02.09.22. Кудрин Александр Владимирович

Предметом электродинамики – изучение (описание) движения в электро/магнитных полях.

Будет коллоквиум (как и раньше) – принимает тот, кто ведёт практику.

Основной план курса:

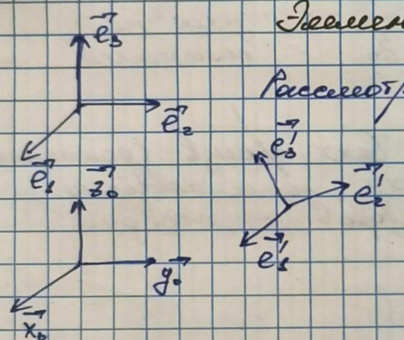
1. Введение. (Вспоминаем математику)
2. Общие свойства ЭМП.
3. Статические поля.
   а) электростатика (теория постоянного эл-ого поля.)
   б) токовая статика (теория постоянных токов.)
   в) магнитостатика (теория пост. магн-ого поля.)

для коллоквиума

4. Квазистационарное ЭМП ("почти" не меняется.)
5. (Быстро) переменное ЭМП.
6. Излучение ЭМВ.

Введение.

Элементы векторного анализа.



Рассмотрим ортонормированный базис.

– повёрнутый отн. нач. базиса. его можно представить через нач-ый:

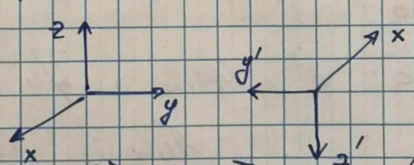
$$\vec{e}_i^{\,\prime} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \cdot \vec{e}_j \quad , \; i,j = \overline{1,3}$$

Далее рас-м только линейные преобр. коорд-т. (α_{ij} – постоянные числа.)

1) паралл. перенос. (не особо интересно);
2) вращение коорд. осей;

повороты (н.с. совпадает)

инверсия коорд. осей ($\vec{e}_i^{\,\prime} = -\vec{e}_i$)



правый винт → переходит в левый

Скаляры, векторы, тензоры (определения.)

В опр-ях упом. поворот.

Скаляром (инвариантом) в 3х мерном пр-ве назыв. величина, которая не изм. своё знач. при поворотах коорд. осей.

Вектором в 3D называется сов-ть 3х величин A_i, $i=\overline{1,3}$, которые при повороте координат преобр. по след. ф-ле:

$A_i' = \alpha_{ij} \cdot A_j$

По отн. к инверсии. → Скаляры → истин. ск. (не изм. знак при инверсии коорд. осей)

↓

псевдоскаляры

(меняют знак при инверсии коорд. осей)

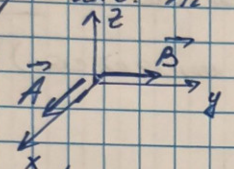
Вектора → истинные вектора (полярные) → при преобр. инв. ($\vec{e}_i' = -\vec{e}_i$) получим $A_i' = -A_i$

↓

псевдовектора (аксиальные):

при инв: $A_i' = A_i$

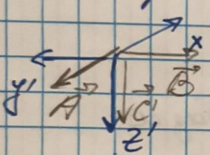
Пример:



пусть $\vec{A}, \vec{B}$ – истинные, найдём

$$\vec{C} = [\vec{A}, \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = AB \cdot \vec{z}_0$$

произв. инверсию коорд. осей:



$$\vec{C}' = \begin{vmatrix} \vec{x}_0' & \vec{y}_0' & \vec{z}_0' \\ -A & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 \end{vmatrix} = AB \cdot \vec{z}_0'$$ – знак не поменялся

Это связано с опр-м вект. произв. (должны вращ-ть по левому винту, после инверсии)

=> произвед. 2х ист. векторов → псевдо.

$\vec{A}, \vec{B}$ – ист.; $\vec{C}$ – псевдо.

$(\vec{A}, \vec{B})$ – ист. скаляр.

$(\vec{A}, \vec{C})$ – псевдоск.

$(\vec{C}, \vec{C})$ – ист. скаляр. ("как бы аннигилируют")

(Аффинные) ортогональн. тензоры 2 ранга в 3D – сов-ть 9 величин, при повороте преобр.

A_{ij}, $i,j = \overline{1,3}$; $A_{ij}' = \alpha_{im} \alpha_{jn} A_{mn}$

1-ранга: 3^1

s-ранга: 3^s, $A_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ при повороте преобр. по закону:

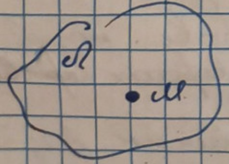
$$A_{i_1 i_2 \ldots i_s}' = \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \ldots \alpha_{i_s j_s} \cdot A_{j_1 j_2 \ldots j_s}$$

Тензоры → истинный: при инверсии $(-1)^s$

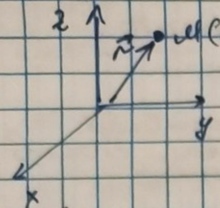
Тензоры → псевдотензоры $(-1)^{s+1}$

<u>Скалярное поле</u>: Пусть Ω некот. обл. в 3D, каждой точке пост. в соответ-е скаляр.

→ задано скалярное поле φ.



$M \in \Omega \to \varphi(M)$



$$\varphi(M) = \varphi(\vec r) = \varphi(x, y, z)$$

$$\vec r = x\cdot\vec{x_0} + y\cdot\vec{y_0} + z\cdot\vec{z_0}$$

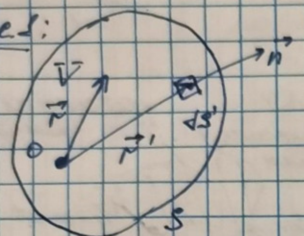
Операции над полем.

1. Оператор набла ∇ (градиент)

Опр. Градиент скалярной ф-ии в точке $\operatorname{grad}\varphi(\vec r) \equiv \nabla\varphi(\vec r)$, опр. формулой:

$$\operatorname{grad}\varphi(\vec r) \equiv \nabla\varphi(\vec r) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\oint\limits_S \varphi(\vec r\,')\cdot\vec n\, ds'}{\iiint\limits_V dv}$$

Рис.1:



$\vec n$ – внешн., если не оговаривается.

$$\delta = \max_{\vec r\,' \in S}|\vec r - \vec r\,'|$$

В декартовых координатах:

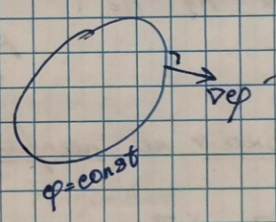
$$\nabla\varphi = \vec{x_0}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{y_0}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{z_0}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$ оператор набла – истинный вектор.

Производная по направлению:

$|\vec s| = 1$

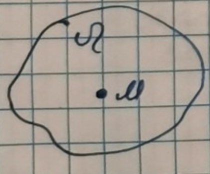
$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = (\vec s, \nabla)\varphi = s_i\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$$



– ортогон. линиям пост. уровня.

Свойства: 1) $\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$;
2) $\nabla(\varphi\cdot\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\cdot\nabla\varphi$;
3) $\nabla\varphi(\psi(\vec r)) = \varphi'_\psi\cdot\nabla\psi$.

Векторное поле: Пусть имеется обл. пр-ва Ω, и задано вект. поле $\vec A$, если каждой точке задан в соотв. вектор:



$$M \in \Omega : \to \vec A(M)$$

$$\vec A(M) = \vec A(\vec r) = \vec A(x, y, z)$$

$$\vec A(\vec r) = \vec{x_0}\cdot A_x(\vec r) + \vec{y_0}A_y(\vec r) + \vec{z_0}A_z(\vec r)$$

при повороте должны подчин. "законам" вектора?

Векторные дифф-ые операции.

Дивергенция вект. поля:

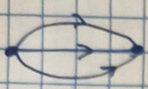
$$\operatorname{div}\vec A(\vec r) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\oint\limits_S(\vec n, \vec A(\vec r))\, ds'}{\iiint\limits_V dv}$$ см. рис. 1.

иногда вводят $\vec{n}\,dS' = d\vec{S}'$, можно переписать.

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\oint \vec{A}(\vec{r}')\,d\vec{S}'}{\iiint_V dV}$$

— поток.

~ показывает количество стоков и истоков.



$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = (\nabla, \vec{A})$$

~ в дек. с.к.

в западной литературе $\nabla\cdot\vec{A}$

Ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\oint_S [\vec{n}, \vec{A}(\vec{r}')]\,dS'}{\iiint dV}$$

см. рис. 1.

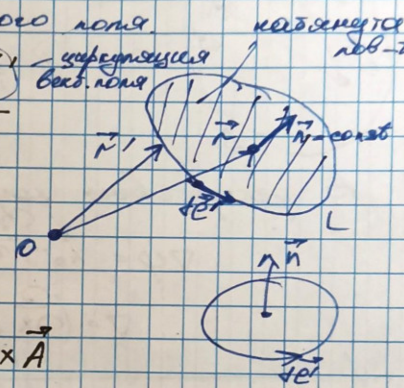
~ хар-т завихренность векторного поля.

натянута плоская пов-ть

$$(\operatorname{rot}\vec{A})_n = \lim_{\delta\to 0}\frac{\oint \vec{A}(\vec{r}')\,d\vec{l}'}{\iint_S dS}$$

— циркуляция век. поля

$$\delta = \max_{\vec{r}'\in L}|\vec{r} - \vec{r}'|$$



$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = [\nabla, \vec{A}] = \nabla\times\vec{A}$$

ротор ист. вект. → псевдовект.
(рассуждать можно, смотря на начало)

Производная по направлению: (по напр. вект. $\vec{B}$)

$$(\vec{B}, \nabla)\vec{A} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\oint_S (\vec{B}, \vec{n})\vec{A}\,dS'}{\iiint_V dV} = B_i\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{A}$$

для каждой комп.

Векторные диффер. тождества 1го пор-ка (наизусть!)

1) $\nabla(\vec{A}, \vec{B}) = [\vec{A}, \operatorname{rot}\vec{B}] + [\vec{B}, \operatorname{rot}\vec{A}] + (\vec{A}, \nabla)\vec{B} + (\vec{B}, \nabla)\vec{A}$

2) $\operatorname{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi\operatorname{div}\vec{A} + (\nabla\varphi, \vec{A})$

3) $\operatorname{rot}(\varphi\vec{A}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{A} + [\nabla\varphi, \vec{A}]$

4) $\operatorname{div}[\vec{A}, \vec{B}] = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{B}$

5) $\operatorname{rot}[\vec{A}, \vec{B}] = \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{div}\vec{A} + (\vec{B}, \nabla)\vec{A} - (\vec{A}, \nabla)\vec{B}$

Тождества 2го порядка:

1) $\nabla\operatorname{div}\vec{A} = \nabla\cdot(\nabla, \vec{A})$

2) $\operatorname{div}\nabla\varphi = (\nabla, \nabla\varphi) = (\nabla, \nabla)\varphi = \Delta\varphi$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

3) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}=0$

4) $\operatorname{rot}\nabla\varphi=0$

5) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\nabla\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}$ — можно расс-ть как опр-е лапласиана

$(\Delta\vec{A})_{x,y,z}=\Delta A_{x,y,z}$ — только в декарт. с.к.

Потенциальное и вихревые поля.

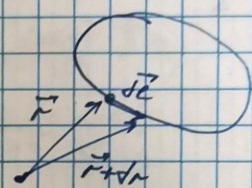
Опр. Поле $\vec{A}$ назыв. потенциальным, если оно представимо:

$$\vec{A}=\nabla\varphi$$

св-ва:

$$\oint\limits_{L} \underbrace{\vec{A}}_{\nabla\varphi}\underbrace{d\vec{l}}_{d\vec{r}} = 0 = \oint\limits_{L}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i = \oint\limits_{L} d\varphi = 0$$

любой



Теорема. Для того чтобы $\vec{A}$ было потенц-м необх. и достаточно:

$$\operatorname{rot}\vec{A}=0$$

Опр. Поле $\vec{A}$ назыв. вихревым (соленоидальным), если $\operatorname{div}\vec{A}=0$

Теорема 1. Векторное поле, представимое в виде ротора другого векторного поля, явл. вихревым.

Если $\vec{A}=\operatorname{rot}\vec{B}$, то $\vec{A}$ — вихревое.

Теорема 2. Всякое вихревое вект. поле можно представить в виде ротора некоторого вект. поля.

Для $\forall$ вихр. $\vec{A}$ $\exists\vec{B}$: $\vec{A}=\operatorname{rot}\vec{B}$.

Теорема (Гельмгольца.)

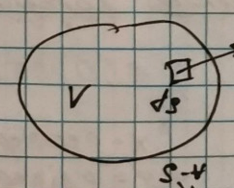
Произвольное вект. поле всегда может быть представл. в виде суммы потенц. и вихревого поля.

$$\vec{A}=\nabla\psi+\operatorname{rot}\vec{B}$$

Док-ся из: $\operatorname{div}\vec{A}=\underbrace{\operatorname{div}\nabla\psi}_{\Delta\psi}$; $\Delta\psi=\operatorname{div}\vec{A}$

1) Теорема (О-Г)

$$\oiint\limits_{S}\vec{A}\,d\vec{S}=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}\vec{A}\,dv$$

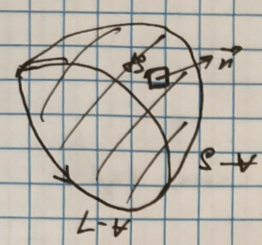


$d\vec{S}=\vec{n}\,dS$

S - $\forall$ произв. пов-ть

2) Теорема (Стокса)

$$\oint\limits_{L}\vec{A}\,d\vec{l}=\iint\limits_{S}\operatorname{rot}\vec{A}\,d\vec{S}$$



$\vec n$ напр. выбир. согл. обходу по правилу правого винта.

8) Теорема (ф-ла Грина.)

$$\oint_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = \iiint_V [\psi \Delta\varphi + (\nabla\psi, \nabla\varphi)]\, dV$$

$$\oint_S \left[\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right] dS = \iiint_V [\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi]\, dV$$

Для док-ва: $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = (\vec n, \nabla\varphi)$

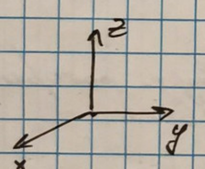
$$\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = (\psi\nabla\varphi)\, \underbrace{\vec n\, dS}_{d\vec S} \quad \to \quad \iiint_V div(\psi\Delta\varphi)\, dV$$

по т. О-Г и исп. формулы

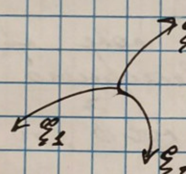
Джексон. - Классическая электродинамика
Векштейн. - Сборник задач (с решениями.)
Суворов, Гольденбург - Основы электродинамики („справочник для троечников") - нужно знать все ф-лы.

5.02.22.

Ортогональные криволинейные координаты.



~ прямые оси.

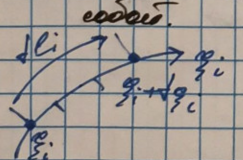


~ кривые координаты.

Должно быть однозн. соответ. между координатами.

$\xi_i = \xi_i(x, y, z)$. Для этого н.и.д.: $\frac{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{D(x, y, z)} \neq 0$

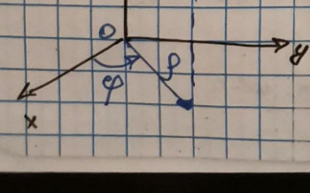
Опр. система крив. коорд. ξ_i ($i = \overline{1,3}$) в 3D ортогон., если в любой т. пр-ва 3 коорд. линии проходящие через неё ортогон. между собой.



$dl_i = h_i\, d\xi_i$, h_i ~ коэфф. Ламэ

$$h_i = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_i}\right)^2\right]^{1/2}$$

Цилиндрические координаты.



$\varphi \in [0; 2\pi]$

(ρ, φ, z) ~ правая тройка

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

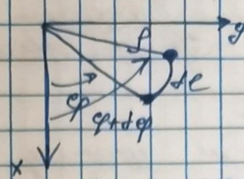
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = arctg\, \frac{y}{x}$

$z = z$

φ - азимутальный угол.

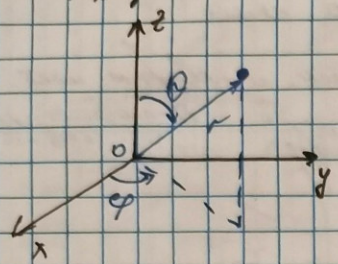
Коэф. Ламе: $h_1 = h_\rho = 1$
$h_2 = h_\varphi = \rho$
$h_3 = h_z = 1$



$\to dl_\varphi = \rho\, d\varphi = h_\varphi\, d\varphi$

~ из геометрич. соображ.

Сферические координаты:



$\theta \in [0;\pi]$ ~ полярный угол

(r, θ, φ) ~ правая тройка

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \to \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{aligned}$$

Коэф. Ламе: (через малые приращ. по коорд.)

$h_1 = h_r = 1$
$h_2 = h_\theta = r$
$h_3 = h_\varphi = r\sin\theta$

Дифф-ые операции в орт. крив. коорд.

1) $\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_3}\vec{e}_3$

2) $\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_1h_3A_2) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1h_2A_3)\right\}$

3) $\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \partial/\partial\xi_1 & \partial/\partial\xi_2 & \partial/\partial\xi_3 \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$

4) $\Delta\varphi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_3}\right)\right\}$

J.C. Maxwell (изначально записывал ур-я по-другому исп. гиперкомпл. числа.)

$i^2 = -1 \qquad ij = k$
$j^2 = -1 \qquad jk = i$
$k^2 = -1 \qquad ki = j$

$z = \underbrace{d}_{\text{скал. часть}} + \underbrace{a\cdot i + bj + c\cdot k}_{\text{векторная часть}}$ ~ кватернион (гиперкомпл. число)

O. Heaviside ~ переписал в привычном нам виде.
H.A. Lorentz
L.V. Lorenz

Общие св-ва ЭМП.
Ур-я Максвелла в инт. форме.

Постулаты:

1) Постулир-м сущ-ие ЭМП, которое в среде опис. векторами

первичные

$\vec{E}$ – напряж-ть эл-ого поля;

$\vec{D}$ – индукция эл-ого поля (эл-ая индукция)

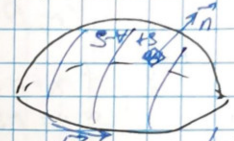
$\vec{B}$ – магнитная индукция;

$\vec{H}$ – напряжённость магнитного поля.

2) Пост-м ур-я Максвелла в среде (объёмн. и поверхн. плот. полн. однозначно ρ)

Обобщ. закона ЭМ индукции Фарадея

1) $$\oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\, d\vec{s}$$



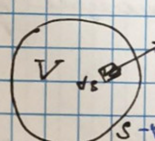
S-любая натян. пов-ть

2) $$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint \vec{D}\, d\vec{s}}_{\frac{4\pi}{c} I_{см}}$$, где $I = \iint_S \vec{j}\, d\vec{s}$, где

j – плотность тока

теорема Гаусса

3) $$\oint_S \vec{D}\, d\vec{s} = 4\pi Q$$



$d\vec{s} = \vec{n}\, ds$

$Q = \int_V \rho\, dV$

Отсутствие магнитных зарядов

4) $$\oint_S \vec{B}\, d\vec{s} = 0$$

Опр. Свободными назыв. такие заряды, которые могут в в-ве перемещ. на макроскоп. расст-я.

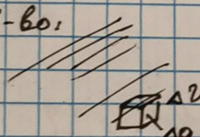
Опр. Связанные заряды локализованы отн. нек-х центров и способны перемещаться на микроскопические расстояния.

пл-ть токов св. зарядов

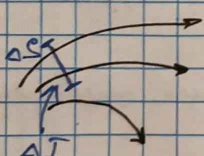
$\rho, \vec{j}$ ~ обусл. свободными зарядами.

пл-ть св. зарядов.

в-во:



$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \rho$$ ~ берём малый физ-ий объём.



~ берём малую площадку, чтобы линии почти ∥

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = j$$

Свободное пр-во = вакуум (в электродинамике.)

Токи в своб. пр-ве $\vec{j} = \vec{j}_{конв}$ (конвективные токи, тоже учитываются.)

$$I_{см} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{D}\, d\vec{s}$$

Первая пара 2) 3) ур-я ~ содерж. токи и заряды. → выражают поля через заряды и токи.

1), 4) ~ опр-т связь между $\vec{E}$ и $\vec{B}$ универсально. (вид связи не зависит от среды и тип источника.)

Эти ур-я не обр-т замкнутой системы (необх. дополнить материальными ур-ями ~ зависят от св-в среды.)
~ constitutive relations

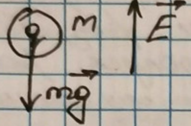
$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$$
$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$$
$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{B})$$

В простейшем случае - изотропной среды:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

диэл. проница. — $(\vec{B} = \mu \vec{H})$ магн. проница. — проводимость

Для того чтобы произв. вычисления ЭМ величин, необх. сформ. доп. соотн. метрологич. связь с полями другой природы (напр. с гравитац. полем.)



1 способ:
1) Постулировать силу Лоренца в вакууме:

$$\vec{F}_л = \int\limits_V \underbrace{\left\{ \rho \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}] \right\}}_{\vec{f}_л} dv$$

$\vec{f}_л$ - объёмная пл-ть силы Лоренца (прилож. к единице объема.)

~ не желаемый способ.

2) 2 способ: всякое измер. полей сводится к извлеч. энергии. Постулируем выражение для энергии (в линейной среде без дисперсии)

Линейная среда - в которой вып. принцип суперпозиции.
Недиспергирующая среда - среда, в которой связь между индукциями и напр-ями явл. локальными во времени и в пр-ве:

$$\vec{D}(t, \vec{r}) \longleftarrow \vec{E}(t, \vec{r})$$ ~ в реальности конечно такого нет.

Но скажем поля изм. медленно.

$$W = \int\limits_V \underbrace{\frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}}{8\pi}}_{w} dv$$

w - объёмная пл-ть энергии

Пределы применимости ур-ий Максвелла.

1. Теория Максвелла явл. феноменологической - такая теория опис. макроскоп. процессы, отвлекаясь от микроскоп. структуры сред. (работаем с усреднёнными величинами)

$10^{-8} \div 10^{-7}$ см. ~ размеры (крист. решетки и т. п.)
~ пространств. масштаб.

$l \gg 10^{-8} \div 10^{-7}$ см.
$\lambda \gg 10^{-8} \div 10^{-7}$ см. ‖ иначе среду нельзя считать сплошной

$$\Delta t \gg \frac{10^{-8} \div 10^{-7} \text{ см}}{\underset{\approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}}{c}} \approx 10^{-18} \text{ с}$$

Необходимое (но недост.) условие

Можно было бы ввести $\vec{e}, \vec{h}$ – малые флуктуации – микроскоп. напр. эл. поле, магн. поля

$$\overline{\vec{e}} = \vec{E}, \quad \overline{\vec{h}} = \vec{B}$$

2. Максвелловская теория считается классической (неквантовой) – не учитывает квантовых эффектов.

$$E = h\nu = \hbar\omega \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} \quad \text{– пост. Планка}$$

– т.е. энергия изм. не дискретно, а гладко.

$\Rightarrow$ необходимо $W >> \hbar\omega$.

3. Ур-я Максвелла справедливы для движущихся сред, но с некоторыми модификациями.

4. Ур-я Максвелла в инт. форме требуют интегрируемости вход. в них величин. (допускаются скачки, разрывы в полях и хар-к сред, если разрывы не допуск. расх. инт-в). чтобы сущ-ли интегралы.

Ур-я Максвелла в диф-ой форме (в случае неподв. среды.)

1) $\oint\limits_L \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \vec{B}\, d\vec{S}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \vec{B}\, d\vec{S} = \int\limits_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}, \qquad \text{по т. Стокса: } \oint\limits_L \vec{E}\, d\vec{l} = \int\limits_S \operatorname{rot}\vec{E}\, d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{S\text{-}ч} \left(\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) d\vec{S} = 0$$

т.к. по любой незамкн. пов-сти.

