоднородные~~ плоские волны.

$\vec{k_{1,2}} \neq 0, \quad \vec{k_1} \perp \vec{k_2}$

$\vec{k_1} = h\vec{z_0}, \quad \vec{k_2} = \varkappa \vec{x_0} \quad \Rightarrow \vec{k} = h\vec{z_0} - i\varkappa\vec{x_0}$

$\Rightarrow \boxed{h^2 - \varkappa^2 = k_0^2 \varepsilon \mu}$ дисп. ур-е неодн. плоской волны.

$\vec{E} = \vec{E_0} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \Rightarrow$, где $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E_0} e^{-ihz - \varkappa x} \quad \sim \cos(\omega t - hz + \varphi) \cdot e^{-\varkappa x}$

аналогично: $\vec{H} = \vec{H_0} e^{-ihz - \varkappa x}$

Ур-е пов-ти пост. фазы: $\omega t - hz + \varphi = const$

$\Rightarrow z = const$ пл-ти перпенд. оси z.

$\omega - h\dot{z} = const. \quad \rightarrow v_\varphi = \frac{\omega}{h}$

Но! Пов-ти пост. фазы не совп. с пов-ю пост. ампл.

$e^{-\varkappa x} = const. \quad \rightarrow x = const.$

пов-ть пост ампл. $\perp$ оси x.

Т.к. пов-ти не совп. $\rightarrow$ волна неоднородная.

лин. поляр.

1) Пусть $\vec{H_0} = H_0 \vec{y_0} \Rightarrow \vec{E_0} = -\frac{1}{k_0 \varepsilon}[\vec{k}, \vec{H_0}] = -\frac{1}{k_0 \varepsilon}[h\vec{z_0} - i\varkappa\vec{x_0}, H_0\vec{y_0}]$

$\Rightarrow$ при лин. поляр. магн. поле:

$\vec{E_0} = \frac{H_0}{k_0 \varepsilon}(h\vec{x_0} + i\varkappa\vec{z_0})$ $\rightarrow$ есть поперечная и продольная составл.

Из-за i сдвиг. фаз $\rightarrow \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ по отн. к распр. движе-ю, эллиптич. поляр. (ТМ - поляр.)

ТМ (Е) - типа (можно ск-ть и так и так) $H_z = 0$, $E_z \neq 0$

$\underset{H_z = 0}{\text{ТМ}}$ $\quad E_z \neq 0$

2) Пусть лин. поляр $\vec{E_0} = E_0 \vec{y_0} \quad \Rightarrow \vec{H_0} = \frac{1}{k_0 \mu}[\vec{k}, \vec{E_0}]$

$\vec{H_0} = \frac{1}{k_0 \mu}[h\vec{z_0} - i\varkappa\vec{x_0}, E_0\vec{y_0}]$

$$\vec{H}_0 = -\frac{E_0}{k_0\mu}\left(h\vec{x}_0 + i\varkappa\vec{z}_0\right) \to TE\ (H),\quad E_z = 0,\quad H_z \neq 0$$

есть и прод. и поперечн. компоненты.

Фазовая ск-ть неодн. плоской волны:

1) $V_\phi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\sqrt{\underbrace{k_0^2\varepsilon\mu}_{k^2} + \varkappa^2}} < \frac{\omega}{k} = v$ ← одн. плоск. волны.

=> в неодн. ф. ск-ть с чем в одн. прямо пропорц. медленной волной.

2) Посчитаем длину волны:

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2+\varkappa^2}} < \frac{2\pi}{k} = \lambda \text{ - одн. волны.}$$

→ т.е. более мелкие,

3) Считаем хар-кий импеданс.

$\vec{E}_\perp = \eta_\perp[\vec{H}, \vec{z}_0]$ м.б. полезна обр. ф-ла.

$$[\vec{z}_0, \vec{E}_\perp] = \eta_\perp[\vec{z}_0, [\vec{H}, \vec{z}_0]] = \eta_\perp\{\vec{H}\underbrace{(\vec{z}_0,\vec{z}_0)}_{1} - \vec{z}_0\underbrace{(\vec{H},\vec{z}_0)}_{H_z}\} = \eta_\perp \vec{H}_\perp$$

$$\Rightarrow \vec{H}_\perp = \frac{1}{\eta_\perp}[\vec{z}_0, \vec{E}]$$

$$\vec{E} = \eta_\perp[\vec{H}, \vec{z}_0] = \eta_\perp[\vec{H}_\perp, \vec{z}_0] = \eta_\perp H_x[\vec{x}_0, \vec{z}_0] = \underbrace{-\eta_\perp H_x}_{E_y}\vec{y}_0 \to E_y = -\eta_\perp H_x$$

$$\eta_\perp^{(TE)} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k_0\mu}{h}$$

$$\eta_\perp^{(TM)} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{h}{k_0\varepsilon}$$

) разные для разных поляризаций.

Куда бежит энергия? Туда же куда и фаза.

$$TE: \vec{S} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[E_y\vec{y}_0, H_x^*\vec{x}_0] \ominus$$

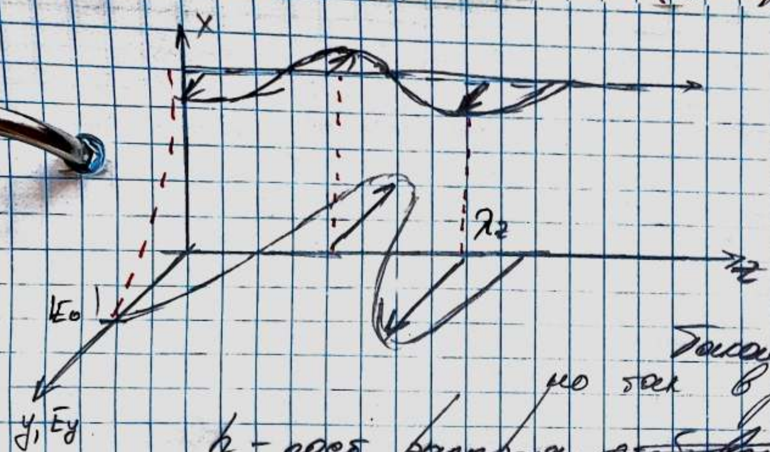
$\mathrm{Re}(E_y H_z^*) = 0$ ~продольная компл. не дает вклада

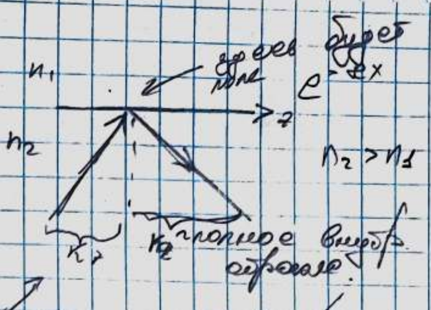
$$\ominus \frac{c}{8\pi}\cdot\frac{1}{\eta_\perp^{(TE)}}|E_y|^2\vec{z}_0 = \frac{c}{8\pi}\cdot\eta_\perp^{(TE)}|H_x|^2\vec{z}_0$$

Построим например для TE:

$$E_y(\vec{r}, t) = |E_0|e^{-\varkappa x}\cos(\omega t - hz + \varphi)$$

$$t = 0,\quad \varphi = 0$$





Такая волна м.б. реализ., но так в реальности её нет

k – пост. распр-я ~~этой волн~~ неодн. плоской волны

Плоские волны в поглощающей среде.

Т.е. есть потери, учесть их можно введя компл. величины.

$$\varepsilon_k = \varepsilon' - i\varepsilon'' \qquad \mu_k = \mu' - i\mu''$$

Для простоты рассмотрим ε_k, μ

$$(\vec k, \vec k) = k_0^2 \varepsilon_k \mu. \quad \rightarrow \quad \vec k = \vec k' - i\vec k''$$

~~Здесь~~ можно найти решение для случая $\vec k' \parallel \vec k''$ → рассм-м только этот случай.

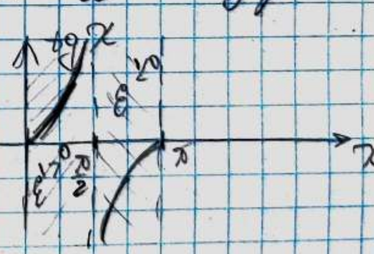
$$k'^2 - k''^2 - 2ik'k'' = k_0^2(\varepsilon' - i\varepsilon'')\mu$$

$$\rightarrow \begin{cases} k'^2 - k''^2 = k_0^2\varepsilon'\mu \\ 2k'k'' = k_0^2\varepsilon''\mu \end{cases}$$ нужно найти решение ур-я. =>

Введём полезное обозначение – угол потерь:

χ, вводится $tg\chi = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$, $\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ – из прошлого

$$\rightarrow \boxed{tg\chi = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon'}}$$



$$\varepsilon_k = \varepsilon' - i\varepsilon'' = |\varepsilon_k| \cdot e^{-i\,arctg\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}} = |\varepsilon_k| e^{-i\chi}$$

$\Rightarrow \varepsilon'' = \varepsilon' tg\chi$ → второе ур-е запиш.

$$\begin{cases} 2k'k'' = k_0^2\varepsilon'\mu\, tg\chi \\ k'^2 - k''^2 = k_0^2\varepsilon'\mu \end{cases}$$

18.11.22

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = k_0^2\varepsilon'\mu \\ 2k'k'' = k_0^2\varepsilon'\mu\, tg\chi \end{cases}$$

$2k'k'' = k_0^2\varepsilon''\mu = \frac{2}{\delta^2}$, $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}$

$\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$

Т.к. $\vec k' \parallel \vec k'' \parallel \vec z_0$

$$e^{-i\vec k\vec r} = e^{-i(\vec k' - i\vec k'')\vec r} = e^{-ik'z - k'z}$$

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k''z} \cdot e^{-ik'z}$

$\vec{E} = \underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon \kappa}}}_{2} [\vec{H}, \vec{z}_0]$

Здесь из-за наличия потерь в среде при распр. волны возникает сдвиг фаз между $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Решая дальше систему можно получить:

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon' \mu \left[\frac{1}{2}\sqrt{1+tg^2 \chi} + \frac{1}{2} \right]$$ ~ k' должно быть всегда вещественной

$$k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon' \mu \left[\frac{1}{2}\sqrt{1+tg^2 \chi} - \frac{1}{2} \right]$$

$tg \chi = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$, разберём частные случаи:

1) $\varepsilon' > 0$ в случае малых потерь; т.е.

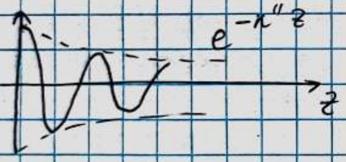
а) $tg^2 \chi = \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2 \ll 1$ ~ разложим в ряд

$$\sqrt{1+tg^2\chi} \approx 1 + \frac{tg^2\chi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad k' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu} \; ; \quad k'' \approx \underbrace{\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu}}_{k'} \left[\frac{1}{2} + \frac{tg^2\chi}{4} - \frac{1}{2}\right] \approx k' \frac{tg\chi}{2} \approx \frac{k'\chi}{2}$$

$\ll k'$

$\sim e^{-k''z} e^{-ik'z}$



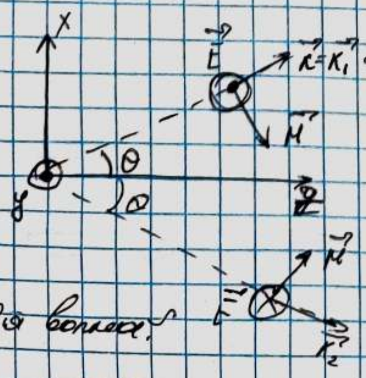
б) в случае сильных потерь $tg\chi \gg 1$.

$$k' \approx k'' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu} \cdot \sqrt{\frac{tg\chi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}{c} = \frac{1}{\delta}$$

подставим $tg\chi = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon'}$

Если учесть, что $k' \approx k''$ $\Rightarrow$ $k = k' - ik' \approx \frac{1-i}{\delta} = \tilde{k}$

Неоднородная плоская волна как суперпозиция двух плоских однородных волн.



$k_{1z} = k_{2z} = k\cos\Theta$
$k_{1x} = k_{2x} = k\sin\Theta$

переобозначим
$k_{1z} = k_z$
$k_{1x} = k_x$.

складываем поля:

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 e^{-ik_x x - ik_z z} - \vec{y}_0 E_0 e^{ik_x x - ik_z z} =$$

$$= \vec{y}_0 \underbrace{(-2i E_0)}_{E_{0\Sigma} = |E_{0\Sigma}| e^{i\varphi}} \sin(k_x x)\, e^{-ik_z z}$$

$\omega t - k_z z + \varphi = const$ пов-ть пост. фазы.

z - const; $\omega - k_z \dot z = 0$, $\rightarrow \dot z = v_ф = \frac{\omega}{k_z}$

Пов-ти пост. амплитуды:

$k_x x = const$ $\rightarrow$ не совп. с пов-ю пост. фазы,
$x = const$ т.е. получили неодн. волну

Переобозначение:

$\vec E = E_y \vec y_0$; $E_y = 0$, когда $k_x x = \pi m$

$m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Какая поляризация?

т.к. $rot \vec E = -ik_0 \mu \vec H$

$\Rightarrow \vec H = \frac{i}{k_0 \mu} \begin{vmatrix} \vec x_0 & \vec y_0 & \vec z_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ раскрываем получим:

$H_x = -\frac{k_z}{k_0 \mu} E_{0\Sigma} \sin(k_x x) e^{-ik_z z} = -\frac{\cos\theta}{\eta} E_{0\Sigma} \sin(k_x x) e^{-ik_z z}$

$H_z = i\frac{k_x}{k_0 \mu} E_{0\Sigma} \cos(k_x x) e^{-ik_z z} = i\frac{\sin\theta}{\eta} E_{0\Sigma} \cos(k_x x) e^{-ik_z z}$

учитывая $k_z = k\cos\theta$, $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$, $k_x = k\sin\theta$, $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

Т.к. фаза бежит по оси z $\rightarrow$ скажем, что по этому напр. бежит волна:

$\Rightarrow \vec E \parallel \vec y_0$; а H имеет комп. H_x и H_z $\Rightarrow$ $TE(H)$ - поляризация

Что с другими величинами?

$v_ф = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} > \frac{\omega}{k} = v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
для плоской волны

$\Rightarrow v_ф > v$ $\rightarrow$ такую волну назыв. быстрой.

Про длину волны:

$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} > \frac{2\pi}{k} = \lambda$
для пл. волны

Про хар-кий импеданс:

$\vec E_\perp = \eta_\perp [\vec H, \vec z_0]$, если ~~так~~ далее для бег. волны.
η - опр. поперечными комп. полей

$H_\perp = \frac{1}{\eta_\perp} [\vec z_0, \vec E]$

$\eta_\perp^{(TE)} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k_0 \mu}{k_z} = \frac{k_0 \mu}{h}$ принято в ~~лит~~ $k_z = h$. и назыв. пост. распр-я аналогично для TM поляризации:

$$\eta_\perp^{(TM)} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{k_z}{k_0\varepsilon} = \frac{h}{k_0\varepsilon}$$

Куда бежит энергия в такой волне? Бежит туда же, куда и фаза по Oz: $\sim e^{-ik_z z}$ $\sim e^{ik_z z}$

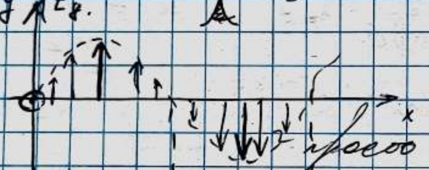
$$\vec S = \frac{c}{8\pi} Re[\vec E, \vec H^*] = \frac{c}{8\pi} Re[E_y \vec y_0, H_x^* \vec x_0] =$$
$$= \frac{c}{8\pi}\frac{k_z}{k_0\mu}|E_{0\Sigma}|^2 \sin^2(k_x x)\,\vec z_0$$

$$E_{0\Sigma}\cdot E_{0\Sigma}^* = |E_{0\Sigma}|$$

Распределение поля в пространстве. Конструирование поля в волноводе из однородных плоских волн (концепция Brillouin)

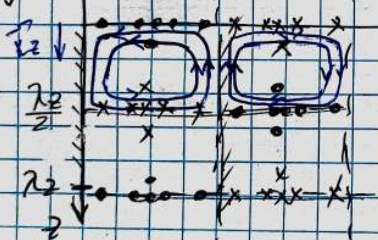
$$E_y(\vec r, t) = |E_{0\Sigma}|\sin(k_x x)\cos(\omega t - hz + \varphi)$$

$t=0$, $\varphi=0$



просто символическое представление

Вид сверху:



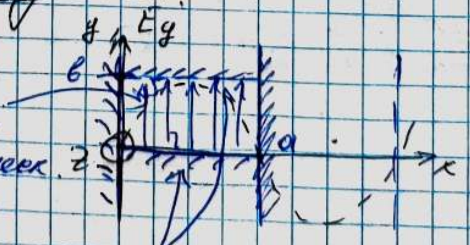
символ. поле к нам или от нас (+ густота соотв. амплитуде)

Из $\vec E_\perp = \eta_\perp[\vec H_\perp, \vec z_0]$, где $\vec E_\perp$ max → там и $\vec H_\perp$ max,
если $E_l = 0$ → появл. H_l ~ продольная компон.

Можем увидеть, что если пов-ть, где $E_\tau = 0$, можем заменить тонким проводником.

$k_x x = \pi m \to E_y = 0$

между пл-ями может укладываться неск. вариаций синусоиды.

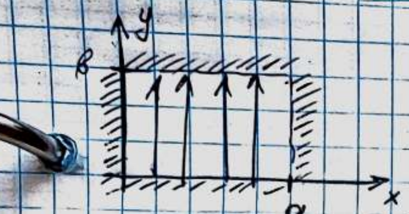


$k_x a = \pi m$, $m = 1, 2, \dots$

$k_x = \frac{\pi m}{a}$

Здесь E_τ тоже $= 0$, но $E_n \neq 0$ (втыкается по нормали.)

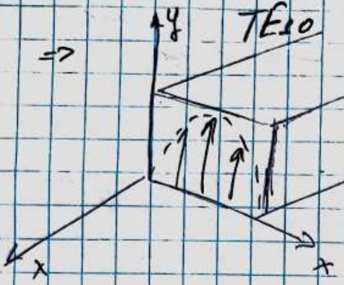
Тогда получим:



~ возникает беск. труба, когда заметаллизированы обе ст-ки

$$\boxed{k_x = \frac{\pi m}{a}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

⇒



~ это и есть прямоугольный волновод.
При решении ур-ий Максвелла с такими ГУ → получим решение с собственными модами.

В зависимости от m получим дискр. набор k_x.

принято $k_x = \varkappa = \frac{\pi m}{a}$, $h = k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa^2}$

для каждого m своё значение.

$h = 0$ при критической частоте:

$\omega = \omega_{кр} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\varkappa$ ~ для каждой собств. моды своё значен. критической частоты.

Если $\omega > \omega_{кр}$, $h - Re$ → волна распространяющаяся по волноводу.

Если $\omega < \omega_{кр}$, $h - Im$ ⇒ $h = \mp i|h|$ ~ знак выбир., чтобы поле экспоненц. спадало

⇒ случай нераспр.-ей волны (волна не попадает в волновод!)

Также вводится критическая длина волны:

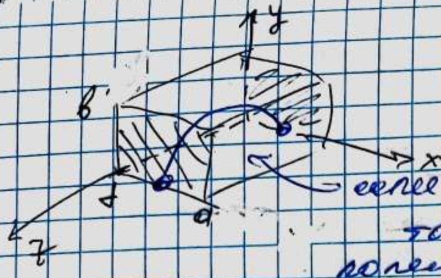
$\lambda_{кр.} = \frac{2\pi}{k}\Big|_{\omega=\omega_{кр}}$ кот. соотв. безгр. пр-ву, заполн. той же средой, что и в волноводе.

$\lambda_{кр.} = \frac{2\pi}{k}\Big|_{\omega=\omega_{кр}} = \frac{2\pi}{\varkappa} = \frac{2a}{m}$

Если $\omega > \omega_{кр}$; $\lambda < \lambda_{кр}$ ~ волна помещается в волновод и распр-ся.

Если $\omega < \omega_{кр}$; $\lambda > \lambda_{кр}$ ~ волна „не влезает" → нераспространяющаяся волна.

Если в волноводе пустить две навстречу друг другу бегущие волны → возникнут стоячие волны.



— если заметим в узлах пов-ти, то получим ящик с достаточным полем, т.е. равенство вып-ся:

$\lambda_z = \lambda_в$.

$d = \frac{\lambda_z}{2} l$, $l = 1, 2, \dots$ — кол. целое число полуволн

$\lambda_z = \frac{2\pi}{h}$

$d = \frac{2\pi}{h}\cdot\frac{1}{2}\cdot l \Rightarrow h = \frac{\pi l}{d}$

по т. Пифагора: $k^2 = k_x^2 + k_z^2 = æ^2 + h^2$

— прямоугольный резонатор:

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{d}\right)^2$$ — возможно только на таких частотах.

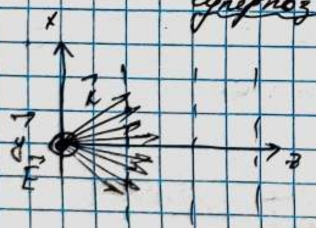
м.б. $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$.

Если в среде нет дисперсии:

$$\omega_{ml} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi l}{d}\right)^2}$$ — собственные частоты

Электромагнитные волновые пучки.

Представление поля пучка в виде суперпозиции однор. плоских волн.



Теперь будем рассматривать континуум волн (а не 2)

пусть $\frac{\partial}{\partial y} = 0 \Rightarrow k^2 = k_x^2 + k_z^2$

$\Rightarrow \vec{E}(x,z) = E(x,z)\,\vec{y}_0$

Запишем в виде суперпозиции:

$$E(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x)\, e^{-ik_x x - i\sqrt{k^2-k_x^2}\,z}\, dk_x$$

$E(k_x)$ — пространственный спектр пучка.