$\Rightarrow$ следует 0 подынт. выр.

$$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$1)\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2) $\underbrace{\oint\limits_L \vec{H}\, d\vec{l}}_{\int\limits_S \operatorname{rot}\vec{H}\, d\vec{S}} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S \vec{j}\, d\vec{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \vec{D}\, d\vec{S}$ – аналогично с 1)

$$2)\ \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

3) $\underbrace{\oint\limits_S \vec{D}\, d\vec{S}}_{\substack{\text{по т. О-Г.} \\ \int\limits_V \operatorname{div}\vec{D}\, dV}} = 4\pi\int\limits_V \rho\, dV$

$$\Rightarrow \int\limits_V \{\operatorname{div}\vec{D} - 4\pi\rho\}\, dV = 0$$

V – объем снова произвольный

$$3)\ \operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho$$

4) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

6.09.22.

1) $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

2) $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

3) $\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho$

4) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

Замечания:

1. Истинные и псевдовекторы в ур-ях Максвелла

$\operatorname{rot}\vec{E} = [\nabla, \vec{E}]$; $\vec{E}, \vec{D}$ ~ истинные векторы

ρ - истинный скаляр. $\Rightarrow \vec{j}$ - истинный вектор

$\Rightarrow$ чтобы во 2) $\operatorname{rot}\vec{H}$ имел смысл. ист. вект.

$\Rightarrow \vec{H}, \vec{B}$ - псевдовекторы.

$F_л = \frac{1}{c}[\vec{j}, \underset{\text{псевд.}}{\vec{B}}]$ ~ истин. вектор.

2. Все ли ур-я Максвелла независимы?

Расс-м 1) ур-е и применим оператор div.

$\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{E}}_{=0} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{B}$ $\Rightarrow \operatorname{div}\vec{B} = const$ (не зав. от времени)

пусть $t = -\infty$: $\vec{B} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{B} = 0$

$\forall t: \operatorname{div}\vec{B} = 0$

Но могут быть задачи, где $\vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})e^{i\omega t}$

$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega \Rightarrow i\omega \operatorname{div}\vec{B} = 0$

$\omega \neq 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{B} = 0$

так и получим 4) ур-е.

Применим div к ур-ю 2)

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{D}$ и исп-м 3 ур-е. (подставим)

$\boxed{\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$ ~ ур-е непрерывности (ЗСЭЗ)

в интегральной форме:

$\underbrace{\int_V \operatorname{div}\vec{j}\, dV}_{=\oint_S \vec{j}\, d\vec{S}} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = 0$

$\underbrace{\oint_S \vec{j}\, d\vec{S}}_{I} + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_V \rho\, dV}_{Q} = 0$; $I + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{Q} = -I}$

~ т.е. заряд утекает.

2) + 3) $\to$ ур. непрерывности. $\Rightarrow$ 2) + ур. непр. $\to$ 3)

из $\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\rho = -\int \operatorname{div}\vec{j}\, dt}$

~~Отсюда~~ Независимы только 1 и 2. Но 3 и 4 нужны в

6 скалярных уравнений

$\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{j}$ − 15 неизвестных. $15-6=9$ => нужно 9 ур.
(5·3) (материальных соотношений)

$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$
$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$
$\vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{B})$

3. О временной обратимости ур-ий Максвелла.

Опр. Процесс явл. обратимым во времени, если при замене $t \to -t$ вид ур-ий, опис. процесс, не изменяются.

$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$ ~ процесс диффузии (необратимый процесс)

$\Delta \psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ ~ ур-е Даламбера (опис. обратимый процесс)

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\quad t \to -t$, $\vec{v} \to -\vec{v}$ − это не есть нарушение обратимости. (если пустим „фильм" в обр. сторону → поедет обратно)

$\vec{H}, \vec{B} \to -\vec{H}, -\vec{B}$
$\vec{E}, \vec{D} \to \vec{E}, \vec{D}$

$\vec{j} \to -\vec{j}$ ~ про конвективные токи.

Если среда не проводящая $\sigma = 0$, $\vec{j}_{пр.} = \sigma\vec{E} = 0$, то такие процессы в ур-ях Максвелла явл. обратимыми во времени.
(иначе $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ ~ необр. процесс.)
$\vec{j} \to -\vec{j}$, $\vec{E} \to \vec{E}$

4. Принцип перестановочной двойственности (принцип дуальности)

1) Расм-м однородные ур-я Максвелла $\vec{j}=0$, $\rho=0$

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | (*) $\vec{E} \to \vec{H}$ | → с заменой получим: $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ => | $\vec{H} \to -\vec{E}$ | $-\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\operatorname{div}\vec{D} = 0$ | $\vec{D} \to \vec{B}$ | $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

$\operatorname{div}\vec{B} = 0$ | $\vec{B} \to -\vec{D}$ | $-\operatorname{div}\vec{D} = 0$

$\varepsilon \to \mu$
$\mu \to \varepsilon$

принцип перест. дв-ти заключ. в инвариантности сист. ур-ий максв. при преобр. (*)

2) $\vec{j} = \vec{j}^e$, $\rho = \rho^e$ ~ электрические токи/заряды

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^e$ => $\boxed{(*)}$ $\vec{j}^e \to \vec{j}^m$ $\binom{*}{*}$ => $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}^m$

$\rho^e \to \rho^m$

$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho$ $\quad$ фиктивные токи/заряды $\quad$ $\operatorname{div}\vec{B} = 4\pi\rho^m$

$div\,\vec{B} = 0$ $\qquad\qquad$ $div\,\vec{D} = 0$

Если мы знаем решение ур-ний Максвелла с эл-ским токами, то мы знаем ещё решение с фиктивными магнитными токами
(вводим как бы псевдоскаляры и псевдовекторы.)

3) Пусть есть и электрич. и фиктивн. магнитные токи.

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,m}$$

$$rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,e}$$

$$div\,\vec{D} = 4\pi\rho^{e}$$

$$div\,\vec{B} = 4\pi\rho^{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \boxed{(**)} \\ \vec{j}^{\,m} \to -\vec{j}^{\,e} \\ \rho^{m} \to -\rho^{e} \end{matrix}} \; (**) \Rightarrow$$

(2) $rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,e}$

(1) $rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,m}$

(4) $div\,\vec{B} = 4\pi\rho^{m}$

(3) $div\,\vec{D} = 4\pi\rho^{e}$

⇐ в этом и принцип перестанов. двойственности → при замене ещё 1но решение.

5. Ковариантность ур-ний электродинамики.
(инвариантность ур-ия отн. преобразов.)

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$ ← одно из ур-ий, получ. из ур-ий Максвелла. (волновое ур-е.)

6. Запись ур-ий Максвелла в системе SI:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$div\,\vec{D} = \rho$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

но в СГС. все векторы поля имеют одинак. размерность, а в SI их нужно поправлять каэф-ми (коэффициен.)

$$\vec{D} = \underbrace{\varepsilon_0 \varepsilon}_{\varepsilon_{SI}} \vec{E} \qquad \vec{B} = \underbrace{\mu_0 \mu}_{\mu_{SI}} \vec{H}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}; \quad \mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\frac{Гн}{м}$$

причём $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 2{,}99\ldots \cdot 10^{8}\,м/с$

Материальные уравнения
(соотношения)

1. Вакуум (свободное пр-во)

$$\vec{D} = \vec{E}, \quad \vec{H} = \vec{B}, \quad \vec{j}_{пр} = 0$$

2. Линейные среды.

Опр. Лин. средами - зав-ти между индукциями и напряж-ями полей опис. линейными функциями.

напр. $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$ ← никакими сообр. симметрии нельзя исключить одну переменную.

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\Rightarrow \vec B = -c\int \mathrm{rot}\,\vec E\, dt$ ~ связь поля $\vec D$ и $\vec E$ не лок. во времени

Наличие в среде связи $\vec D$ и $\vec E$ нелокальной во времени говорят о временной дисперсии.
Если $\vec D$ зав. от $\vec B$, то связь нелокальная и в пр-ве (между $\vec D$ и $\vec E$).

Диспергирующая среда — если есть хоть одна из дисперсий

на экзамене рассказать откуда следует нелок. во времени и пр-ве.

— собл. принцип причинности (будущее не может ок. влияние на настоящее.)

$$D_i(t,\vec r) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec r'\, \hat\varepsilon_{ij}(t,t',\vec r,\vec r')\, E_j(t',\vec r')$$ ~ общий вид линейной связи

ф-я влияния (оператор последействия.)

зависит от параметров в пространстве

$i=\overline{1,3}$ суммирование в пр-ве.

Должно вып. $|\vec r-\vec r'| - c^2(t-t')^2 \le 0$ ~ прецед. причинно-следственной связи.

<u>Случай стационарной однор. среды.</u>

<u>Стацион.</u> (однор. во времени) — среда, св-ва которой не изм. во времени под действ. внешних причин, не связ с пар. поля.

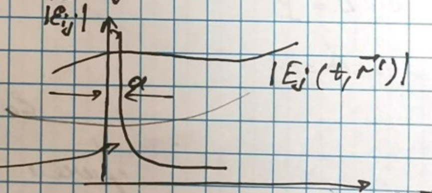
<u>Однородн.</u> ~ св-ва которой не изменяются в пр-ве. (нет каких-то особой точки.)

из стационар. и одн. $\Rightarrow \hat\varepsilon_{ij}(t,t',\vec r,\vec r') = \hat\varepsilon_{ij}(t-t',\vec r-\vec r')$

Когда можно не уч. простр. дисперсию? → Если поле в пр-ве изменяется достаточно медленно

$$\int d\vec r'\, \hat\varepsilon_{ij}(t-t',\vec r-\vec r')\, E_j(t',\vec r')$$

При дост. медленном изм. этой ф-ии на фоне резкой кривой, то



$$\int d\vec r'\, \hat\varepsilon_{ij}(t-t',\vec r-\vec r')\, E_j(t',\vec r') \approx \underbrace{\int d\vec r'\, \hat\varepsilon_{ij}(t-t',\vec r-\vec r')}_{\hat\varepsilon_{ij}(t-t')} \cdot E_j(t',\vec r)$$

$\Rightarrow \vec D$ и $\vec E$ стала локальной в пр-ве (опр-ся знач $\vec E$ в той же самой точке, или близкой окрестности) ($\vec r$ не берет, среда однор.)

Формально, если бы заменили простр. пер. на δ ф-ии получили тот же бы результат.

$$\hat\varepsilon_{ij}(t-t',\vec r-\vec r') = \hat\varepsilon_{ij}(t-t')\,\delta(\vec r-\vec r')$$

Временной дисп. можно пренебр. → если поле медленно изменяется во времени.

$\hat\varepsilon_{ij}(t-t') = \varepsilon_{ij}\,\delta(t-t')$ ~ замена с этим учётом

=> в среде без дисперсии:

$$D_i(t,\vec r) = \varepsilon_{ij} E_j(t,\vec r)$$

тензор диэл. прониц. среды

Аналогично можно получить зав-ти и для других вел-н.

Частные случаи сред без дисперсии

1. Изотропная среда без дисперсии.

Опр. Среда называется изотропной, если её локальные макроск. св-ва не зависят от направления. (инвариантна отн. группы вращения.)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \cdot \delta_{ij}$$ ~ диэл. проницаемость среды.

$$\Rightarrow D_i = \varepsilon E_i$$

$$\Rightarrow \vec D = \varepsilon \vec E \quad ; \quad \vec B = \mu \vec H \quad ; \quad \vec j = \sigma \vec E$$

9.09.22.

2. Анизотропная среда без дисперсии.

Опр. Среда называется анизотр. если её локальные макроскоп. св-ва различны в различных направлениях.

~ не могут быть описаны скалярами, опис. тензорами.

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \quad ; \quad B_i = \mu_{ij} H_j \quad ; \quad j_i = \sigma_{ij} E_j$$

Замечание: если у среды есть центр симметрии, и на неё не наложено внешнее магн. поле, то справедливо свойство:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad ; \quad \mu_{ij} = \mu_{ji} \quad ; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

=> тензор можно записать в главных осях (в диагональном виде - из ВБА.)

Пример $\vec D = \hat\varepsilon \vec E$, где $\hat\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$

Кристаллические среды делятся:

а) $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon$ ~ кубические.

б) $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{\parallel} \neq \varepsilon_{\perp}$ ~ одноосные кристаллы.

в) $\varepsilon_{11} \neq \varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}$ ~ двуосные кристаллы.

3. Частные случаи сред с дисперсией

$$\vec E(t,\vec r) = \int \vec E(\omega,\vec k)\, e^{i\omega t - i\vec k\vec r}\, d\omega\, d\vec k$$ ~ интеграл Фурье.

$$\vec k\vec r = k_x x + k_y y + k_z z$$

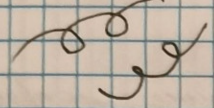
Если все поля расписать через интеграл Фурье, можно ввести тензоры, но на опр. частоте:

$$D_i(\omega,\vec{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})\, E_j(\omega,\vec{k})$$

Среди сред с дисперсией выделяют гиротропные.

Опр. Среда назыв. гиротропной, локальные макроскопические св-ва которой неинвар. отн. зеркальных отражений. (гиротропная - естественно-оптическая среда.)

Среды, которые сост. из зеркально несимметричных частиц. (водные растворы сахаров и т.д.)



~ спирали.

L-аланин. ~ находится в зеркально несимметр. форме. (пример.)

Магнитоактивные среды - становятся гиротропными при наложении внешнего магн-ого поля $\vec{B_0} = B_0 \vec{z_0}$ (плазма, ферриты) - плазма:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}$$ ~ похоже на одноосн. кристалл

Ферриты:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Если появл. в среде мнимость i ~ связано с омическими потерями

ε, g, η - Re

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$ ~ если это рав-во $\to$ тензор эрмитовый

или у ферритов: $\mu, \mu_a, \mu_{\parallel}$ - Re

$\mu_{ij} = \mu_{ji}^*$

Замечание: в любой среде появл. нелин. св-ва при каком-то опр-ом значении полей. (но мы не будем расс-ть нелин. поля.), напр.

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{E})\vec{E}$$

Векторы поляризации.

1. $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, $\vec{P}$ - вектор эл-ой поляризации

2. $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$

$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$, $\vec{M}$ - вектор намагниченности (вектор магнитной поляризации)

Пусть среда линейная и изотропная, т.е: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E}$

дипольн. момент в ед. объёма

$\vec{B} = \mu\vec{H} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \Rightarrow \vec{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\vec{H}$

магн. момент в ед. объёма

$\vec{p}^{e} = \int\limits_V \vec{P}\,dV \quad ; \quad \vec{p}^{m} = \int\limits_V \vec{M}\,dV$

Из принципа перест. двойственности: $\vec{P} \to \vec{M}$, $\vec{M} \to -\vec{P}$

Уравнения Максвелла в лин. изотр. средах.

$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ $\qquad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$

используем

$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho$ $\qquad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$

$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_P + \vec{j}_M) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, где

$\vec{j}_P = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$; $\vec{j}_M = c\cdot\operatorname{rot}\vec{M}$

$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_P)$, где

$\rho_P = -\operatorname{div}\vec{P}$

опис. те токи, кот. связаны с микроскоп. перемещ. связ. зарядов.

Замечания о процедуре усреднения микроскоп. ур-ий ЭМП (для сред без простр-ой дисперсии).

$\vec{e}, \vec{h}$ - микроскоп. напр-ти эл-го/магн-ого полей.

Тогда постулируются ур-я:

$\operatorname{rot}\vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}$

$\operatorname{rot}\vec{h} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,микро} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t}$

$\operatorname{div}\vec{e} = 4\pi\rho^{микро}$

$\operatorname{div}\vec{h} = 0$

Тогда при усреднении: $\overline{\vec{e}} = \vec{E}$, $\overline{\vec{h}} = \vec{B}$

$\overline{\vec{j}^{\,микро}} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + c\operatorname{rot}\vec{M}$

$\overline{\rho^{микро}} = \rho + \underbrace{(-\operatorname{div}\vec{P})}_{\rho_{связ}}$

Но, может возникнуть вопрос: $\operatorname{rot}\nabla = 0$, $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$

Как однозначно ввести $\vec{M}$ и $\vec{P}$.

Требования

1) $\vec{P}$ - должен. быть эл.дип. моментом ед. объёма.
   $\vec{M}$ - магн. дип. моментом ед. объёма
2) Обр. в 0 вне среды.
3) локально связаны в пр-ве с полями

=> тогда вводятся однозначно.

Сторонние источники.

Сущ-т задачи, в которых есть опр. зад. токи.

Опр. Сторонними назыв. источники, кот. не зависят от создаваемых ими полей.

обозн.: $\vec{j}_{ст}$, $\rho_{ст}$

должно вып-ся: $\operatorname{div}\vec{j}_{ст} + \frac{\partial \rho_{ст}}{\partial t} = 0$ иначе не выполняется з-н сохр. заряда и решения нет.

Ур-я Максвелла в таком случае:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{ст}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi(\rho + \rho_{ст})$$

$\vec{j} = \underbrace{\sigma\vec{E}}_{\vec{j}_{пр}} + \vec{j}_{ст}$, или $\vec{j}_{ст} = \sigma\vec{E}_{ст}$ $\Rightarrow \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{ст})$

Или более изощрённо через дип. моменты, т.е. ввести:

$\vec{P}_{ст}$, $\vec{M}_{ст}$ — будут явл. ист-ами стор. тока, тогда:

$$\Rightarrow \vec{j}_{ст} = \frac{\partial \vec{P}_{ст}}{\partial t} + c\operatorname{rot}\vec{M}_{ст}$$

$$\rho_{ст} = -\operatorname{div}\vec{P}_{ст}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{rot}\vec{H}}_{\vec{B}/\mu} = \frac{1}{c}\frac{\partial \overbrace{\vec{D}}^{=\varepsilon\vec{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{4\pi}{c}\underbrace{\vec{j}_{ст}}_{=\frac{\partial \vec{P}_{ст}}{\partial t} + c\operatorname{rot}\vec{M}_{ст}}$$, и подставим.

$$\operatorname{div}\underbrace{\vec{D}}_{\varepsilon\vec{E}} = 4\pi\rho + 4\pi\underbrace{\rho_{ст}}_{=-\operatorname{div}\vec{P}_{ст}}$$

тогда получим:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu} - 4\pi\vec{M}_{ст}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\vec{E} + 4\pi\vec{P}_{ст}\right) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon\vec{E} + 4\pi\vec{P}_{ст}\right) = 4\pi\rho$$

Введём новые обозначения: $\vec{\mathcal{D}}_н = \varepsilon\vec{E} + 4\pi\vec{P}_{ст}$

$\vec{\mathcal{H}}_н = \frac{\vec{B}}{\mu} - 4\pi\vec{M}_{ст}$ тогда получим.

новое

$$\operatorname{rot}\vec{\mathcal{H}}_н = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}_н}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\operatorname{div}\vec{\mathcal{D}}_н = 4\pi\rho$$

, т.е. теперь искомые неп-вы $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{\mathcal{D}}_н$, $\vec{\mathcal{H}}_н$

Принцип суперпозиции.

Пусть имеются источники, которые созд. поля:

$\vec{j}_I, \rho_I \to \vec{E}_I, \vec{H}_I$

$\vec j_{II}, \rho_{II} \to \vec E_{II}, \vec H_{II}$

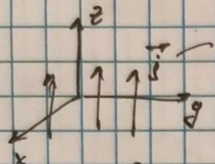
и пусть $\vec j_{III} = \vec j_I + \vec j_{II}$, $\rho_{III} = \rho_I + \rho_{III} \to \vec E_{III} = \vec E_I + \vec E_{II}$, ~ принцип суперпоз.

$\vec H_{III} = H_I + H_{II}$

Такое возможно если ур-я опис. полей были линейными. Ур-я Максвелла - линейные, => справ. только в лин. средах (чтобы мат-ые ур-я были линейными)

Граничные условия

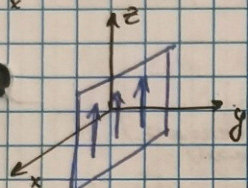
Замечания о пов-х токах и зарядах



— течёт объёмный ток

Начнём схлопывать его отн. оси z (сплющивать в лист)

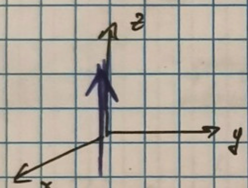
было $\vec j(x,y,z)$



$$\Rightarrow \vec j(x,y,z) = \underbrace{\vec i(x,z)}_{\text{пов-ая пл-ть тока}} \delta(y)$$

— дельта ф-я (что логично) при сжатии по y в 0 толщину, ток → уйдёт в беск.

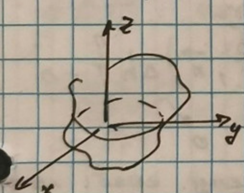
Схлопываем дальше по x



$$\vec j(x,y,z) = \vec z_0 \cdot I(z)\,\delta(x)\,\delta(y)$$

линейный ток

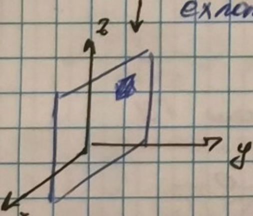
Рассмотрим объёмное распр-е заряда.



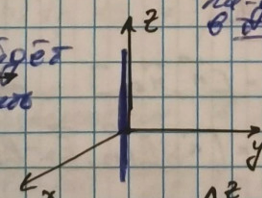
И снова схлопываем по y.

$$\Rightarrow \rho(x,y,z) = \underbrace{\sigma(x,z)}_{\text{пов. пл-ть заряда}} \delta(y)$$

схлопнется в пл-ть



перейдёт в нить

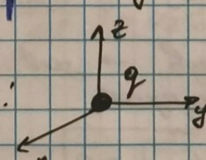


Это физ. стремл. к нулю пл-ди (площади) и получаем знач. в беск.

$$\rho(x,y,z) = q_{лин}(z)\,\delta(x)\,\delta(y)$$

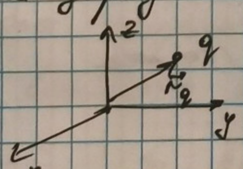
линейная пл-ть заряда.

Если сжать и по z:



$$\Rightarrow \rho(x,y,z) = q\cdot \underbrace{\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\delta(z)}_{\delta(\vec r)}$$

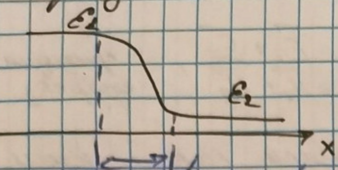
Если заряд не в н.к.:



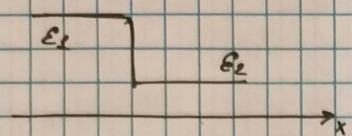
$$\Rightarrow \rho(\vec r) = q\cdot\delta(\vec r - \vec r_q)$$

Переходим к ГУ:

нам нужны универсальные ГУ — не завис. от конкр. св-в сред и не зависят от закона изм параметров сред на границе раздела.