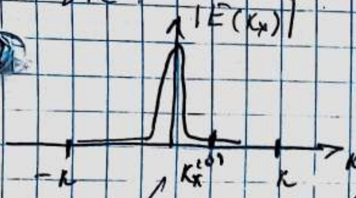
Если $z=0$: $E(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x)\, e^{-ik_x x}\, dk_x$

— т.е. возьмём входное сечение и разложим по пространственному спектру $E(k_x)$ и подставим в интеграл → найдём

В общем случае считается численно.

Важный случай: малоугловое (параксиальное приближение)

т.е.



если $k_x^{(0)} << k$, т.е. узкий простр. спектр.

все $\vec{k}$ почти $\parallel$ oz.

Из теории интегралов Фурье: $k_x^{(0)} \sim \frac{2\pi}{\lambda_\perp}$

тогда должно вып-ся $\frac{2\pi}{\lambda_\perp} << \frac{2\pi}{\lambda}$ $=> \lambda_\perp >> \lambda$

$$=> E_i(x,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(k_x,k_y)\, e^{-ik_x x - ik_y y - i\sqrt{k^2-k_\perp^2}\, z} \underbrace{d\vec{k}_\perp}_{dk_x\, dk_y}$$

где $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$

обознач. $k_x x + k_y y = \vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp$

можно обобщить и для трехмерного случая.

$\sqrt{k^2-k_x^2} = k\sqrt{1-\underbrace{\frac{k_x^2}{k^2}}_{<<1}}$ для параксиального приближения

$\sqrt{1+\xi} \approx 1 + \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{8} + \ldots$

разложим $\sqrt{k^2-k_x^2} = k\sqrt{1-\frac{k_x^2}{k^2}} \approx k\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k_x^2}{k^2} - \frac{1}{8}\frac{k_x^4}{k^4} + \ldots\right)$

$$=> E(x,z) = \underbrace{e^{-ikz}}_{\text{плоск. волна по } z} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(k_x)\, e^{-ik_x x + i\left(\frac{k_x^2}{2k} + \frac{k_x^4}{8k^3} + \ldots\right) z}\, dk_x}_{E^{(0)}(x,z) \text{ — амплитуда пучка}}$$

Чем уже простр. спектр, тем пучок параксиален. Если будет просто палка → обычный случай плоской волны по z.

22.11.22 медленно меняющаяся ф-я на хар-ном масштабе.

$E(x,0) = E^{(0)}(x,0)$ т.к. обусловились что поле поляр. по y (лин. поляр.)

$\vec{E}^{(0)}(x,z) = E^{(0)}(x,z)\, \vec{y}_0$

Когда можно пренебречь вел. в скобке? =>

$z > 0$ $\frac{k_x^2}{2k} z << \pi$ $\rightarrow e^{(\ldots)} \approx 1$

Из теории рядов и интегралов Фурье

хар-ный размер пучка $\Lambda_\perp$ $k_x^{(0)} \sim \frac{2\pi}{\Lambda_\perp}$

аналогия большое $\frac{(2\pi)^2}{2\Lambda_\perp^2}\frac{\lambda}{2\pi} z << \pi$

Чтобы пренебречь должно выполняться

параметр Френеля $- p^2 = \frac{\lambda z}{\Lambda_\perp^2} << 1$ $=>$ $p^2 << 1$

$\sqrt{\lambda z} \ll \Lambda_\perp$

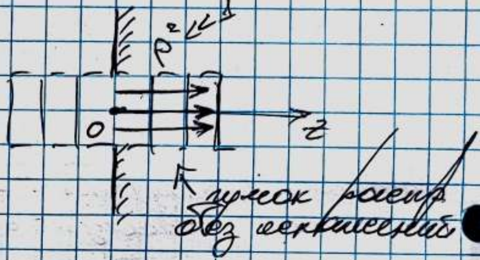
Тогда в этом приближении:

$$E^{(0)}(x,z) \approx \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x)\, e^{-ik_x x}\, dk_x}_{E(x,0)}$$

При выполн-ии $p^2 \ll 1$ получаем св-во:

$$E^{(0)}(x,z) \approx E(x,0)$$ ~ совп. с полем пучка во входном сечении.

$\boxed{\frac{k_x^2}{2k} z \ll \pi}$ ~ назыв. зоной геометрической оптики.



Зона Френеля и диффузионная зона.

Рассмотрим другую добавку $\frac{k_x^4}{8k^3}$ и потребуем

$\frac{k_x^4}{8k^3} z \ll \pi$ ~ т.е. хотим пренебречь только этим слагаемым.

$$\Rightarrow \frac{(2\pi)^4}{\Lambda_\perp^4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\lambda^3}{(2\pi)^3}\, z \ll \pi \Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\lambda z}{\Lambda_\perp^2}}_{p^2} \ll 4\underbrace{\left(\frac{\Lambda_\perp}{\lambda}\right)^2}_{\gg 1}}$$

опр-е диф-ой зоны

Данное неравенство заведомо выполняется при $\Leftarrow$ из условия параксиальности $\Lambda_\perp \gg \lambda$

$p \sim 1$ (зона Френеля)

$1 \ll p^2 \ll 4\left(\frac{\Lambda_\perp}{\lambda}\right)^2$ ~ зона Фраунгофера, может в принципе вып-ся и здесь.

В сумме даёт диффузионную зону.

Замеч. другие авторы могут оценивать по-другому, например

$$k_\perp^{(0)} \sim \frac{1}{\Lambda_\perp} \Rightarrow z \ll k^3 \Lambda_\perp^4 = \frac{k\Lambda_\perp^2}{\left(\frac{1}{k\Lambda_\perp}\right)^2}$$

вводят дифр. расходимость пучка: $\vartheta_g = \frac{1}{k\Lambda_\perp} \sim \frac{\lambda}{\Lambda_\perp} \ll 1$.

$\Rightarrow$ В диф-ой зоне:

$$E^{(0)}(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x)\, e^{-ik_x x + i\frac{k_x^2}{2k}z}\, dk_x$$

Как проводить расчёт этой величины? Разложить в простр. интеграл Фурье.

$$\underbrace{E(x,0)}_{E^{(0)}(x,0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x)\, e^{-ik_x x}\, dk_x$$

$$\to \quad E(k_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E(x',0)}_{E^{(0)}(x',0)}\, e^{ik_x x'}\, dx'$$

– но вычислять довольно сложно.

Проверяют, удовл. ли д-я ур-ю:

$$(*) \quad \boxed{D\frac{\partial^2 E^{(0)}(x,z)}{\partial x^2} = \frac{\partial E^{(0)}(x,z)}{\partial z}}$$

– ур-е выше удовл. этому соотношению.

где $D = -\frac{i}{2k} = \frac{1}{2ik}$

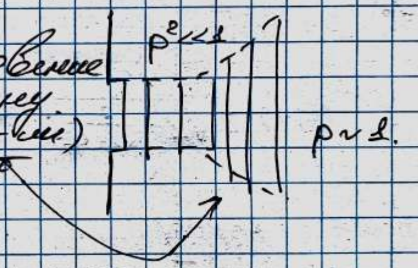
Если рассм. левую и прав. часть:

$$-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{+\infty}(-k_x)^2 \ldots dk_x = \int_{-\infty}^{+\infty} i\frac{k_x^2}{2k}\ldots dk_x$$

(*) – напоминает ур-е диффузии.

Это ур-е опис. дифракцию.

происходит проникновение энергии в другую зону (зону поперечной диф-ии) – энергия диффундирует



$$\underbrace{\frac{\partial^2 \vec E^{(0)}(x,z)}{\partial x^2}}_{\Delta_\perp \vec E^{(0)}} = 2ik\,\frac{\partial \vec E^{(0)}(x,z)}{\partial z}$$

Если учесть зав-ть не только от x, но и от y:

$$E_i^{(0)}(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E_i(k_x,k_y)\, e^{-i\vec k_\perp \vec r_\perp + i\frac{k_\perp^2}{2k}z}\, \underbrace{d\vec k_\perp}_{dk_x dk_y}$$

Если повторить все выкладки можно получить:

$$\Delta_\perp \vec E^{(0)}(x,y,z) = 2ik\,\frac{\partial \vec E^{(0)}(x,y,z)}{\partial z}$$

– на экзам. не спросят.

Из мат. физики можно получить общее решение дифф-ого уравнения:

$$\vec E^{(0)}(x,0) \to \vec E^{(0)}(x,z) \; ; \quad E^{(0)}(x,z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D z}}\int_{-\infty}^{+\infty} E^{(0)}(x',0)\, e^{-\frac{(x'-x)^2}{4Dz}}\, dx'$$

$D = -\frac{i}{2k} = \frac{1}{2ik}$, расписав с каждо-ого, получим:

$$E^{(0)}(x,z) = \sqrt{\frac{k}{-i2\pi z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{E^{(0)}(x',0)}_{E(x',0)}\, e^{-\frac{ik(x'-x)^2}{2z}}\, dx'$$

– оказ. его проще вычислять.

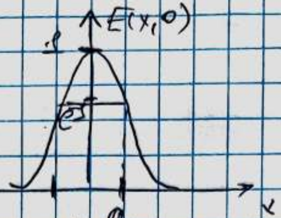
Т.к. мы знаем, что ампл. и поле пучка совп. $\to$

Пример с гауссовским пучком (пучок с гауссовым распределением)

пусть

$$E(x,0) = e^{-\frac{x^2}{4a_0^2}}$$

$$E(x',0) = E^{(0)}(x',0) = e^{-\frac{x'^2}{4a_0^2}}$$



подставляем:

$$E^{(0)}(x,z) = \sqrt{\frac{k}{-i2\pi z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x'^2}{4a_0^2} - \frac{ik(x'-x)^2}{2z}} dx'$$

восп. табличным инт-ом: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x'^2} dx' = \sqrt{\frac{\pi}{i\lambda}}, \quad \mathrm{Im}\,\lambda \le 0$

с заменой переменной $x'^2 \to (x'-x)^2$ знач. инт. не изменится

Основные выкладки нужно пров. самим:

$$\frac{x'^2}{4a_0^2} + \frac{ik(x'^2 - 2xx' + x^2)}{2z} = \underbrace{i\frac{k}{2z}\left(1 + \frac{z}{2ika_0^2}\right)}_{\substack{\lambda \\ (\mathrm{Im}\,\lambda < 0)}} \left(x' - \frac{x}{1 + \frac{z}{2ika_0^2}}\right)^2 + \frac{\frac{x^2}{4a_0^2}}{1 + \frac{z}{2ika_0^2}}$$

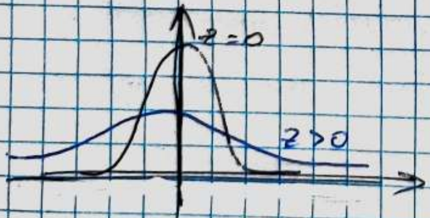
$$\Rightarrow E^{(0)}(x,z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z}{2ika_0^2}}} e^{-\frac{x^2}{4a_0^2\left(1 + \frac{z}{2ika_0^2}\right)}}$$

т.е. снова гаусс. импульс, но с фазов. добавками.

Если взять модуль:

$$|E^{(0)}(x,z)| = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{z}{2ka_0^2}\right)^2}} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{4a_0^2\left[1 + \left(\frac{z}{2ka_0^2}\right)^2\right]}}}_{e^{-\frac{x^2}{\ell^2(z)}}}$$

где $\ell^2(z) = 4a_0^2 + \frac{z^2}{(ka_0)^2}$ если ввести $\theta_д = \frac{1}{ka_0}$ $\to \ell^2(z) = 4a_0^2 + \theta_д^2 z^2$ → пучок уширяется в поперечном напр-ии



Поведение пучка в зоне Фраунгофера

Считаем, что выполн. $1 \ll p^2 \ll 4\left(\frac{\lambda_\perp}{\lambda}\right)^2$ для того чтобы сделать исп-ть

$$E^{(0)}(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x) e^{-ik_x x + i\left(\frac{k_x^2}{2k} z\right)} dk_x \quad \sim p^2$$

т.е. имеем дело с быстро осцилл. ф-ей, тогда можно воспольз. методом стационарной фазы:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{i\Omega g(\xi)}\, d\xi \quad \text{, где } \Omega \gg 1.$$

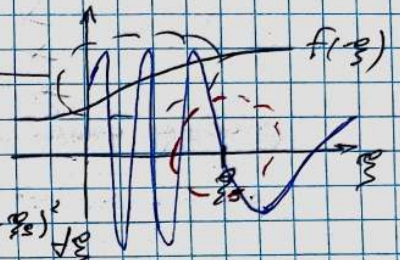
решаем ур-е $g'(\xi)=0$: $\xi=\xi_s$ — стационарная точка.

раскладыв. в окр-ти стационарной точки:

$$g(\xi)=g(\xi_s)+\frac{1}{2}g''(\xi_s)(\xi-\xi_s)^2+\dots$$ (первая произв. в стац. т. $=0$)

дают основной вклад.

на масштабе косинусоиды $f(\xi)\approx$ постоянная, $\Rightarrow$ вклад дает только окрестность стац-ой точки.



$$\Rightarrow I\approx f(\xi_s)\, e^{i\Omega g(\xi_s)}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega\frac{g''(\xi_s)}{2}(\xi-\xi_s)^2}\, d\xi}_{\text{вдали от окр-ти осцил. вклада не дадут.}}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{-i\Omega\frac{g''(\xi_s)}{2}}}$$ ← чем быстрее осцил., тем лучше работает этот метод

Возвращаемся к нашему случаю: диффер-м ф-лу в $e^{i\dots\xi}$ по k_x

$$\left(-ik_x x+i\frac{k_x^2}{2k}z\right)'_{k_x}=0$$

$$-x+\frac{k_x}{k}z=0 \Rightarrow k_{x,s}=k\frac{x}{z}$$ ← стац. точка

Вторая производная:

$$\left(-ik_x x+i\frac{k_x^2}{2k}z\right)''_{k_x}=i\frac{z}{k}$$

$$E^{(0)}(x,z)\approx E\left(k_x=k\frac{x}{z}\right) e^{-i\left(k\frac{x}{z}\right)x+i\left(\frac{kx}{z}\right)^2\frac{z}{2k}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}i\frac{z}{k}(k_x-k_{x,s})^2}\, dk_x}_{\sqrt{\frac{\pi}{-i\frac{z}{2k}}}}$$

Если всё преобразовать:

$$E^{(0)}(x,z)=\sqrt{\frac{2\pi i k}{z}}\, E\left(k_x=k\frac{x}{z}\right) e^{-i\frac{kx^2}{2z}}$$

← спадает с расст-м $\sim\frac{1}{\sqrt{z}}$, как цилиндрическая волна.

Если хотим получить полное поле:

$$E(x,z)=E^{(0)}(x,z)\, e^{-ikz}$$

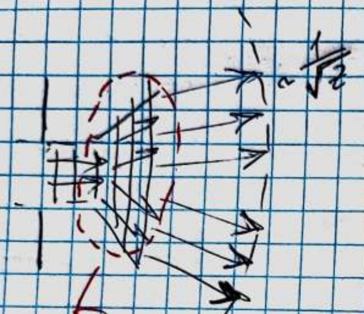
Как ведёт себя полная фаза?

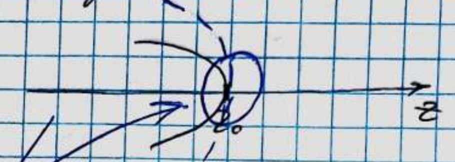
$$\sim e^{-ikz - i\frac{kx^2}{2z}}$$

пов-ть пост. фазы: $kz + \frac{kx^2}{2z} = const = kz_0$

$$\Rightarrow z = z_0 - \frac{x^2}{2z} \approx z_0 - \frac{x^2}{2z_0}$$

если ~~отходим~~ не далеко по x от z_0 ~ парабола





Можно заметить $E(k_x = k\frac{x}{z})$ опр-ся фактически таким же для простр. спектром пучка наблюдения.

(?) Это как из лабы по дифр. Фраунгофера.

Вывод параболич. ур-я для амплитуды пучка из ур-я Гельмгольца

Запишем для i-й компоненты поля:

(*) $\Delta E_i + k^2 E_i = 0$

$div \vec{E} = 0$

$E_i = E_i^{(0)}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$

Учтём $\Delta = div \nabla$

$$\nabla E_i = \nabla\left(E_i^{(0)}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right) = \left(\nabla E_i^{(0)}\right) e^{-i\vec{k}\vec{r}} - i\vec{k} E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

$$div(\nabla E_i) = \left(\Delta E_i^{(0)}\right) e^{-i\vec{k}\vec{r}} + \left(-i\vec{k}, \nabla E_i^{(0)}\right) e^{-i\vec{k}\vec{r}} + \left(\underbrace{\nabla\left(E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)}_{= (\nabla E_i^{(0)}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} + (-i\vec{k}) E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}}, -i\vec{k}\right)$$

Если подставим в (*) экспоненты сократятся:

$$\Delta E_i^{(0)} - \left(2i\vec{k}, \nabla E_i^{(0)}\right) + \cancel{(-k^2) E_i^{(0)}} + \cancel{k^2 E_i^{(0)}} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta E_i^{(0)} = 2i\left(\vec{k}, \nabla E_i^{(0)}\right)$$

$$\boxed{\Delta E_i^{(0)} = 2i\left(\vec{k}, \nabla\right) E_i^{(0)}} \quad (1)$$

Аналогично для $div \vec{E} = 0$: $\left(\vec{E} = \vec{E}^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)$

$$div\left(\vec{E}_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right) = e^{-i\vec{k}\vec{r}} div \vec{E}^{(0)} + \left(-i\vec{k}, \vec{E}^{(0)}\right) e^{-i\vec{k}\vec{r}} = 0$$

$$\underline{\operatorname{div}\vec{E}^{(0)} = i(\vec{k}, \vec{E}^{(0)})} \quad (2)$$

25.11.22.

$$E_i(\vec{r}) = E_i^{(0)}(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$, получаем

$$(1):\quad \Delta E_i^{(0)} = 2i(\vec{k},\nabla)E_i^{(0)} \qquad (\vec{k},\nabla) = k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$(2):\quad \operatorname{div}\vec{E}^{(0)} = i(\vec{k},\vec{E}^{(0)}) \qquad (\vec{k},\vec{E}^{(0)}) = kE_z^{(0)}$$

Выберем для конкретности $\vec{k} = k\vec{z}_0$, тогда перепишем ур-я (1), (2):

$$(1) \Rightarrow:\ \underbrace{\Delta_\perp}_{\text{поперечная часть}} \vec{E}^{(0)} + \frac{\partial^2\vec{E}^{(0)}}{\partial z^2} = 2ik\frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z}$$

— перейдёт в параб. если вычеркнуть $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ($\Delta_\perp(.)$ опис. поперечную диффузию)

$$(2) \Rightarrow:\ \operatorname{div}_\perp \vec{E}_\perp^{(0)} + \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial z} = ikE_z^{(0)}$$

Пусть реализуется условие: $k\left|\frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z}\right| \gg \left|\frac{\partial^2\vec{E}^{(0)}}{\partial z^2}\right|$

Введём хар-ый масштаб измен. $\vec{E}^{(0)}$ в поперечном и продольном напр-ии: $\Lambda_\perp$, $\Lambda_\parallel$

$$\Rightarrow k\frac{|\vec{E}^{(0)}|}{\Lambda_\parallel} \gg \frac{|\vec{E}^{(0)}|}{\Lambda_\parallel^2} \qquad (*)\ \underline{k\Lambda_\parallel \gg 1}$$ — пока просто матем. так казалось

тогда получим
$$\Delta_\perp\vec{E}^{(0)} = 2ik\frac{\partial\vec{E}^{(0)}}{\partial z}$$ — параболич. ур-е.

$$\left|\frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial z}\right| \ll k|E_z^{(0)}| \Rightarrow \frac{|E_z^{(0)}|}{\Lambda_\parallel} \ll k|E_z^{(0)}| \Leftrightarrow (*)$$ получим снова условие

тогда (2) тоже можно переписать:

$$\begin{matrix}\operatorname{div}_\perp \vec{E}_\perp^{(0)} = ikE_z^{(0)} \\ \Delta_\perp \vec{E}^{(0)} = 2ik\frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z}\end{matrix} \Rightarrow \frac{|\vec{E}^{(0)}|}{\Lambda_\perp^2} \sim k\frac{|\vec{E}^{(0)}|}{\Lambda_\parallel} \Rightarrow k\Lambda_\parallel \sim (k\Lambda_\perp)^2$$

Если мы говорим, что пучок параксиальный, значит:

$$\Lambda_\perp \gg \lambda \Leftrightarrow k\Lambda_\perp \gg 1 \Rightarrow k\Lambda_\parallel \ggg 1$$

$\Rightarrow$ в приближении паракс. пучка можно получить парабол. ур-е

Оценивая снова левую часть ур-я (2):

$$\frac{|\vec{E}_\perp^{(0)}|}{\Lambda_\perp} \sim k|E_z^{(0)}| \Rightarrow |E_z^{(0)}| \sim \frac{|\vec{E}_\perp^{(0)}|}{k\Lambda_\perp}$$ — понятно, что для параксиального пучка $|E_z^{(0)}| \ll |\vec{E}_\perp^{(0)}|$

$$E_z^{(0)} = \frac{1}{ik}\operatorname{div}_\perp \vec{E}_\perp^{(0)}.$$

По аналогии с доказанным случаем, можно написать решение ур-я (1):

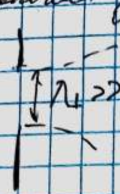
$$\vec{E}^{(0)}(\vec{r}) = \left(\sqrt{\frac{k}{-i2\pi z}}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\vec{E}^{(0)}(x', y', 0)}_{\vec{E}^{(0)}(\vec{r}_\perp')} \times \underbrace{e^{-\frac{ik(x-x')^2}{2z} - \frac{ik(y-y')^2}{2z}}}_{e^{-\frac{ik(\vec{r}_\perp - \vec{r}_\perp')^2}{2z}}} \underbrace{dx'\,dy'}_{d\vec{r}_\perp'}$$

перепишем в компактном виде:

$$\vec{E}^{(0)}(\vec{r}) = \frac{ik}{2\pi z}\int_{S_\perp} \vec{E}^{(0)}(\vec{r}_\perp')\, e^{-\frac{ik(\vec{r}_\perp - \vec{r}_\perp')^2}{2z}}\, d\vec{r}_\perp'$$

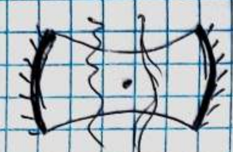
$$\vec{E}(x', y', 0) \equiv \vec{E}(\vec{r}_\perp')$$

В обычной жизни в силу того, что λ мало в оптич. диапазоне, всем. ур. параксиальных пучков.

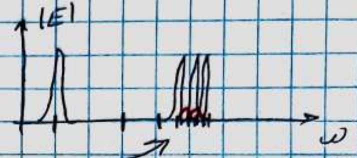


Спр-во и для других длин волн, их называют квазиоптическими (квазиоптика).

Это используется в открытых резонаторах:



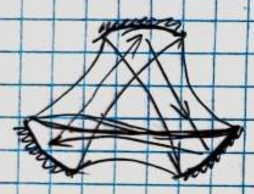
У каждого резонатора есть собств. частоты, которые постепенно разнесены близко друг к другу в спектре.



нужно убрать эти частоты, они мох. переходить друг в друга

Нужно увеличить потери, чтобы между некоторыми ω различались. (прореживание спектра). Роль этого отказ от закрытых систем к открытым напр. с боков, что W уходила через них.

Например для LC систем: → $Q \sim 50 \div 100$



В закр. резонаторах: $Q \sim 500 \div 1000$

В открытых: $Q \gtrsim 5000$

ЭМ волны в однородных изотропных средах с временной дисперсией.

Было установлено ранее $D_i(t,\vec r)=\int\limits_{-\infty}^{t}\tilde\varepsilon_{ij}(t-t')E_j(t',\vec r)\,dt'$

— без простр-ой дисперсии.

В изотропной среде: $\tilde\varepsilon_{ij}(t-t')=\tilde\varepsilon(t-t')\delta_{ij}$

$$\vec D(t,\vec r)=\int\limits_{-\infty}^{t}\tilde\varepsilon(t-t')\vec E(t',\vec r)\,dt'$$

ранее опускаем

Вводим новую перем. $t-t'=\tau$

$d\tau=-dt'$

$$\vec D(t)=\int\limits_{0}^{\infty}\tilde\varepsilon(\tau)\vec E(t-\tau)\,d\tau$$

Чтобы описывать поля раскладываем в интеграл Фурье:

$$\vec E(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec E(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega;\quad \vec E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec E(t)e^{i\omega t}\,dt$$

$$\vec D(t)=\int\limits_{0}^{\infty}\tilde\varepsilon(\tau)\vec E(t-\tau)\,d\tau=\int\limits_{0}^{\infty}\tilde\varepsilon(\tau)\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec E(\omega)e^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega\right\}d\tau=$$

= {меняем порядок интегрирования} =

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \tilde{\varepsilon}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} \vec{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \{\text{если представим}\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{D}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$, тогда в $\{\ldots\}\vec{E}(\omega)$ спектр $\vec{D}(\omega)$

$$\Rightarrow \vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega), \quad \varepsilon(\omega) = \int_0^{\infty} \tilde{\varepsilon}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$ — одностороннее преобр-е Фурье.

Всё аналогично расс-ся для μ и σ

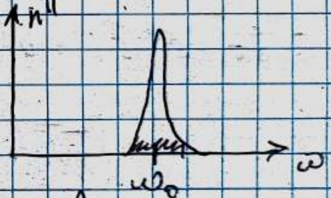
Замеч: если бы у нас была простр. дисперсия, то доп-но пришлось бы раскладывать по пространств. Фурье преобразованию: $\Rightarrow \vec{D}(\omega,\vec{k}) = \hat{\varepsilon}(\omega,\vec{k})\vec{E}(\omega,\vec{k})$

Можно заметить, что получили комплексные величины

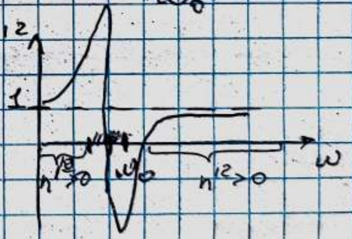
$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$; $\mu(\omega) = \mu'(\omega) - i\mu''(\omega)$

$n = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} = n'(\omega) - in''(\omega)$; $\Rightarrow k = k_0 n = k' - ik''$

В реальных средах, т.к. n - компл. величина, есть частота ω_0, где максим. поглощение, в остальных обл. можно считать без потерь.



Вне |||| можно потерями пренебречь. где $n'^2<0$ → волна не может распр. (области непрозрачности), где $n'^2>0$ ~ области прозрачности. Связь ф-ций $n'(\omega) \leftrightarrow n''(\omega)$ ~ соотношения Крамерса-Кронига



Т.е. если есть дисперсия → есть потери (и наоборот)

Вводили $\vec{j}_{макро} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\vec{M}$

$\sigma \quad \varepsilon \quad \mu$

Т.е. мы теперь перешли к другому утверждению:

$\vec{j}_{макро} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\vec{M}$ где $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$

не будет явно фигур-ть проводимость, занес. в $\vec{D}$

Мощность джоулевых потерь.

Энергия ЭМП в среде с временной дисперсией. проводимость занес. в $\vec{D}$!

Теорема Пойнтинга

$$\mathrm{div}\vec{S}(t) = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}(t)\frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} + \vec{H}(t)\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}\right), \quad \vec{j}^{ст} = 0$$

где $\vec S(t) = \frac{c}{4\pi}[\vec E(t), \vec H(t)]$

$$\mathrm{div}\,\vec S = -q - \frac{\partial w}{\partial t}$$ ~ нужно привести к этому виду

а) $e^{i\omega t}$, $\overline{w}^T = const(t)$

$\mathrm{div}\,\overline{\vec S}^T = -\overline{q}^T$ ~ нельзя рассм-ть монохром. волну.

б) $q=0$ ~ рассмотр. частоты вдали от поглощения

$\mathrm{div}\,\vec S = -\frac{\partial w}{\partial t}$

Для монохром. получим q, пренебрегая потерями $\to w$.

одновременно получить для макроскопич. полей нельзя.

а) Получим q: (переходим к компл. форме записи)

$$\overline{\vec S}^T = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}[\vec E, \vec H^*]$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\,\overline{\vec S}^T = \underbrace{-\frac{1}{4\pi}\overline{\left(\vec E(t)\frac{\partial \vec D(t)}{\partial t} + \vec H(t)\frac{\partial \vec B(t)}{\partial t}\right)}^T}_{-\overline{q}^T} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac12 \mathrm{Re}\left(\vec E^* i\omega \underbrace{(\varepsilon'-i\varepsilon'')\vec E}_{\vec D} + \vec H^* i\omega \underbrace{(\mu'-i\mu'')\vec H}_{\vec B}\right) =$$

$$= -\frac{\omega}{8\pi}\left(\varepsilon''|\vec E|^2 + \mu''|\vec H|^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{q}^T = \frac{\omega}{8\pi}\left(\varepsilon''|\vec E|^2+\mu''|\vec H|^2\right)},\quad \varepsilon'', \mu'' > 0$$

Например для провод. среды: $\mu''=0$; $\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$

$\Rightarrow \overline{q}^T = \frac12 \sigma |\vec E|^2$ ~ получили разумное.

19

б) Энергия в среде с дисперсией:

$$\vec E(t) = \frac12\left(\vec E_0(t)e^{i\omega t} + \underbrace{\vec E_0^*(t) e^{-i\omega t}}_{\text{к.с. (c.c.)}}\right) = \mathrm{Re}\{\vec E_0(t)e^{i\omega t}\}$$

медленно меняющаяся амплитуда, но теперь не монохром. на масштабе $T=\frac{2\pi}{\omega}$ ~ поле почти не меняется

$\Rightarrow$ квазигармонические процессы.

$$\vec H(t) = \frac12\left(\vec H_0(t)e^{i\omega t} + \text{к.с.}\right) = \mathrm{Re}\{\vec H_0(t)e^{i\omega t}\}$$

высокочастотное заполнение (по нему и усредн.), т.к. само поле $\vec E_0$ почти не мен. в медленном масштабе.

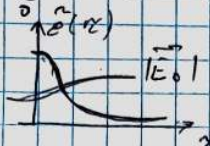
$$\overline{\vec S}^T = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\vec E_0(t), \vec H_0^*(t)]$$

$$\frac{\partial \overline{w}^T}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\overline{\left(\underbrace{\vec E(t)\frac{\partial\vec D(t)}{\partial t}} + \vec H\frac{\partial \vec B(t)}{\partial t}\right)}^T$$

рассм-м только 1е слагаемое (2-е аналогично)

$\vec D_0(t)e^{i\omega t} \longleftrightarrow \vec E_0(t)\,e^{i\omega t}$ — нужно найти связь

$$\vec D_0(t)e^{i\omega t} = \int_0^\infty \tilde\varepsilon(\tau)\vec E_0(t-\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau = \{\text{раскладываем по } \tau \text{ в } \tau=0\} =$$



Нужно также, чтобы $|\vec E_0|$ измен. медленно на том масштабе, где резко меняется $\tilde\varepsilon(\tau)$.

$$= \int_0^\infty \tilde\varepsilon(\tau)\left[\vec E_0(t) - \tau\frac{\partial \vec E_0(t)}{\partial t}\right]e^{-i\omega\tau}d\tau\, e^{i\omega t} =$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \tilde\varepsilon(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau}_{\varepsilon(\omega)}\cdot \vec E_0(t)e^{i\omega t} + \underbrace{\int_0^\infty(-\tau)\tilde\varepsilon(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau}_{i\frac{d\varepsilon}{d\omega}}\cdot\frac{\partial\vec E_0(t)}{\partial t}e^{i\omega t} =$$

$$= \left[\varepsilon(\omega)\vec E_0(t) - i\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega}\cdot\frac{\partial \vec E_0(t)}{\partial t}\right]e^{i\omega t}$$

$\Rightarrow$ В случае квазимонохромат. процесса:

$$\vec D_0(t) = \varepsilon(\omega)\vec E_0(t) - i\frac{d\varepsilon}{d\omega}\frac{\partial \vec E_0(t)}{\partial t}$$

Проверка: для чисто монохром. процесса: $D_0(t) = \varepsilon(\omega)\vec E_0(t)$

$$\frac{\partial \vec D_0(t)}{\partial t} = \varepsilon(\omega)\frac{\partial \vec E_0(t)}{\partial t}$$ (втор. произв. отбр. как знач. второго порядка малости)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec D_0(t)e^{i\omega t}\right) = i\omega\vec D_0(t)e^{i\omega t} + \frac{\partial \vec D_0(t)}{\partial t}e^{i\omega t} = \{\text{всё подставляем}\}$$

$$= \left\{i\omega\varepsilon(\omega)E_0(t) - i\frac{d\varepsilon}{d\omega}\frac{\partial E_0(t)}{\partial t}i\omega + \varepsilon(\omega)\frac{\partial \vec E_0(t)}{\partial t}\right\}e^{i\omega t} =$$

$$= \left\{i\omega\varepsilon(\omega)\vec E_0(t) + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial \vec E_0(t)}{\partial t}\right\}e^{i\omega t}$$

Переходим к усреднению:

$$\overline{\frac{1}{4\pi}\vec E(t)\frac{\partial \vec D(t)}{\partial t}}^T = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac12\cdot\frac12\,\overline{\left(\vec E_0(t)e^{i\omega t} + \vec E_0^*(t)e^{-i\omega t}\right)}\,\bullet$$

Всё усред.

из компл. представл.

* не сходится т.к. в предп. потерь нет, нет и комплексного ε

$$\bullet\,\overline{\left(i\omega\varepsilon(\omega)\vec E_0(t)e^{i\omega t} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial \vec E_0(t)}{\partial t}e^{i\omega t} + (-i\omega)\varepsilon^*(\omega)\vec E_0^*(t)e^{-i\omega t} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial \vec E_0^*(t)}{\partial t}e^{-i\omega t}\right)}^T$$ = дальше всё честно нужно перемножить.

$$= \frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\underbrace{\left(\vec E_0^*(t)\frac{\partial \vec E_0(t)}{\partial t} + \vec E_0(t)\frac{\partial \vec E_0^*(t)}{\partial t}\right)}_{\frac{\partial}{\partial t}|\vec E_0(t)|^2} + \underbrace{\overline{\text{членов}\,(e^{2i\omega t}, e^{-2i\omega t})}^T}_{=0}$$

+ всё аналогично для магнитного поля

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial t}}^T = \frac{1}{4\pi}\overline{\left(\vec E(t)\frac{\partial \vec D(t)}{\partial t} + \vec H(t)\frac{\partial \vec B(t)}{\partial t}\right)}^T =$$

$$= \frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial}{\partial t}|\vec E_0(t)|^2 + \frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\frac{\partial}{\partial t}|\vec H_0(t)|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{w}^T = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}|\vec{E_0}(t)|^2 + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}|\vec{H_0}(t)|^2\right\}}$$

29.11.22.

а) Рассм-м в среде без дисперсии: $\frac{d\varepsilon}{d\omega}=0$, $\frac{d\mu}{d\omega}=0$

$$\Rightarrow \overline{w}^T = \frac{1}{16\pi}\left\{\varepsilon|\vec{E_0}(t)|^2 + \mu|\vec{H_0}(t)|^2\right\}$$

б) Пример: плазма $\mu = 1$; $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ — плазменная частота.

$$\vec{H_0} = \vec{B_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$ тогда энергия:

$$\overline{w}^T = \frac{1}{16\pi}\left\{\left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)|\vec{E_0}(t)|^2 + |\vec{B_0}(t)|^2\right\}$$

Распространение импульсного сигнала в однородной изотропной среде с временной дисперсией.

$$\vec{E} = \vec{E_0}e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E_0}e^{i\omega(t - \frac{z}{v_\varphi})}$$

переобозначения $\frac{\omega}{v_\varphi} = k$; $v_\varphi = v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$$\varepsilon(\omega), \mu(\omega) \to v_\varphi(\omega)$$

Хорошо известно, что передача сигнала с монохром. волной. Для этого в спектре должен быть набор частот.

$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(\omega)e^{i\omega[t - \frac{z}{v_\varphi(\omega)}]}d\omega$$

$$\vec{E}_{физ}(z,t) = Re\{\vec{E}(z,t)\}$$

при $z=0$: $\vec{E}(0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

Если $\frac{dv_\varphi}{d\omega} = 0$

$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(\omega)e^{i\omega(t-\frac{z}{v_\varphi})}d\omega = \vec{E}\left(0, t - \frac{z}{v_\varphi}\right)$$

~ сигнал распр-я с одной и той же формой, но с запаздыванием.

~ интегралы вычисл. числ. для каждой частоты.

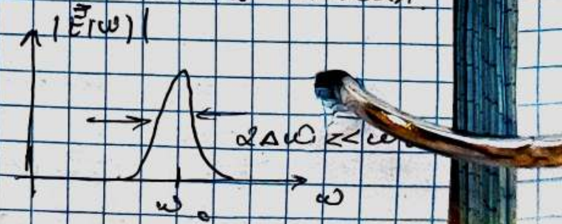
Но есть частные случаи с приобр. аналит. решением

Волновой пакет в диспер. среде.

По опр-ю волновой пакет — квазимонохроматический сигнал (то есть сигнал с узким спектром.)

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$$

Далее всё будем рассм-ть вне области поглощения



$$\Rightarrow k(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_0(\omega-\omega_0)^2 + \dots$$

$"0" \equiv |_{\omega=\omega_0}$ $k(\omega)$ на самом деле меняется быстро (резонансы рядом), нужно более плавное изменение, поэтому и рассм-ие в области без поглощения

$$\vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega t - ik(\omega)z} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{[i\omega_0 t + i\omega t - i\omega_0 t - ik(\omega_0)z - i\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0(\omega-\omega_0)z - i\frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_0(\omega-\omega_0)^2 z + \dots]} d\omega$$

Пренебречь остальными членами можно, если
$$\left|\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3k}{d\omega^3}\right)_0(\omega-\omega_0)^3 z\right| \ll \pi$$

Обозначения: $\omega-\omega_0 = \Omega$; $\Delta\omega \sim \Omega_{max}$

$t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 z = \tau$; $\tau = \tau(z,t)$

$z=0$: $\tau(0,t) = t$

$$\vec{E}(\omega) = \vec{E}(\omega_0+\Omega) = \underbrace{\vec{E}(\Omega)}_{\vec{E}_\Omega}$$

Тогда можно переписать:
$$\vec{E}(z,t) = e^{i(\omega_0 t - k(\omega_0)z)} \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\Omega e^{i\Omega\tau - i\frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_0 z\Omega^2} d\Omega}^{\vec{E}_0(z,\tau)}$$

– видно, что есть такой же множ. как у плоской волны, но с доп. множителем.

$\vec{E}_0(z,\tau)$ огибающая волнового пакета (envelope).

Если ширина спектра обр. в 0 $\rightarrow$ $\vec{E}_0(z,\tau)$ просто станет константой.

Что будет при выполнении более жёсткого условия:
$$\left|\frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_0 z\,\Omega_{max}^2\right| \ll \pi$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = e^{i(\omega_0 t - k(\omega_0)z)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\Omega e^{i\Omega\tau} d\Omega}_{\vec{E}_0(z,t)}$$

Обознач. z и t просто в данном случае квадр. зав., в других нет (просто обозначение)

$z=0$: $\tau = t$.

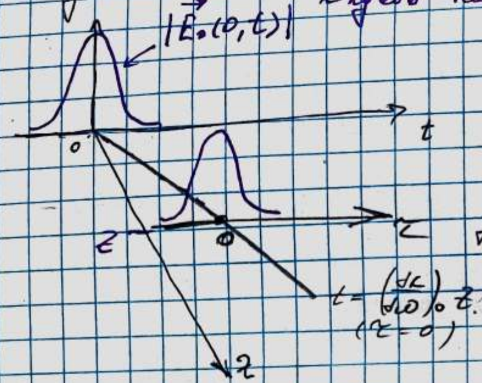
$$\Rightarrow \vec{E}(0,t) = e^{i\omega_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\Omega e^{i\Omega t} d\Omega}_{\vec{E}_0(0,t)}$$

сравниваем формулы:
$$\vec{E}_0(z,t) = \vec{E}_0(0,\tau) = \vec{E}_0\left(0, t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 z\right)$$

совп. по форме с импульсом при $z=0$, но приход. с запаздыванием.

Рисунок: $|\vec{E}_0(0,t)|$ — пусть колоколообразный импульс.

Т.е. в какую-то точку z придёт с запаздыванием по времени



$t=\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 z$ $(\tau=0)$

$\frac{d}{dt}\Big/ \quad t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 z = \text{const}$ — ур-е движения точек огибающей

$$1-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 \underbrace{\dot{z}}_{v_{гр}} = 0$$

$$\Rightarrow v_{гр} = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0$$

Соберём все условия вместе:

а) сигнал квазимонохроматический;

б) находимся в области прозрачности;

в) $\frac{1}{2}\left|\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_0 z\right|\Omega^2_{max} \ll \pi$

Средний вектор Пойнтинга для данного случая:

$$\overline{S_z}^T = \overline{w}^T \cdot v_{гр} \quad (\S 20) \text{ из Гинзбурга}$$

Если $\omega=\omega(\vec{k})$ можно показать, что справедливо обобщение:

$$\vec{v}_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} = \nabla_{\vec{k}}\,\omega(\vec{k}) = \left\{\frac{\partial\omega}{\partial k_x}; \frac{\partial\omega}{\partial k_y}; \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\right\}$$

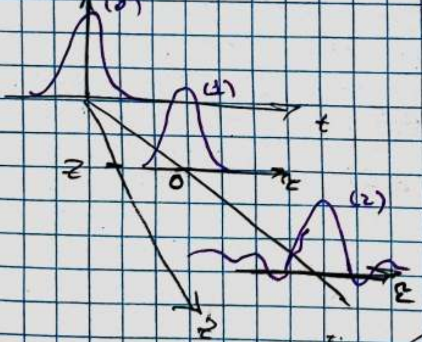
$$\Rightarrow \vec{S}^T = \overline{w}^T \vec{v}_{гр}$$

можно заметить $v_{гр}\ge 0$ и $|\vec{v}_{гр}|<c$.