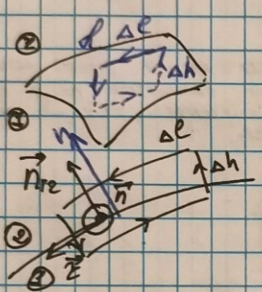


если переход резкий удобнее заменить на скачок



Получение ГУ из ур-ий Максвелла в инт-ой форме:

① ГУ для тангенциальных комп-т эл-ого поля



$$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\,d\vec{S}$$

$\vec{n}_{12}$ — договоримся, из 1 во 2 (всегда)

инт. теор. о среднем на участках

$$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = \underbrace{(\vec{E}_2, \vec{\tau})\Delta l}_{\text{по верхн. уч-ку}} + (\vec{E}_1, -\vec{\tau})\Delta l + O(|\vec{E}|\Delta h)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\,d\vec{S} = \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{n}\right)\Delta l\,\Delta h$$

Всё подставляем, переносим влево и делим на Δl. Потом

1) $\frac{\Delta h}{\Delta l} \to 0$; 2) $\Delta l \to 0$ ~ предельные переходы

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\frac{\Delta h}{\Delta l} \to 0 \\ \Delta l \to 0}} \left\{ (\vec{E}_2 - \vec{E}_1, \vec{\tau}) + \underbrace{O\left(|\vec{E}|\frac{\Delta h}{\Delta l}\right)}_{0} + \underbrace{\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{n}\right)\Delta h}_{0} \right\} = 0$$

схлопывается в точку

$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1, \vec{\tau}) = 0$ ~ непр-ть тангенц. сост. поля

$$\Rightarrow \boxed{E_{2\tau} = E_{1\tau}}$$

Чисто геометрически: $\vec{\tau} = [\vec{n}, \vec{n}_{12}]$, перепишем ГУ

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1, [\vec{n}, \vec{n}_{12}]) = (\vec{n}, [\vec{n}_{12}, \vec{E}_2 - \vec{E}_1]) = 0$$

Но $\vec{n}$ может быть произв. → зав. от обхода, но рез-т не изменится. => тогда следует

$$\boxed{[\vec{n}_{12}, \vec{E}_2 - \vec{E}_1] = 0}$$ ~ вторая запись ГУ

② ГУ для тангенциальной составл. поля $\vec{H}$. (та же картинка подходит.)

$$\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_V \vec{j}\,d\vec{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}\,d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = (\vec{H}_2, \vec{\tau})\Delta l + (\vec{H}_1, -\vec{\tau})\Delta l + O(|\vec{H}|\Delta h)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{D}\, d\vec{s} = \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{n}\right)\Delta l \Delta h$$

нельзя выносить из-под инт-ла. Выразим через δ-ф-ю

$$\int_S \underset{\vec{i}\,\delta(h)}{\vec{j}}\, d\vec{s} = \int (\vec{j}, \vec{n})\, dl\, dh \ominus$$, вспомним $\int \delta(h)\, dh = 1$.

$$\ominus \int (\vec{i}, \vec{n})\, dl = (\vec{i}, \vec{n})\Delta l$$

$$\lim_{\substack{\frac{\Delta h}{\Delta l}\to 0 \\ \Delta l \to 0}} \left\{ (\vec{H}_2 - \vec{H}_1, \vec{\tau}) + \underset{0}{O\left(|\vec{H}|\frac{\Delta h}{\Delta l}\right)} - \frac{4\pi}{c}(\vec{n}, \vec{i}) - \frac{1}{c}\underset{0}{\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{n}\right)\Delta h} \right\} = 0$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1, \vec{\tau}) - \left(\vec{n}, \frac{4\pi}{c}\vec{i}\right) = 0$$

исп-м: $\vec{\tau} = [\vec{n}, \vec{n}_{12}]$ и пользуемся циклической перестановкой

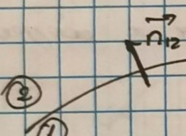
$$\left(\vec{n}, [\vec{n}_{12}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1]\right) - \left(\vec{n}, \frac{4\pi}{c}\vec{i}\right) = 0$$

$$\left(\vec{n}, [\vec{n}_{12}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] - \frac{4\pi}{c}\vec{i}\right) = 0$$

задаёт ориентацию (т.е. вообще говоря произвольный)

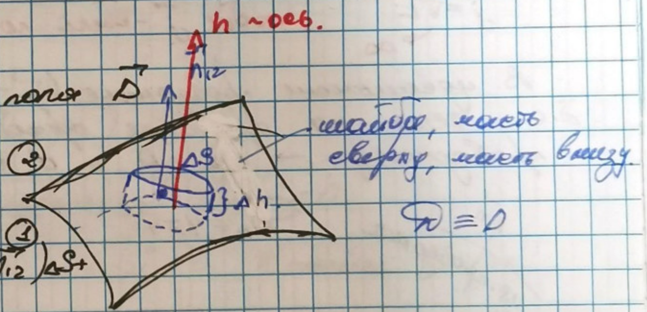
$$\Rightarrow \boxed{[\vec{n}_{12}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}}$$

вклад даёт только разность тангенциальных компонент.



~ произв. выб. ⊥ср. → потом тупо ⇒ $\vec{n}_{12}$ получим автоматически из 1 → 2

③ ГУ для нормальных компонент поля $\vec{D}$



$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{s} = 4\pi \int_V \rho\, dv$$

$$\oint_S \vec{D}\, \underset{\vec{n}\, ds}{d\vec{s}} = (\vec{D}_2, \vec{n}_{12})\Delta S + (\vec{D}_1, -\vec{n}_{12})\Delta S + O(|\vec{D}| \cdot S_{бок.})$$

$$\int_V \rho \underset{dh\, ds}{dv} = \int \sigma\, \delta(h)\, dh \cdot ds = \left\{ \int \delta(h)\, dh = 1 \right\} = \sigma \Delta S$$

Всё подставляем, переносим в одну сторону и делим на ΔS.

$$\lim_{\substack{\frac{\Delta h}{\sqrt{\Delta S}}\to 0 \\ \Delta S \to 0}} \left\{ (\vec{n}_{12}, \vec{D}_2 - \vec{D}_1) + \underset{0}{O\left(|\vec{D}| \cdot \frac{S_{бок}}{\Delta S}\right)} - 4\pi\sigma \right\} = 0$$

$$\boxed{(\vec{n}_{12}, \vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi\sigma}$$

разность нормальных компонент.

④ ГУ для нормальных компонент поля $\vec{B}$

выкладки все аналогичные, можно написать сразу.

$$\boxed{(\vec{n}_{12}, \vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0}$$

Все граничные условия в одной табличке:

1) $[\vec{n}_{12}, \vec{E}_2 - \vec{E}_1] = 0$

2) $[\vec{n}_{12}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}$

3) $(\vec{n}_{12}, \vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi\sigma$

4) $(\vec{n}_{12}, \vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$

а) $\operatorname{div}\vec{P} = -\rho^{связ}$ ~ ищем аналог в ур-х Максвелла и можем написать ГУ для других величин.

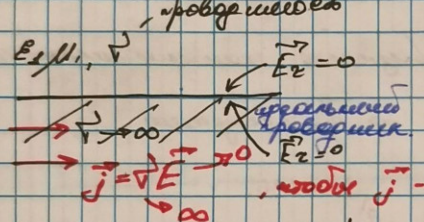
$$\boxed{(\vec{n}_{12}, \vec{P}_2 - \vec{P}_1) = -\sigma^{связ}}$$

б) $\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \Rightarrow (\vec{n}_{12}, \vec{j}_2 - \vec{j}_1) + \operatorname{div}\vec{i} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

появл., т.к. ток. в мех. случ-ях если есть σ может обр. в ∞ → это и учитываем.

~ Дома док-ть это соотношение.

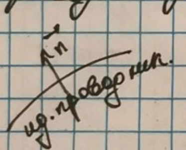


, чтобы $\vec{j}$ - было конечным

Чтобы не было путаницы с обознач.:

$\sigma \equiv \sigma^e$ ~ заряд.

В идеальном проводнике $(\sigma \to \infty)$, $\vec{E} \to 0 \Rightarrow \vec{E}_\tau = 0$
т.е. если на границе требуем. к идеальному проводнику → $E_\tau = 0$ и у внешней среды



$D_n = 4\pi\sigma^e$

Рассм-м случай переменных полей. $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$

Ур-я Максвелла для идеального проводника:

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = const(t)$ в ид. пр.

$\vec{E} = 0$ (ид.пр.)

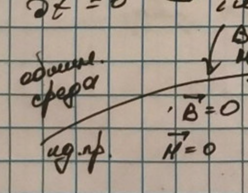
пусть в $t = -\infty$ $\vec{B} = 0$

$\Rightarrow \forall t: \vec{B} = 0, \vec{H} = 0$

Символически обознач.: $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \vec{B} = 0$

Такое справедливо и для гармонических процессов:

$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \to i\omega\vec{B} = 0 \to \vec{B} = 0 \Rightarrow$ магнитное поле отсутств.



Только для перем. полей! при подходе к границе ид. пр. B_n и $H_n = 0$

В статич. полях — несправедливо

Замечание: не путать сверхпроводники и идеальные проводники.

Свойства:

1) Получ. нами ГУ явл. верными для любых сред.
2) ГУ не зав. от переходного слоя между средами.

Все ли ГУ независимы? Т.к. ур-я Максвелла зависимы → то и ГУ м.б. зависимы, покажем для

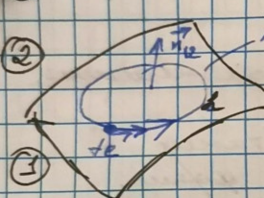
$\vec j = 0,\ \rho = 0$ $\quad (\vec i = 0,\ \varsigma = 0)$

$$\operatorname{rot}\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t} \xrightarrow{\partial/\partial t \neq 0} \operatorname{div}\vec B = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec H = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t} \longrightarrow \operatorname{div}\vec D = 0$$

Проверить $[\vec n_{12}, \vec E_2 - \vec E_1] = 0 \xrightarrow[?]{\partial/\partial t \neq 0} (\vec n_{12}, \vec B_2 - \vec B_1) = 0$

$$[\vec n_{12}, \vec H_2 - \vec H_1] = 0 \xrightarrow[?]{} (\vec n_{12}, \vec D_2 - \vec D_1) = 0$$



лежит на границе раздела сред.

Возьмём пред. знач. поля со стороны среды 2, а потом со среды 1.

$$-\left|\begin{aligned} \oint_L \vec E_2 d\vec l &= -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec B_2}{\partial t} d\vec S \\ \oint_L \vec E_1 d\vec l &= -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec B_1}{\partial t} d\vec S \end{aligned}\right.$$

$d\vec l$ — ещё тангенц.-й вектор.

$$0 = -\frac{1}{c}\int_{S-\forall} \frac{\partial}{\partial t}(\vec B_2 - \vec B_1, \vec n_{12})\, dS$$

Т.к. S ~ любая пов-ть. => подынтегр. выр. $= 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\vec n_{12}, \vec B_2 - \vec B_1) = 0, \quad \text{т.к. } \frac{\partial}{\partial t} \neq 0 \text{ в смысле выше}$$

$$\Rightarrow (\vec n_{12}, \vec B_2 - \vec B_1) = 0$$

Аналогично можно получить и для $\vec D$.

Попробуем получить из „правого" → „левое", но док-м наоборот.

Пусть $B_{2n} = B_{1n}$, т.е. $(\vec n_{12}, \vec B_2 - \vec B_1) = 0$

$$-\left|\begin{aligned} \oint_L \vec E_2 d\vec l &= -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec B_2}{\partial t} d\vec S \\ \oint_L \vec E_1 d\vec l &= -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec B_1}{\partial t} d\vec S \end{aligned}\right. \Rightarrow$$ запутается нормаль теперь справа

$$\oint_L (\vec E_2 - \vec E_1)\, d\vec l = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec E_2 - \vec E_1 = \nabla\psi$$

Если заранее не знаем, что $\vec E$ вихревое, то получить в общем случае не можем получить.

ГУ + принцип перестановочной двойственности. (ПД)

$[\vec{n}_{12}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}^{e}$ $\qquad \vec{i}^{e} \equiv \vec{i}$

$(\vec{n}_{12}, \vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi\rho^{e}$ $\qquad \rho^{e} = \rho$

↑ применим к ним принцип ПД, т.е. заменяем

$\vec{H} \to -\vec{E}$, $\quad \vec{i}^{e} \to \vec{i}^{m}$

$\vec{D} \to \vec{B}$, $\quad \rho^{e} \to \rho^{m}$

$\Rightarrow [\vec{n}_{12}, \vec{E}_2 - \vec{E}_1] = -\frac{4\pi}{c}\vec{i}^{m}$

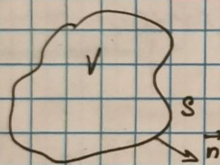
$(\vec{n}_{12}, \vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 4\pi\rho^{m}$

Иногда удобно ← Если бы были магнитные (заряды) токи, то
исп-ть такие скачки E_τ претерп. бы скачок. (так же с B_n.)
в задачах, как искусств. способ.

Энергетические соотношения ЭМП. Теорема Пойнтинга. (Poynting)

Теорема о том, что имеет место следующее соотношение:

$$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t} = Q + \Pi - A^{ст}}$$ ~ теорема Пойнтинга в интегральной форме.



$\boxed{W = \int_V w\,dV}$, w - объёмная п-ть эн. ЭМП.

W ~ полная энергия в объёме V

Q - мощность джоулевых (Joule) потерь в объёме V (энергия в ед. времени.)

$\boxed{Q = \int_V q\,dV}$, q - объёмная пл-ть мощности джоулевых потерь.

Π - поток энергии из V через замкн. пов-ть S

$\boxed{\Pi = \oint_S \vec{S}\,\underbrace{d\vec{s}}_{\vec{n}\,ds}}$ $\quad \vec{S}$ ~ вектор пл-ти потока энергии.

$A^{ст}$ - мощность сторонних источников (не работа!)

$\boxed{A^{ст} = \int_V a^{ст}\,dV}$, $a^{ст}$ ~ объёмная плотность мощности сторонних источников.

Чтобы привести к дифференциальному виду: $\Pi = \int_V \mathrm{div}\vec{S}\,dV$

$$\boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = q + \mathrm{div}\vec{S} - a^{ст}}$$

Если $q = 0$, $a^{ст} = 0$ $\Rightarrow$ $\mathrm{div}\vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ ~ совп. с ур-м непр-ти
~ это ЗСЭ.

Докажем теорему Пойнтинга в виде:

$$\operatorname{div}\vec{S} = -q + a^{ст} - \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad &\Big|\cdot\vec{H} \\ \operatorname{rot}\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\underbrace{\vec{j}}_{\sigma\vec{E}} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,ст} \quad &\Big|\cdot\vec{E} \end{aligned}\right\} (1)-(2)$$

сторонние
ист. тоже учитываем

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}}_{\operatorname{div}[\vec{E},\vec{H}]} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,ст}\cdot\vec{E} - \frac{1}{c}\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad \times\frac{c}{4\pi}$$

воспользуемся векторным тождеством:

$$\operatorname{div}\Big\{\underbrace{\frac{c}{4\pi}[\vec{E},\vec{H}]}_{\text{в. Пойтинга}}\Big\} = -\underbrace{\vec{j}\vec{E}}_{\sigma\vec{E}^2 = \frac{\vec{j}^2}{\sigma}} + (-1)\cdot\vec{j}^{\,ст}\vec{E} - \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

сравниваем:

$$\boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E},\vec{H}]}$$ ~ без док-ва (замечание ниже)

$$\boxed{q = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} = \sigma\vec{E}^2}, \quad \boxed{a^{ст} = -\vec{j}^{\,ст}\vec{E}}$$ ~ справедливо, если мы докажем:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)}$$

Док-м для среды: стационарной, линейной, недиспергирующей и изотропной.

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ~ линейная изотропная $\quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$ ~ стационарная.

$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\frac{\partial \overset{=\varepsilon\vec{E}}{\vec{D}}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \overset{=\mu\vec{H}}{\vec{B}}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) =$$ (для лин. среды без дисперсии)

$$= \frac{1}{8\pi}\cdot\left(\varepsilon\frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} + \mu\frac{\partial \vec{H}^2}{\partial t}\right) = \frac{1}{8\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}}{8\pi}\right) = \frac{\partial w}{\partial t}$$

это постулировали

$$\operatorname{div}\left\{\frac{c}{4\pi}[\vec{E},\vec{H}]\right\} = \operatorname{div}\vec{S}$$ ~ немного обманули, следует ли из рав-ва div → рав-во векторов? математически не совсем корректно

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ ← можно добавить rot некого другого поля.

Но док-ся это из СТО через ЗСИ.

Импульс: $\vec{G} = \int\limits_V \vec{g}\,dV \quad \vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}$, если $\vec{P}_{мех} + \vec{G} = const$

=> отсюда следует, что никакой добавки $\operatorname{rot}\vec{a}$ — не нужно.

Пусть среда остается стац-ой, недисперг., линейной, но анизотропной.

$\varepsilon_{ik}, \ \mu_{ik}$

Если тензоры обл. св-вом симметрии: $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$
$\mu_{ik} = \mu_{ki}$

$$\frac{1}{4\pi}\vec E\frac{\partial \vec D}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}E_i\frac{\partial \overset{=\varepsilon_{ik}E_k}{D_i}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{ik}E_i\frac{\partial E_k}{\partial t} = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon_{ik}E_i\frac{\partial E_k}{\partial t} + \underbrace{\varepsilon_{ik}E_i\frac{\partial E_k}{\partial t}}_{\varepsilon_{ki}E_k\frac{\partial E_i}{\partial t},\ \varepsilon_{ki}=\varepsilon_{ik}}\right)$$

ε_{ik} - не зав. от времени

$\ominus$ {т.к. суммир-е по i, k, можем в одной из сумм переменить} $\ominus$

$$\ominus\ \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}\left(E_i\frac{\partial E_k}{\partial t}+E_k\frac{\partial E_i}{\partial t}\right) = \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}\frac{\partial}{\partial t}(E_i, E_k) = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(E_i\underbrace{\varepsilon_{ik}E_k}_{D_i}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec E\vec D}{8\pi}\right)$$

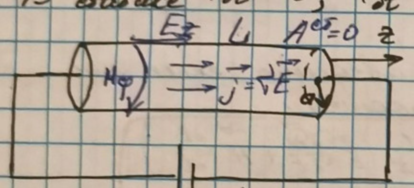
Если проделать с магнитными составляющими:

$$\frac{1}{4\pi}\vec H\frac{\partial \vec B}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec H\vec B}{8\pi}$$

=> при тензорном хар-ре можно док-ть справ-ть теоремы Пойнтинга.

16.09.22

В статике $\frac{\partial}{\partial t}=0$; $\frac{\partial W}{\partial t}=0$



Теорема Пойнтинга:

$Q+\Pi=0$; $Q=\frac{j^2}{\sigma^2}\pi a^2 L$

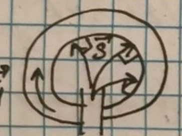
$\rho=a$: $E_z=\frac{j}{\sigma}$, $I=j\pi a^2$

$H_\varphi=\frac{2I}{ca}=\frac{j2\pi a}{c}$; $\vec S=\frac{c}{4\pi}[E_z\cdot\vec z_0, H_\varphi\cdot\vec\varphi_0]$ $\oplus=0$

$[\vec z_0,\vec\varphi_0]=-\vec\rho_0$ => $\vec S=-\vec\rho_0\frac{j^2a}{2\sigma}$

(ρ_0,φ_0,z_0) – пр. тройка

$$\Pi=\oint\underbrace{\vec S\,d\vec s}_{\rho_0\,ds} = -\frac{j^2a}{2\sigma}2\pi a L = -\frac{j^2}{\sigma}\pi a^2 L$$



=> $\Pi+Q=0$, ч.т.д.

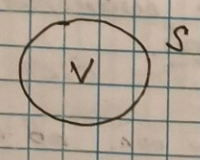
Теорема о единственности решений уравнений Максвелла при заданных нач. и граничных условиях.

Среда стационарная, линейная, недиспергирующая, изотропная.

$\vec D=\varepsilon\vec E$; $\vec B=\mu\vec H$; $\vec j=\sigma\vec E$, где $\varepsilon,\mu>0$ $\sigma>0$

ЭМ поле $\vec E(t,\vec r)$, $\vec H(t,\vec r)$ в $\forall t>0$ в $\forall$ т. объёма V, огранич. замкнутой поверхностью S однозначно определяется уравнениями Максвелла совместно с материальными соотношениями, если:

1) При $t=0$ в V: $\vec E(0,\vec r)=\vec E_0(\vec r)$, $\vec H(0,\vec r)=\vec H_0(\vec r)$



2) $\forall t>0$ в V заданы: сторонние источники: $\vec j^{ст}(t,\vec r)$

3) $\forall t>0$ на S задано либо $\vec{E}_\tau(t,\vec{r})$, либо $\vec{H}_\tau(t,\vec{r})$ (одновременно нельзя!)

Пусть $\exists\ \vec{E}_1, \vec{H}_1$ и $\vec{E}_2, \vec{H}_2$

$\vec{E}_3 = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \qquad \vec{H}_3 = \vec{H}_2 - \vec{H}_1$ ~ разностное поле.

1) $t=0 \quad E_{30}=0 \quad H_{30}=0$

2) $\vec{j}_3^{\,ст}=0$

3) S: либо $\vec{E}_{3\tau}=0$, либо $\vec{H}_{3\tau}=0$.

Запишем т. Пойнтинга для разностного поля

$$-\frac{\partial W_3}{\partial t} = \oint_S \frac{c}{4\pi}[\vec{E}_3,\vec{H}_3]\underbrace{d\vec{S}}_{\vec{n}dS} - \overset{=0}{A_3^{ст}} + \underbrace{\int_V \frac{\vec{j}_3^{\,2}}{\sigma}dV}_{\geq 0} \qquad (\vec{j}_3^{\,ст}=0)$$

S: $[\vec{E}_3,\vec{H}_3]\cdot\vec{n} = [\vec{E}_{3\tau},\vec{H}_{3\tau}]\cdot\vec{n} \overset{3)}{=} 0$

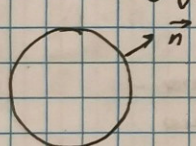
$\Rightarrow -\frac{\partial W_3}{\partial t} \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial W_3}{\partial t} \leq 0$ ~ энергия во времени не может нарастать!

$W_3(t=0) \overset{1)}{=} 0 \Rightarrow \forall t>0 \quad W_3 = 0 \qquad \int_V \underbrace{\frac{\varepsilon \vec{E}_3^2 + \mu \vec{H}_3^2}{8\pi}}_{\geq 0} dV = 0$

$\Rightarrow \vec{E}_3 = 0,\ \vec{H}_3 = 0 \Rightarrow \vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{E}_2, \vec{H}_2$ совпадают, ч.т.д.

1) Поля не было $\vec{E}_3=0$.
2) Источников разностного поля нет.
3) Поток энергии разностного поля отсутствует

Можно задать импедансное граничное условие.



3) $\vec{E}_\tau = \eta_s[\vec{H},\vec{n}]\big|_S = \eta_s[\vec{H}_\tau,\vec{n}]\big|_S$

характеристический импеданс поверхности. (поверхностный импеданс) $\eta_s > 0$.

$$\underbrace{[\vec{E}_3,\vec{H}_3]\cdot\vec{n}}_{[\vec{E}_{3\tau},\vec{H}_{3\tau}]\cdot\vec{n}} = \eta_s\underbrace{[[\vec{H}_{3\tau},\vec{n}],\vec{H}_{3\tau}]\cdot\vec{n}}_{\vec{n}(\vec{H}_{3\tau},\vec{H}_{3\tau}) - \vec{H}_{3\tau}\overset{=0}{(\vec{n},\vec{H}_{3\tau})}} = \eta_s \vec{H}_{3\tau}^2 \Rightarrow -\frac{\partial W_3}{\partial t} \geq 0$$

если $R\to\infty$; $E, H \sim \frac{e^{-ikR}}{R}$ ~ расходящаяся сферическая волна

Для статики док-во т. единственности не работает (нет н.у/г.у.). То же самое для сред с дисперсией и гармонических полей

Статика.

$$\frac{\partial}{\partial t}=0 \Rightarrow (1)\begin{cases}\mathrm{rot}\,\vec{E}=0\\ \mathrm{div}\,\vec{D}=4\pi\rho\\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E}\end{cases} \qquad (2)\begin{cases}\mathrm{rot}\,\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}\\ \mathrm{div}\,\vec{B}=0\\ \vec{B}=\mu\vec{H}\end{cases}$$

ур-я электростатики $\qquad$ ур-я магнитостатики

$$(3)\ \begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec E = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec j = 0 \quad \Leftarrow \mathrm{div}\,\vec j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec j = \sigma \vec E + \vec j^{\,ст} \end{cases}$$

→ иначе энергия рассеется $\vec j$ пропадёт без $\vec j^{\,ст}$.

ур-я токовой статики

Электростатика.

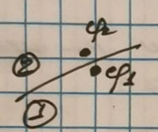
Из (1): $\mathrm{rot}\,\nabla = 0$

$\vec E = -\nabla\varphi$, φ - скалярный потенциал электростат-ого поля.

$$\underbrace{\varphi(\vec r) - \varphi(\infty)}_{=0} = \int_{(r)}^{(\infty)} \vec E\, d\vec l$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}\ ,\quad E_\tau = (\vec\tau, \vec E)$$

$$(\vec\tau, -\nabla\varphi_1) = (\vec\tau, -\nabla\varphi_2) \Rightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\tau}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$



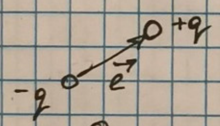
$$\Rightarrow \boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = const(\tau)}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec E\, d\vec l$$

Если поле $\vec E$ на границе раздела сред не бесконечно, а в пределе точки (1) и (2) совпадают $\Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 0$

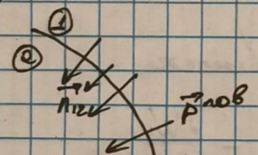
$\Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \varphi_2}$ - потенциал непрерывен на границе раздела сред.

Пусть на границе раздела сред задан двойной электр-ий слой:



$\vec p = q\vec l$ $\quad |\vec l| \to 0$, $q \to \infty$

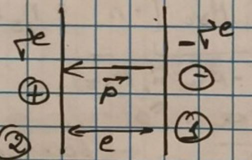
$q|\vec l| = const$



мощность двойного электрического слоя - дипольный момент, приходящийся на единицу площади поверхностного слоя

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\vec n_{12}, \vec p^{\,пов})$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\underbrace{\sigma^e\, l}_{p^{пов}})\quad \sigma>0\ l>0$$



можно рассм-ть как плоский конденсатор:

$$E = \frac{4\pi\sigma^e}{\varepsilon}$$

Поля удалённых участков вклада не дают.

$$(\vec n_{12}, \vec D_2 - \vec D_1) = 4\pi\sigma$$

$$\vec D = \varepsilon\vec E = -\varepsilon\nabla\varphi \qquad (\vec n_{12}, \nabla) = \frac{\partial}{\partial n_{12}}$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{12}} - \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{12}} = -4\pi\sigma$$

Ур-я для потенциала φ:

$$\vec E = -\nabla\varphi\ ;\quad \vec D = \varepsilon\vec E = -\varepsilon\nabla\varphi$$

$$\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\varphi) = -4\pi\rho$$

$$\varepsilon \underbrace{\mathrm{div}\nabla\varphi}_{\nabla^2=\Delta} + (\nabla\varepsilon, \nabla\varphi) = -4\pi\rho$$

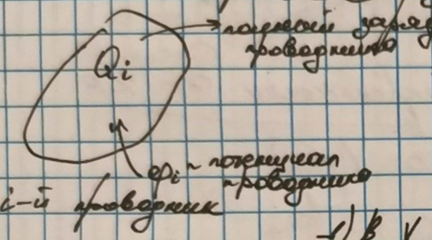
$$, \quad \varepsilon=\varepsilon(x,y,z)$$

$$\varepsilon\Delta\varphi + (\nabla\varepsilon,\nabla\varphi) = -4\pi\rho$$

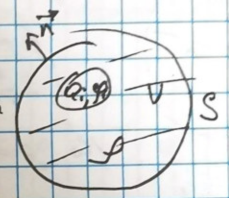
Для однородной среды: $\nabla\varepsilon = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}}$ ~ ур-е Пуассона

$\rho=0 \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi=0}$ ~ ур-е Лапласа

Теорема единственности при решении задачи электростатики.



Решение ур-я для э/с поля в объёме V, ограниченном замкнутой пов-ю S единственно, если:



1) В V задано распр-е зарядов ρ;

2) Заданы либо Q_i, либо φ_i проводников, находящихся в объёме V;

3) На пов-ти S заданы либо $\varphi|_S$, либо $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S$

краевая задача Дирихле — Фон-Неймана

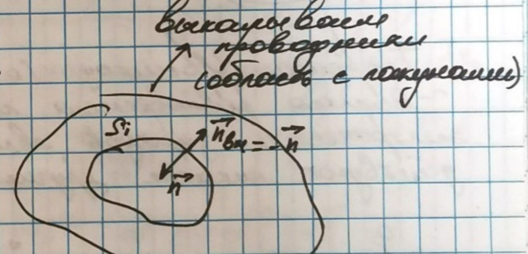
$\vec E_1, \varphi_1$ $\quad$ $\vec E_2, \varphi_2$

Образуем разностное поле $\varphi_3=\varphi_2-\varphi_1$

1) $\rho_3=0$

2) либо $Q_{3i}=0$, либо $\varphi_{3i}=0$

3) $S: \varphi_3|_S=0$, либо $\frac{\partial\varphi_3}{\partial n}=0$



$$\oint_{S+\sum_i S_i} \varphi_3\cdot\varepsilon\nabla\varphi_3 \underbrace{d\vec S}_{\vec n\, dS} = \int_V \mathrm{div}(\varphi_3, \varepsilon\nabla\varphi_3)\,dV =$$

$$= \int_V \{\varphi_3\cdot\underbrace{\mathrm{div}(\varepsilon,\nabla\varphi_3)}_{-4\pi\rho_3 \overset{1)}{=} 0} + (\nabla\varphi_3, \varepsilon\nabla\varphi_3)\}\,dV = \int_V \varepsilon(\nabla\varphi_3)^2\, dV$$

проводник – эквипотенц. объём

$$\oint_{S+\sum_i S_i}\varphi_3\cdot\underbrace{\varepsilon\nabla\varphi_3\vec n}_{\frac{\partial\varphi_3}{\partial n}}\,dS = \oint_S \underbrace{\varphi_3\,\varepsilon\frac{\partial\varphi_3}{\partial n}}_{3)=0}\,dS + \sum_i\varphi_{3i}\oint_{S_i}\varepsilon\underbrace{\frac{\partial\varphi_3}{\partial n}}_{-\frac{\partial\varphi_3}{\partial n_{вн}}}\,dS =$$

$$= \sum_i \varphi_{3i}\oint_S \underbrace{\left(-\varepsilon\frac{\partial\varphi_3}{\partial n_{вн}}\right)}_{D_{n\,вн}=4\pi\sigma_i}\, dS = 4\pi\sum_i \underbrace{\varphi_{3i}Q_{3i}}_{2)=0} \quad // \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_V\varepsilon(\nabla\varphi_3)^2\,dV=0 \Rightarrow \nabla\varphi_3=0\Rightarrow \vec E_3=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ поля $\vec E_1, \varphi_1$; $\vec E_2, \varphi_2$ совпадают, ч.т.д.

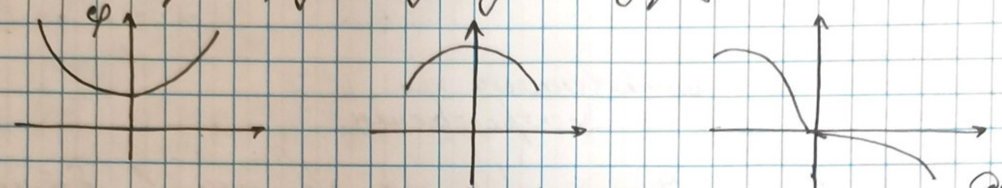
Условие фон-Неймана $\Rightarrow \varphi_3 = const$

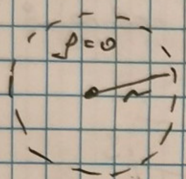
Условие Дирихле $\Rightarrow \varphi_3 = const$ (вплоть до пов-ти) $S: \varphi_3=0 \Rightarrow \varphi=0$

Некоторые общие теоремы в электростатике.

1) Теорема о минимуме или максимуме („минимакс") потенциала.

Потенциал φ не может достигать ни абсолютно минимального, ни абсолютно максимального значения в области пр-ва, где отсутствуют заряды.





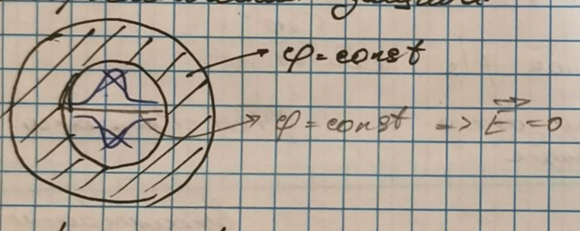
Пусть φ – макс/мин. $\Rightarrow$ в окрестности $\frac{\partial\varphi}{\partial r} \gtrless 0$

$$\oint_S \varepsilon \vec{E}\, d\vec{S} = -\oint_S \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial r}\, dS \lessgtr 0 \quad (\neq 0)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad d\vec{S} = \vec{r}_0\, dS$$

Но $\rho = 0 \Rightarrow \oint_S \varepsilon \vec{E}\, d\vec{S} = 0 \Rightarrow$ зарядов должно быть ∎

1.1) Электростатическая защита.



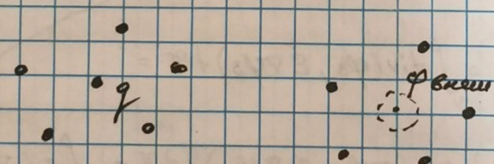
2) Теорема Ирншоу (о неустойчивости системы точечных зарядов)

– Всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных электрических зарядов является неустойчивой, если на них не действуют никакие другие силы, кроме кулоновских.

q

$W_{вз} = q\varphi_{внеш}$

↳ энергия взаимодействия



Равновесие $\Rightarrow \nabla W_{вз} = min \Rightarrow \varphi_{внеш} = min$, но внешних источников внутри объёма нет $\Rightarrow \varphi_{внеш} \neq min \Rightarrow \nabla W_{вз} \neq 0 \Rightarrow$ нет равновесия ∎

3) Теорема взаимности.

– Пусть задано ограниченное в пр-ве распр-е зарядов $\rho^{(1)}$, создающее распределение потенциала $\varphi^{(1)}$ и известны $Q_i^{(1)}$, $\varphi_i^{(1)}$ (полные заряды, потенциалы) в этом поле.

Пусть при сохранении той же конфигурации проводников и диэлектриков задано другое ограниченное в пр-ве $\rho^{(2)}$ ... $\varphi^{(2)}$ и известны $Q_i^{(2)}$, $\varphi_i^{(2)}$.

$$\int_V \left(\rho^{(1)}\varphi^{(2)} - \rho^{(2)}\varphi^{(1)}\right) dV + \sum_i \left(Q_i^{(1)}\varphi_i^{(2)} - Q_i^{(2)}\varphi_i^{(1)}\right) = 0$$

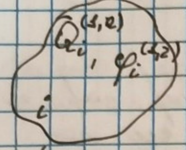
19.09.22.

Док-во теоремы взаимности: $\int\limits_V (\rho^{(1)}\varphi^{(2)} - \rho^{(2)}\varphi^{(1)})dV + \sum\limits_i (Q_i^{(1)}\varphi_i^{(2)} - Q_i^{(2)}\varphi_i^{(1)}) = 0$

(1) – величины, отн. к некой 1й задаче.

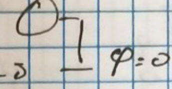
(2) – –//– ко 2й задаче.

т.е. мы не можем просто изменять



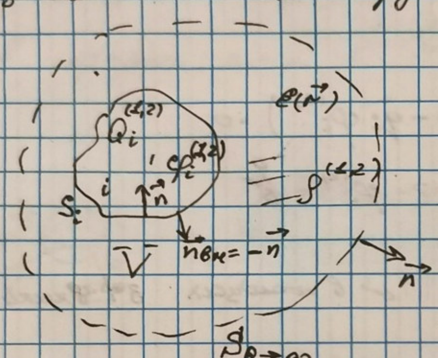
$\varepsilon(\vec{r})$ параметры проводников.

Будет ли считаться измен. конфиг. проводников, если его заземлить?



проводник Если соед. беск. тонким проводом, то это не наруш. → конфигурации системы. (провод не накапливает заряда.)

Заземление не явл. нарушением конфигурации.



Записываем ур-я Максвелла:

$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(1)}) = -4\pi\rho^{(1)} \quad \Big| \cdot \varphi^{(2)}$$
$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}) = -4\pi\rho^{(2)} \quad \Big| \cdot \varphi^{(1)}$$

$$\varphi^{(2)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(1)}) - \varphi^{(1)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}) = -4\pi(\rho^{(1)}\varphi^{(2)} - \rho^{(2)}\varphi^{(1)})$$

Слева: $\varphi^{(2)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(1)}) - \varphi^{(1)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}) = \operatorname{div}(\varphi^{(2)}\varepsilon\nabla\varphi^{(1)} - \varphi^{(1)}\cdot\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}) \overset{\text{проверка}}{=}$

$$= \underline{\varphi^{(2)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(1)})} + \cancel{(\nabla\varphi^{(2)}, \varepsilon\nabla\varphi^{(1)})} - \underline{\varphi^{(1)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(2)})} - \cancel{(\nabla\varphi^{(1)}, \varepsilon\nabla\varphi^{(2)})}$$

Переносим всё в левую часть, делим на 4π и интегрируем по объёму:

$$\int\limits_V \operatorname{div}\{\dots\}dV = \oint\limits_S \{\vec{\ }\}d\vec{S}$$ – пользуемся теоремой О-Г сразу.

$$\Rightarrow \int\limits_V (\rho^{(1)}\varphi^{(2)} - \rho^{(2)}\varphi^{(1)})dV + \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_{R\to\infty} + \sum_i S_i} (\varphi^{(2)}\varepsilon\nabla\varphi^{(1)} - \varphi^{(1)}\varepsilon\nabla\varphi^{(2)})d\vec{S} = 0$$

Если берём интеграл по беск. удал. сфере $S_{R\to\infty}$:

$$0 = \oint\limits_{S_{R\to\infty}} (\underbrace{\varphi^{(2)}}_{\sim\frac{1}{R}}\underbrace{\varepsilon\nabla\varphi^{(1)}}_{\sim\frac{1}{R^2}} - \underbrace{\varphi^{(1)}}_{\sim\frac{1}{R}}\underbrace{\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}}_{\sim\frac{1}{R^2}})d\vec{S}$$ = {чем дальше мы уходим, всё больше похожим зарядом, у поб. $\varphi \sim \frac{1}{R}$, $E \sim \frac{1}{R^2}$}

$S_{R\to\infty} \sim R^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_{R\to\infty} + \sum_i S_i} (\varphi^{(2)}\varepsilon\nabla\varphi^{(1)} - \varphi^{(1)}\varepsilon\nabla\varphi^{(2)})d\vec{S} = \frac{1}{4\pi}\sum_i \oint\limits_{S_i} [\varphi^{(2)}\varepsilon\nabla\varphi^{(1)} - \varphi^{(1)}\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}]\underbrace{\vec{n}}_{-\vec{n}_{вн.}} dS =$$

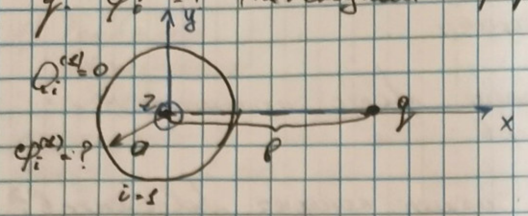
$$= \frac{1}{4\pi}\sum_i \Big[\varphi_i^{(2)}\oint\limits_{S_i}\underbrace{\Big(-\varepsilon\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial n_{вн}}\Big)}_{D^{(1)}_{n_{вн}} = 4\pi\sigma_i^{(1)}}dS - \varphi_i^{(1)}\oint\limits_{S_i}\underbrace{\Big(-\varepsilon\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial n_{вн.}}\Big)}_{D^{(2)}_{n_{вн}} = 4\pi\sigma_i^{(2)}}dS\Big] =$$

потому. на пов-ти проводника = const → выносится

$$= \sum_i \Big(\varphi_i^{(2)}\underbrace{\oint\limits_{S_i}\sigma_i^{(1)}dS}_{Q_i^{(1)}} - \varphi_i^{(1)}\underbrace{\oint\limits_{S_i}\sigma_i^{(2)}dS}_{Q_i^{(2)}}\Big) = \sum_i (Q_i^{(1)}\varphi_i^{(2)} - Q_i^{(2)}\varphi_i^{(1)})$$

$$\Rightarrow \int\limits_V (\rho^{(1)}\varphi^{(2)} - \rho^{(2)}\varphi^{(1)})dV + \sum_i (Q_i^{(1)}\varphi_i^{(2)} - Q_i^{(2)}\varphi_i^{(1)}) = 0 \quad \boxed{\text{Ч.Т.Д.}}$$

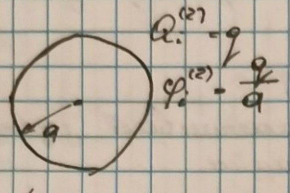
Пример исп. этой теоремы: имеется идеально провод. шар. сфера радиуса a (не зар.) на расст. b есть заряд q. $\varphi_i^{(1)}$ - ? (потенциал сферы)



$$\rho^{(1)} = q\,\delta(x-b)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

$$\varphi^{(1)} = \dots$$

Составл. доп. задачу. (забир. зар., где он есть и ставим туда, где его нет



$$\rho^{(2)} = 0$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} > a$$

применим теорему:

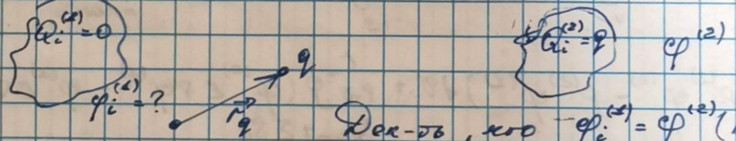
$$\underbrace{\int q\,\delta(x-b)\,\delta(y)\,\delta(z)\cdot\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz}_{=\frac{q^2}{b}} + \left(0 - q\,\varphi_i^{(1)}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_i^{(1)} = \frac{q}{b}$$

„Алгоритм" ← в столбцах источники.

	Сфера	Точка „b"
I	0; $\varphi_i^{(1)} = ?$	q; $\dots$
II	q; q/a	0; q/b

$$0\cdot\frac{q}{a} + q\cdot\frac{q}{b} = q\,\varphi_i^{(1)} + 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_i^{(1)} = \frac{q}{b}$$

Упражнение:



Док-ть, что $\varphi_i^{(1)} = \varphi^{(2)}(\vec r_q)$

Классификация задач электростатики

1. Прямая задача электростатики (нахождение полей по распр. источников)

Необх. задать:
1) $\varepsilon(\vec r)$, проводники
2) $\rho(\vec r)$
3) либо Q_i, либо φ_i
4) граничные условия.

$\Rightarrow \varphi = ?$, $\vec E = -\nabla\varphi$

2. Обратная задача (по полю находить источники.) Дано: φ (или $\vec E$) найти $\rho = ?$

Прямые задачи электростатики.

Прямая задача электростатики для безграничной, однородной изотр. среды. Ф-я Грина. Общее решение ур-я Пуассона.

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta G = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$$

$G = G(\vec{r}, \vec{r}_1)$ ~ ф-я Грина для прямой задачи электростатики

Удалось получить, что $G = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$

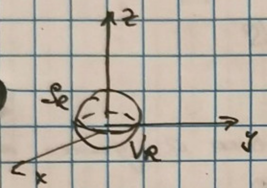
Рассм-м более простую задачу:

$$\Delta G = -4\pi\delta(\vec{r})$$

$$G = G(r) = \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{r}$$

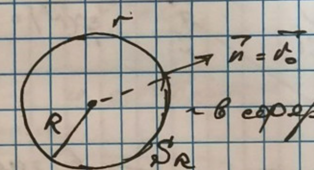
Рассмотрим $r \neq 0$, $\Delta G(r) = 0$

в сферич. с.к.: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \underbrace{\frac{\partial G}{\partial r}}_{-\frac{1}{r^2}}\Big) \overset{?}{=} 0$ → $G = \frac{1}{r}$ ~ подходит



$$\int_{V_R} \Delta G\, dv = -4\pi \underbrace{\int_{V_R} \delta(\vec{r})\, dv}_{1}$$, $R \to 0$ ~ вот в таком смысле надо понимать значение обобщ. ф-ии в физике. (слабый предел Коши)

$$\lim_{R\to 0} \int_{V_R} \underbrace{\Delta G}_{\mathrm{div}\nabla G} dv = \lim_{R \to 0} \oint_{S_R} \nabla G \underbrace{d\vec{S}}_{\vec{r}_0 dS} =$$



~ в сферич. с.к.

$$= \lim_{R\to 0} \int_{S_R} \underbrace{\frac{\partial G}{\partial r}}_{-\frac{1}{r^2}} dS = \lim_{R \to 0} (-1)\cdot\frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2 =$$

$$= -4\pi$$

$\Rightarrow$ $-4\pi = -4\pi$ ~ равенство выполняется.

Решение ур-ия Пуассона:

Теорема Грина. $$\int_V [\varphi \Delta G - G \Delta\varphi]\, dv = \oint_S \Big[\varphi\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big] dS$$

$G = \frac{1}{|\vec{r}\,' - \vec{r}_1|}$, $\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon}$

' ~ пер. интегр.

$$\int_V \Big[\varphi(\vec{r}\,') \underbrace{\Delta_{r'} G(\vec{r}\,', \vec{r}_1)}_{-4\pi\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_1)} - G(\vec{r}\,', \vec{r}_1)\Delta_{r'}\varphi(\vec{r}\,')\Big] dv' =$$

вычисл. по $\vec{r}\,'$

$$= \oint_S \Big[\varphi(\vec{r}\,') \underbrace{\frac{\partial G(\vec{r}\,', \vec{r}_1)}{\partial n}}_{\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\vec{r}\,' - \vec{r}_1|}} - \underbrace{G(\vec{r}\,', \vec{r}_1)}_{\frac{1}{|\vec{r}\,' - \vec{r}_1|}} \frac{\partial\varphi(\vec{r}\,')}{\partial n}\Big] dS'$$

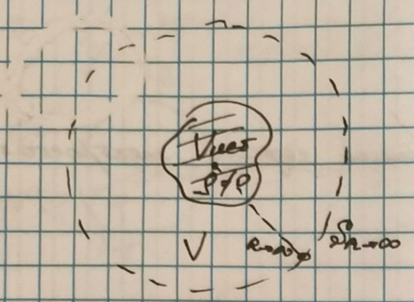
$$\int_V \varphi(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_1)\, dv' = \varphi(\vec{r}_1)$$

$$\varphi(\vec{r}_1) = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}_1 - \vec{r}\,'|} dv' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \Big[\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}\,'|}\frac{\partial\varphi(\vec{r}\,')}{\partial n} - \varphi(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\vec{r}\,' - \vec{r}_1|}\Big] dS'$$

Введём: $\vec{r}_1 = \vec{r}$, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$, $R = |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R} dv' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \Big\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\Big\} dS'$$ ~ интегральное ур-е для φ

Считаем, что ист. наход. в огр. области пр-ва



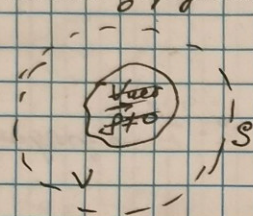
$$\oint_{S_{R\to\infty}} \left\{ \underbrace{\frac{1}{R}}_{\sim\frac{1}{R}}\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\sim\frac{1}{R^2}} - \underbrace{\varphi}_{\sim\frac{1}{R}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}}_{\sim\frac{1}{R^2}} \right\} dS' = 0$$

$S_R \sim R^2$

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_{ист}} \frac{\rho(\vec r\,')}{R}\, dV' + 0$$

опять в $R \to \infty$ ист. кажутся точечн. зарядами

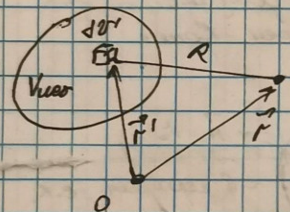
сравниваем.



пусть пов-ть S не в беск, но целиком охватывает область источников

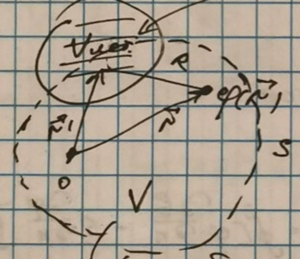
$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_{ист}} \frac{\rho(\vec r\,')}{R}\, dV' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \{\dots\}\, dS'$$

$\Rightarrow \oint_S \{\dots\}\, dS' = 0$ всё равно равно 0, даже не на бесконечности.