Если условие в) нарушается → дисп. доп. искажение, сигнал искажается (размыв. огиб.) нельзя пользов. понятием опр-ем групповой ск-ти.

$$\vec{E}_0(z,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\Omega\, e^{i(\Omega\tau - \frac{1}{2} k''_\omega z\Omega^2)}\, d\Omega \ldots$$

где $k''_\omega = \left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_0$



Можно пок-ть, что процесс эволюции огибающей опис-ся параболическим ур-ем:

$$\frac{\partial \vec{E}_0(z,\tau)}{\partial z} = D\,\frac{\partial^2\vec{E}_0(z,\tau)}{\partial\tau^2}, \quad D=\frac{i k''_\omega}{2}$$

проверяется прямой подстановкой в нач.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(-i)\frac{1}{2} k''_\omega\, \Omega^2(\ldots)\, d\Omega = \frac{i k''_\omega}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(-\Omega^2)(\ldots)\, d\Omega$$

При каждой новой z происходит расплывание огибающей по времени τ

Если знаем вид огибающей при $z=0$ (из лаб.), можем найти решение $\vec{E}_0(0,t) \to \vec{E}_0(z,\tau)$

$$\vec E_0(z,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec E_0(0,\tau')\, e^{-\frac{(\tau'-\tau)^2}{4Dz}}\, d\tau' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{i2\pi k'' z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec E_0(0,\tau')\, e^{\frac{i(\tau'-\tau)^2}{2k''_\omega z}}\, d\tau'$$

Пример: распространение Гауссова импульса.

$$\vec E_0(0,t) = \vec E_0(0,\tau) = \vec e_0\, e^{-\frac{\tau^2}{t_0^2}}$$

$$\vec E_0(z,\tau) = \vec e_0 \frac{1}{\sqrt{i2\pi k''_\omega z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau'^2}{t_0^2} + \frac{i(\tau'-\tau)^2}{2k''_\omega z}}\, d\tau' =$$

вычисл. инт. сводится к вычисл. инт. вида: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau'^2} d\tau' = \sqrt{\frac{\pi}{i\lambda}}$

$$\Rightarrow \vec E_0(z,\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{i2k''_\omega z}{t_0^2}}} \cdot \exp\left\{-\frac{\left(t-\frac{z}{v_{gr}}\right)^2}{t_0^2\left(1+\frac{i2k''_\omega z}{t_0^2}\right)}\right\}$$

здесь учтено:

$$\tau = t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 z = t - \frac{z}{v_{gr}}$$

Св-во: исходное огиб. гауссовой функцией, то при $z \neq 0$ также огиб. гаус. ф-ей, но есть модуляция $\vec E_0$.

Чтобы не было искажений: $\left|\frac{i2k''_\omega z}{t_0^2}\right| \ll 1$.

$\Rightarrow \left|\frac{2k''_\omega z}{t_0^2}\right| \ll 1$ — фактически условие б). $\left|\frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_0 z\,\Omega_{max}^2\right| \ll \pi$

$\frac{1}{t_0} \sim \Omega_{max}$

Метод дифракции (на экз. не будет) аналог. метод. стац. фазы.

$$\vec E_0(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec E_\Omega\, e^{i\left(\Omega\tau - \frac{1}{2}k''_\omega z \Omega^2\right)}\, d\Omega$$

$$k''_\omega z \Omega^2 = \underbrace{\frac{k''_\omega}{k}\Omega^2}_{\sim \frac{k}{\Omega^2}\cdot\frac{1}{k}\Omega^2 \sim 1} \cdot \underbrace{kz}_{\gg z} \gg 1 \Rightarrow \text{быстроосцил. ф-я.}$$

$$\tau - k''_\omega z\Omega = 0 \Rightarrow \Omega_s = \frac{\tau}{k''_\omega z} \qquad \left(\Omega\tau - \frac{1}{2}k''_\omega z\Omega^2\right)''_\Omega = -k''_\omega z$$

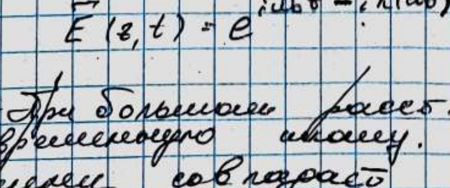
стационарная

$$\vec E_0(z,\tau) = \vec E_\Omega\left(\Omega = \frac{\tau}{k''_\omega z}\right) e^{i\left(\Omega_s\tau - \frac{1}{2}k''_\omega z\Omega_s^2\right)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{2}k''_\omega z(\Omega-\Omega_s)^2}\, d\Omega}_{\sqrt{\frac{\pi}{i\frac{k''_\omega z}{2}}}}$$

$$\vec E_0(z,\tau) = \vec E_\Omega\left(\Omega = \frac{\tau}{k''_\omega z}\right) e^{i\frac{\tau^2}{2k''_\omega z}} \sqrt{\frac{2\pi}{i k''_\omega z}}$$

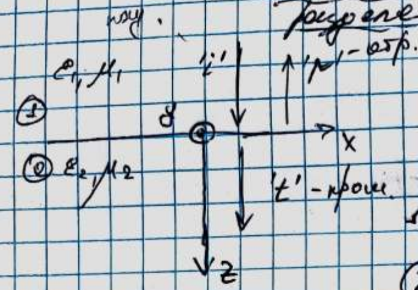
$$\vec E(z,t) = e^{i\omega_0 t - ik(\omega_0)z}\, \vec E_0(z,t)$$

При больших расст-ях трассы спектр переходит во временную шкалу. т.е. огиб. по форме во времени совпадает по виду со спектром.



Волны в неоднородных изотропных средах.

Отражение и преломление плоских волн на плоской границе раздела двух однор. сред.



Вводим волновые числа и импедансы

$$\eta_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2}}{\varepsilon_{1,2}}}, \quad k_{1,2} = k_0\sqrt{\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}}$$

1) Волна падает перпенд. (нет преломления)

(i): $\vec E^{(i)} = \vec E_0^{(i)} e^{-ik_1 z}$

$$\vec H^{(i)} = \frac{1}{\eta_1}[\underbrace{\vec n^{(i)}}_{\vec z_0}, \vec E^{(i)}] = \frac{1}{\eta_1}[\vec z_0, \vec E_0^{(i)}]e^{-ik_1 z}$$

(r): $\vec E^{(r)} = \underbrace{\Gamma \vec E_0^{(i)}}_{\vec E_0^{(r)}} e^{+ik_1 z}$

$$\vec H^{(r)} = \frac{1}{\eta_1}[\underbrace{\vec n^{(r)}}_{-\vec z_0}, \vec E^{(r)}] = -\frac{\Gamma}{\eta_1}[\vec z_0, \vec E_0^{(i)}]e^{ik_1 z}$$

(t): $\vec E^{(t)} = \underbrace{T \vec E_0^{(i)}}_{\vec E_0^{(t)}} e^{-ik_2 z}$; $\vec H^{(t)} = \frac{1}{\eta_2}[\underbrace{\vec n^{(t)}}_{\vec z_0}, \vec E^{(t)}] = \frac{T}{\eta_2}[\vec z_0, \vec E_0^{(i)}]e^{-ik_2 z}$

Требуем выполнения ГУ:

$$z=0: \begin{cases} \vec E_\tau^{(i)} + \vec E_\tau^{(r)} = \vec E_\tau^{(t)} \\ \vec H_\tau^{(i)} + \vec H_\tau^{(r)} = \vec H_\tau^{(t)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \Gamma = T \\ \frac{1}{\eta_1} - \frac{\Gamma}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2} \end{cases}$$

=> решая систему уравнений:

$$\boxed{\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}, \quad \boxed{T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}}$$

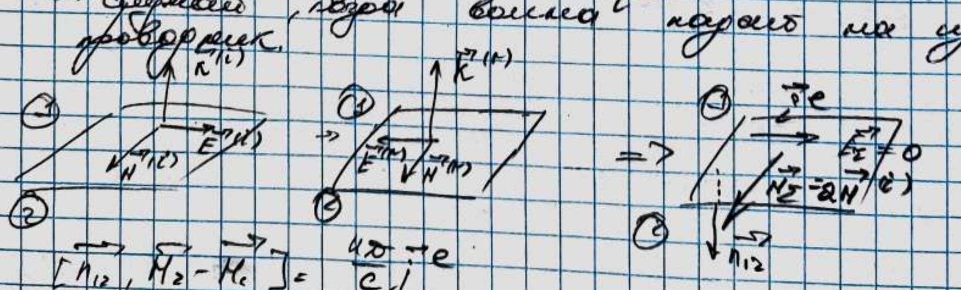
Частные случаи:

а) $\Gamma = 0$ режим согласования (matching)

=> $\eta_2 = \eta_1$ -> $\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$ — волна не чувствует границы.

б) „Режим короткого замыкания". $\eta_2 \to 0$ $\to \Gamma = -1$.

→ случается, когда волна падает на идеальный проводник.



$$[\vec n_{12}, \underbrace{\vec H_2}_{0} - \underbrace{\vec H_1}_{\vec H_\Sigma}] = \frac{4\pi}{c}\vec j^e$$

2.12.22.

в) Решение „холостого хода".

$\eta_2 = \infty$

$\Gamma = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \Rightarrow \Gamma = 1 \Rightarrow$ Поля, по сравн. с предыд. случаем, меняются местами.

$Z_{1,2} = \dfrac{4\pi}{c}\eta_{1,2}$:

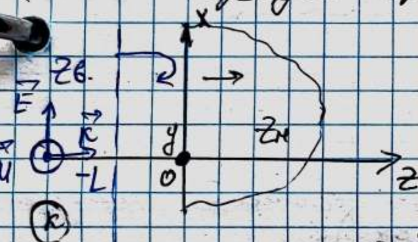
$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в}$$

$$\tau = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2 Z_н}{Z_н + Z_в}$$

$Z_2 = Z_н$. (просто часто называют импедансом нагрузки.

$Z_1 = Z_в$. (а в 1 среде ~ назыв. „волновым" импедансом)

Формула пересчёта импеданса.
Формула пересчёта коэф-та отражения.



$\eta(-L) = \dfrac{E_x}{H_y}\Big|_{z=-L}$ — при разных расстоян. импеданс. будет разный, т.к. складываются волны прямая, а падающая.

$$\Rightarrow Z(-L) = \frac{4\pi}{c}\eta(-L) = \frac{4\pi}{c}\frac{E_0 e^{-ikz} + \Gamma E_0 e^{ikz}}{\frac{E_0}{\eta}e^{-ikz} - \Gamma\frac{E_0}{\eta}e^{ikz}}\Bigg|_{z=-L} \ominus$$

$\frac{E}{H}$ просто через отр-е

$$\ominus \left\{\frac{4\pi}{c}\eta = Z_в\right\} = Z_в \cdot \frac{e^{ikL} + \frac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в}e^{-ikL}}{e^{ikL} - \frac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в}e^{-ikL}} \ominus \left\{e^{\pm ikL} = \cos(kL) \pm i\sin(kL)\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z(-L) = Z_в\frac{Z_н\cos(kL) + iZ_в\sin(kL)}{Z_в\cos(kL) + iZ_н\sin(kL)}}, \text{ где } Z_н = Z(0)$$

– позволяет пересчёт импеданса в т. $-L$ отн. 0.

Про коэффициент отражения:

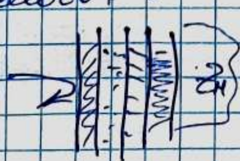
$$\Gamma(-L) = \frac{E_x^{(r)}}{E_x^{(i)}}\Big|_{z=-L} = \frac{\Gamma E_0 e^{ikz}}{E_0 e^{ikz}}\Big|_{z=-L} = \Gamma e^{-i2kL}, \text{ где } \Gamma = \Gamma(0)$$

(*) $\Gamma(-L) = \dfrac{Z(-L) - Z_в}{Z(-L) + Z_в}$ – т.к. наблюдатель может считать, что при $-L$ (в новом сечен.) является нагрузкой.

Если подставить получ. ф-лу в * можно док-ть:

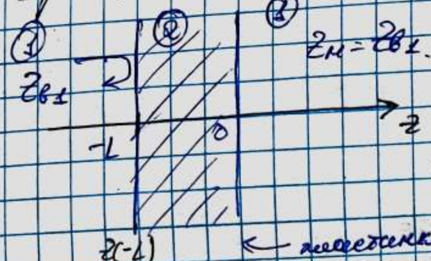
$|\Gamma(-L)| = |\Gamma| \qquad (|e^{-i2kL}| = 1)$

Удобно для некоторых задач, напр. если много слоёв.



→ даёт пересчитывать импеданс для каждого сечения, а не „сшивать" поля между собой через ГУ.

Пример: Отражение от плоскопараллельной пластинки.



$$\Gamma(-L) = \frac{Z(-L) - Z_{B1}}{Z(-L) + Z_{B1}}$$

в ф-ле для пересчёта к и Z_B-той среде, где результ. пересчёт Z_H — самой правой среды, за которой ничего нет.

$$\Rightarrow Z(-L) = Z_{B2}\,\frac{Z_{B1}\cos(k_2L) + iZ_{B2}\sin(k_2L)}{Z_{B2}\cos(k_2L) + iZ_{B1}\sin(k_2L)}$$

Может ли быть реализовано $\Gamma(-L) \overset{?}{=} 0$ ~ т.е. среды будут согласованы.

$$\Rightarrow Z(-L) = Z_{B1}$$

$$Z_{B2}\left[Z_{B1}\cos(k_2L) + iZ_{B2}\sin(k_2L)\right] = Z_{B1}\left[Z_{B2}\cos(k_2L) + iZ_{B1}\sin(k_2L)\right]$$

~> приравн. Re и Im части.

$$\Rightarrow (Z_{B2}^2 - Z_{B1}^2)\sin(k_2L) = 0$$

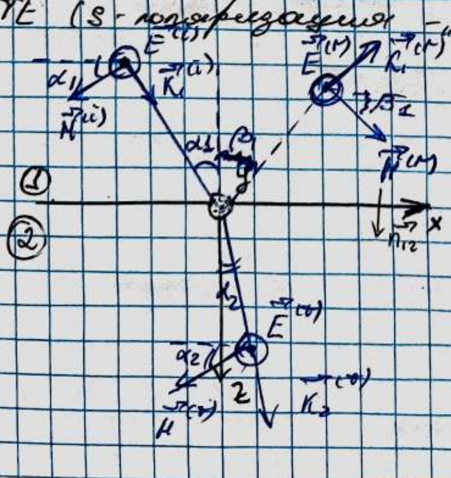
а) $Z_{B1} = Z_{B2}$, $\forall L$ ~ тривиальный случай (импеданс не меняется.)

б) $Z_{B1} \neq Z_{B2} \Rightarrow k_2L = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$

Если учесть $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$ $\Rightarrow \boxed{L = \frac{\lambda_2}{2} n}$ ~ это верно, если среды слева и справа от пластинки одинак. (иначе нужно решать задачу заново)

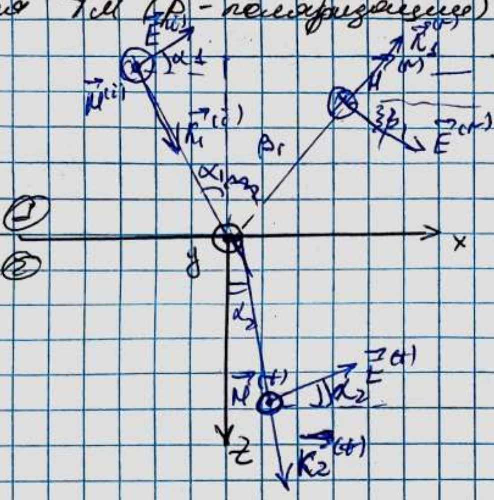
Отражение и преломление плоских волн при наклонном падении на плоскую границу раздела сред. Формулы Френеля

TE (s-поляризация, „необыкновенная") - поле $\vec{E}$ поперечно к плоскости падения.



Плоскость падения — пл-ть, обр. вект. $\vec{n}_{12}$ и $\vec{K}_1$

Для ТМ (р - поляризация)



— выбир. место из сообр, чтобы не мен. знак. проекции $\vec{E}$ (а так можно произвольно)

Вспомним: $\vec{E} = \eta[\vec{H}, \vec{n}]$

$\vec{H} = \frac{1}{\eta}[\vec{n}, \vec{E}]$

— но пока неудобно.

Вводим поперечный импеданс:

$\vec{E}_\perp = \eta_\perp [\vec{H}, \vec{z}_0]$ ~ поперечн. по отн. к $\vec{z}_0$ (к норм. границы раздела сред)

$\vec{H}_\perp = \frac{1}{\eta_\perp}[\vec{z}_0, \vec{E}]$

=> Для TE: $\eta_\perp^{(TE)} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\eta}{\cos\alpha}$, где $\alpha = (\widehat{\vec{n}, \vec{z}_0})$

Для TM: $\eta_\perp^{(TM)} = \frac{E_x}{H_y} = \eta\cos\alpha$.

TE: $\eta_{\perp 1}^{(i)} = \frac{\eta_1}{\cos\alpha_1}$; $\eta_{\perp 1}^{(r)} = \frac{\eta_1}{\cos(\pi-\beta_1)} = -\frac{\eta_1}{\cos\beta_1}$; $\eta_{\perp 2}^{(t)} = \frac{\eta_2}{\cos\alpha_2}$

TM: $\eta_{\perp 1}^{(i)} = \eta_1\cos\alpha_1$; $\eta_{\perp 1}^{(r)} = \eta_1\cos(\pi-\beta_1) = -\eta_1\cos\beta_1$; $\eta_{\perp 2}^{(t)} = \eta_2\cos\alpha_2$

$$\vec{E}_\perp^{(i)} = \vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(i)}\vec{r}}$$

$$\vec{E}_\perp^{(r)} = \underbrace{\Gamma_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(i)}}_{E_{0\perp}^{(r)}} e^{-i\vec{k}_1^{(r)}\vec{r}}$$

$$\vec{E}_\perp^{(t)} = \underbrace{T_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(i)}}_{E_{0\perp}^{(t)}} e^{-i\vec{k}_2^{(t)}\vec{r}}$$

Граничные условия: $\vec{E}_\perp^{(i)} + \vec{E}_\perp^{(r)} = \vec{E}_\perp^{(t)}\Big|_{z=0}$

$\vec{H}_\perp^{(i)} + \vec{H}_\perp^{(r)} = \vec{H}_\perp^{(t)}\Big|_{z=0}$

$$\Rightarrow \vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(i)}\vec{r}} + \Gamma_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(r)}\vec{r}} = T_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_2^{(t)}\vec{r}}\Big|_{z=0}$$

И запис. через характер-ий импеданс.

$$\frac{1}{\eta_{\perp 1}^{(i)}}[\vec{z}_0, \vec{E}_{0\perp}^{(i)}] e^{-i\vec{k}_1^{(i)}\vec{r}} + \frac{\Gamma_\perp}{\eta_{\perp 1}^{(r)}}[\vec{z}_0, \vec{E}_{0\perp}^{(i)}] e^{-i\vec{k}_1^{(r)}\vec{r}} =$$

$$= \frac{T_\perp}{\eta_{\perp 2}^{(t)}}[\vec{z}_0, \vec{E}_{0\perp}^{(i)}] e^{-i\vec{k}_2^{(t)}\vec{r}}\Big|_{z=0}$$

Такое равенство можно обеспечить только при условии, что пок-ли в степенях exp будут равны.

$$\vec{k}_1^{(i)}\vec{r} = \vec{k}_1^{(r)}\vec{r} = \vec{k}_1^{(t)}\vec{r}\Big|_{z=0}$$

$$k_{1x}^{(i)}x = k_{1x}^{(r)}x = k_{2x}^{(t)}x \Rightarrow k_1\sin\alpha_1 = k_1\sin\beta_1 = k_2\sin\alpha_2$$

⇒ Тангенц. компон. $\vec{k}$ не преобразуется.

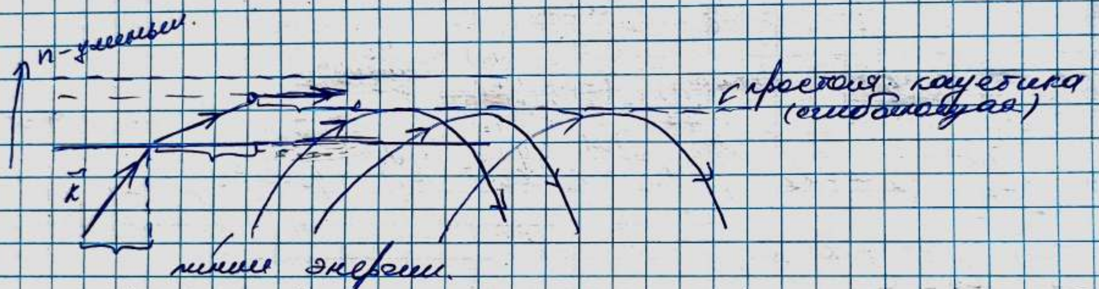
$\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \beta_1}$

$$k_0\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\sin\alpha_1 = k_0\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\sin\alpha_2 \Rightarrow \boxed{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{n_2}{n_1}}$$

~з-н Снеллиуса (Снелла)

Переобозначение:
$$\eta_{\perp 1}^{(i)} = \eta_{\perp 1}$$
$$\eta_{\perp 1}^{(r)} \equiv \eta\{\alpha_1 = \beta_1\} = -\eta_{\perp 1}$$
$$\eta_{\perp 2}^{(t)} \equiv \eta_{\perp 2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \Gamma_\perp = T_\perp \\ \dfrac{1}{\eta_{\perp 1}} - \dfrac{\Gamma_\perp}{\eta_{\perp 1}} = \dfrac{T_\perp}{\eta_{\perp 2}} \end{cases} \Rightarrow \text{решая получим} \quad \boxed{\begin{aligned} \Gamma_\perp &= \frac{\eta_{\perp 2} - \eta_{\perp 1}}{\eta_{\perp 2} + \eta_{\perp 1}} \\ T_\perp &= \frac{2\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 2} + \eta_{\perp 1}} \end{aligned}}$$



Формулы Френеля:

TE:
$$\Gamma_\perp = \frac{E_y^{(r)}}{E_y^{(i)}}\Big|_{z=0} = \frac{E^{(r)}}{E^{(i)}}\Big|_{z=0} = \Gamma = \frac{\dfrac{\eta_2}{\cos\alpha_2} - \dfrac{\eta_1}{\cos\alpha_1}}{\dfrac{\eta_2}{\cos\alpha_2} + \dfrac{\eta_1}{\cos\alpha_1}}$$

$$T_\perp = \frac{E_y^{(t)}}{E_y^{(i)}}\Big|_{z=0} = \frac{E^{(t)}}{E^{(i)}}\Big|_{z=0} = T = \frac{2\dfrac{\eta_2}{\cos\alpha_2}}{\dfrac{\eta_2}{\cos\alpha_2} + \dfrac{\eta_1}{\cos\alpha_1}}$$

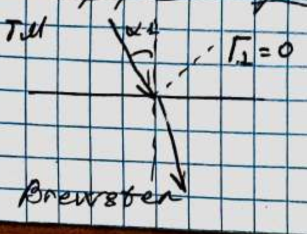
TM:
$$\Gamma_\parallel = \frac{E_x^{(r)}}{E_x^{(i)}}\Big|_{z=0} = \frac{E^{(r)}\cos\beta_1}{E^{(i)}\cos\alpha_1}\Big|_{z=0} = \frac{E^{(r)}}{E^{(i)}}\Big|_{z=0} = \Gamma = \frac{\eta_2\cos\alpha_2 - \eta_1\cos\alpha_1}{\eta_2\cos\alpha_2 + \eta_1\cos\alpha_1}$$

$$T_\parallel = \frac{E_x^{(t)}}{E_x^{(i)}}\Big|_{z=0} = \frac{E^{(t)}\cos\alpha_2}{E^{(i)}\cos\alpha_1}\Big|_{z=0} = T\,\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = \frac{2\eta_2\cos\alpha_2}{\eta_2\cos\alpha_2 + \eta_1\cos\alpha_1}$$

особенность

Частные случаи

1. Эффект Брюстера (угол Брюстера).