$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_{ист}} \frac{\rho(\vec r\,')}{R}\, dV'$$

Пусть



в таком случае $\oint_S \{\dots\}\, dS' \neq 0$ даёт вклад, который не знаем.

$$\frac{1}{4\pi}\oint \{\dots\}\, dS = \varphi_{пр.сл.} + \varphi_{дв.сл.}$$

простой слой   двойной слой

интегр. по объёму не целиком $V_{ист}$.

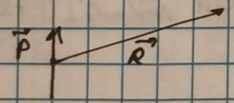
$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R} = \vec n \cdot \nabla_{\vec r\,'}\frac{1}{R} =$ прямой проверкой получается $= \frac{(\vec n, \vec R)}{R^3}$, $\vec R = \vec r - \vec r\,'$

$$\varphi_{пр.сл.} = \frac{1}{\varepsilon}\oint_S \frac{\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)}{R}\, dS'$$

$\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ — $\sigma_{эфф.}$

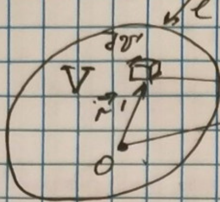
$\sigma_{пов}$ ~ мощность пов. слоя

$$\varphi_{дв.сл.} = \frac{1}{\varepsilon}\oint_S \frac{\left(\underbrace{-\frac{\varepsilon\varphi}{4\pi}\vec n}_{=\vec P_{эфф}}, \vec R\right)}{R^3}\, dS'$$



$$\varphi = \frac{(\vec p, \vec R)}{\varepsilon R^3}$$ ~ для диполя.

Поле произв. сист. заряда на больших расст-ях от неё.
(разложение по мультиполям.)
Понятия дипольного и квадрупольного моментов.



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\,dV' \quad - ?$$

$|\vec{r}| \gg \max|\vec{r}\,'|$ ~ ℓ

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

Если $x', y', z' = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} = \underbrace{\frac{1}{R}\Big|_{r'=0}}_{1/r}$ ~ первый член разложения.

$$\frac{1}{R} = \underbrace{\frac{1}{R}\Big|_{\vec{r}\,'=0}}_{1/r} + x'_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec{r}\,'=0} + \frac{1}{2!}x'_\alpha x'_\beta\left(\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec{r}\,'=0} + \dots$$

индексное суммир. $\alpha, \beta = \overline{1,3}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec{r}\,'=0} = \frac{x_\alpha}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{r} \quad (1)$$

при $\alpha \neq \beta$: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec{r}\,'=0} = \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{1}{r}$ (2а)

при $\alpha = \beta$: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2_{1,2,3}}\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec{r}\,'=0} = \frac{3x^2_{1,2,3}}{r^5} - \frac{1}{r^3} = \frac{\partial^2}{\partial x^2_{1,2,3}}\frac{1}{r}$

Подставляем в самое первое ур-е и оставляем в наб. $'$-ые элементы.

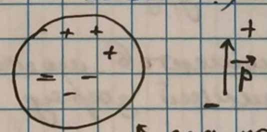
$$\varphi(\vec{r}) = \overbrace{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}\int\rho(\vec{r}\,')\,dV'}^{\varphi\text{монополя}} + \overbrace{(-1)\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{r}\right)\int\limits_V\rho(\vec{r}\,')x'_\alpha\,dV'}^{\varphi\text{диполя}} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\frac{1}{r}\right)\int\limits_V\rho(\vec{r}\,')x'_\alpha x'_\beta\,dV'}_{\varphi\text{квадруполя}} + \dots$$

$\varphi_{\text{моноп.}} = \frac{Q}{\varepsilon r}$ (с 1ым слаг. всё понятно.)

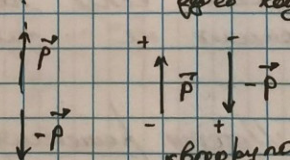
20.09.22

$$\varphi_{\text{мон}} = \frac{1}{\varepsilon r}\underbrace{\int\limits_V\rho(\vec{r}\,')\,dV'}_{Q} = \frac{Q}{\varepsilon r}$$



для наблюд. в беск. будет казаться диполем.

$$\varphi_{\text{дип}} = -\frac{1}{\varepsilon}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{r}\right)}_{(1)\ = -\frac{x_\alpha}{r^3}}\underbrace{\int\limits_V\rho(\vec{r}\,')x'_\alpha\,dV'}_{p_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,3}$$



квадруполь.

p_α ~ три числа. $p_1 = p_x$ и т.д.

$\Rightarrow \vec{p} = \int\limits_V\rho(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'\,dV'$ ~ дип. момент системы.

из 8 зарядов — октопуль.
→ остальные — мультиполи.

$$\Rightarrow \varphi_{\text{дип.}} = \frac{p_\alpha x_\alpha}{\varepsilon r^3} = \frac{(\vec{p},\vec{r})}{\varepsilon r^3}$$ ~ потенциал созд. диполем.

$p_\alpha x_\alpha = p_x x + p_y y + p_z z$

Рассмотрим 3е слагаемое

$$\varphi_{\text{квадр.}} = \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\frac{1}{r}\right)\underbrace{\int\limits_V\rho(\vec{r}\,')x'_\alpha x'_\beta\,dV'}_{Q_{\alpha\beta}}$$

$Q_{\alpha\beta} = \int_V \rho(\vec r\,') x'_\alpha x'_\beta \, dV'$ – тензор (электр-ого квадрупольного момента)

можно выбрать оси так, что $Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha}$ – примет диагональный вид.

Вводим величину:

$$D_{\alpha\beta} = 3Q_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\int_V \rho(\vec r\,') \overbrace{(x'^2+y'^2+z'^2)}^{r'^2} dV'$$

$$\Rightarrow \quad Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\left(D_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\int_V \rho(\vec r\,') \, r'^2 \, dV'\right)$$

т.к. $\delta_{\alpha\beta}$ – симметр. тензор отн. главн. диагонали, то видно, что $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$

$$Sp\,\hat D = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$$

Вместо Q представления через D:

$$\varphi_{квадр} = \frac{1}{6\varepsilon} D_{\alpha\beta} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{1}{r}}_{(2а)\ и\ (2б)} + \frac{1}{6\varepsilon}\int_V \rho(\vec r\,') \, r'^2 \, dV' \cdot \underbrace{\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{1}{r}}_{\Delta \frac{1}{r} = 0}$$

по повтор. индексам осущ. суммирование, остаются суммы вторых производных → получим оператор Лапласа. (находимся далеко от н.к.)

ф-ла Грина $r \neq 0$

Учит. (2а), (2б) и $Sp\,\hat D = 0$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{квадр.} = \frac{1}{6\varepsilon} D_{\alpha\beta} \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} = \frac{1}{2\varepsilon} D_{\alpha\beta}\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}$$ – потенциал квадруполя.

Поле монополя $\varphi_{мон} \sim \frac{1}{r}$

$$\varphi_{дип.} = \frac{(\vec p, \vec r)}{\varepsilon r^3} \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\varphi_{квадр.} \sim \frac{1}{r^3}$$

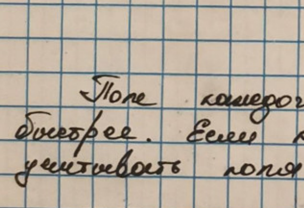
Поле каждого след. мультиполя спадает как r^{-1} быстрее. Если какой-то член пропадает нужно учитывать поля другие → быстрее спад.

Знач. дип. моментов может зависеть от выбора нач. коорд, если полный заряд системы не равен 0.

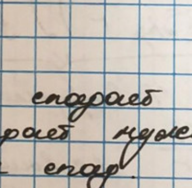
Д/З: док-ть что, если полный зар. системы $= 0$, то дип. момент не зависит от выбора нач. координат.

Методы решения краевых задач электростатики. Конструктивные методы решения краевых задач электростатики.

1. Метод металлизации эквипотенциальных поверхностей.

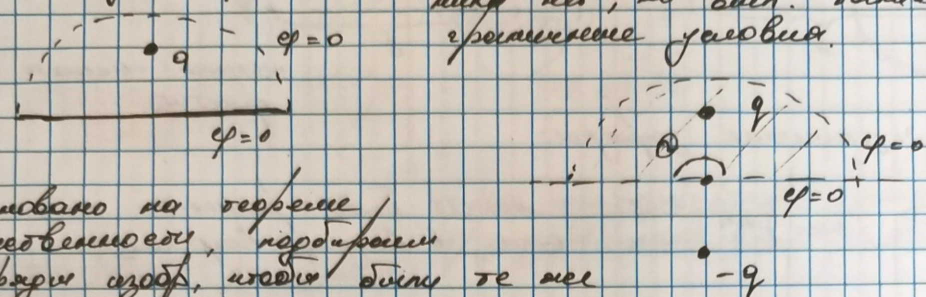


Если известно решение просто для эквипотенц. пов-ей без металлов



В силу теорему единственности → решения совпадают

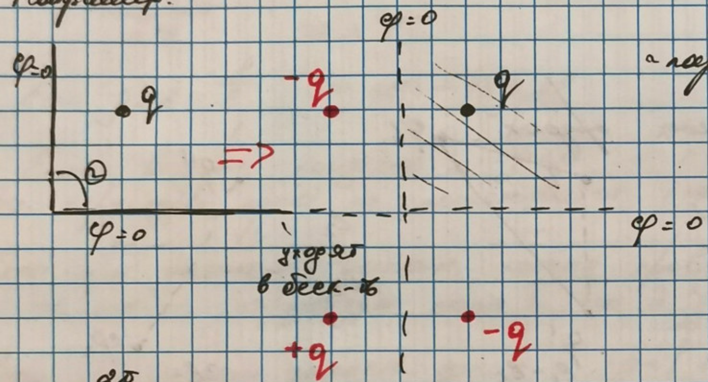
2. Метод изображений: рассм-м другую задачу, где проводника нет, но вып. такие же граничные условия.



1) Основано на теореме единственности, подбираем заряды изобр., чтобы были те же самые ГУ

2) Помещаем изобр. вне той области, где ищем решение.

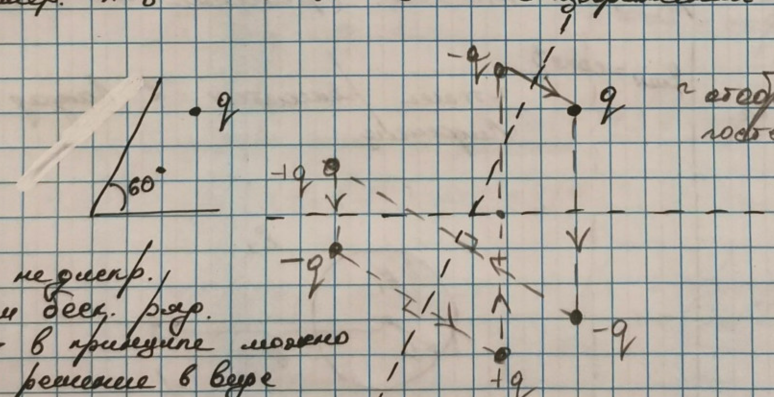
Например:



~ парно обеспечивают такое же решение и ГУ

$\Theta = \frac{2\pi}{n}$, $n = 2, 4, 6, 8 \ldots$ ~ если угол Θ имеет дискретность, то нужно ввести $n-1$ изображений.

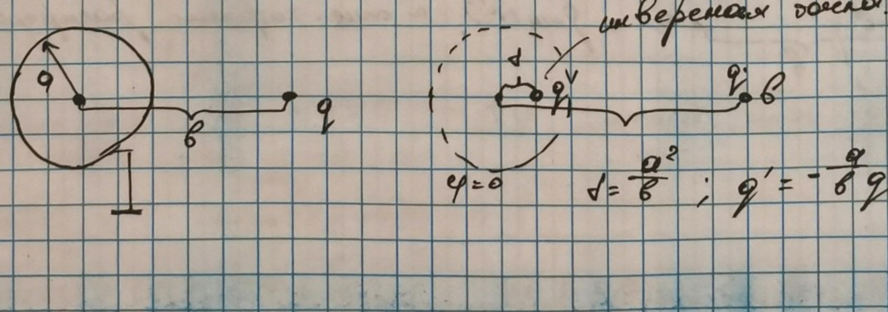
пример. $n=6$ → $\Theta = 60° = \frac{\pi}{3}$ → 5 изображений



~ отобр. отн. осей последоват. замкнётся

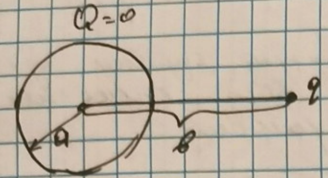
Если Θ не дискр. → получим беск. ряд изобр. → в принципе можно получить решение в виде ряда.

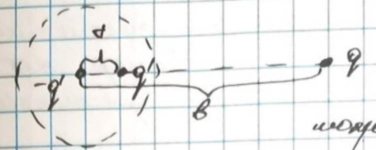
Пусть есть заземл. сфера!



$d = \frac{a^2}{b}$; $q' = -\frac{a}{b} q$

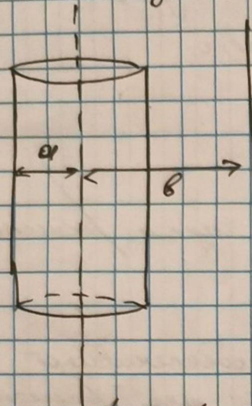
Если незар. сфера.





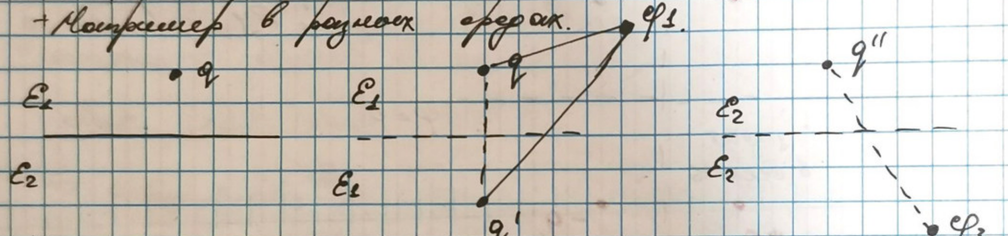
можно начать с практик.

Более экзотические заряды:



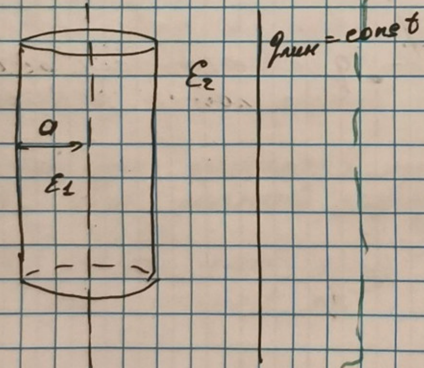
$q_{лин} = const$ может быть решена м.и. опис. в Ландау-Лифшице.

+ Полупространство в разных средах.



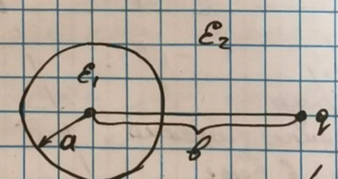
если $q' = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} q$ $\quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} q$

Надо точку φ_1 и φ_2 → перенести на границу раздела сред и убедиться в ГУ $\varphi_1 = \varphi_2$, $D_{1n} = D_{2n}$. (решение есть в Сивухине)

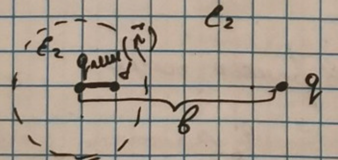


$q_{лин} = const$

— только решается в Ландау-Лифшице.



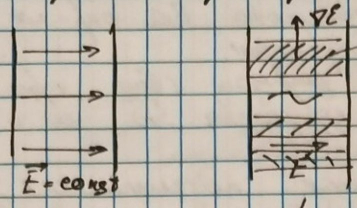
— сначала говорили, что не решается м.и. (но можно, однако сложно догадаться.



$q_{лин}(\vec r)$ — опис. хитрым распределением.

3. Метод заполнения диэлектриком.

На простом примере → плоский конденсатор



заполнение вдоль силовых линий (трубок)

$\nabla\varepsilon \perp \vec E, \vec D$

но $\vec E$ такое же однородное (должно остаться)

при таком заполн. сохр. структура поля $\vec E$, такое же как в отсутствии заполнения.

Проверим:

$$div(\varepsilon\nabla\varphi) = -4\pi\rho$$

$$\varepsilon\, \underbrace{div\nabla\varphi}_{\Delta\varphi} + \overbrace{(\nabla\varepsilon, \nabla\varphi)}^{=0} = -4\pi\rho \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$\nabla\varepsilon \perp \nabla\varphi$

Если $\rho_{нов} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ → $\Delta\varphi = -4\pi\rho_{нов}$

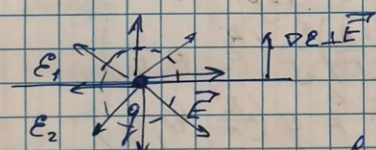
Если внутри конд. сис.: $\rho = 0$ → $\Delta\varphi = 0$ ⇒ с введением в-ва структура поля не поменяется (но не значение!)

⇓

Если при данном заполн. потенц. проводников ост. неизм., то сохр. не только структура поля $\vec E$, но и значения.

Если при данном заполн. фикс. $\varphi = \int_{(r)}^{\infty} \vec E\, d\vec\ell$ заряды, в частн. зар. проводников, то сохр. лишь структура поля $\vec E$

Пример:



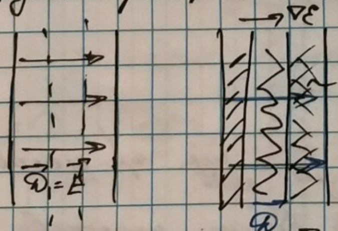
$$\oint_S \vec D\, d\vec S = 4\pi q$$

по верхн. полусфере, потом по нижней $\oint \varepsilon E_r(r)\, dS = 4\pi q$

$$\varepsilon_1 E_r(r)\cdot 2\pi r^2 + \varepsilon_2 E_r(r)\cdot 2\pi r^2 = 4\pi q$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{2q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2) r^2} \sim \frac{1}{r^2}$$ — структура не изм., но значение — да.

Другой пример заполнения



заполн. вдоль эквипотенциалей.

⇒ здесь сохр. структура поля $\vec D$

Док-м, что $\vec D = -\varepsilon\nabla\varphi = -\nabla\psi$ может быть представ. в виде новой скал. ф-ии ψ

$$rot\vec D = 0\ ? \to rot(\varepsilon\nabla\varphi) = 0\ ?$$

$$\varepsilon\, \overbrace{rot\nabla\varphi}^{=0} + [\nabla\varepsilon, \nabla\varphi] \overset{?}{=} 0$$

$\nabla\varepsilon \parallel \nabla\varphi$ ⇒ всё верно по теореме из ВТА $\vec{D}$ может быть выр. через ψ

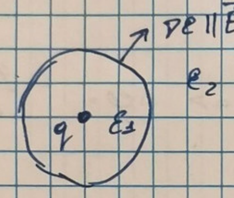
$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho \;\rightarrow\; \Delta\psi = -4\pi\rho$ ~ ничем не отлич. от прошлого, всё опр-ся зарядом.

$\vec{D} = -\nabla\psi$

Если при данном заполн. сохр. заряды (вып. при неизм. зарядах), то сохр. не только структура $\vec{D}$, но и знач.

Если всё. заполнение при фикс. потенциалах, то сохр. лишь структура поля $\vec{D}$.

Пример: $\bullet\, q \rightarrow D = \frac{q}{r^2}$

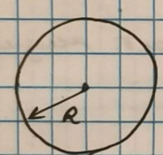


→ вдоль эквипотенц., зар. не измен.

$\rightarrow D_{1,2} = \frac{q}{r^2}$; $E_{1,2} = \frac{q}{\varepsilon_{1,2} r^2}$

Замечания. (не входят в коллоквиум)

1. О методе инверсии.



$r' = \frac{R^2}{r}$; пусть есть решение ур-я

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

$$\varphi(r,\theta,\psi),\ \rho(r,\theta,\psi)$$

Известно другое решение автоматически ур-я:

$$\Delta\varphi' = -4\pi\rho'$$

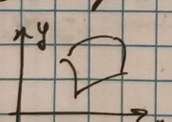
$$\rho'(r,\theta,\psi) = \left(\frac{R}{r}\right)^5 \rho\left(\frac{R^2}{r},\theta,\psi\right)$$

$$\varphi'(r,\theta,\psi) = \frac{R}{r}\,\varphi\left(\frac{R^2}{r},\theta,\psi\right)$$

см. Джексон. Т-2 §-6.

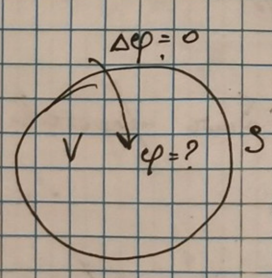
2. О методе конформного отображения.

Если есть сложная геометрия → с помощью конф. отобр. можно перейти к простой. Применим только для двумерных полей.



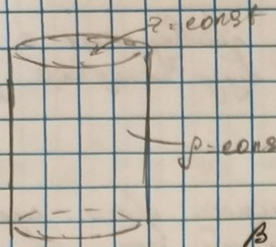
Есть у Ландау-Лифшица

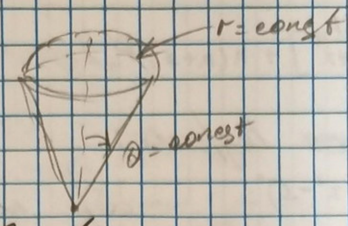
Метод разделения переменных.



Для применения метода с зад. гр. условием:

Необх. чтобы пов-ть S из участков коорд. поверхн сист. коорд, в которых переменные разделяются. (известно таких 11 с.к.)





В двумерном случае раздел. в любой с.к. подч. конформным отобр. x, y.

$\varphi \in C^2$ в V
$\varphi \in C$ на S } необх., чтобы решение получилось в виде сходящихся рядов.

Пример: $\Delta\varphi = 0$

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = -h^2$$

$$\Rightarrow Z'' - h^2 Z = 0 \quad \Rightarrow Z = C_1 e^{-hz} + C_2 e^{hz}$$

$$\frac{X''}{X} + h^2 = -\frac{Y''}{Y} = \varkappa_y^2 \quad \Rightarrow Y'' + \varkappa_y^2 Y = 0$$

$$\Downarrow \qquad Y(y) = B_1 \cos\varkappa_y y + B_2 \sin\varkappa_y y$$

$$\frac{X''}{X} = \underbrace{-h^2 + \varkappa_y^2}_{-\varkappa_x^2} \quad \Rightarrow -h^2 + \varkappa_y^2 = -\varkappa_x^2 \Rightarrow h^2 = \varkappa_x^2 + \varkappa_y^2$$

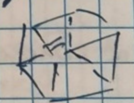
$$X'' + \varkappa_x^2 X = 0$$

$$X = A_1 \cos\varkappa_x x + A_2 \sin\varkappa_x x$$

рассм-м быстро, не рассм. знаки констант (из МмФ)

$$\Rightarrow \varphi = (A_1 \cos\varkappa_x x + A_2 \sin\varkappa_x x)(B_1 \cos\varkappa_y y + B_2 \sin\varkappa_y y)\,\cdot$$
$$\cdot \left(C_1 e^{-\sqrt{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2}\,z} + C_2 e^{\sqrt{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2}\,z}\right)$$

~ константы опр-ся из ГУ (например в коробке 6 граней → 6 ГУ.
→ и получим дискр. набор $\varkappa_{x,n}$, $\varkappa_{y,m}$
→ решение в виде ряда.



23.09.22.

Задача о диэлектрич. шаре в однородном электр-ом поле

$\Delta\varphi = 0$; ищем в сферических коорд.-х $\varphi(r, \theta, \psi)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} = 0$$

Рассм-м случай, когда $\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = 0$ (обл. симметрией отн. оси z)

$\Rightarrow$ ищем решение $\varphi = \varphi(r, \theta) = \underline{R(r)}\,\underline{\Theta(\theta)}$

вырождённая из мат физики (уметь выводить)

$$\Rightarrow \varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right] P_n(\cos\theta)$$, где P_n – полиномы Лежандра

$P_n(x)$ | $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)P_n = 0$ ← приводится к такому виду исходное уравнение

Из справочника формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$ — обр. полную ортог. систему ф-ий на отр. $x \in [-1;1]$

$P_0 = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, ...

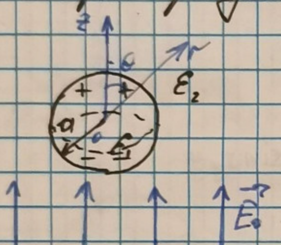
Соотношение ортогональностей:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$, в нашем случае $x = \cos\theta$

пересчёт

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\,P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

Теперь перейдём к задаче: т.к. зарядов нет, то для обл. 1 и 2 должно выполн-



$$\Delta\varphi_{1,2} = 0 \quad ; \quad |\varphi_1| < \infty$$

По направлению $\vec{E}_0$ несложно сообразить:

$$\varphi_0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$$

$$\lim_{r\to\infty}\varphi_2 = -E_0 r\cos\theta$$ — должно также вып-ся

Требуем выполнение ГУ: $\varphi_1 = \varphi_2\big|_{r=a}$ (1)

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}$$ (2) (т.к. $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ в сф.к.)

Запишем вид решения в области 1: во внутр. обл-ти шара не может быть беск. знач. => $B_n = 0$

$$\varphi_1 = A_0\underbrace{P_0(\cos\theta)}_{1} + A_1 r\underbrace{P_1(\cos\theta)}_{\cos\theta} + \dots$$

Для 2 области: просто коэф. в обл. 2

$$\varphi_2 = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 r\cos\theta + \dots + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta + \dots$$

В качестве естеств. физ.-ого предположения, т.к. $\lim_{r\to\infty}\varphi_2 = -E_0 r\cos\theta$ оставляются только эти слагаемые:

$$\varphi_1 = A_1 r\cos\theta$$
$$\varphi_2 = \bar{A}_1 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta$$
| — если уровн. всем удов., то по т. единств. наше решение

φ_2 при $r\to\infty$: $\bar{A}_1 = -E_0$

$$\varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta$$

Остальные коэф. ищем через ГУ (выписываем сразу решение системы):

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0 \quad ; \quad B_1 = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}a^3E_0$$

$\Rightarrow \varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2} E_0 \underbrace{r\cos\theta}_{z}$

$\Rightarrow \vec E_1 = -\nabla\varphi_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\vec E_0$ ⇒ отлич. только множителем

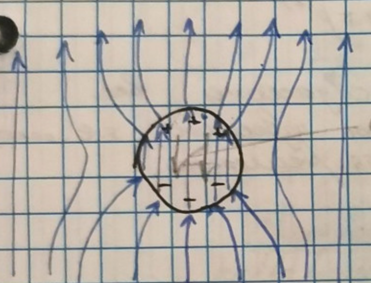
$\varphi_2 = \underbrace{-E_0 r\cos\theta}_{\varphi_0} + \underbrace{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2} a^3 E_0 \frac{\cos\theta}{r^2}}_{\text{похоже на потенц. диполя}}$

$= \frac{(\vec p, \vec r)}{\varepsilon_2 r^3}$, если $\vec p = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\varepsilon_2 a^3 \vec E_0$

⇒ шар приобретает некоторый эффективный дипольный момент.

Нарисуем картинку силовых линий, пусть $\varepsilon_1>\varepsilon_2$.

$\Rightarrow \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}<1$ ~ поле внутри меньше.



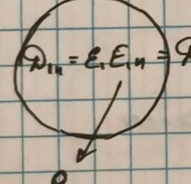
внутри поле $\uparrow\downarrow \vec E_0$ ~ поэтому ослабло

Случай идеально провод. шара.

⇒ поле внутри равно 0.

Если хотим $E_{1n}\to 0$, то $\varepsilon_1\to\infty$

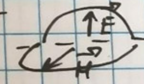
т.е. достаточно совершить пред.



$D_{1n}=\varepsilon_1E_{1n}=D_{2n}=\varepsilon_2E_{2n}$ переход $\varepsilon_1\to\infty$ в старом решении.

$\Rightarrow \vec p = \lim_{\varepsilon_1\to\infty}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\varepsilon_2 a^3\vec E_0 = \varepsilon_2 a^3 \vec E_0$

Масштаб шара $\lambda_{1,2} \gg a$ → задача имеет прим. и для перем. полей.



Метод возмущений

Пусть есть среда с $\varepsilon^{(0)}=const$ и мы знаем решение

$\Delta\varphi^{(0)} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon^{(0)}}$

Пусть теперь рассм-м другую среду $\varepsilon=\varepsilon^{(0)}+\varepsilon^{(1)}(\vec r)$

можем найти приближённое аналит-ое решение при усл. $|\varepsilon^{(1)}| \ll \varepsilon^{(0)}$

$\varphi=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}$ ~ предполагаем, должно быть так

$|\varphi^{(1)}| \ll |\varphi^{(0)}|$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla\varphi) = -4\pi\rho$$

$$\varepsilon \overset{\shortparallel}{=} \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{(0)} \operatorname{div} \underbrace{\nabla\varphi}_{\nabla\varphi^{(0)}+\nabla\varphi^{(1)}} + \operatorname{div}(\varepsilon^{(1)} \underbrace{\nabla\varphi}_{\nabla\varphi^{(0)}+\nabla\varphi^{(1)}}) = -4\pi\rho$$

$$\Rightarrow \cancel{\varepsilon^{(0)}\Delta\varphi^{(0)}} + \varepsilon^{(0)}\Delta\varphi^{(1)} + \varepsilon^{(1)}\Delta\varphi^{(0)} + \cancel{\varepsilon^{(1)}\Delta\varphi^{(1)}} + (\nabla\varepsilon^{(1)}, \nabla\varphi^{(0)}) + \cancel{(\nabla\varepsilon^{(1)}, \nabla\varphi^{(1)})} = \cancel{-4\pi\rho}$$

малые величины. (2-го порядка)

Из исходной задачи $\varepsilon^{(0)}\Delta\varphi^{(0)} = -4\pi\rho$

$$\varepsilon^{(0)}\Delta\varphi^{(1)} + \operatorname{div}(\varepsilon^{(1)}\nabla\varphi^{(0)}) = 0$$

переносим div влево и делим на $\varepsilon^{(0)}$

$$\Rightarrow \quad \Delta\varphi^{(1)} = -\frac{\operatorname{div}(\varepsilon^{(1)}\nabla\varphi)}{\varepsilon^{0}}$$

Формально заменим $\operatorname{div}(\varepsilon^{(1)}\nabla\varphi) = 4\pi\rho^{(1)}$

$$\Delta\varphi^{(1)} = -\frac{4\pi\rho^{(1)}}{\varepsilon^{0}}$$

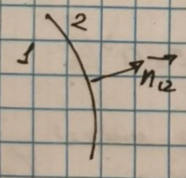
~ ур-е Пуассона, все величины известные, т.е. можно получить решение.

Обратная задача электростатики.

~ состоит в опред. распределения зарядов по заданному полю.

1. Проверить есть ли объемные заряды.

$$\boxed{\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\vec{D} = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi)}, \quad \vec{D} = -\varepsilon\nabla\varphi$$

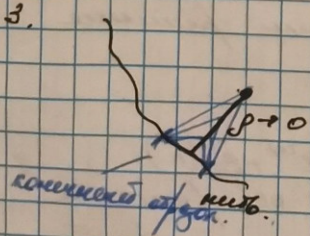
2. 

Если имеется скачок потенциала:

а) $\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\vec{n}_{12}, \vec{P}^{пов})}$ ~ пов. мощность.

б) $\boxed{(\vec{n}_{12}, \vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi\sigma}$

Дифф-ие скачка → δ-ф-я. → получим поверхностный заряд.

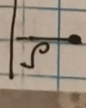
3. 

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \sim \frac{1}{\rho}$$ → нить заряжена линейным зарядом.

$$\boxed{q_{лин} = -\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\varepsilon}{2}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)}$$

Вблизи конечного участка $E_\rho = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{2q_{лин}}{\varepsilon\rho}$ ~ для беск. нити.

нить кажется бесконечной → справедливо всё далее.



4) В точке.

$$\varphi \sim \frac{1}{r} \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \sim \frac{1}{r^2}\right)$$

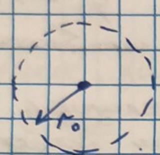
$r \to 0$

$$q = \lim_{r\to0}(\varepsilon r\varphi) = -\lim_{r\to0}\left(\varepsilon r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)$$

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r} \; ; \; E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{q}{\varepsilon r^2}$$

5) Если потенц. имеет ещё большую особенность $\frac{\partial\varphi}{\partial r} \sim \frac{1}{r^3}, \dots$ $\to$ в точке находится мультиполь.

Пример. $r > r_0$, $\varphi = \frac{C}{r}$, чем созд. заряд?



Здесь много вариантов: т. зар. шар, зар. поверхностный слой.

=> Решение неоднозначно, т.к. φ задано в конкретной области.

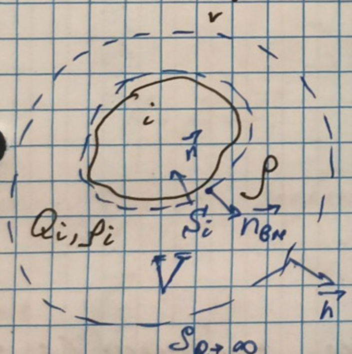
Энергия и силы в электростатическом поле.

Представл. энергии в виде интеграла по области источников.

$W_e = \frac{1}{8\pi}\int_V \vec E\vec D\,dV$ — попробуем переписать через др. величины

$$W_e = \frac{1}{8\pi}\int_V \vec E\vec D\,dV = -\frac{1}{8\pi}\int_V \underbrace{(\nabla\varphi, \vec D)}_{\mathrm{div}(\varphi\vec D) - \varphi\underbrace{\mathrm{div}\vec D}_{=4\pi\rho}} dV = -\frac{1}{8\pi}\int_V \mathrm{div}(\varphi\vec D)\,dV + \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,dV \ominus$$

представим как пов-ный интеграл.



$$\ominus \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,dV - \frac{1}{8\pi}\oint_{S_{R\to\infty} + \sum_i S_i} \varphi\vec D\,d\vec S$$

Отдельно: $\oint_{S_{R\to\infty}} \underbrace{\varphi}_{\sim\frac{1}{R}} \underbrace{\vec D}_{\sim\frac{1}{R^2}} d\vec S = 0$ $\quad S_R \sim R^2$ $\quad$ =>

$$=> W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,dV + (-1)\frac{1}{8\pi}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \vec D\,\underbrace{d\vec S}_{\vec n\,dS} = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,dV + \frac{1}{8\pi}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \underbrace{D_{n_{вн}}}_{4\pi\sigma} dS =$$

$\vec n = -\vec n_{вн}$ $\qquad$ из ГУ

$$= \left\{\oint_{S_i} \sigma\,dS = Q_i\right\} = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,dV + \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$$

$$=> \boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,dV + \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i}$$

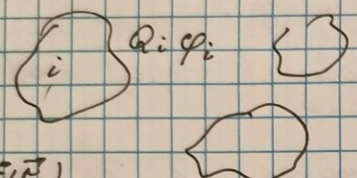
— а где сосредоточена энергия? Где поле или где источники

В рамках статики поля неотдел. от источников → однозначно ответить на вопрос невозможно. Но в рамках перем. полей → энергия там, где поле.

$\rho=0$: $W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$ и попросит- найти $\sum Q_i\varphi_i<0$, если расположим на $1/2$ - получим энергию не м.б. <0 без объёмных энергий.

Потенциальные и ёмкостные коэффициенты.

Рас-м систему из n проводников, наход. в огр. обл. пр-ва (т.е. $\varphi(\infty)=0$)



Окаж. просто связать $\varphi_i \leftrightarrow Q_i$ линейно.

$E(\vec r)$
$\rho=0$

т.к. $\mathrm{div}\,\vec D=0$ => потенциал опр-ся только зарядами проводников

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV + \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$$

Ищем решение: $\varphi_i = \sum_k b_{ik}Q_k + \bar\varphi_i$

при $Q_k=0$ → $\vec E=0$ => $\varphi_i=\bar\varphi_i=\varphi(\infty)=0$ (т.к. если поля нет → эквипотенциали совпадают)

=> $\bar\varphi_i=0$ => $\boxed{\varphi_i=\sum_k b_{ik}Q_k}$

где b_{ik} ~ потенциальные коэффициенты. перепишем в матричном виде:

$$\vec\varphi = \hat b\vec Q \Rightarrow \vec Q = \underbrace{\hat b^{-1}}_{\hat C}\vec\varphi$$

$$\Rightarrow Q_i=\sum_k C_{ik}\varphi_k,$$

где C_{ik} ~ ёмкостные коэффициенты.

b_{ik}, C_{ik} ~ опр. исключительно конфиг. системы (ε, число проводников, их формы и т.д.)

Св-ва:

1) $b_{ik}=b_{ki}$, $C_{ik}=C_{ki}$ — следствие теоремы взаимности.

2) $b_{ii}>0$, $C_{ii}>0$

3) $i\neq k$: $b_{ik}\ge 0$, $C_{ik}\le 0$; $\sum_k C_{ik}\ge 0$ (док-во Сивухин т.3 §27.)

Понятие ёмкости

Вводится для системы из двух проводников по опр-ю:

(1) $Q_1 = Q$, φ_1 (2) $Q_2 = -Q$, φ_2

$$\boxed{C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}}$$ ← зависит от конфиг. системы.

Если объёмных зарядов нет ($\rho = 0$):

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i \varphi_i = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k C_{ik}\varphi_i\varphi_k = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k b_{ik} Q_i Q_k$$

Пусть есть уединённый проводник:

$$C = \frac{Q}{\varphi - \underbrace{\varphi(\infty)}_{=0}} = \frac{Q}{\varphi} \Rightarrow Q = C\varphi$$

$$\Rightarrow W_e = \frac{1}{2}Q\varphi = \frac{1}{2}C\varphi^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{C}}_{b}Q^2$$

Энергия, запас. в конденсаторе:

$$W_e = \frac{1}{2}(\underbrace{Q_1}_{Q}\varphi_1 + \underbrace{Q_2}_{-Q}\varphi_2) = \frac{1}{2}Q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}C(\varphi_1-\varphi_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2$$

Энергия взаимодействия

Опр. Энерг. взаим. неск. подсистем (образ. систему) назыв. разность полной энергии системы и суммарной энергии невзаим. подсистемы.

Пример: $\vec{E_1}$ и $\vec{E_2}$ приводим во взаим-е, но так, что поля остаются прежними.

$$W_e = \frac{1}{8\pi}\int_V \varepsilon \vec{E}^2 dV = \underbrace{\frac{1}{8\pi}\int_V \varepsilon \vec{E_1}^2 dV}_{W_1} + \underbrace{\frac{1}{8\pi}\int_V \varepsilon \vec{E_2}^2 dV}_{W_2} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_V \varepsilon \vec{E_1}\vec{E_2} dV}_{W_{вз}} \gtrless 0$$

$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$

зав. от типа взаим.

⇒ Для энергии не вып. принцип суперпозиции. ($W_e \neq W_1 + W_2$)

Пусть $\underset{(\varphi_1)}{\vec{E_1}} \leftarrow \rho_1$ (созд. поле E_1) и $\underset{(\varphi_2)}{\vec{E_2}} \leftarrow \rho_2$

Если при взаим. так же ρ_1 и ρ_2 не изменяются.

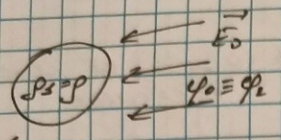
$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV = \{\text{по пр. суперпоз. } \rho = \rho_1 + \rho_2,\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2\} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \rho_1\varphi_1 dV}_{W_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \rho_2\varphi_2 dV}_{W_2} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_V(\rho_1\varphi_2 + \rho_2\varphi_1)dV}_{W_{вз}}$$

По теореме взаимности $\int_V \rho_1\varphi_2 dV = \int_V \rho_2\varphi_1 dV$

$$\Rightarrow W_{вз} = \int_V \rho_1\varphi_2 dV$$

Ф-ла может быть использована для любого тела.



обычно исп. индекс 0 (а не г) для внешн. потенц. Вместо инт. ∫ → можно.

вносится в поле

$$\Rightarrow \boxed{W_{вз} = \int_V \rho \varphi_0 \, dV}$$ ~ если вносится в другое внешнее поле

потенц. созд. внешними по отн. к ρ источниками.

ЛК 9.22.

Пример: 1) точечный заряд во внешнем поле.

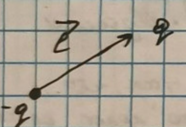
$$\rho = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_q)$$

$$W_{вз} = \int_V q\delta(\vec{r} - \vec{r}_q)\varphi_0(\vec{r})\, dV = q\varphi_0(\vec{r}_q)$$

→ эн. смысл потенциала: → потенциал поля в нек. точке есть величина, кот. числ. совп. с энергией взаимод. единичн. заряда, помещ. в данную точку с этим полем.

2) Жёсткий диполь — диполь, момент которого не зависит от внешнего поля.
Мягкий диполь — дипольный момент зависит от внешнего поля.

→ жёсткий диполь во внешнем поле:



$\vec{p} = q\vec{l}$ ~ т.к. жёсткий, конфигурация зарядов не меняется.

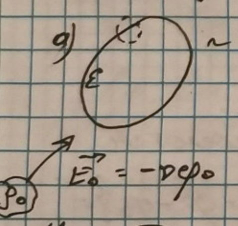
$$\Rightarrow \rho = -q\delta(\vec{r}) + q\delta(\vec{r} - \vec{l})$$

$$W_{вз} = -q\varphi_0(0) + q\cdot\varphi_0(\vec{l}) = \{\text{пусть } l \text{ мало, разл. в ряд}\} =$$

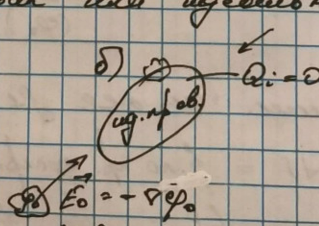
$$= -q\varphi_0(0) + q\varphi_0(0) + \nabla\varphi_0(0)\cdot\vec{l} = \underbrace{q\vec{l}}_{\vec{p}}\,\underbrace{\nabla\varphi}_{-\vec{E_0}} = -(\vec{p}, \vec{E_0})$$

3) Мягкий диполь во внешнем поле. — $W_{вз}$ не можем применить ~ конфигурация зарядов меняется.

а) ~ например диэлектрик или идеальный проводник.



б)



Исп. общую формулу:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV + \overbrace{\frac{1}{2} Q_i\varphi_i}^{\text{а) нет}} = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV = \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \rho_0\varphi_0\, dV}_{W_{собств}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \rho_0\varphi_{дип}\, dV}_{W_{вз}}$$

б) $Q_i = 0$

$\rho = \rho_0$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_{дип}$

$$W_{вз} = \frac{1}{2}\int_V \rho_0\varphi_{дип}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \rho_{int}\varphi_0\, dV = \{\text{по теореме взаимности } \rho_0 \to \varphi_0,\ \rho_{int} \to \varphi_{дип}.\}$$

$$W_{вз} = \frac{1}{2}\int_V \rho_{int}(\vec{r})\varphi_0(\vec{r})\, dV \ominus,$$ т.к. объём интегр. мал.

$$\varphi_0(\vec r) = \varphi_0(0) + \underbrace{\nabla\varphi_0(0)}_{-\vec E_0}\cdot \vec r + \dots$$

$$\ominus\ \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \rho_{ind}\, dV}_{=0}\cdot \varphi_0(0) + \frac{1}{2}\overbrace{\int_V \rho_{ind}(\vec r)\,\vec r\, d\tau}^{\vec p}\cdot(-\vec E_0)$$

$=0$ ~ т.к. у диполя число $-q$ и $+q$ одинак.

$$\Rightarrow W_{вз} = -\frac{1}{2}(\vec p, \vec E_0)$$

При решении задач всегда задав. вопросом, какой диполь?

Силы в электрост. поле. Энергетический метод расчёта обобщ. сил

Вспомним теорему Пойнтинга:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -Q - \Pi + A_{ст} \qquad -A^{мех}_{поля} = -\vec F\vec v$$

$$A_{ст} = A^{немех}_{ст} + A^{мех}_{ст}$$

работа немехан. источников и механическ.
(сторонние)

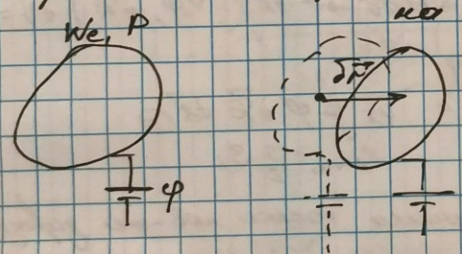
A ~ мощность ; тогда за малое время Δt

$$\Delta W = -Q\Delta t - \Pi\Delta t + \underbrace{A^{немех}_{ст}\cdot\Delta t}_{\Delta P} - \vec F\underbrace{\vec v\Delta t}_{\Delta\vec r}$$

Чтобы остаться в пределах статики → нужно перейти к вариационным выражениям.

P – работы ; пусть есть объект с W_e, переместим его на малое расстояние $\delta\vec r$, тогда измен. W_e и P

$$\Rightarrow W_e + \delta W_e,\ P + \delta P.$$



Т.к. у нас нет перемещения и других сторонних зарядов.
(перемещение чисто механическое)

$$\delta W_e = \delta P - \underbrace{\vec F\,\delta\vec r}_{\vec F\,\delta\vec\xi}$$ ~ δ – вариация.

любая величина опис. полож. → можем не конкр., что меняется в этот момент, т.е. ξ – обобщ. коорд, F ~ тоже обобщ. величина. ($\xi = \vec r$ → F – сила, ξ – угол → F ~ момент силы.)

$$\boxed{F_\alpha\,\delta\xi_\alpha = -\delta(W_e - P)}$$

Если стор. ист. отсутствуют: $P=0$:

$$F_\alpha\,\delta\xi_\alpha = -\delta W_e$$

Замечание о термодин. смысле энергии эл. поля:

$F_\alpha \delta\xi_\alpha = -dU + \delta Q$

Из термодинамики $\delta Q = T\,dS$
энтропия

$dS = \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{интегр. множитель}}\delta Q$

$\Rightarrow F_\alpha \delta\xi_\alpha = -dU + T\,dS$

Надо догадаться, что все рассматриваемые процессы изотермические. $\Rightarrow T\,dS = d(TS)$

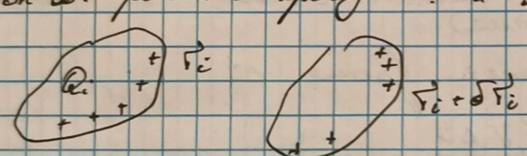
$$F_\alpha \delta\xi_\alpha = -dU + T\,dS = -dU + d(TS) = -d(\underbrace{U - TS}_{\mathcal{F}})$$

$\mathcal{F}$ ~ свободная энергия системы.

Теорема Томсона

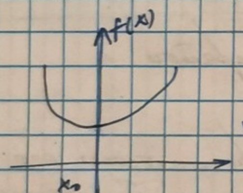
~ Заряды на проводниках, расп. в диэл. или своб. пр-ве распр. по пов-ти проводников таким образом, чтобы энергия электрического поля была min.

Док-во: рассм-м проводник и мысленно перераспр. заряды:



σ_i $\quad$ $\sigma_i + \delta\sigma_i$ $\Rightarrow$ нужно док-ть, что

$\delta W_e = 0$ (док-ть!)