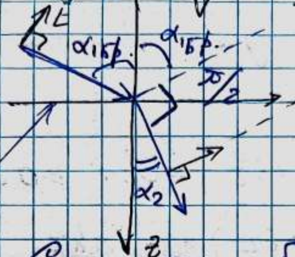
$$\Gamma_\parallel = 0 \to \eta_2\cos\alpha_2 = \eta_1\cos\alpha_1.$$

$$1 = \frac{\eta_2\cos\alpha_2}{\eta_1\cos\alpha_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_2\mu_1}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha_2}}{\cos\alpha_1} =$$

$$\textcircled{=}\sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_2\mu_1}}\,\frac{\sqrt{1-\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}\sin^2\alpha_1}}{\cos\alpha_1} = \left\{\frac{1}{\cos^2\alpha_1}=1+tg^2\alpha_1\right\} = \text{и т.д.}$$

$$\Rightarrow \boxed{tg\,\alpha_{1\,бр.} = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}-1}}}$$

$\frac{\mu_2}{\mu_1}=1$ (наиб. частный случай): $\boxed{tg\,\alpha_{1\,бр} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$



$\Rightarrow$ верно для-ва $\alpha_1+\alpha_2=\frac{\pi}{2}$ при $\alpha_1=\alpha_{1\,бр.}$

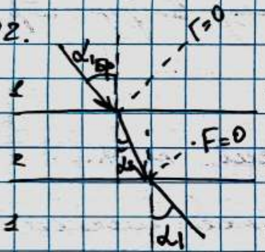
Из ф-лы Снеллиуса: $\sqrt{\varepsilon_1}\sin\alpha_1=\sqrt{\varepsilon_2}\sin\alpha_2$

$\sin\alpha_1 = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}_{tg\alpha_1}\sin\alpha_2 \Rightarrow \cos\alpha_1=\sin\alpha_2$

Нет г.р. возникает связанных поляризац. заряд. $\Rightarrow$ излучение поляризац. тока

$$\boxed{\alpha_1=\frac{\pi}{2}-\alpha_2}$$

6.12.22.



$tg\alpha_2 = tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)=ctg\alpha_1=\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}_{tg\alpha_{2бр.}}$ $\Rightarrow$ во 2 тоже не будет отражения

$\alpha_1+\alpha_2=\frac{\pi}{2}$; $\alpha_1=\alpha_{1бр.}$

В случае (TE) поляризации:

$\Gamma_\perp=0 \rightarrow \frac{\eta_2}{\cos\alpha_2}=\frac{\eta_1}{\cos\alpha_1}$, $1=\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}}\,\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\ \textcircled{=}$

даже выкладки аналогичные: $\textcircled{=}\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha_2}}{\cos\alpha_1}=$

$$=\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}\sin^2\alpha_1}}{\cos\alpha_1}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha_1}=1+tg^2\alpha_1$$

Введем обозначение: $tg\alpha_1=\sqrt{\frac{\tilde{\mu}(\tilde{\mu}-\tilde{\varepsilon})}{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}-1}}$, где $\tilde{\varepsilon}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, $\tilde{\mu}=\frac{\mu_2}{\mu_1}$

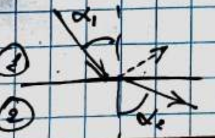
Если $\mu_2=\mu_1 \Rightarrow \tilde{\mu}=1$.

$\Rightarrow \sqrt{\ldots}=\sqrt{\frac{1-\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}-1}}=\sqrt{-1}$.

$\Rightarrow$ т.е. не может быть эффекта Брюстера,

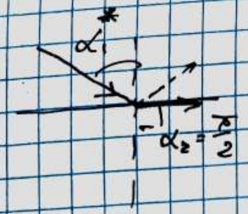
но в общем случае $\mu_2\neq\mu_1$ $\rightarrow$ эффект есть

Полное внутреннее отражение. Возникновение неоднородных волн при полном внутр. отражении.



$\varepsilon_1\mu_1>\varepsilon_2\mu_2$ – если $\Rightarrow \alpha_2>\alpha_1$

$\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}}$ $\Rightarrow \alpha_2 > \alpha_1$



$\rightarrow \sin\alpha_2 = 1.$

$\sin\alpha_1^* \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}} = 1$ $\Rightarrow \alpha_1^*$ ~ угол полного внутреннего отражения.

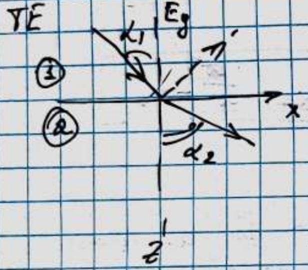
Если $\alpha_1 > \alpha_1^*$ ~ полное внутр. отраже. $\Rightarrow \sin\alpha_2 > 1$ (в принципе возможно, если угол комплексный)

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + i\tau$$

$$\sin\alpha_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + i\tau\right) = ch\,\tau \geq 1$$

$$\cos\alpha_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\tau\right) = -i\,sh\,\tau$$

Как это соотн. с полями? Пусть для опр-ти TE-волна.



$$E_y^{(+)} = E_0 e^{-i\overbrace{k_{z2}}^{k_2\cos\alpha_2} z - i\overbrace{k_{x2}}^{k_2\sin\alpha_2} x}$$

Теперь перейдём к полному внутр. отр. α_2 стал комплексным.

$$\Rightarrow E_y^{(t)} = E_0 e^{\underbrace{-k_2(sh\,\tau)z}_{\text{по } z \text{ эксп. спадает.}} - \underbrace{ik_2(ch\,\tau)x}_{\text{фаза бежит по } x.}}$$

~ в прошлом было так же у неоднородной плоской волны.

Что будет с отраж. волной?

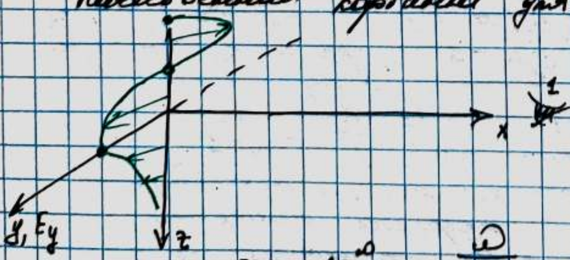
$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_{\perp 2} - \eta_{\perp 1}}{\eta_{\perp 2} + \eta_{\perp 1}}, \quad \text{где } \eta_{\perp 2} = \begin{cases} \frac{\eta_2}{\cos\alpha_2} & (TE) \\ \eta_2\cos\alpha_2 & (TM) \end{cases}$$

получается мнимым.

а $\eta_{\perp 1}$ получ. чисто действит.

$\Rightarrow |\Gamma_\perp| = \frac{|i\alpha - \beta|}{|i\alpha + \beta|} = 1$ $\Rightarrow$ <u>полное внутреннее отражение</u>

Качественная картина для полей:



по z. при $z>0$ спадание, при $z<0$ есть узлы $\rightarrow$ стоячая волна.

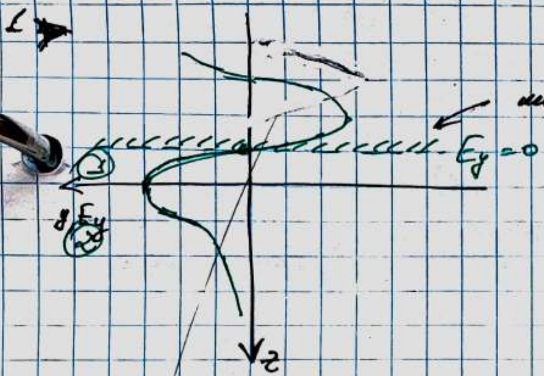
$$v_\phi^{(x)} = \frac{\omega}{k_x} = \begin{cases} \frac{\omega}{k_{x1}} = \frac{\omega}{k_1\sin\alpha_1} = v_1 \cdot \frac{1}{\sin\alpha_1} > v_1 \\ \frac{\omega}{k_{x2}} = \frac{\omega}{k_2\sin\alpha_2} = v_2 \cdot \frac{1}{ch\,\tau} < v_2 \end{cases}$$

~ волна быстрая, сложена из падающей и отражённой.

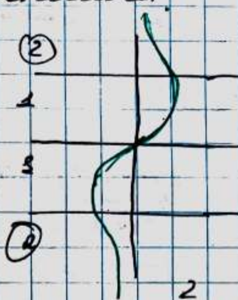
по направл. мнимой среды, волна медленная.

$$\Rightarrow v_1 < v_\phi^{(x)} < v_2$$

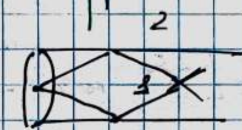
$\varepsilon_1\mu_1 > \varepsilon_2\mu_2$



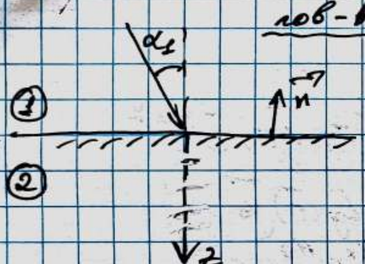
можно заметаллизировать => получим волновод, т.к. через 1→2 энергия не переносится.



Т.е. можно переносить энергию вдоль волновода. =>



Отражение от хорошо проводящей пов-ти. Условия Леонтовича.



$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}, \text{ где } \varepsilon_2 \approx -i\frac{4\pi\sigma}{\omega}.$$

: хороший проводник σ велика, так что

$$|\varepsilon_2|\mu_2 \gg \varepsilon_1\mu_1$$

$$|\sin\alpha_2| \ll \sin\alpha_1 \leq 1 \Rightarrow \cos\alpha_2 = \sqrt{1-\sin^2\alpha_2} \approx 1$$

тогда

$$\eta_{\perp 2} = \begin{cases} \dfrac{\eta_2}{\cos\alpha_2} & (TE) \\ \eta_2\cos\alpha_2 & (TM) \end{cases} \approx \eta_2$$

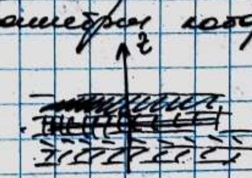
Связь между полями в среде:

$$\vec E_\perp = \underbrace{\eta_{\perp 2}}_{\eta_2}[\vec H, \underbrace{\vec z_0}_{-\vec n}] = \eta_2[\vec n, \vec H] \text{ — ГУ Леонтовича.}$$

Это спр-во потому что $\sin\alpha_2 \ll 1$, т.е. преломл. и идёт почти по $\vec z$.

ЭМВ в плоскослоистых плавно-неоднородных средах.

Опр Плоскослоистая назыв. среда, параметры которой зависят от 1й переменной.



Пусть $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $\mu = 1$.

Запиш. ур-я Максвелла с $\mu = 1$.

$$\text{rot}\,\vec E = -ik_0\vec H$$
$$\text{rot}\,\vec H = ik_0\varepsilon\vec E$$

$$\underbrace{\text{rot rot}\,\vec E}_{\nabla\,\text{div}\,\vec E-\Delta\vec E} = -ik_0\,\underbrace{\text{rot}\,\vec H}_{ik_0\varepsilon\vec E}$$

$$\Rightarrow\ \Delta\vec E - \nabla\,\text{div}\,\vec E + k_0^2\varepsilon\vec E = 0 \qquad (1)$$

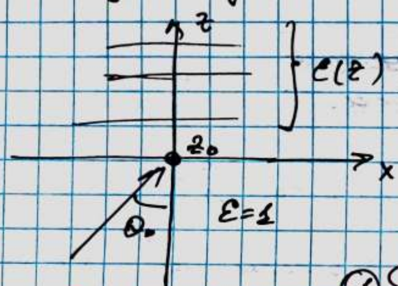
не можем занулить. $\underbrace{\text{div}(\varepsilon\vec E)=0}_{\text{только так}}$

$$\underbrace{\text{rot rot}\,\vec H}_{\nabla\underbrace{\text{div}\,\vec H}_{=0}-\Delta\vec H} = ik_0\,\underbrace{\text{rot}(\varepsilon\vec E)}_{=\varepsilon\underbrace{\text{rot}\,\vec E}_{-ik_0\vec H}+[\nabla\varepsilon,\underbrace{\vec E}_{\frac{\text{rot}\,\vec H}{ik_0\varepsilon}}]}$$

т.к. $\text{div}\,\vec B=0$, $\vec B=\vec H$

$$\Rightarrow\ \Delta\vec H + \left[\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon},\ \text{rot}\,\vec H\right] + k_0^2\varepsilon\vec H = 0 \qquad (2)$$

(1) удобно для TE, а (2) лучше использов. TM поляризаций



$k_x = k_0\sin\theta_0$

$\vec E(\vec r) = \vec E(z)\,e^{-ik_x x}$, $\vec H(\vec r) = \vec H(z)\,e^{-ik_x x}$

① Для TE (s-поляр.): $\vec E(\vec r) = E_y(\vec r)\,\vec y_0$; $H_x,\ H_z$

сводится к $\Rightarrow E_y(\vec r) = E(z)\,e^{-ik_x x}$ $\quad(1)$

② Для TM (p-поляриз.): $\vec H(\vec r) = H_y(\vec r)\,\vec y_0$; $E_x,\ E_z$

$$H_y(\vec r) = H(z)\,e^{-ik_x x} \qquad (2)$$

Учтём, что поле зав. только от x и z: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \to \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_x^2$

TE рассмотрим (1)

$$\text{div}\,\vec E = \text{div}\left(E(z)\,e^{-ik_x x}\,\vec y_0\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(E(z)\,e^{-ik_x x}\right) = 0$$

TE: $\frac{d^2E(z)}{dz^2} + \left[k_0^2\varepsilon(z) - k_x^2\right]E(z) = 0$ — в общем случае аналит. не решается.

$$\vec H = \frac{i}{k_0}\,\text{rot}\,\vec E = \frac{i}{k_0}\left\{\vec x_0(-1)\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(E(z)\,e^{-ik_x x}\right)}_{\frac{dE(z)}{dz}e^{-ik_x x}} + \vec z_0\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(E(z)\,e^{-ik_x x}\right)}_{-ik_x E(z)\,e^{-ik_x x}}\right\}$$

TM: рассмотрим (2):

$$\left[\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon},\ \text{rot}\,\vec H\right] = \left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon(z)}{dz}\vec z_0,\ \vec x_0\left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \underbrace{\vec z_0\frac{\partial H_y}{\partial x}}_{\text{вклада не дает}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon(z)}{dz}\,\frac{dH(z)}{dz}\,e^{-ik_x x}\,\underbrace{[\vec z_0,\vec x_0]}_{\vec y_0}$$

$$\frac{d^2H(z)}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon(z)}\frac{d\varepsilon(z)}{dz}\frac{dH(z)}{dz} + [k_0^2\varepsilon(z) - k_x^2]\,H(z) = 0 \quad (\text{для ТМ})$$

$$\vec{E} = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\,\mathrm{rot}\vec{H} = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\left\{\vec{x}_0(-1)\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(H(z)e^{-ik_xx}\right)}_{\frac{dH(z)}{dz}e^{-ik_xx}} + \vec{z}_0\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(H(z)e^{-ik_xx}\right)}_{-ik_xH(z)e^{-ik_xx}}\right\}$$

Обозначение: $k_z^2(z) = k_0^2\varepsilon(z) - k_x^2$

$$\lambda_z(z) = \frac{2\pi}{k_z(z)}, \quad k_z \geq 0$$

Введем хар-ный пространств. масштаб $\varepsilon(z) \longleftrightarrow L_z$, где $\varepsilon(z)$ существенно меняется, и если

$\lambda_z \ll L_z$ ~ условие плавнонеоднородной среды. (т.е. измен. медленное.)

Это условие можно переписать по-другому:

$$\left|\frac{dk_z(z)}{dz}\frac{1}{k_z}\right| \ll |k_z| \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{d}{dz}\cdot\frac{1}{k_z(z)}\right| \ll 1$$

$$\sim\left|\frac{k_z}{L_z}\cdot\frac{1}{k_z}\right| \qquad \overset{\shortparallel}{\frac{2\pi}{\lambda_z}}$$

Метод Вентцеля - Крамерса - Бриллюэна. (метод ВКБ)

Будем применять метод для ТЕ поляризации.

$$\frac{d^2E(z)}{dz^2} + [k_0^2\varepsilon(z) - k_x^2]\,E(z) = 0$$

$$k_0^2\varepsilon(z) - k_x^2 = k_0^2\Big[\varepsilon(z) - \underbrace{\frac{k_x^2}{k_0^2}}_{=k_0^2\sin^2\theta_0}\Big] = k_0^2[\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0] \equiv k_z^2(z)$$

Будем искать решение в виде:

$$E(z) = A(z)\,e^{-ik_0\psi(z)}$$

Если бы среда была однородной: $E(z) = A\,e^{-ik_0\frac{k_z}{k_0}z}$

т.е. если $\varepsilon = \mathrm{const}$: $A(z) = A$, $\psi(z) = \frac{k_z}{k_0}z \to \psi'(z) = \frac{k_z}{k_0} = \mathrm{const}$

В случае ПЛАВНО-неодн. $\to$ теперь $A(z)$ → медл. мен. ф-я, $\psi'(z)$ ↗

$A(z) \longleftrightarrow L_z$

$\psi'(z) \longleftrightarrow L_z$

$\Rightarrow \psi' \sim \frac{k_z(z)}{k_0}$ должны быть примерно одного порядка.

$$E'(z) = A'(z)\,e^{-ik_0\psi(z)} - ik_0\psi'(z)A(z)\,e^{-ik_0\psi(z)}$$

$$E''(z) = A''(z)\,e^{-ik_0\psi(z)} - 2ik_0\psi'(z)A'(z)\,e^{-ik_0\psi(z)} - ik_0A(z)\psi''(z)\,e^{-ik_0\psi(z)} -$$

$$-k_0^2A(z)\,(\psi'(z))^2\,e^{-ik_0\psi(z)}$$

~подставляем в исходное ур-е:

$$A'' - [2ik_0\psi'A' + ik_0\psi''A] + k_0^2[\underbrace{\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0}_{\frac{k_z^2(z)}{k_0^2}} - (\psi')^2]A = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{k_z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k_0^2}{k_z^2}\Big[\frac{k_z^2}{k_0^2} - \underbrace{(\psi')^2}_{\sim\left(\frac{k_z}{k_0}\right)^2}\Big] \approx 0$$

Оценим далее (после деления) все малое:

$$\frac{|A''|}{k_z^2} \sim \frac{|A|}{(L_z k_z)^2}$$ ~ вел. 2го порядка малости.

$k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z}$, $\lambda_z \ll L_z \Rightarrow k_z L_z \gg 1$.

~это по сути пренебр. дифракцией

$$\left|\frac{2k_0\psi'A'}{k_z^2}\right| \sim \left|\frac{k_0 \frac{k_z}{k_0} \cdot \frac{A}{L_z}}{k_z^2}\right| \sim \left|\frac{A}{k_z L_z}\right|$$ ~ вел. 1го пор. малости (оставим)

$$\left|\frac{k_0\psi''A}{k_z^2}\right| \sim \left|\frac{k_0 \frac{\psi'}{L_z} A}{k_z^2}\right| \sim \left|\frac{A}{k_z L_z}\right|, \quad \psi' \sim \frac{k_z}{k_0}$$ ~ вел. 1го пор. малости.

В нулевом приближении оставим лишь члены нулевого порядка малости:

$$[\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0 - (\psi')^2]A = 0$$

Пусть $A \neq 0$, тогда

$$(\psi')^2 = \varepsilon(z) - \sin^2\theta_0 = \frac{k_z^2(z)}{k_0^2}, \quad \psi'(z) = \pm\frac{k_z(z)}{k_0} = \frac{\pm\sqrt{k_z^2 - k_x^2}}{k_0}$$

$$\psi' = \pm\sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0}$$

$$\psi(z) - \underbrace{\psi(z_0)}_{=0} = \pm\int_{z_0}^{z}\sqrt{\varepsilon(z') - \sin^2\theta_0}\,dz'$$ (для простоты всегда так можно считать)

Запишем члены второго порядка малости:

$$2ik_0\psi'A' + ik_0\psi''A = 0, \quad \text{где } A \neq 0 \quad \Big| \cdot A$$

$$\frac{d}{dz}(\psi'A^2) = 0$$

$\psi'A^2 = const$, т.е. $A = \frac{C}{\sqrt{\psi'}} = \frac{C}{\sqrt[4]{\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0}}$, C - произв. константа.

Общее решение будет иметь вид:

$$E(z) = \frac{C_1}{\sqrt[4]{\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0}}\, e^{-ik_0\int_{z_0}^{z}\sqrt{\varepsilon(z') - \sin^2\theta_0}\,dz'} + \frac{C_2}{\sqrt[4]{\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0}}\, e^{ik_0\int_{z_0}^{z}\sqrt{\varepsilon(z') - \sin^2\theta_0}\,dz'}$$

Общее решение - суперпозиция двух волн, независимо распространяющихся в $+z$ и $(-z)$ - направлениях.

Решение нарушается при $\sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0} \to 0$;

$\sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0} = \frac{k_z}{k_0}$. Если $k_z \to 0$, то $\lambda_z \to \infty$ и нарушается условие $\lambda_z \ll L_z$

Пример:

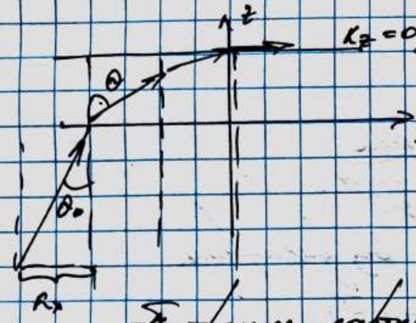
Пусть $\varepsilon(z)$ убывает с ростом z, например $\varepsilon(z) = 1 - \frac{z - z_0}{\ell}$.

Тогда $\ell = L_z$. Это возможно в случае плазмы, когда

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2}, \quad \text{где} \quad N(z) = N_0 \frac{z}{\Lambda};$$

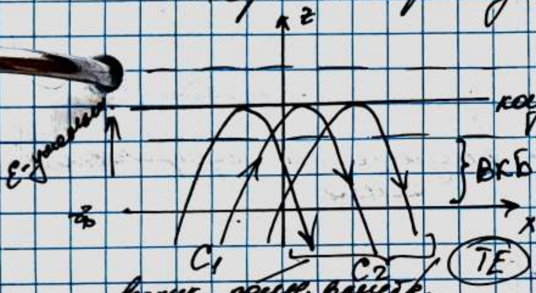
$z_0 = 0 : \varepsilon(z_0) = 1.$

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N_0}{m\omega^2} \cdot \frac{1}{\Lambda} z = 1 - \frac{z}{\ell}, \qquad \ell = \Lambda \frac{m\omega^2}{4\pi e^2 N_0}$$



$k_z = 0$, т.е. $\varepsilon = \sin^2\theta_0$ — при $z = 0$ $\varepsilon = 1$ $(z_0 = 0)$

Построим картинку лучей (приближение геом. оптики.)

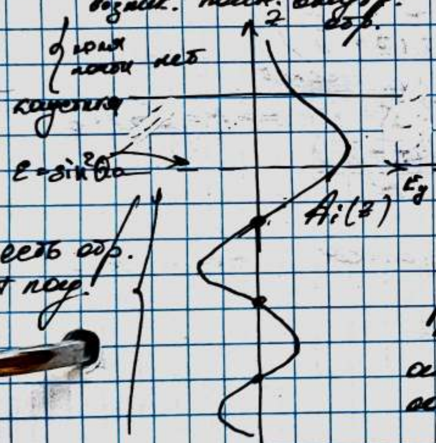


$k_x = k_0 \sin\theta_0 = const$

$k_0 \sin\theta_0 = k_0 \sqrt{\varepsilon}\, \sin\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\theta_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ — з-н Снеллиуса.

TE Величина $\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0 = \frac{k_z^2(z)}{k_0^2}$ — то по мере прибл. к $k_z = 0$ $\quad L_z(z) = \frac{2\pi}{\lambda_z(z)} \Rightarrow \lambda_z \to \infty \Rightarrow$ решение исп.-ть нельзя.

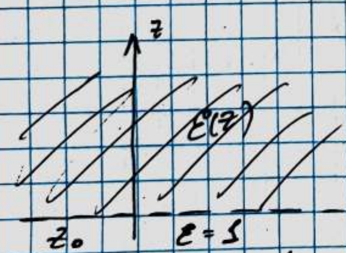


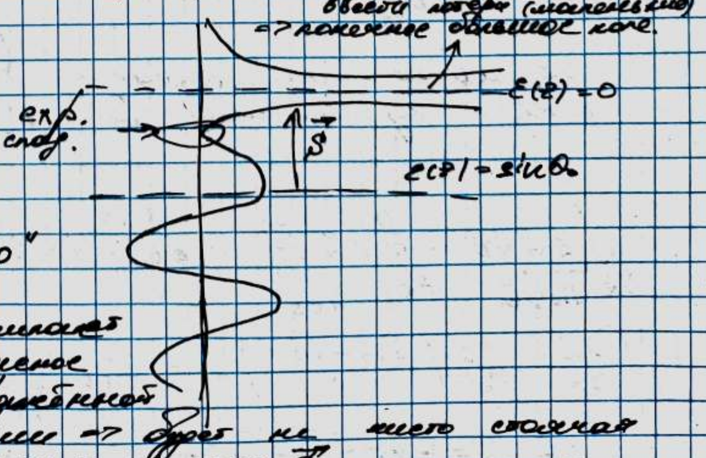
$\Big\}\ \varepsilon = 1 - \frac{z}{\ell}$ — есть точное решение (ф-я Эйри.)

$\boxed{C_2 = C_1 e^{i\frac{\pi}{2}}}$ (без док-ва) → при отраж. от каустики фаза сдвигается на $\pi/2$

Верн. условие применения: $\lambda_z(z) \ll L_z$ не работает, даже когда волна не доходит до каустики. Берут для $Ai(z)$ асимптотическую аппроксимацию в прикаустической области

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\sim(z - z_0); \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}\sim(z - z_0)$$





TM: $\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}$ $\quad$ ε - может пройти через „0"

$\varepsilon(z) = 0$ при потерях возникает поток энергии, т.е. резонансное поглощение энергии → в отражённой волне будет меньше энергии → будет не чисто стоячая волна, мало потерь × бесконеч. поля = конечное $\vec{S}$

Излучение заданных источников в безграничной однородной изотропной среде.

Без дисперсии: $\square \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}(\vec{r},t)$

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r},t) \Rightarrow \square = \Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$A_{x,y,z} \to \psi \qquad \frac{\mu}{c} j_{x,y,z} \to g$

$$\square\psi(\vec{r},t) = -4\pi g(\vec{r},t)$$

Функция Грина и общее решение неоднородного волнового уравнения.

Ф. Грина при произвольной зависимости от времени для среды без дисперсии.

$\square\psi = -4\pi\chi(t)\delta(\vec{r}) \qquad \psi = G(\vec{r},t)$; $r = |\vec{r}|$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi\chi(t)\delta(\vec{r})$$

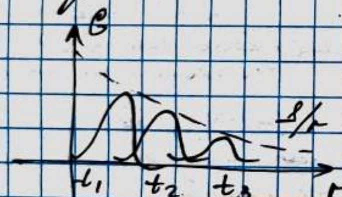
$r\neq 0$; $\delta(\vec{r}) = 0 \Rightarrow$ „что не мешает" $G(r,t) = \frac{u(r,t)}{r}$ → расходящаяся сферическая волна

$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ общее решение:

$$u(r,t) = f\left(t-\frac{r}{v}\right) + \tilde{f}\left(t+\frac{r}{v}\right)$$

Смотрим f: $f = const$: $t - \frac{r}{v} = const = -\frac{r_0}{v} = const \Rightarrow r = vt + r_0$

$$\Rightarrow G = \frac{f(t-\frac{r}{v})}{r}$$

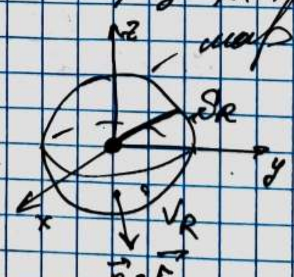


$\tilde{f}$ была бы сходящаяся. Что в НК?

$\Delta G - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi\chi(t)\delta(\vec{r})$

$G = \frac{f(t-r/v)}{r}$) выражается через $\chi(t)$

$\lim\limits_{R\to 0}\int\limits_{V_R}\ldots dv$



по коор-та ⇒ не попадаем в НК ⇒ подставим $G = \frac{u}{r}$

$$\int\limits_{V_R}\underbrace{\Delta G}_{\operatorname{div}\nabla G} dv = \oint\limits_{S_R}\nabla G\,\underbrace{d\vec{s}}_{\vec{n}\,ds} = \oint\limits_{S_R}\frac{\partial G}{\partial r}ds = \frac{\partial G}{\partial r}4\pi r^2\Big|_{r=R}$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(t-\frac{r}{v})}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}f\left(t-\frac{r}{v}\right) - \frac{1}{v}\frac{1}{r}f'\left(t-\frac{r}{v}\right)$$

$$\int\limits_{V_R}\Delta G\,dv = -4\pi f\left(t-\underbrace{\frac{r}{v}}_{\to 0}\right) - 4\pi\underbrace{\frac{r}{v}}_{\to 0}f'\left(t-\frac{r}{v}\right)\Big|_{r=R}$$

условие

$$\lim_{R\to 0}\int_{V_R}\Delta G\,dV = -4\pi f(t)$$

$$\lim_{R\to 0}\int_{V_R}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}G\,dV = -\frac{1}{v^2}\lim_{R\to 0}\int_{V_R}\frac{1}{r}f''\left(t-\frac{r}{v}\right)\overbrace{dV}^{4\pi r^2 dr} = 0$$

(т.к. возникает $\frac{R^2}{2}$)

$$\lim_{R\to 0}\int_{V_R}\delta(\vec r)\,dV = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to 0}\int_{V_R}\left(-4\pi\chi(t)\delta(\vec r)\right)dV = -4\pi\chi(t)$$

$$\Rightarrow -4\pi f(t) = -4\pi\chi(t) \to \boxed{f(t)=\chi(t)}$$

$$G(r,t)=\frac{f(t-r/v)}{r} \to G(r,t)=\frac{\chi(t-r/v)}{r}$$

Смотрим $\tilde f\left(t+\frac{r}{v}\right) \to \cancel{G(r,t)=\frac{\chi(t+\frac{r}{v})}{r}}$

Но это не физично в силу принципа причинности (будущее не влияет на настоящее)

$$\Box\psi = -4\pi\chi(t)\delta(\vec r)$$

$$\psi = G(r,t)=\frac{\chi(t-r/v)}{r}\ ;\ r=|\vec r|$$

Особенность в „r_1":

$$\Box\psi = -4\pi\chi(t)\delta(\vec r-\vec r_1). \quad \psi=G(\vec r,\vec r_1,t)$$

Просто произведена замена переменных $\to$

$$\Rightarrow \boxed{G(\vec r,\vec r_1,t)=\frac{\chi\left(t-\frac{|\vec r-\vec r_1|}{v}\right)}{|\vec r-\vec r_1|}}$$

Функция Грина волнового ур-я при гармонической зависимости от времени.

$$\chi(t)=\mathrm{Re}\{\chi_k(t)\},\quad \chi_k(t)=e^{i\omega t}$$

$$\psi_k(\vec r,t)=\psi(\vec r)e^{i\omega t}$$

$$G(r,t)=\mathrm{Re}\{G_k(r,t)\}$$

$$G_k(r,t)=G(r)e^{i\omega t}$$

$$\Delta G_k+k^2G_k=-4\pi e^{i\omega t}\delta(\vec r)$$

$$\Delta G+k^2G=-4\pi\delta(\vec r)$$

$$G_k=\frac{\chi_k(t-r/v)}{r}=\frac{e^{i\omega(t-r/v)}}{r}=\underbrace{\frac{e^{-i\frac{\omega}{v}r}}{r}}_{G}e^{i\omega t}$$

$$\frac{\omega}{v}=k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} \Rightarrow G(r)=\frac{e^{-ikr}}{r},\quad r=|\vec r|$$

$$\Delta G+k^2G=-4\pi\delta(\vec r-\vec r_1)$$

$G(\vec r, \vec r_1) = \frac{e^{-ik|\vec r - \vec r_1|}}{|\vec r - \vec r_1|}$

~ Это верно и для сред с дисперсией: $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$, ведь при рассмотрении монохром. волны $\omega = const$

Решение волнового ур-я при гармонической зависимости от времени.

$\Delta\psi_k + k^2\psi_k = -4\pi \underbrace{g(\vec r) e^{i\omega t}}_{g_k}$

$\Delta \psi + k^2\psi = -4\pi g(\vec r)$ (*)

Воспользуемся второй интегральной формулой Грина.

$$\int_V \Big[\underbrace{G(\vec r', \vec r_1)}_{\frac{e^{-ik|\vec r'-\vec r_1|}}{|\vec r'-\vec r_1|}} \underbrace{\Delta_{\vec r'}\psi(\vec r')}_{-4\pi g(\vec r') - k^2\psi(\vec r')} - \psi(\vec r')\underbrace{\Delta_{\vec r'} G(\vec r',\vec r_1)}_{-4\pi\delta(\vec r'-\vec r_1) - k^2 G(\vec r',\vec r_1)}\Big] dv' = \qquad \vec r_1 = \vec r$$

$$= \oint_S \Big[G(\vec r',\vec r_1)\frac{\partial \psi(\vec r')}{\partial n} - \psi(\vec r')\frac{\partial G(\vec r',\vec r_1)}{\partial n}\Big] dS'$$

$$-4\pi\int_V g(\vec r')\frac{e^{-ik|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}dv + 4\pi\underbrace{\int_V \psi(\vec r')\delta(\vec r'-\vec r)dv'}_{\psi(\vec r)} =$$

$$= \oint_S \Big[\frac{e^{-ik|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ik|\vec r - \vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}\Big] dS'$$

$R = |\vec r - \vec r'|$

$$\Rightarrow \psi(\vec r) = \int_V g(\vec r')\frac{e^{-ikR}}{R}dv' + \frac{1}{4\pi}\oint_S\Big[\frac{e^{-ikR}}{R}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{-ikR}}{R}\Big]dS'$$

Рассм-м их: при $S\to\infty$: $\rho \ne 0$ в огранич. объём => интеграл будет по области источников,

примем при $R\to\infty$ $\Big\{ \psi \sim \frac{e^{-ikR}}{R} \Big\}$ ~ условие излучения Зоммерфельда.

$R\to\infty \Rightarrow \oint_S [\ldots] dS' = 0$

18.12.22. $G = \frac{e^{-ikR}}{R}$ ~ решение для гармон. волны.

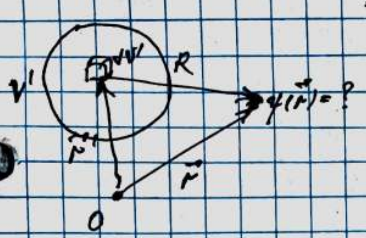
На беск-ти конечный изл-ль наблю-но будет казаться точечным источником.

Математически строго условие Зоммерфельда:

$$\lim_{R\to\infty} R\Big[\frac{\partial\psi}{\partial R} + ik\psi\Big] = 0$$

если убрать R м.б. решение $\psi = e^{-ikR}$ будет не ~~убывать~~ может быть, иначе энергия его не

условие $kz - \omega t$



=> Нашли решение ур-я Гельмгольца:

$$\Delta\psi + k^2\psi = -4\pi\rho(\vec r)$$

$$\psi(\vec r) = \int_V \rho(\vec r')\frac{e^{-ikR}}{R}\,dV'$$

$$k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\psi_H(\vec r,t) = \psi(\vec r)\,e^{i\omega t}$$ ~ для гарм-ого процесса.

Решение ур-я при произв. зависимости от времени.

Фурье-спектр: $\rho(\vec r,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\vec r,\omega)e^{i\omega t}d\omega$ (*)

тогда и решение нужно искать в виде спектра:

$$\psi(\vec r,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\vec r,\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

=> $\psi(\vec r,\omega)=\int_V\rho(\vec r',\omega)\frac{e^{-ikR}}{R}dV'$, где $k=\frac{\omega}{v}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$,

$v=v(\omega)$

=> $\boxed{\psi(\vec r,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_V\frac{\rho(\vec r',\omega)}{R}e^{i\omega\left(t-\frac{R}{v(\omega)}\right)}dV'd\omega}$ ~ решение общее, если есть дисперсия.

Частный случай (без дисперсии): $\frac{dv}{d\omega}=0$ → $v=$ const

$$\psi(\vec r,t)=\int_V\frac{1}{R}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\vec r',\omega)e^{i\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}d\omega\right]dV'$$

Сравниваем с представлением $\rho(\vec r,t)$ (*)

$\rho\left(\vec r', t-\frac{R}{v}\right)$

=> $\psi(\vec r,t)=\int_V\frac{\rho\left(\vec r',t-\frac{R}{v}\right)}{R}dV'$, принято обозначать

$[\rho]=\rho\left(\vec r', t-\frac{R}{v}\right)$

$\rho\to\frac{\mu}{c}j_{x,y,z}$; $\psi\to A_{x,y,z}$

Неоднородные волновые ур-я для векторного потенциала и их решения (сводка результатов)

(I) В случае гармон. зав-ти от времени:

$\Delta\vec A+k^2\vec A=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec j$; $\lim_{R\to\infty}R\left[\frac{\partial\vec A}{\partial R}+ik\vec A\right]=0$

$\boxed{\vec A(\vec r)=\frac{\mu}{c}\int_V\frac{\vec j(\vec r')}{R}e^{-ikR}dV'}$ ← считается, что среда изотропная, однородная, безграничная, но м.б. настоящая дисперсия.

В статике $k=\frac{\omega}{c}$, $\omega=0$ => $k=0$ → решение как в статике.

(II) Среда изотр., одн., безгр., но без дисперсии.

$$\Delta\vec A - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec j$$

Решение в таком случае:

$$\vec A(\vec r,t) = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\vec j(\vec r', t-\frac{R}{v})}{R}\, dV' = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{[\vec j]}{R}\, dV'$$

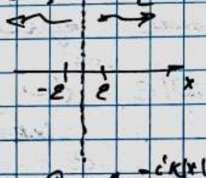
При произв. зав-ти от времени поле разложили на континуум частот → и для каждой частоты вып-ся условие Зоммерфельда

Замечания: *(нет в экз.) о ф-ии Грина волнового ф-я в одномерном и двумерном случае:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi = -4\pi g(x)$$

$$\frac{d^2G}{dx^2}+k^2G=-4\pi\delta(x)$$

e^{ikx} e^{-ikx} $G\sim e^{-ik|x|}$



$$\Rightarrow G = Ae^{-ik|x|},\quad A=\frac{2\pi}{ik}$$

получают интегр. в интервале

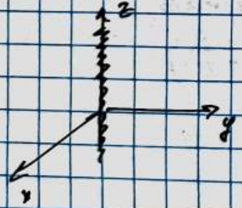
$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dots dx$$

$$\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{dG}{dx}\Big|_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}}_{\frac{dG}{dx}\big|_{x=+0} - \frac{dG}{dx}\big|_{x=-0}} = -4\pi$$

вычисляем предел от G:

$$\frac{2\pi}{ik}(-ik) - \frac{2\pi}{ik}\cdot ik = -4\pi \text{ — верно.}$$

В двумерном случае.



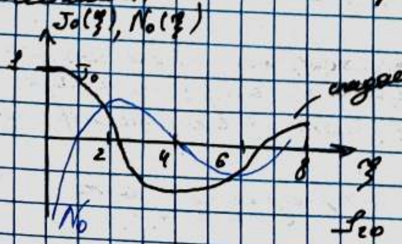
$$\Delta G + k^2 G = -4\pi \underbrace{\delta(x)\,\delta(y)}_{\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}}$$

следует из $\int \delta(x)\,\delta(y)\underbrace{dS_\perp}_{dx\,dy} = 1$.

а в поляр. коор: $dS_\perp = 2\pi\rho\, d\rho$

$$\Rightarrow \int\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}\,dS_\perp = 1.$$

Далее рассматривают решение вне нулевой точки и решение запис. через $J_0(k\rho)$ – ф-я Бесселя, $N_0(k\rho)$ – ф-я Неймана.



Вводится ф-я Ханкеля:

$H_m^{(1)}(z) = J_m(z)+iN_m(z)$ – опис. расход. волну.

$H_m^{(2)}(z) = J_m(z) - iN_m(z)$ – опис. сход. волну

1го и 2го рода

Асимптотика.

$$H_m^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{\pm i\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

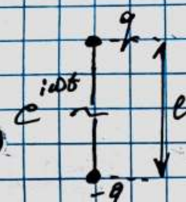
Нам удобнее с ф-ей Ханкеля!

$$G(\rho) \sim H_0^{(2)}(k\rho) \quad ; \quad H_0^{(2)}(k\rho) \simeq \frac{e^{-ik\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

$$\boxed{G(\rho) = -i\pi H_0^{(2)}(k\rho)}$$ (см. Владимиров §11. п.9, §30)

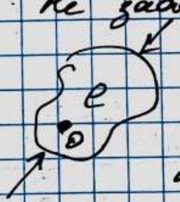
Излучение простейших источников.

Излучение диполя Герца. (элементарный вибратор.)



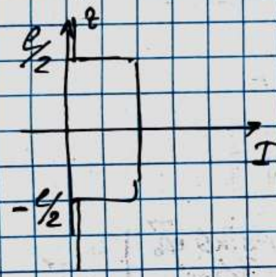
$\vec p = q\vec l$

Не забываем, что всё переменное.



Элементарный излучатель: * $l \ll \lambda$. (малый по сравн. с длин. волны.)

и также считаем $l \ll r$ (дальняя зона)

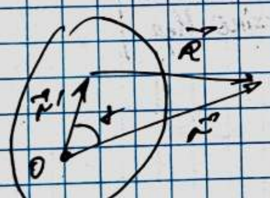


И.к. либо внутри, либо в малой окрестности.