$f'(x_0) = 0$

$dF = f'dx|_{x_0} = 0$

$$\delta W_e = \frac{1}{8\pi}\delta\int_V \underbrace{\vec E\vec D}_{\varepsilon E^2}\,dV = \frac{1}{8\pi}\int_V \varepsilon\cdot 2\vec E\,\delta\vec E\,dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_V \underbrace{\vec E}_{-\nabla\varphi}\,\delta\vec D\,dV = -\frac{1}{4\pi}\int_V (\nabla\varphi, \delta\vec D)\,dV =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_V\Big[\mathrm{div}(\varphi\,\delta\vec D) - \varphi\underbrace{\mathrm{div}\,\delta\vec D}_{=4\pi\delta\rho}\Big]dV = -\frac{1}{4\pi}\oint_{S_{R\to\infty}+\sum_i S_i}\varphi\,\delta\vec D\,d\vec S \ominus$$

$\delta\rho = 0$, мы меняли только пов-ые заряды

$$\ominus -\frac{1}{4\pi}\oint_{S_{R\to\infty}}\underbrace{\varphi}_{\sim\frac{1}{R}}\underbrace{\delta\vec D}_{\sim\frac{1}{R^2}}\,d\vec S + \left(-\frac{1}{4\pi}\right)\sum_i\varphi_i\oint_{S_i}\delta\vec D\,\underbrace{d\vec S}_{\substack{\vec n\,dS\\ -\vec n_{вн}}} = \frac{1}{4\pi}\sum_i\varphi_i\oint_{S_i}\underbrace{\delta D_{n\,вн}}_{4\pi\delta\sigma_i}\,dS =$$

$S_R \sim R^2$ $\to 0$

$$= \sum_i\varphi_i\underbrace{\oint_{S_i}\delta\sigma_i\,dS}_{\delta Q_i = 0} = 0,\ \text{ч.т.д.}$$

δQ_i ~ полный заряд не изменился!

То что это экстремум → минимум следует из того, что сост. равн. должно быть устойчивым.

Силы в системах проводников с заданными зарядами и заданными потенциалами.

а) $P=0$

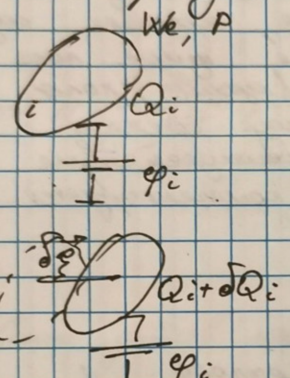
$F_\alpha\,\delta\xi_\alpha = -(\delta W_e)_Q$ – при уст. заданных зарядов.

$$\delta W_e = \underbrace{W_e(\vec\xi+\delta\vec\xi)}_{\text{т.к. } \delta\xi \text{ мало}} - W_e(\vec\xi) \approx W_e(\vec\xi) + \frac{\partial W_e}{\partial \xi_\alpha}\delta\xi_\alpha - W_e(\vec\xi) = \frac{\partial W_e}{\partial\xi_\alpha}\delta\xi_\alpha$$

$$F_\alpha\delta\xi_\alpha = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial\xi_\alpha}\right)_Q\delta\xi_\alpha \Rightarrow F_\alpha = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial \xi_\alpha}\right)_Q$$

В коорд. (x, y, z): $\boxed{\vec F = -(\nabla W_e)_Q}$

б) Сист. проводников с фикс. потенциалами.



W_e, P Совершаем виртуальное перемещ., но потенциал сохранился → а заряд мог измениться на δQ_i

$$W_e+\delta W_e, \quad P+\delta P$$

$$\delta P = \sum_i \varphi_i\,\delta Q_i$$

$$F_\alpha\delta\xi_\alpha = -\delta(W_e - P)_\varphi$$

$$W_e = \frac12\sum_i Q_i\varphi_i$$

$$\delta(W_e-P)_\varphi = \frac12\sum_i\delta(Q_i\cdot\varphi_i)_\varphi - \sum_i\varphi_i\,\delta Q_i = \frac12\sum_i\varphi_i\,\delta Q_i - \sum_i\varphi_i\,\delta Q_i =$$

т.к. φ фикс. → варьируется только Q.

$$= -\frac12\sum_i\varphi_i\,\delta Q_i = -(\delta W_e)_\varphi$$

$$\Rightarrow F_\alpha\delta\xi_\alpha = -\delta(W_e-P)_\varphi = (\delta W_e)_\varphi$$

$$\boxed{F_\alpha = \left(\frac{\partial W_e}{\partial\xi_\alpha}\right)_\varphi} \rightarrow \boxed{\vec F = (\nabla W_e)_\varphi}$$

энергия возраст. за счёт внешн. источников. (батарейки)

Примеры расчётов обобщ. сил в электростатике.

1) Точечный заряд во внешнем поле.

$$F_\alpha\delta\xi_\alpha = -(\delta W_e)_q = -\delta W_{вз}\ ; \quad W_{вз} = q\varphi_0$$

$$\vec F = -\nabla W_{вз} = -\nabla(q\varphi_0) = q\vec E_0$$

2) Объёмное распр-е заряда во внешнем поле.

$$W_{вз} = \int_V \rho(\vec r)\,\varphi_0(\vec r)\,dV$$

$$F_\alpha\delta\xi_\alpha = -(\delta W_e)_\rho = -(\delta W_{вз})_\rho$$

$$(\delta W_{вз})_\rho = \left(\delta\int_V\rho(\vec r)\,\varphi_0(\vec r)\,dV\right)_\rho = \int_V\rho(\vec r)\underbrace{\delta\varphi_0(\vec r)}_{\varphi_0(\vec r+\delta\vec\xi)-\varphi_0(\vec r)}dV$$

$$\varphi_0(\vec r + \delta\vec\xi) = \varphi_0(\vec r) + \nabla\varphi_0(\vec r)\cdot\delta\vec\xi$$

$$\Rightarrow (\delta W_{вз})_\xi = \int\limits_V \rho(\vec r)\,\nabla\varphi_0(\vec r)\,dV\cdot\delta\vec\xi$$

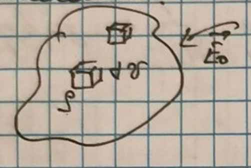
$$\Rightarrow \underline{\underline{F_\alpha\,\delta\xi_\alpha}} = -(\delta W_{вз})_\xi = -\int\limits_V \rho(\vec r)\,\nabla\varphi_0(\vec r)\,dV\cdot\delta\vec\xi = \int\limits_V \rho(\vec r)\,\vec E_0(\vec r)\,dV\cdot\delta\vec\xi =$$

$$= \int\limits_V \rho(\vec r)\,E_{0\alpha}(\vec r)\,dV\cdot\underline{\underline{\delta\xi_\alpha}}$$

$$\Rightarrow F_\alpha = \int\limits_V \rho E_{0\alpha}\,dV$$

$$\vec F = \int\limits_V \rho\vec E_0\,dV = \int\limits_V \rho\vec E\,dV$$

Замечание:



$\rho\,dV$ ~ как точечн. заряд, человек ... в dV на самом деле ... поле $\vec E_0$ + поле созд. зарядом (поле самодействия.) → вклад обеспеч. только внеш. поле, самодействие в конкретных точках компенсируется.

$$\Rightarrow \vec F = \rho\vec E$$

3) Сила, действующая на элементарный диполь.

а) жёсткий диполь → заряды фикс. → $W_{вз}$ опр. всё.

$$\vec F = -\nabla W_{вз} = \nabla(\vec p, \vec E) =$$

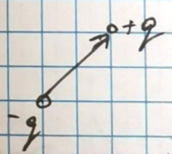
$$W_{вз} = -(\vec p, \vec E_0)$$

дальше нолик писать не будем для краткости и всех пол., что внешн. поле.

$$\vec F = \nabla(\vec p, \vec E) = [\vec p, \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec E}_{0}] + [\vec E, \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec p}_{0}] + \underbrace{(\vec E, \nabla)\vec p}_{0} + (\vec p, \nabla)\vec E$$

в статике.

$$\Rightarrow \vec F = (\vec p, \nabla)\vec E$$



т.е. на масштабе диполя поле $\vec E$ должно изменяться.

б) Мягкий диполь, ⇒ $(\delta W_e) = \delta W_{вз}$.

$$\vec F = -\nabla W_{вз},\quad W_{вз} = -\frac{1}{2}(\vec p, \vec E);$$

$$\vec F = \frac{1}{2}\nabla(\vec p, \vec E)$$

Поскольку дип. мягкий → $\vec p = \vec p(\vec E) = \alpha\vec E$, где $\alpha = const$

$$\Rightarrow \vec F = \frac{\alpha}{2}\nabla(\vec E, \vec E) = \frac{\alpha}{2}\nabla\vec E^2$$

$$\nabla\vec E^2 = 2[\vec E, \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec E}_{0}] + 2(\vec E, \nabla)\vec E = 2(\vec E, \nabla)\vec E$$

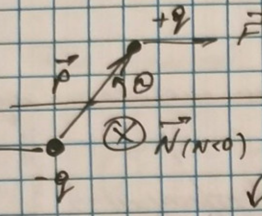
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\nabla\vec E^2 = (\vec E, \nabla)\vec E}$$

и возвращ. обратно

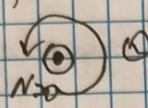
$$\vec F = \frac{\alpha}{2}\nabla \vec E^2 = \alpha(\vec E,\nabla)\vec E = (\vec p,\nabla)\vec E$$

=> то же самое, что формулы естественно, поле не знает какой у него диполь.

4) Момент силы, действующий на диполь (подразум. жёсткий)



Если жёсткий диполь → момент внешн. по полю $\vec E$ и не меняет, можно вводить $\vec N$.



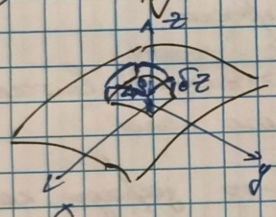
$$N = -\frac{\partial W_{вз}}{\partial \Theta}$$

роль $F \to N$, $\xi \to \Theta$ из $F_\alpha = -\frac{\partial W_{вз}}{\partial \xi_\alpha}$

$$\Rightarrow N = -\frac{\partial W_{вз}}{\partial \Theta} = -\frac{\partial}{\partial \Theta}\{-\underbrace{(\vec p,\vec E)}_{pE\cos\Theta}\} = -pE\sin\Theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec N = [\vec p, \vec E]}$$

5) Сила, действ. на единицу площади пов-ти проводника



пользуемся тем, что:

$$(\delta W_e)_\rho = (\delta W_e)_{\vec D}$$

$$w_e = \frac{\vec E\vec D}{8\pi} = \frac{\vec D^2}{8\pi\varepsilon}$$

Совершим аналогично вирт. перемещ. на δz

$F_z\delta z = -(\delta W_e)_{\vec D}$, т.к. пов-ть ушла, часть энергии также ушла, учтём с «–»

$$(\delta W_e)_{\vec D} = -\frac{\vec D^2}{8\pi\varepsilon}\Delta S\,\delta z$$

$$F_z\delta z = \underbrace{\frac{\vec D^2}{8\pi\varepsilon}}_{w_e}\Delta S\,\delta z \Rightarrow \frac{F_z}{\Delta S} = w_e.$$

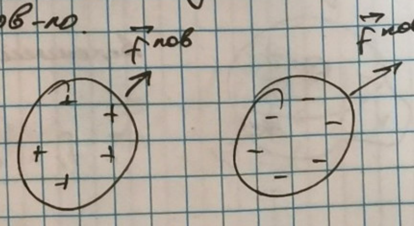
$$f_z^{пов} = w_e$$

поверхностная плотность силы.

Аналогично: $F_x\delta x = -(\delta W_e)_{\vec D} = 0$ ← энергия не сдвинется с пов-ло.

$$F_y\delta y = -(\delta W_e)_{\vec D} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec f^{пов} = w_e\,\vec n_{вн}}_{необрат.}$$

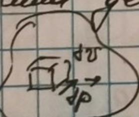


30.09.22

объёмная пл-ть

6) Силы в диэлектриках (пондеромоторные силы)

Сила действ. на элемент. диэл.-диполь: $\vec F = (\vec p,\nabla)\vec E$



$d\vec p = \vec P\,dV$ => для элемент. диполя:

$$d\vec F = (d\vec p,\nabla)\vec E$$

$d\vec{\mathcal F} = (\underbrace{d\vec P}_{\vec P dV}, \nabla)\vec E$ $\quad\Rightarrow\quad \vec f = \frac{d\vec F}{dV} = (\underbrace{\vec P}_{\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\vec E}, \nabla)\vec E = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}(\vec E, \nabla)\vec E$

док-ли: $(\vec E, \nabla)\vec E = \frac{1}{2}\nabla \vec E^2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec f = \frac{\varepsilon-1}{8\pi}\nabla \vec E^2}$$

~ но тут допущено много предположений, кот. на практике не выполн.

Если τ ~ плотность диэлектр.

τ: $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ ~ явление стрикции ⇒ измен. плотности под действием поля.

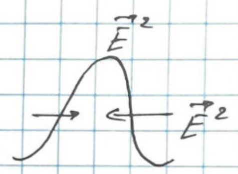
Без док-ва → ф-ла для $\vec f$ с учётом электрострикции:

$$\vec f = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec E^2 \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right) - \frac{1}{8\pi}\vec E^2 \nabla\varepsilon$$

Если диэл. жидкий или газообр., то обычно $\varepsilon = 1 + C\tau$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau = C\tau = \varepsilon - 1$$

$$\Rightarrow \vec f = \frac{1}{8\pi}\nabla\left((\varepsilon-1)\vec E^2\right) - \frac{1}{8\pi}\vec E^2\nabla\varepsilon = \frac{\varepsilon-1}{8\pi}\nabla\vec E^2$$

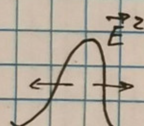


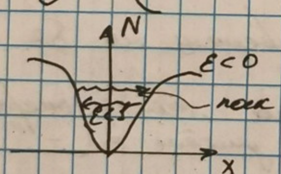
$\varepsilon > 1$

В электрост. нет диэл. с $\varepsilon < 1$, но в среде с дисперсией

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$\Rightarrow \varepsilon < 1$ м.б. $\Rightarrow$ плазма выталк-ся из более сильного поля.



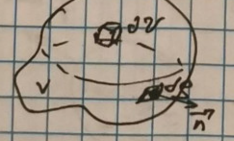


Если есть ещё какие-то заряды, кот. прикреплены к диэлектрику

$$\vec f = \rho\vec E + \dots$$

Сведение объёмных сил к поверхностным натяжениям. Тензор натяжения

$\vec{\mathcal F} = \int_V \vec f dV \quad\Rightarrow\quad \vec F = \oint_S \vec f^{пов} dS$ — тензор 1го ранга.



Вспоминаем, что $\vec f = \mathrm{div}\,\hat\sigma$ — тензор 2го ранга.

$f_i = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$, т.е. $f_x = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}$

$f_y = \dots$, $f_z = \dots$

так вычислять дивергенцию тензора.

Известная т. О-Г гласит следующее:

$$\vec F = \int_V \vec f dV = \int_V \mathrm{div}\,\hat\sigma\, dV = \oint_S \hat\sigma \underbrace{d\vec S}_{\vec n dS} = \oint_S \overbrace{\hat\sigma\vec n}^{\vec f^{пов}} dS$$

из тензорн. анализа.

$$\Rightarrow \vec f^{\,пов} = \hat\sigma \vec n, \quad \vec n = (n_x, n_y, n_z)$$

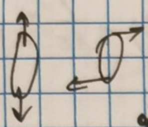
$$f_x^{пов} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z$$

$$f_y^{пов} = \dots$$

$$f_z^{пов} = \dots$$

$$\Rightarrow f_i^{пов} = \sigma_{ij} n_j \quad \text{(суммирование по } j\text{)}$$

Для полной эквивал. $\vec f^{\,пов} \leftrightarrow$ на $\vec f$ не дост. только равенства нужно равн. силы, но и Σ моментов сил. $= 0$



Необх. и дост. усл. ~~...~~ эквивал. замены объём. сил (с пл-по) $\vec f = \operatorname{div}\hat\sigma$ с пов-ными силами $\vec f^{\,пов}$, явл. условие симметрии этого тензора отн. главной диагонали

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$$

Пусть в общем случае есть и др. заряды, тогда

$$\vec f = \rho\vec E + \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right) - \frac{1}{8\pi}\vec E^2\nabla\varepsilon; \quad \vec f = \vec f' + \vec f'', \text{ где}$$

Просто замена: $\vec f' = \rho\vec E - \frac{1}{8\pi}\vec E^2\nabla\varepsilon$

стрикц. член. ~ $\vec f'' = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)$

(учит. явл. электрострикции.)

$\vec f = \operatorname{div}\hat\sigma$ → будем аналогично искать $\hat\sigma = \hat\sigma' + \hat\sigma''$

$$\Rightarrow \vec f' = \operatorname{div}\hat\sigma'; \quad \vec f'' = \operatorname{div}\hat\sigma''$$

$\hat\sigma'$ ~ Максвелловский тензор натяжения.

$\hat\sigma''$ ~ стрикционная часть тензора натяжения.

$$\underbrace{\vec f^{\,пов}}_{\hat\sigma\vec n} = \underbrace{\vec f^{\,пов\,'}}_{\hat\sigma'\vec n} + \underbrace{\vec f^{\,пов\,''}}_{\hat\sigma''\vec n}$$

Переходим к анализу $\vec f''$:

$$f''_x = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right) + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{\partial}{\partial z}0$$

$$f''_y = \frac{\partial}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{8\pi}\left(\vec E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right) + \frac{\partial}{\partial z}0$$

$$f''_z = \frac{\partial}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)$$

$$\hat\sigma'' = \frac{1}{8\pi}\vec E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\cdot\tau\cdot\hat I$$

единичный тензор $\hat I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \sigma''_{\alpha\beta} = \sigma''_{\beta\alpha}$$

Теперь работаем с $\vec f' = \rho\vec E - \frac{1}{8\pi}\vec E^2\nabla\varepsilon$;

$$f'_x = \rho E_x - \frac{1}{8\pi}\vec E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}; \quad f'_y = \rho E_y - \frac{1}{8\pi}\vec E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}; \quad f'_z = \rho E_z - \frac{1}{8\pi}\vec E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}.$$

Из ур-я Максвелла:

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\vec D$$

$$f'_x = \frac{1}{4\pi} E_x \operatorname{div}\vec{D} - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2 \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_x\vec{D}) - \frac{1}{4\pi}\underbrace{(\nabla E_x, \vec{D})}_{(\vec{D},\nabla E_x)} - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

$$(\vec{D}, \vec{\nabla})E_x = \varepsilon(\vec{E},\nabla)E_x$$

$$f'_x = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_x\vec{D}) - \frac{\varepsilon}{4\pi}(\vec{E},\nabla)E_x - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}$$

Исп-м то, что $(\vec{E},\nabla)\vec{E} = \frac{1}{2}\nabla\vec{E}^2$.

$$(\vec{E},\nabla)E_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\vec{E}^2$$

$$f'_x = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_x\vec{D}) - \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\vec{E}^2 - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_x\vec{D}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon\vec{E}^2)$$

$$f'_x = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_x\vec{D}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon\vec{E}^2)$$ — для x-й компоненты, для остальных аналогично.

$$f'_y = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_y\vec{D}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon\vec{E}^2)$$

$$f'_z = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_z\vec{D}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon\vec{E}^2)$$

Распишем: $\vec{D} = \{D_x, D_y, D_z\}$

$$f'_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{E_xD_x}_{\varepsilon E_x E_x} - \frac{\varepsilon\vec{E}^2}{2}\Big) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}(\underbrace{E_xD_y}_{\varepsilon E_x E_y}) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}(\underbrace{E_xD_z}_{\varepsilon E_x E_z})$$

$$\Rightarrow f'_x = \frac{\partial T'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T'_{xz}}{\partial z}$$

$$\Rightarrow T'_{xx} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\Big(E_x^2 - \frac{\vec{E}^2}{2}\Big);\quad T'_{xy} = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_y;\quad T'_{xz} = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_xE_z$$

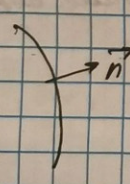
аналогично для др., тогда получим

$$T'_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\Big(E_\alpha E_\beta - \frac{\vec{E}^2}{2}\delta_{\alpha\beta}\Big)$$

Д/З: повторить вывод в вакууме $\varepsilon = 1$, и второго множителя не будет.

Примеры.

1) Вычисление $\vec{F}^{пов''}$



$$\vec{F}^{пов''} = \hat{T}''\vec{n} = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\cdot\underbrace{\tau\hat{I}\vec{n}}_{\vec{n}} = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\cdot\vec{n}$$

2) Вычисление $\vec{F}^{пов'}$

$\vec{F}^{пов'} = \hat{T}'\vec{n}$; $\quad f_\alpha^{пов'} = T'_{\alpha\beta}n_\beta = \frac{\varepsilon}{4\pi}\Big(E_\alpha E_\beta - \frac{\vec{E}^2}{2}\delta_{\alpha\beta}\Big)n_\beta$

$E_\beta n_\beta = (\vec{E},\vec{n}) = E_n$ — проекция на нормаль

$\delta_{\alpha\beta}n_\beta = n_\alpha$

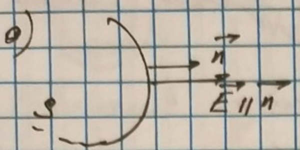
$$\Rightarrow f_\alpha^{пов'} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\Big(E_\alpha E_n - \frac{\vec{E}^2}{2}n_\alpha\Big)$$ $\to$ легко теперь напишем для вектора

$$\vec{F}^{пов'} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\Big(\vec{E}E_n - \frac{\vec{E}^2}{2}\vec{n}\Big)$$

Важнейшие частные случаи:

(натяж. у пов-ти идеальн. проводника)

а)

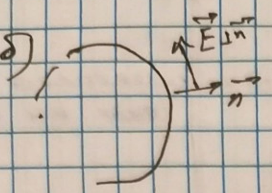


$\vec E = E\vec n$, т.е. $E = E_n$

$$\Rightarrow \vec f^{\,пов'} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E^2\vec n - \frac{\vec E^2}{2}\vec n\right) = \left\{\vec E^2 = \vec E^2\right\} =$$

$$= \frac{\varepsilon \vec E^2}{8\pi}\vec n = w_e\vec n$$ ~ тянет вдоль силовых линий

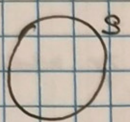
б)



Пусть оказалось, что где-то $\vec E \perp \vec n$

$\Rightarrow E_n = 0$

$$\vec f^{\,пов'} = -\frac{\varepsilon \vec E^2}{8\pi}\vec n = -w_e\vec n$$ ~ поле как бы давит на пов-ть.



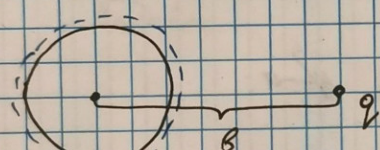
$\hat T$, $\vec f^{\,пов'} \neq 0$ ~ есть пустая огр. пов-ть.

$$\vec F = \oint_S \vec f^{\,пов'}\, dS \neq 0$$ ~ действ. равнод. сила $\neq 0$ => основа для объясн. концепции эфира (но отказались от идеи)

$$\vec F = \frac{d}{dt}\left(\vec P_{мех} + \underbrace{\vec G}_{импульс\ поля}\right)$$ ~ полно применяв. импульс. аналог. механическому.

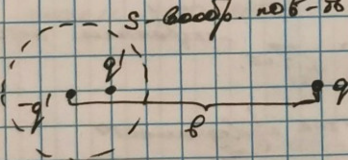
Примеры применения ф-л:

1) Найти силу взаим. т.з. и сферы.



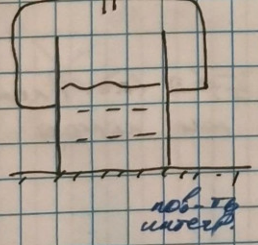
$$\vec F = \int_V \rho\vec E\, dV = \oint_S \vec f^{\,пов} dS$$

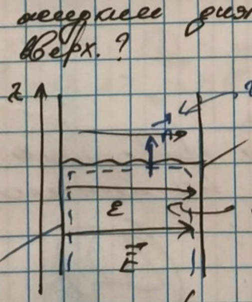
S - вообр. пов-ть



Если поля не мен. → выраж. для силы тоже не мен.

2) Если имеется жидкий диэлектрик в конд. → наск. поднимется вверх?