Ур-е для векторного потенциала:

$$\vec A = \frac{\mu}{c}\int \frac{\vec j(\vec r')}{R}\, e^{-ikR}\, dV'$$

по теореме косинусов:



$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta} = r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta + \cancel{\frac{r'^2}{r^2}}} \simeq r\left(1 - \frac{r'}{r}\cos\theta\right)$$

можем сказать $R \approx r$ — только в знаменателе (но в экспоненте нет, там получ. sin и cos. ~ осцил. ф-ии.)

$$\Rightarrow \vec A(\vec r) = \frac{\mu}{c}\frac{1}{r}\int_V \vec j(\vec r')\, e^{\dots}$$

$$kR \approx kr - kr'\cos\theta$$

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu}{c}\frac{1}{r}\int_V \vec j(\vec r')\, e^{-ikr + ikr'\cos\theta}\, dV' = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V \vec j(\vec r')\, e^{ikr'\cos\theta}\, dV$$

смотрим exp.

$$|kr'\cos\theta| \le kr' \le \frac{2\pi l}{\lambda} \ll \pi$$ в силу *

$\Rightarrow$ exp. ≈ 1.

$$\Rightarrow \vec A = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V \vec j(\vec r')\, dV'$$

$$\int_V \vec j\, dV = -\int_V \vec r \underbrace{\operatorname{div}\vec j}_{-\frac{\partial\rho}{\partial t}}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_V \vec r\rho\, dV}_{\vec p} = \frac{\partial \vec p}{\partial t} = \left\{ \text{с другой стороны: } \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int \vec P\, dV}_{\vec p} = \int_V \frac{\partial \vec P}{\partial t}\, dV \right\}$$

Т.е. если задан ст. ток $\vec j = \frac{\partial \vec P}{\partial t} \Rightarrow \vec j = i\omega \vec P$

Вернёмся к нашему интегралу:

$\int_V \underbrace{\vec j(\vec r')}_{i\omega\vec P}\,dV' = i\omega \vec p$, учитывая $k_0 = \frac{\omega}{c}$, получим:

$$\boxed{\vec A = \mu i k_0 \vec p\, \frac{e^{-ikr}}{r}}$$

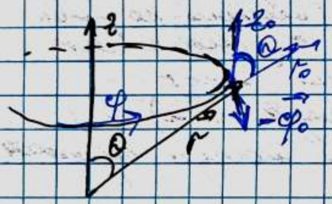
, если $l \to 0$, то решение явл. точным.
$l \to 0$: $\vec P = \vec p\,\delta(\vec r)$

$$\vec j = i\omega \vec P = i\omega \vec p\,\delta(\vec r)$$

Переходим к вычислению полей:

$$\vec B = \text{rot}\vec A = \left[\nabla, \mu i k_0 \vec p \frac{e^{-ikr}}{r}\right] = \mu i k_0 \left[\underbrace{\nabla \frac{e^{-ikr}}{r}}_{\left(-ik - \frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\vec r_0}, \underbrace{\vec p}_{p\vec z_0}\right] =$$

$$= \mu i k_0 p\left(-ik - \frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\underbrace{[\vec r_0, \vec z_0]}_{-\vec\varphi_0 \sin\theta} =$$



$$\Rightarrow = \vec\varphi_0 \underbrace{\mu p \sin\theta\left(-\frac{k_0 k}{r} + \frac{i k_0}{r^2}\right) e^{-ikr}}_{B_\varphi = \mu H_\varphi}$$

$$H_\varphi = \left(\frac{ik_0}{r^2} - \frac{k_0 k}{r}\right) p\sin\theta\, e^{-ikr}$$

$\text{rot}\vec H = ik_0\varepsilon\vec E + \frac{4\pi}{c}\vec j$; $r \gg l$: $\vec j = 0$

$$\Rightarrow \vec E = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\,\text{rot}\vec H = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\vec r_0 & r\vec\theta_0 & r\sin\theta\,\vec\varphi_0\\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi = 0\\ 0 & 0 & r\sin\theta\, H_\varphi\end{vmatrix} = \vec r_0 E_r + \vec\theta_0 E_\theta$$

если всё раскрыть:

$$E_r = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot H_\varphi)$$

$$E_\theta = \frac{i}{k_0\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)$$

Также подставляя H_φ и проделывая все выкладки получим:

(I)
$$E_r = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2ik}{r^2}\right)e^{-ikr}\,p\cos\theta$$
$$E_\theta = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)e^{-ikr}\,p\sin\theta$$
$$H_\varphi = \left(\frac{ik_0}{r^2} - \frac{k_0 k}{r}\right)e^{-ikr}\,p\sin\theta$$

~ компл. амплит.

, $k_0 = \frac{\omega}{c}$, $k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$

Получим реальные величины:

$pe^{i\omega t - ikr} \to pe^{i\omega(t - \frac{r}{v})}$

$i\omega p e^{i\omega t - ikr} \to \frac{\partial}{\partial t} pe^{i\omega(t - \frac{r}{v})}$

$-\omega^2 p e^{i\omega t - ikr} \to \frac{\partial^2}{\partial t^2} pe^{i\omega(t - \frac{r}{v})}$

$\text{Re}\{pe^{i\omega t}\} = p(t)$

$$Re\{p e^{i\omega(t-\frac{r}{v})}\} = p(t-\frac{r}{v}) = [p]$$

$$Re\{i\omega p e^{i\omega t - ikr}\} = \frac{\partial}{\partial t} p(t-\frac{r}{v}) = [\dot{p}]$$

$$Re\{-\omega^2 p e^{i\omega t - ikr}\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[p] = [\ddot{p}]$$

$$\Rightarrow \quad Re\{E_{r,\theta} e^{i\omega t}\} = E_{r,\theta}(\vec{r}, t)$$

$$Re\{H_\varphi e^{i\omega t}\} = H_\varphi(\vec{r}, t) \quad , k_0 = \frac{\omega}{c}, \; k = \frac{\omega}{v}$$

II)

$$E_r(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2[p]}{r^3} + \frac{2[\dot{p}]}{vr^2}\right)\cos\theta$$

$$E_\theta(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{vr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{v^2 r}\right)\sin\theta$$

$$H_\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\left(\frac{[\dot{p}]}{r^2} + \frac{[\ddot{p}]}{vr}\right)\sin\theta$$

} вещественные поля.

1) (I) и (II) единов. точности для точечного излучателя. ф-лы (I) справ. и для диэл. при фикс. частоте $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ и аналогично (II)

2) Важно! Формулы (II) справ. и для недиспергирующей среды (спр-вы для произвольной зав-ти от времени.)

16.12.22.

Структура поля диполя Герца в различных обл. пр-ва.
(в случае гарм. зав-ти)

$l \ll \lambda$ – дальняя зона
$l \ll r$

$kr \ll 1$ – зона квазистатики (можно пренебречь запазд.)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \underline{r \ll \lambda}$$

Можно обеспеч. зону квазистатики условием:

$$l \ll r \underset{\text{квазист.}}{\ll} \lambda$$

тогда:

$$\underset{\frac{r}{v}}{\tau_{зап}} \ll \underset{\frac{2\pi}{\omega}}{T} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\omega}{v}\right)}_{k} r \ll 2\pi \quad \left(\begin{matrix}\text{аналогично}\\ kr \ll 1\end{matrix}\right)$$

Возьмём выражение (I) и с учётом условий выше будут вып-ся неравенства:

$$\frac{1}{r^3} \gg \frac{k}{r^2} \gg \frac{k^2}{r}$$

пренебрегаем выражениями для полей:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{2p\cos\theta}{\varepsilon r^3} \\ E_\theta &= \frac{p\sin\theta}{\varepsilon r^3} \\ H_\varphi &= \frac{ik_0 p\sin\theta}{r^2}\end{aligned}\right\} \text{совп. с полем диполя из электростатики}$$

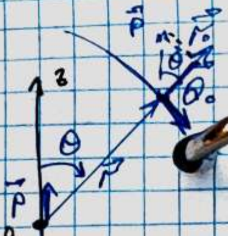
проверка:

$$\vec{E} = -\nabla\frac{(\vec{p}, \vec{r})}{\varepsilon r^3} = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{3\vec{r}\overbrace{(\vec{p}, \vec{r})}^{p_r \cdot r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right\} \leftarrow \text{пренебрегаем для своб. пр-ства}$$

$\vec{r} = r\vec{r}_0 \qquad (\vec{p}, \vec{r}_0) = p_r$

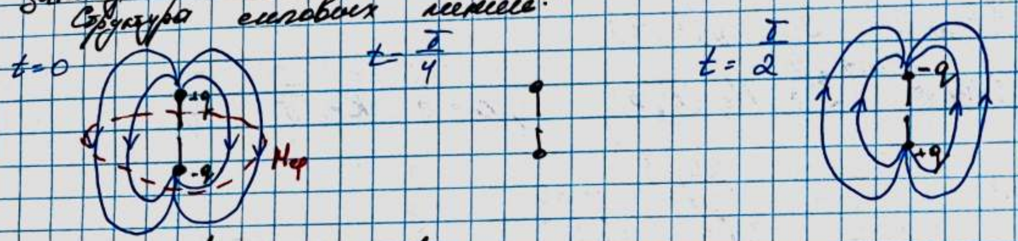
$\Rightarrow E_r = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{3p_r}{r^3} - \frac{p_r}{r^3}\right\} = \frac{2p_r}{\varepsilon r^3} = \frac{2p\cos\theta}{\varepsilon r^3}$

$E_\theta = -\frac{p_\theta}{\varepsilon r^3} = -\frac{(-p\sin\theta)}{\varepsilon r^3} = \frac{p\sin\theta}{\varepsilon r^3}$



Но во времени меняется по гармоническому закону.

Структура силовых линий:



$E_{r,\theta} \sim \frac{1}{r^3}$, $H_\varphi \sim \frac{1}{r^2}$

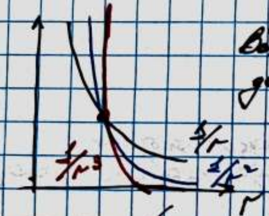
$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ сдвиг фаз между H и E $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$

Что будет с $\vec S = \frac{c}{8\pi} Re[\vec E, \vec H^*]$ $\to H_\varphi$ $i \to -i$

$pp^* = |p|^2$

получим чисто мнимое выражение $\Rightarrow \bar S = 0$?

Но источник излучает, откуда берётся энергия? Но это лишь прибл. значения, откинутые малые слагаемые дадут $\bar S \neq 0$. (именно они отвечают за перенос энергии).

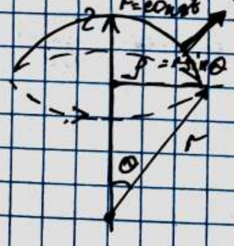


Вблизи диполя доминирует слагаемое с $\sim 1/r^3$, но далеко дальше структура с $1/r$ ~ как у расх. сферич. волны.

2й вопрос: является ли поле локально потенциальным? Нет! $rot\,\vec H \neq 0$

$\vec j = 0$; $rot\,\vec H_{магнит} = ik_0\varepsilon \vec E$ ~ у поля $\vec H$ есть источник, даже далеко от источников (токи смещения)

Рассм. задачу аналогичную б.1к



$$\oint_L \vec H\, d\vec l = \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec D\, \overbrace{d\vec S}^{\vec r_0 dS}}_{ik_0\varepsilon\int E_r dS}$$

$$H_\varphi 2\pi r\sin\theta = ik_0\varepsilon \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta} \frac{2p\cos\theta'}{\varepsilon r^3} \underbrace{r^2\sin\theta' d\theta' d\varphi'}_{dS = r^2 d\Omega}$$ — для телесного угла.

$\int_0^{2\pi} d\varphi' = 2\pi$

$$\Rightarrow H_\varphi r\sin\theta = ik_0 \frac{1}{r} p \underbrace{\int_0^{\theta} d(\sin^2\theta')}_{\sin^2\theta}$$

$$H_\varphi = \frac{ik_0 p\sin\theta}{r^2}$$

Второй способ (неправильный): наш источник:

сторонний → $\vec j = i\omega\vec P = i\omega\vec p\,\delta(\vec r') = i\omega p\vec z_0\,\delta(\vec r')$

исп. з-н Био-Савара: $\vec H = \int\limits_V \frac{[\vec j(\vec r'), \vec R]}{cR^3}\,dV' =$

$$= ik_0 p\int \frac{[\vec z_0\,\delta(\vec r'), \vec r - \vec r']}{|\vec r - \vec r'|^3}\,dV' = ik_0 p\,\frac{[\vec z_0, \vec r]}{r^3} = \frac{ik_0 p[\vec z_0, \vec r_0]}{r^2} =$$

$$= \left\{ [\vec z_0, \vec r_0] = -\vec\varphi_0\sin\theta \Rightarrow [\vec z_0, \vec r_0] = \vec\varphi_0\sin\theta \right\} = \vec\varphi_0\,\frac{ik_0 p\sin\theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow H_\varphi = \frac{ik_0 p\sin\theta}{r^2}$$

Нельзя так делать, т.к. з-н Био-Савара это решение ур-я $\text{rot}\,\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec j$ (добавляем div)

$\Rightarrow \text{div}\,\text{rot}\,\vec H = 0 \rightarrow \text{div}\,\vec j = 0$ ~ ток должен быть замкн., а у нас есть разрыв на диполе

если взять $\text{rot}\,\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec j + \frac{4\pi}{c}\vec j_{см}$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec j + \vec j_{см}) = 0$$

нужно брать с током смещения

и ответ совпал просто из-за того, что

метод не обоснован $\Leftarrow$ источник точечный с δ-ф-ей.

Что будет вдали от диполя?

пусть теперь $\lambda \sim r \Rightarrow kr \sim 1$ — зона индукции.

нужно польз. строгими равенства, но работает

$l \ll \lambda \sim r$.

Если уйти ещё дальше $r \gg \lambda \Rightarrow kr \gg 1$ — волновая зона.

$\Rightarrow$ выполняется: $l \ll \lambda \ll r$ должны отбрасывать слагаемые более высоких степеней.

получим:

$\frac{1}{r} \sim \quad E_\theta = -\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r}p\sin\theta$

$H_\varphi = -k_0 k\,\frac{e^{-ikr}}{r}p\sin\theta = \frac{E_\theta}{\eta}$, учитывая $k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ волновой импеданс среды.

$E_r = \frac{2ik}{\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r^2}p\cos\theta$

$p = |p_0|e^{i\varphi} \rightarrow \omega t - kr + \varphi = \text{const}$ ~ ур-е пост. фазы — сфера.

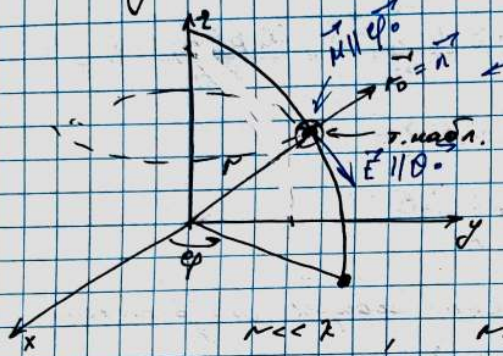
~ неоднород. сферич. волна.

E и H в фазе дают не нулевой вклад в $\vec{S}$.

$\vec{E} = E_\theta \cdot \vec{\theta}_0$, $\vec{H} = H_\varphi \vec{\varphi}_0$; $\vec{r}_0 = \vec{n}$

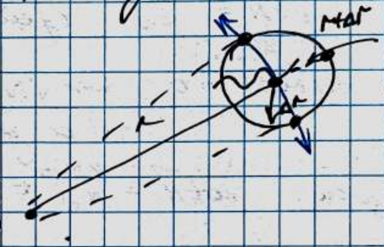
$\Rightarrow \vec{E} = \eta[\vec{H}, \vec{n}]$, учтено $[\vec{\varphi}_0, \vec{r}_0] = \vec{\theta}_0$

в волновой зоне поляризация как у плоской волны. $\{\vec{r}_0, \vec{\theta}_0, \vec{\varphi}_0\}$ ~ прав. тройка.



← локально ориентированы как в плоской волне.

$r \ll \lambda$, $r \ll \Delta r \ll \lambda$ ~ пусть выполн. с запасом.



Как измен. амплитуда:

$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r+\Delta r}_{\Delta r \ll r}$ ~ по r не заметим спадания.

Если посмотреть по углу:

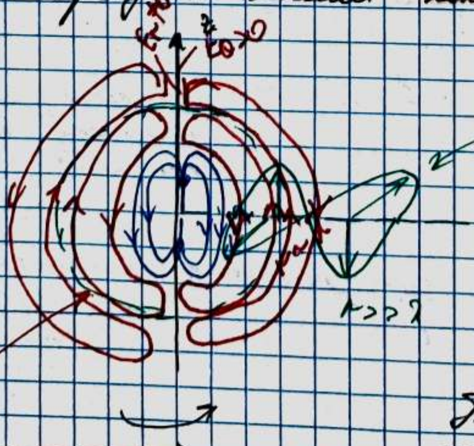
$$\sin\theta \approx \sin(\theta + \Delta\theta)$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta r}{r} \ll 1.$$

$\Rightarrow$ набл. измен. ампл. по углу тоже не заметит.

$\Rightarrow$ он скажет, что волна плоская. (это фрагмент сферы. → локально плоские)

Качественно нарисуем линии поля в разных зонах.



$\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}$ — слаг. сущ-т везде, но разные по величине.

Поля генерируются друг другом!

Энергетические соотношения для диполя Герца

$$\vec S = \frac{c}{8\pi} Re[\vec E, \vec H^*]$$

$kr >> 1$ ~ в волн. зоне: $E_\theta = -\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r} p\sin\theta$

$$H_\varphi = \frac{E_\theta}{\eta}$$

$$=> \vec S = \frac{c}{8\pi} \underbrace{Re\, E_\theta \frac{E_\theta^*}{\eta}}_{\frac{|E_\theta|^2}{\eta}} \underbrace{[\vec\theta_0, \vec\varphi_0]}_{\vec r_0} = \vec r_0 \cdot \underbrace{\frac{c}{8\pi\eta}|E_\theta|^2}_{S_r}$$

подставляя E_θ:
(учит., что p м.б. комплексен – с фазой)

$$S_r = \frac{c}{8\pi}\frac{k^4|p|^2}{\varepsilon^2\eta r^2}\sin^2\theta$$

$k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$

$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

можно по-другому: $S_r = \frac{c}{8\pi}\mu\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{k_0^4|p|^2}{r^2}\sin^2\theta$

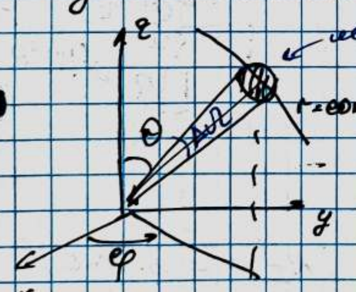
$\theta = 0,\pi$: $S_r=0$

max: $\theta=\frac{\pi}{2} \to \sin^2\theta = 1$.

Энергия не перед. по θ и φ - ков-ям.

Диаграмма направленности излучения по мощности.

~ по угло-угловое распр-е мощности, излуч. в ед. телесного угла



$$\Delta P = \lim_{r\to\infty}\int_{\Delta S} S_r \underbrace{dS}_{r^2 d\Omega} = \lim_{r\to\infty}\int_{\Delta\Omega} S_r r^2 d\Omega \quad \left(\frac{1}{r^2}\right)$$

чтобы не думать в какой мы зоне

$$\boxed{\lim_{\Delta\Omega\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta\Omega} = D(\theta,\varphi)}$$

в этом смысле.

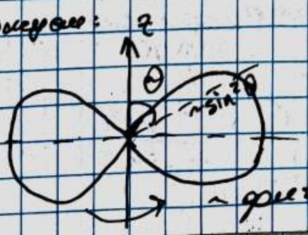
20.12.22. применяем теорему о среднем:

$$\Delta P = \lim_{r\to\infty}\int_{\Delta\Omega} S_r r^2 d\Omega = \lim_{r\to\infty} S_r \cdot r^2 \cdot \Delta\Omega \quad => D(\theta,\varphi) = \lim_{r\to\infty} S_r(r,\theta,\varphi) r^2$$

Для элементарного диполя: $S_r = \frac{c}{8\pi}\frac{k^4|p|^2}{\varepsilon^2\eta r^2}\sin^2\theta$

$$=> D(\theta,\varphi) = \underbrace{\frac{c}{8\pi}\frac{1}{\varepsilon^2\eta}k^4|p|^2}_{D_{max}}\sin^2\theta$$

рисуем:



~ фигура вращения.

Иногда строят амплитудные и фазовые диаграммы направленности.

Если вдруг спросят, может ли быть такая диаграмма напр.? нет, неоднозначности быть не может — не физично

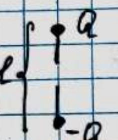
Полная мощность излучения элемент. диполя

$$P_\Sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(\theta,\varphi) \underbrace{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{c}{8\pi}\frac{1}{\varepsilon^2\eta} k^4 |p|^2 \sin^3\theta\, d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} (\cos^2\theta - 1)\, d\cos\theta = \left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow P_\Sigma = \frac{1}{3}\frac{c}{\varepsilon^2\eta} k^4 |p|^2$$

Из формулы: $P_\Sigma \sim \omega^4 |p|^2$



$|p| = |Q| \ell$

$I + \dot{Q} = 0 \rightarrow I = -\underbrace{\dot{Q}}_{-i\omega Q}$ ~ т.к. процесс гармонический

$\Rightarrow |I| = \omega |Q| \quad \rightarrow |p| = \frac{|I|}{\omega}\ell$ ~ подставим в P_Σ

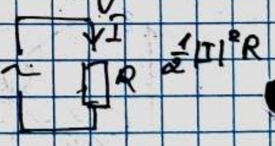
и учтём $\cdot\ k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$; $\frac{\omega}{c} = k_0$

$$P_\Sigma = \frac{1}{3}\frac{c}{\varepsilon^2\eta} k^4 \underbrace{|I|^2 \frac{1}{\omega^2}\ell^2}_{|p|^2} = \frac{1}{2}|I|^2 \cdot \frac{1}{c}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\mu^2}{\eta}(k_0\ell)^2$$

$$P_\Sigma = \frac{1}{2}|I|^2 R_\Sigma \quad \Rightarrow R_\Sigma = \frac{2}{3c}\cdot\frac{\mu^2}{\eta}(k_0\ell)^2$$

~величина размерности сопротивл.
~сопротивление излучения

Опр. Сопр. излучения - величина, равная сопр. омической нагрузки, на которой при силе тока равной току излучателя выдел. мощность равная излучаемой мощности.



$$\Rightarrow R_\Sigma = \frac{1}{c}\frac{2}{3}\frac{\mu^2}{\eta}(k_0\ell)^2$$

Обычно диполь излуч. $\varepsilon = \mu = 1$ в вакууме: $R_\Sigma^{(0)} = \frac{1}{c}\frac{2}{3}(k_0\ell)^2$

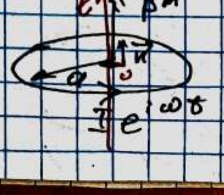
правило перехода в SI : $\frac{1}{c} \rightarrow 30\,(\text{Ом.})$; $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

$$\Rightarrow R_{\Sigma\, SI}^{(0)} = 80\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda_0}\right)^2\ [\text{Ом}]$$

Излучение элементарного магнитного диполя

Просто действуем по принципу перестановочной двойственности

Представляем в виде витка с током.



$$\vec{p}^m = \frac{\mu}{c} I S \vec{n}$$

$S = \pi a^2$

$\vec{p} = \vec{p}^{\,e} \to \vec{p}^{\,m}$, $\vec{E} \to \vec{H}$, $\vec{H} \to -\vec{E}$

$\varepsilon \to \mu$, $\mu \to \varepsilon$, $\eta \to \frac{1}{\eta}$

Из формул (I):

$$E_\varphi = -\left(\frac{ik_0}{r^2} - \frac{k_0 k}{r}\right) e^{-ikr} p^m \sin\theta$$

$$H_r = \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2ik}{r^2}\right) e^{-ikr} p^m \cos\theta$$

$$H_\theta = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right) e^{-ikr} p^m \sin\theta$$

$$D^m = \frac{c}{8\pi}\frac{\eta}{\mu^2} k^4 |p^m|^2 \sin^2\theta$$ ~ принципиально вид не меняется.

Нужно понимать, что: $l \ll \lambda$, $l \ll r$, здесь $l \equiv a$.

$$P_\Sigma^m = \frac{1}{3} c \frac{\eta}{\mu^2} k^4 |p^m|^2$$

Подставим выражение для p^m:

$$\Rightarrow P_\Sigma^m = \frac{1}{3} c \frac{\eta}{\mu^2} k^4 \underbrace{\frac{\mu^2}{c^2} |I|^2 (\pi a^2)^2}_{|p^m|^2} = \frac{|I|^2}{2} \underbrace{\frac{1}{c}\frac{2}{3}\eta\pi^2 (ka)^4}_{R_\Sigma^m}$$

$R_\Sigma^m = \frac{1}{c}\frac{2}{3}\eta\pi^2(ka)^4$ — сопротивл. излучения

В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$: $R_\Sigma^{m(0)} = \frac{1}{c}\frac{2}{3}\pi^2(k_0 a)^4$

Какой излучатель эффективнее? Пусть размеры одинак., токи одинаковы:

$R_\Sigma \sim (k_0 l)^2$ учитывая $l \ll \lambda$, $kl \ll 1$ | $a \ll \lambda$, $ka \ll 1$.

$R_\Sigma^m \sim (k_0 a)^4$

$\Rightarrow$ при прочих равных условиях $R_\Sigma^m < R_\Sigma$

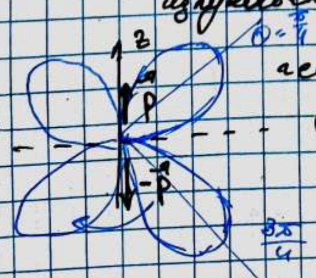
Физически: если нарисуем в какой-то t эл. диполь. Заряды переносятся либо вверх, либо вниз.

У рамки с током:

есть противолежащие токи → в дальней зоне компенсируют вклад друг от друга.

Замечание: можно считать для более сложных излучателей (мультиполей):

$\vec{p}$ ↑ ↓ $\vec{p}''$ ~ квадруполь



симметр. расп. диполей, колеб. в противофазе.

~ ток имеет больше вариаций → получ. больше лепестков. Чем выше порядок мультиполя → более изрезанная ДН.

и также при $r \to \infty$ $\frac{e^{-ikr}}{r}$ ~ переходит в сферич. волну. (в незав. от вида мультиполя.)

В более точных расчётах это спр-во при $kr \gg n$, где n — число вариаций тока.

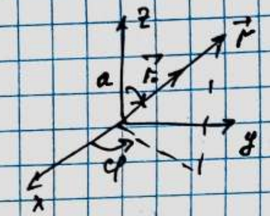
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\to r \gg n\lambda$ ~ волновая зона n-го мультиполя.

* малые приборы.

Посчитаем для мультиполя! $l \ll \lambda \le n\lambda \ll r$

$$\vec A^e = \vec A = \frac{1}{c}\frac{e^{-ikr}}{r} i\omega \vec p^e + ik[\vec p^m, \vec r_0]\frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{1}{c} ik \cdot \frac{i\omega}{2}(\hat Q, \vec r_0)\cdot\frac{e^{-ikr}}{r}$$

← добавл. другие слагаемые из разложения.

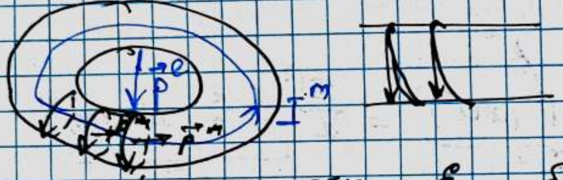


$$(\hat Q, \vec r_0)_\alpha = Q_{\alpha\beta}\cdot(\vec r_0)_\beta$$

$$\vec r_0 = \{\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\varphi\}$$

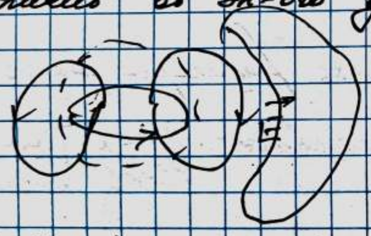
см. Джексон „Кл. Электродин."

Анаполь — вообще нет заряда.



текут токи. Если бы $I = const$ → получили пост. H.

Когда I перемен. → будет перемен. $\vec p^m$ → в итоге по системе будет течь эквивал. магнитный ток → появится $\vec p^e$ → на дальних расст-х наблюд. нельзя не отличит от эл-ого диполя, без зарядов как таковых нет



* мех. пр.

* Замечание о разложении поля по сферическим ф-ям.

$\Delta\psi + k^2\psi = 0$ Сферич. ф-ии — решения этого ур-я, но записанные в сферич. переменных

$\psi(r, \theta, \varphi)$ — присоедин. ф-я Лежандра

$$\psi(r,\theta,\varphi) = [A_{1n}\underbrace{j_n(kr)}_{\text{сферич. ф-ии Бесселя}} + A_{2n}\underbrace{n_n(kr)}_{\text{Сферич. ф-ии Неймана}}]\, P_n^m(\cos\theta)\,[C_{1m}\cos m\varphi + C_{2m}\sin m\varphi]$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{bmatrix} j_n(z) \\ n_n(z) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\begin{bmatrix} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \\ N_{n+\frac{1}{2}}(z) \end{bmatrix}$$

Можно ввести сферич. ф-ии Ханкеля.

$h_n^{(1,2)} = j_n \pm i n_n$ $\qquad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$

$kr \gg n \qquad h_n^{(1)}(kr) \sim \frac{e^{ikr}}{r}, \quad h_n^{(2)}(kr) \sim \frac{e^{-ikr}}{r},$

переходя к решениям в виде этих ф-ций:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \underbrace{g(\theta,\varphi)}_{\text{спектр.}}\frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$g(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm} \underline{Y_{nm}(\theta,\varphi)}$$

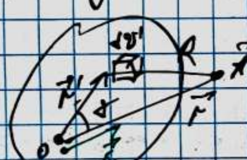
$$Y_{nm}(\theta,\varphi) \sim P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

Узкую ДН можно создать мультиполями при $l \ll \lambda$, но проигрываем в мощности.

Поле излучения произв. системы заданных гармон токов в дальней зоне.

У источника теперь м.б. произвольный размер.

Дальняя зона — это зона, где поля $|E|$ и $|H|$ спадают по закону $\sim \frac{1}{r}$



Дополнен. выч. усл.:

1) $r \gg l$
2) $\frac{\sqrt{\lambda r}}{l} \gg 1$ (зона Фраунгофера)
3) $kr \gg n \geq 1$ — волн. зона, n — число вариаций тока

} Дальняя зона.

Почему раньше не возникало 2е усл. — ? Оно вып. автомат.

$$\frac{\sqrt{\lambda r}}{l} = \sqrt{\frac{\lambda}{l}\frac{r}{l}} \gg 1$$

$l \ll \lambda$
$l \ll r$

Берем общую ф-лу для вект. потенциала:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,') \frac{e^{-ikR}}{R}\, dV'$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma} = r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}} = \left\{\begin{matrix}\text{пользуясь}\\ \text{усл. 1.}\\ \text{пок. разложение}\end{matrix}\right\}$$

$\max r' \sim l$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad R \approx r\left\{1 - \frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2} - \frac{1}{8}\cdot 4\cdot\frac{r'^2}{r^2}\cos^2\gamma + \ldots\right\} =$$

$$= r\left\{1 - \frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2}\sin^2\gamma + \ldots\right\}$$

28.12.22.

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r(1 - \frac{r'}{r}\cos\gamma)} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r'}{r}\cos\gamma\right)$$

тогда подставив получим:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{cr} \int\limits_V \vec{j}(\vec{r}\,') \left(1 + \frac{r'}{r} \cos\vartheta\right) e^{-ikr + ikr'\cos\vartheta - ik\frac{r'^2}{2r}\sin^2\vartheta} dV'$$

Оказывается из условия 2, оценим слагаемое в exp:

$$k\frac{r'^2}{2r}\sin^2\vartheta \le \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\ell^2}{2r} = \pi\frac{\ell^2}{\lambda r} \ll \pi$$ → можно пренебречь.

чуть-чуть упростим:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{cr}\int\limits_V \vec{j}(\vec{r}\,')\left(1 + \frac{kr'}{kr}\cos\vartheta\right) e^{-ikr + ikr'\cos\vartheta} dV'$$

Договоримся ввести волновой вектор: $\vec{k} = k\vec{r}_0$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\Big\{\underbrace{\int\limits_V \vec{j}(\vec{r}\,') e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} dV'}_{\vec{N}} + \underbrace{\frac{1}{kr}\int\limits_V \vec{j}(\vec{r}\,')(\vec{k}, \vec{r}\,') e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} dV'}_{\vec{N}^{доб.}}\Big\}$$ – добавочное

отдельно анализируем интегралы:

$\vec{N}$ – вектор излучения (спец. название интеграла.) – по сути $e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} = e^{ik_x x' + ik_y y' + ik_z z'}$ простр. преобр. Фурье.

$$\vec{N}(\vec{k}) = \int\limits_V \vec{j}(\vec{r}\,') e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} dV'$$ – Фурье спектр расходящейся сферической волны

$$\vec{N}^{доб} = \frac{1}{kr}\int\limits_V \vec{j}(\vec{r}\,')[k_x x' + k_y y' + k_z z'] e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} dV' = \{\text{по сути разбивается на три интеграла}\}$$
$$= \frac{1}{kr}\{I_x + I_y + I_z\}$$

оценим отдельно:

$$I_x = \int\limits_V k_x x' \vec{j}(\vec{r}\,') e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} dV' = \left\{\begin{array}{l}\text{можем брать пределы от } -\infty \text{ до } +\infty \\ \text{т.к. источники всё равно занимают} \\ \text{огр. область пр-ва}\end{array}\right\}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_y y' + ik_z z'} dy' dz' \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_x x' \vec{j}(\vec{r}\,') e^{ik_x x'} dx'}_{\text{интегр. по частям.}} \;=$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_x x' \vec{j}(\vec{r}\,') e^{ik_x x'} dx' = (-i)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x' \vec{j}(\vec{r}\,') d(e^{ik_x x'}) =$$

$$= (-i)\Big\{\underbrace{x'\vec{j}(\vec{r}\,') e^{ik_x x'}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\substack{\text{т.к. токи на беск. нет} \\ =0}} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x'\vec{j}(\vec{r}\,'))'_{x'} e^{ik_x x'} dx'\Big\} =$$

$$= i\int\limits_V \Big[\vec{j}(\vec{r}\,') + x'\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}\,')}{\partial x'}\Big] e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} dV'$$

Тогда получим:

$$\vec{N}_{доб} = \frac{i}{kr}\Big\{\underbrace{3\int\limits_V \vec{j}(\vec{r}\,') e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} dV'}_{\vec{N}} + \underbrace{\int\limits_V \Big(x'\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}\,')}{\partial x'} + y'\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}\,')}{\partial y'} + z'\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}\,')}{\partial z'}\Big) e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} dV'}_{\sim n\vec{N}}\Big\}$$

из условия 3)

$$|\vec{N}| \gg \frac{3|\vec{N}|}{kr}$$ – т.е. этим слагаемым можно с доб. условием пренебречь.

Оценим второе слагаемое:

$x'\frac{\partial \vec j}{\partial x'} + y'\frac{\partial \vec j}{\partial y'} + z'\frac{\partial \vec j}{\partial z'} \sim \text{''} \frac{l_j}{l_n} \text{''} \sim n\vec j$

масштаб измен. $\vec j$

число вариаций

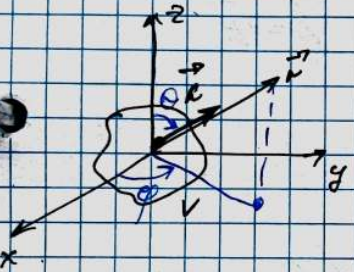
$\Rightarrow \vec N_{проб} = \frac{1}{kr}\{3\vec N + n\vec N\}$, учитывая 3) $kr >> n \geq 1$

$\Rightarrow |\vec N| >> \frac{n|\vec N|}{kr}$, т.е. тоже можно пренебречь

$\Rightarrow \boxed{\vec A(\vec r) = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\vec N}$, где $\boxed{\vec N(\vec k) = \int \vec j(\vec r')\, e^{i\vec k\vec r'}\, dV'}$

Фурье преобр. не путать! "+" и "−" в exp.

$\vec N(\vec k) = \vec N(k_x, k_y, k_z)$



Компоненты в сферич. с.к.:

$k_x = k\sin\theta\cos\varphi$
$k_y = k\sin\theta\sin\varphi$
$k_z = k\cos\theta$

если подставить: $\vec N = \vec N(\theta,\varphi)$

т.е. в выражении $\vec A(\vec r)$ разделились условно переменные:

$\vec A(\vec r) = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\vec N(\theta,\varphi)$

Вычисление поля:

$\vec B = rot\vec A = [\nabla, \vec A] = [\nabla, \frac{\mu}{c}\cdot e^{-ikr}\cdot\frac{1}{r}\vec N(\theta,\varphi)] =$ {можно проще считать, если знаем какая ф-я меняется быстро, а какая медленно)

Если ф-я меняется медленно → производная ≈0, основной вклад даст быстрая ф-я. (она меняется на малом масштабе.) → ищем самый маленький хар-ный масштаб:

e^{-ikr} ? λ $\qquad \frac{1}{r}$? r $\qquad \vec N(\theta,\varphi)$ — берём вот эти интервальчики.

[illegible] $\sim n$ лепестков (грубо)

$\Delta\theta, \Delta\varphi \sim \frac{\pi}{n}$ $\qquad \Delta l \sim r\frac{\pi}{n}$

Смотрим на условие №3) $kr >> n \iff \frac{2\pi}{\lambda}r >> n$

$\frac{\pi r}{n} >> \lambda$

$\Rightarrow$ Характерный масштаб измен. $\vec N >> \lambda$

$kr >> 1 \rightarrow r >> \lambda$ ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

$\Rightarrow$ Самый маленький масштаб у e^{-ikr}

Достаточно ∇ подействовать только на

$\vec B = \frac{\mu}{c}[\underbrace{\nabla e^{-ikr}}_{-ik\vec r_0 e^{-ikr}}, \frac{1}{r}\vec N] = \{\vec k = k\vec r_0\} = [-i\vec k, \vec A]$

=> $\vec B = [-i\vec k, \vec A]$ (явл. обе. тождеств для плоских волн, на большом расст-ии сферич. волна локально плоская)

$$\vec H = \frac{\vec B}{\mu} = \frac{1}{\mu}[-i\vec k, \vec A]$$

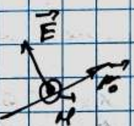
Ищем $\vec E$: $\quad \text{rot}\,\vec H = ik_0\varepsilon\vec E + \underbrace{\frac{4\pi}{c}\vec j}_{\to 0}$ в дальней зоне.

$$\Rightarrow \vec E = -\frac{i}{k_0\varepsilon}[\nabla, \vec H] \quad \text{учитывая, что } \nabla \approx -i\vec k$$

$$\vec E = -\frac{i}{k_0\varepsilon}[-i\vec k, \vec H] = \frac{k}{k_0\varepsilon}[\vec H, \vec r_0] = \{k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}\}$$

$$\vec E = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\vec H, \vec r_0] = \eta[\vec H, \underbrace{\vec r_0}_{\vec n}] = \eta[\vec H, \vec n]$$

$\{\vec E, \vec H, \underbrace{\vec n}_{\vec r_0}\}$ — правая тройка



; $\vec D = \varepsilon\vec E$

$\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}$ — существенного вклада не дают.

Основные характеристики направленности излучающей системы

$\vec S = \frac{c}{8\pi}\text{Re}[\vec E, \vec H^*]$, исп-я $\vec E = \eta[\vec H, \vec r_0]$

$$\Rightarrow \vec S = \frac{c}{8\pi}\eta\,\text{Re}\,\underbrace{[[\vec H, \vec r_0], \vec H^*]}_{\vec r_0\underbrace{(\vec H, \vec H^*)}_{|\vec H|^2} - \vec H\underbrace{(\vec r_0, \vec H^*)}_{0}} = \underbrace{\frac{c}{8\pi}\eta|\vec H|^2}_{S_r}\vec r_0$$

0 т.к. ортогональны в дальней зоне.

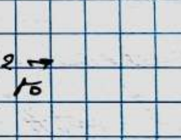
Вычислим диаграмму направленности.

$D = S_r r^2$ — уже предполагается, что работаем в дальней зоне $e^{i\omega t}$ не пишем.

$$\vec H = \frac{\vec B}{\mu} = \frac{1}{\mu}[\underbrace{-ik\vec r_0}_{\vec k}, \underbrace{\vec A}_{\frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\vec N}] = \frac{1}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}(-ik)[\vec r_0, \underbrace{N_r\vec r_0 + N_\theta\vec\theta_0 + N_\varphi\vec\varphi_0}_{\vec N}] =$$

$= \{$прим. правила вект. умнож.$\} =$

$$= \frac{1}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}(-ik)\{-\vec\theta_0 N_\varphi + \vec\varphi_0 N_\theta\}$$



$$D = S_r r^2 = r^2\frac{c}{8\pi}\eta|\vec H|^2$$

$$|\vec H|^2 = \frac{1}{c^2}\frac{1}{r^2}k^2\{|N_\varphi|^2 + |N_\theta|^2\}$$

$$\Rightarrow D(\theta,\varphi) = \frac{\eta}{8\pi c}k^2\{|N_\theta(\theta,\varphi)|^2 + |N_\varphi(\theta,\varphi)|^2\}$$

Можно строить нормированную диаграмму напр.:

D_{max} при $\theta = \theta_{max}$, $\varphi = \varphi_{max}$

$$\Rightarrow \boxed{f(\theta,\varphi) = \frac{D(\theta,\varphi)}{D_{max}} = \frac{D(\theta,\varphi)}{D(\theta_m,\varphi_m)}}$$

Коэф-т направленного действия:
(КНД)
"directivity"

КНД ~ для мощности в напр-ии главного лепестка D_{max}.

$$P_\Sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$ ~ суммарная мощность.

$P_\Sigma / 4\pi$ ~ в единицу телесного угла.

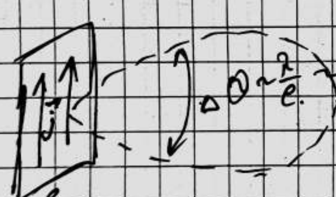
$$\Rightarrow \boxed{\text{КНД} = \frac{D_{max}}{P_\Sigma/4\pi}}$$

КПД (efficiency) антенны (какая-то часть мощности может теряться.)

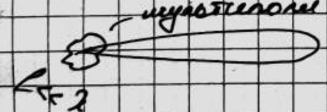
$$\boxed{\text{КПД} = \frac{P_\Sigma}{P_{подв}}}$$
← излучаемая
← подводимая

gain ~ коэф-т усиления антенны:

$$\boxed{G = \text{КПД}\cdot\text{КНД} = \frac{D_{max}}{P_{подв}/4\pi}}$$



~ эта оценка справедлива только в случае синфазного тока.



мультиполи — много вариаций тока.

Обычно в реальности токи нам неизвестны

~ ← подводим ток к концам проводов (антенна). знаем лишь ток на концах. → но ток. треб. в соответствии с ГУ и нужно искать (но для этого отдельная теория.)