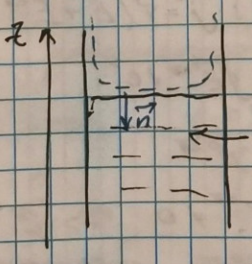


$w_e = \frac{\vec E^2}{8\pi}$

Заполн. конденс. вдоль силовых линий => $\vec E$ = const в опр. разнос. потенц. обкладок.

$w_e = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$

$\Rightarrow$ из прошлого $\vec E \perp \vec n \Rightarrow f_z^{пов} = -\frac{\vec E^2}{8\pi}$; $F_z = -\frac{\vec E^2}{8\pi}\Delta S$



Со стороны другой среды

$w_e = \frac{\varepsilon \vec E^2}{8\pi}$

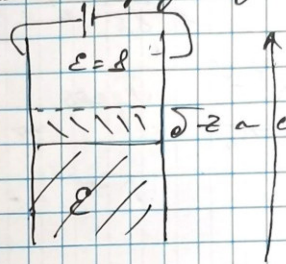
$f_z^{пов} = \frac{\varepsilon \vec E^2}{8\pi}$; $F_z = \frac{\varepsilon \vec E^2}{8\pi}\Delta S$

=> Суммарная сила на границе сред:

$$F_{z\Sigma} = \frac{\varepsilon-1}{8\pi}\vec{E}^2 \Delta S$$ ~ должна уравн. силой тяжести.

$$mg = \rho\cdot Vg = \rho\Delta S\cdot \underline{\underline{h}}\, g$$ => можно найти h

Можно из других рассуждений: через измен. энергии:



$$F_z \delta z = (\delta W_e)_\varphi$$

$$F_z \delta z = \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi}\cdot\Delta S\,\delta z - \frac{\vec{E}^2}{8\pi}\Delta S\,\delta z$$ ~ сместился диэл. на δz

$F_{z\Sigma}$ из-за энерг. ε, к пришла в эту часть, но, где $\varepsilon = 1$ ~ энергия „убралась"

$$\Rightarrow F_{z\Sigma} = \frac{\varepsilon-1}{8\pi}\vec{E}^2 \Delta S$$ ~ и т.д. получили ту же самую силу

Постоянные токи. (токостатика.)

Ур-е Максвелла в случае статики.

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\partial/\partial t = 0} \operatorname{rot}\vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\partial/\partial t = 0} \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

Т.е. в токостатике нужно решать ур-я:

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \\ \operatorname{div}\vec{j} = 0\end{cases}, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Материальное ур-е связи: $\vec{j} = \underbrace{\sigma\vec{E}}_{\vec{j}^{\text{пр.}}} + \vec{j}^{\text{ст.}}$ ~ сторонние источники. $\vec{j}^{\text{пр.}}$ – ток проводимости

или удобно $\vec{j}^{\text{ст}} = \sigma\vec{E}^{\text{ст.}}$

$$\Rightarrow \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}})$$

Отметим:

1) т.к. $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq \infty$, поле внутри проводника $E \neq 0$ (т.е. σ конечное)
2) $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ ~ у линий $\vec{j}$ нет ни начала ни конца → замкн. линии

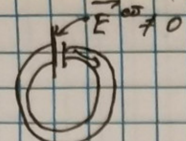
$$\int_V \operatorname{div}\vec{j}\, dV = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = 0$$

07.10.22.

3) При заданных сторонних источников: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}})$

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}} \; ; \quad \oint_L \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l} = \underbrace{\overbrace{\oint_L \vec{E}\, d\vec{l}}^{=0}}_{\vec{E} = -\nabla\varphi} + \underbrace{\oint_L \vec{E}^{\text{ст}} d\vec{l}}_{\mathcal{E}^{\text{ст}}}$$

$$\Rightarrow \oint_L \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l} = \mathcal{E}^{\text{ст}}, \quad \mathcal{E}^{\text{ст}} \neq 0$$ => $\mathcal{E}^{\text{ст}}$ не должно быть чисто потенциальным => интеграл не будет $= 0$



Работаем с уравнениями

$\vec j = \sigma \vec E + \underbrace{\sigma \vec E^{ст}}_{\vec j^{ст}}$; учтём, что $\vec E = -\nabla\varphi$

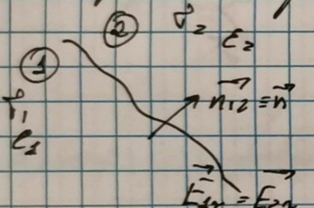
$$\left.\begin{aligned} \vec j &= -\sigma\nabla\varphi + \vec j^{ст} \\ \mathrm{div}\,\vec j &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{div}(\sigma\nabla\varphi) = \mathrm{div}\,\vec j^{ст}.$$

Если $\sigma = const \Rightarrow \mathrm{div}\,\nabla = \Delta$

$\Rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{1}{\sigma}\mathrm{div}\,\overset{\sigma \vec E^{ст}}{\vec j^{ст}}$ — аналогичное ур-е Пуассона.

$\Rightarrow \quad \Delta\varphi = \mathrm{div}\,\vec E^{ст}$

Если имеются границы раздела сред нужно так же исп-ть ГУ: будем запис. ГУ, считая, что на самой границе сторон. зарядов отсутствуют



$\vec E_{1,2} = \frac{\vec j_{1,2}}{\sigma_{1,2}} \Rightarrow \boxed{\frac{j_{1\tau}}{\sigma_1} = \frac{j_{2\tau}}{\sigma_2}}$ — скачок τ-составл тока.

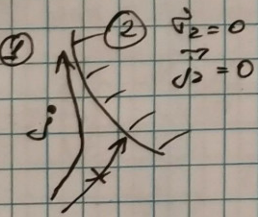
Если вспомним $\mathrm{div}\,\vec j = 0$, знаем из прошлого:

$$(\vec n_{12}, \vec j_2 - \vec j_1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{j_{1n} = j_{2n} = j_n}$$

Мы знаем, что есть
$$\left.\begin{aligned} &ГУ: \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = 4\pi\sigma^e \\ &E_{1,2n} = \frac{j_{1,2n}}{\sigma_{1,2}} = \frac{j_n}{\sigma_{1,2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\sigma^e = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right) j_n}$$

Условия на границе с идеальным изолятором.



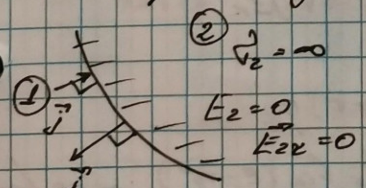
Пусть ② — идеальный изолятор, в нём.
$\sigma_2 = 0 \Rightarrow \vec j_2 = 0 \Rightarrow j_{2n} = 0 \Rightarrow j_{1n} = 0$

Т.к. $\sigma_1 E_{1n} = 0 \Rightarrow E_{1n} = 0$ норм. сост. поля обр. в ноль.

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0$$

Идеальный электрод = идеальный проводник. (в нём $\vec E = 0$)

Рассмотрим идеальный электрод.



Т.к. в нём $E_2 = 0 \Rightarrow \vec E_{2\tau} = 0$ из ГУ
$\to E_{1\tau} = 0$
$\Rightarrow \vec j \perp$ границе, либо втекает, либо утекает.
$j_{1\tau} = \sigma_1 E_{1\tau} = 0$

Формальная аналогия между токостатикой и электростатикой

Электростатика	Токостатика
φ	φ
$\vec E = -\nabla\varphi$	$\vec E = -\nabla\varphi$
$\vec D = \varepsilon \vec E$	$\vec j = \sigma \vec E$

Уравнения.

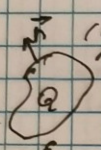
$\mathrm{div}\,\vec D = 0$	$\mathrm{div}\,\vec j = 0$
$\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\varphi) = 0$	$\mathrm{div}(\sigma\nabla\varphi) = 0$

Граничные условия

E_τ – непрерывна	E_τ – непр.
D_n – непрерывн.	j_n – непр.

Граничные усл. на пов. идеал. проводников (электродов)

$E_\tau = 0$ (φ = const)



$$\oint_S \vec D\, d\vec S = 4\pi Q$$

$$\oint_S \varepsilon E_n\, dS = 4\pi Q$$

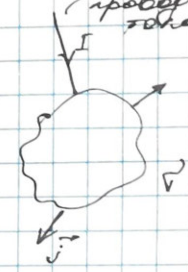
$E_\tau = 0$ (φ = const)

$$\oint_S \sigma E_{1n}\, dS = I$$

(т.е. $4\pi Q \rightleftarrows I$)

$\Uparrow$

бесек. тонкий провод, источник тока.



$$\oint_S \vec j\, d\vec S = 0, \quad \vec j = \sigma\vec E + \vec j^{\,ст}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\oint_S \sigma\vec E\, d\vec S}_{\oint_S \sigma E_n dS} + \underbrace{\oint_S \vec j^{\,ст} d\vec S}_{-I} = 0$$

"–" т.к. ток втекает, а потом растекается.

Соответствия, выходящие из таблицы:

$\vec E \rightleftarrows \vec E$

$\varphi \rightleftarrows \varphi$

$\vec D \rightleftarrows \vec j$

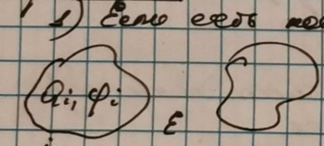
$\varepsilon \rightleftarrows \sigma$

$4\pi Q \rightleftarrows I$

$(Q \rightleftarrows I/4\pi)$

Примеры:

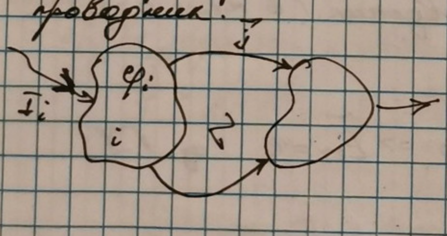
1) Если есть набор проводников



$$\varphi_i = \sum_k b_{ik}(\varepsilon) Q_k.$$

$$Q_i = \sum_k C_{ik}(\varepsilon)\varphi_k.$$

Теперь рассм-м конфигурацию электродов, между ними проводник:



$$Q \rightleftarrows \frac{I}{4\pi}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi}\sum_k b_{ik}(\varepsilon\to\sigma) I_k.$$

$$I_i = 4\pi \sum_k C_{ik}(\varepsilon\to\sigma)\varphi_k$$

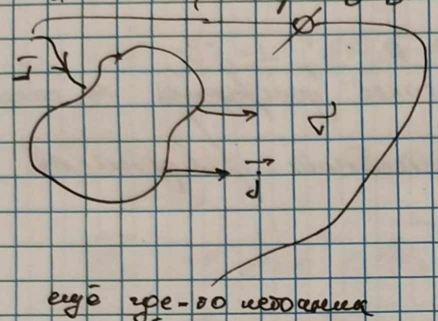
Естественно ввести обозначе-я: $R_{ik} = \frac{1}{4\pi} b_{ik}(\varepsilon\to\sigma)$ ~ по размерности сопротивление

$G_{ik} = 4\pi C_{ik}(\varepsilon \to \sigma)$ — по размерности обр. R_{ik} → проводимость

$$\Rightarrow \varphi_i = \sum_k R_{ik} I_k$$

$$I_i = \sum_k G_{ik} \varphi_k$$

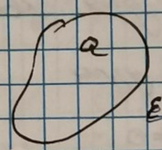
2) Сопр-е проводника между идеальным электродом и ∞ (сопр. заземления)



ещё где-то поставим

$$R = \frac{\varphi - \overset{=0}{\varphi(\infty)}}{I} \to \frac{\varphi}{4\pi Q}$$

Это соотв. задачи из электростатики



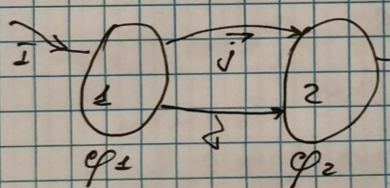
$$\to \frac{Q}{\varphi} = C(\varepsilon)$$

$C(\varepsilon) = \varepsilon C_0$, где C_0 - знач. при $\varepsilon = 1$.

$$\Rightarrow R = \frac{\varphi}{I} \to \frac{\varphi}{4\pi Q} = \frac{1}{4\pi C(\varepsilon)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon C_0} \to \frac{1}{4\pi\sigma C_0}$$

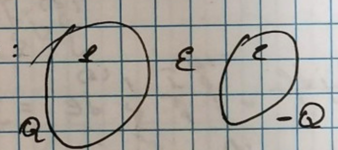
$$R = \frac{1}{4\pi\sigma C_0}$$

3) Сопр-е проводника между 2мя идеальными проводниками.



$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} \to \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4\pi Q} = \frac{1}{4\pi C(\varepsilon)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon C_0}$$

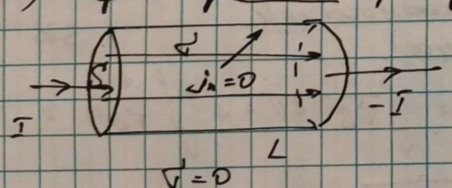
В электростатике:



$$\Rightarrow \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = C(\varepsilon)$$

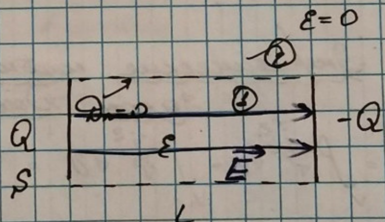
$$\Rightarrow R = \frac{1}{4\pi\sigma C_0}$$

4) Сопр-е прямого провода



$\sigma = 0$

<=>



$D_{1n} = D_{2n}$

$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$, $\varepsilon_2 = 0$

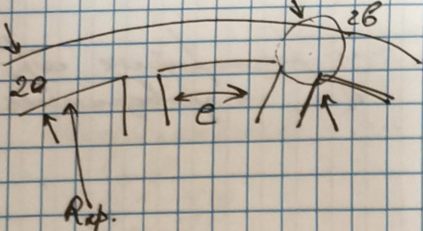
$\Rightarrow D_{1n} = 0$

получили поле в плоском конденсаторе.

$$C = \varepsilon \underbrace{\frac{S}{4\pi L}}_{C_0}$$

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma C_0} = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}$$

Квазилинейные проводники

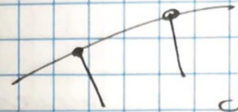


Провод с другими пропорциями.

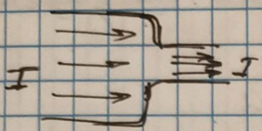
пусть $a \ll L,\ R_{кр.}$

$b \ll L,\ R_{кр.}$

Заменяем на абстракцию:



~ квазилинейный проводник.



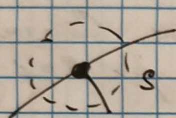
Плотность тока можно рассчитать:

$$j = \frac{I}{S}\ ;\ I = jS,$$

если плотность тока однородная по сечению.

Правила Кирхгофа: для квазилинейных проводников.

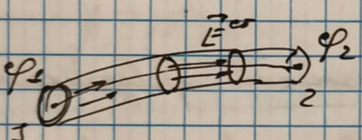
1. закон Кирхгофа: для узла



$$\oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{\sum_k I_k = 0}$$ с учётом втек. и вытек. знаков токов.

2. закон Кирхгофа:



$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{E}^{ст}$$

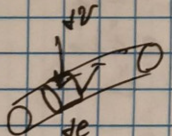
$$\underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\sigma}}_{\int_{(1)}^{(2)} \frac{j\, dl}{\sigma}} = \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}\, d\vec{l}}_{\varphi_1 - \varphi_2} + \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^{ст}\, d\vec{l}}_{\mathcal{E}_{12}^{ст}}$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{j\, dl}{\sigma} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{I}{S}\frac{1}{\sigma}\, dl = I \int_{(1)}^{(2)} \frac{dl}{\sigma S} = IR$$

~ сопр. кусочков суммируется.

$$\Rightarrow \boxed{IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}^{ст}}$$

Энергетические соотношения токостатики.
(Закон Джоуля-Ленца).



$$Q = \int_V \frac{\vec{j}^2}{\sigma} dV = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV = \left\{ j = \frac{I}{S} \right\} = \int_V \frac{I^2}{\sigma S^2} dV = I^2 \int_V \frac{\overset{= S\,dl}{dV}}{\sigma S^2} =$$

$$= I^2 \underbrace{\int \frac{dl}{\sigma S}}_{R} = I^2 R \quad \Rightarrow \boxed{Q = I^2 R}$$ ~ мощность джоулевых потерь.

Постоянное магнитное поле.
(Магнитостатика)

Уравнения опис. постоянное магн. поле. Векторный потенциал.

$$\text{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{0} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \text{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \end{cases}}$$

Знаем, что $\text{div}\,\text{rot} = 0$

из $\text{div}\,\vec{B} = 0$ введём $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$, где $\vec{A}$ - векторный потенциал.

$\vec{A}$ ~ опр-ся с точностью до градиента произв. скал. ф-ции.

$$\vec{A}_{\text{ст}} \to \vec{A}_{\text{нов}} = \vec{A}_{\text{ст}} - \nabla\psi \quad (*)$$

старый

Вычисляем $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$ для старого и нового $\vec{A}$:

$$\text{rot}\,\vec{A}_{\text{нов}} = \text{rot}\,\vec{A}_{\text{ст}} - \underbrace{\text{rot}\,\nabla\psi}_{0} = \text{rot}\,\vec{A}_{\text{ст}} = \vec{B}$$

~ в этом состоит калибровочная (градиентная) инвариантность ~ поле $\vec{B}$ не меняется отн. преобр. векторного потенциала по $(*)$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} = \frac{1}{\mu}\text{rot}\,\vec{A}$$

$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\,\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, если $\mu = \text{конст.}$ (среда однородн.)

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$$

$\Downarrow$ из ур-ий вект.

$$\nabla\,\text{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \quad (1)$$

с помощью калибровочного преобр. можно вект. потенц. можно подобрать так, что

$\text{div}\,\vec{A} = 0$ ~ калибровка Кулона.

Проверим это:

$\vec{A}_{\text{ст}}$: $\text{div}\,\vec{A}_{\text{ст}} \neq 0$

$\vec{A}_{\text{нов}} = \vec{A}_{\text{ст}} - \nabla\psi$, так что $\text{div}\,\vec{A}_{\text{нов}} = 0$

$\Rightarrow \text{div}(\vec{A}_{\text{ст}} - \nabla\psi) = 0$, учитыв. $\text{div}\,\nabla = \Delta$

$\Rightarrow \Delta\psi = \underbrace{\text{div}\,\vec{A}_{\text{ст}}}_{\neq 0}$ $\Rightarrow$ ур-е Пуассона ~ решение есть всегда.

$\Rightarrow$ найдём $\psi = \ldots$

и всегда сможем обеспечить дан. калибровка.

Далее всегда считаем, что это условие выполнено.

Из (1):

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \Delta\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \\ \text{div}\,\vec{A} = 0 \end{array}$$

Ясно, что век. потенц. опр-н до какого-то пост. вектора.
Но тут аналогия с эл. потенциалом.

→ тогда всё

Логично / считать $\vec A(\infty)=0$
будет совершенно однозначно.

При переходе к декартовой с.к.

$$\Delta A_{x,y,z} = -\frac{4\pi\mu}{c} j_{x,y,z}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

← математически совпадают, уже такое ур-е решали.

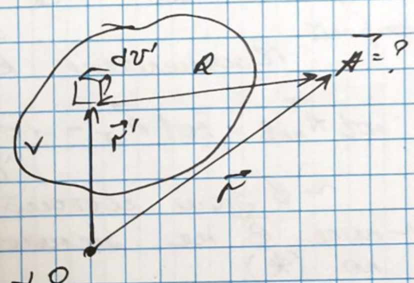
Запишем решение по аналогии:

$$A_{x,y,z}(\vec r) = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{j_{x,y,z}(\vec r')}{R}\, dV'$$

V – по всей обл. занятой источниками.

$$\Rightarrow \vec A(\vec r) = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\vec j(\vec r')}{R}\, dV'$$

$$R = |\vec r - \vec r'|$$



Удобно на будущее ввести:

$$\vec R = \vec r - \vec r'$$

Проверим, что всё хорошо с калибр. Кулона:

$$\operatorname{div}\vec A(\vec r) \overset{?}{=} 0 \quad \text{, т.е.} \quad (\nabla_{\vec r}, \vec A(\vec r)) \overset{?}{=} 0$$

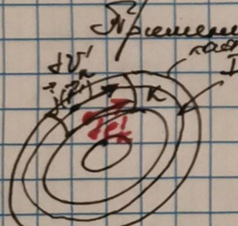
подставляем решение ($\frac{\mu}{c}$ = const можно не писать)

$$\nabla_{\vec r}\cdot\int_V \frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\,dV' = \{\text{т.к. инт. по ' перем. а } \nabla_{\vec r}\text{, то вносим под интеграл}\} =$$

$$= \int_V \nabla_{\vec r}\cdot\frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\,dV' = \int_V \nabla_{\vec r}\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\cdot\vec j(\vec r')\,dV' = -\int_V\frac{\vec R\cdot\vec j(\vec r')\,dV'}{R^3}$$

$$\nabla_{\vec r}\frac{1}{R} = -\nabla_{\vec r'}\frac{1}{R} = -\frac{\vec R}{R^3}$$

Применим важный искусств. приём (в токовой статике.)



т.к. все токи замкнуты, то можно разбить на k элементарных замкнутых трубок.
тогда

$$\vec j(\vec r')\underbrace{dV'_k}_{S_k\, dl'_k} = I_k\, d\vec l'_k$$

т.к. слева стоит вектор и справа вектор, перенесём.

12.10.22.

$$\Rightarrow \nabla_{\vec r}\cdot\int_V\frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\,dV' = \ldots = (-1)\int_V\frac{\vec R\cdot\vec j(\vec r')\,dV'}{R^3} = \sum_k I_k\oint_{l_k}(-1)\frac{\vec R}{R^3}\,d\vec l'_k \ominus$$

вспоминаем соотн. $-\frac{\vec R}{R^3} = -\nabla_{\vec r'}\frac{1}{R}$

$\ominus$ т.к. интеграл от градиента по замкн. контуру равен 0 $= 0$

ч.т.д.

Закон Био-Савара:

Чтобы найти магнитное поле: (пользуемся прошлой ф-лой)

$$\vec H = \frac{\vec B}{\mu} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}_{\vec r}\vec A(\vec r) = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\mu}{c}\int\limits_V \mathrm{rot}_{\vec r}\frac{\vec j(\vec r')}{R}\,dV' =$$

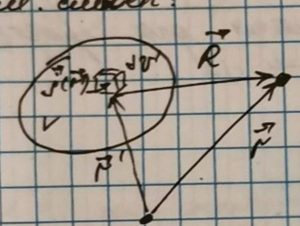
= { т.к. rot действ. по $\vec r$, то на $\vec j(\vec r')$ действ. не будет } =

$$= \frac{1}{c}\int\limits_V \Big[\underbrace{\nabla_{\vec r}\frac{1}{R}}_{=-\frac{\vec R}{R^3}}, \vec j(\vec r')\Big]\,dV' = \{\text{перест. сомножители}\} =$$

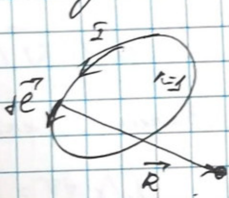
$$= \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{[\vec j(\vec r'), \vec R]}{R^3}\,dV'$$

Отдельный вклад элемент. токов: $d\vec H = \frac{1}{c}\frac{[\vec j(\vec r'),\vec R]}{R^3}\,dV'$

Геом. смысл:



Иногда встреч. квазилинейные проводники. Рассмотрим случай для них. пользуемся преобр.-м:



$$\vec j\,dV' = I_k\,d\vec l_k'$$

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu}{c}\int\limits_V \frac{\vec j(\vec r')}{R}\,dV' = \frac{\mu}{c}\sum_k I_k \oint\limits_{L_k}\frac{d\vec l_k'}{R}$$

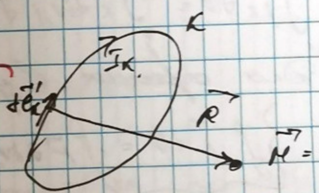
~ когда есть квазилин. замкнутые контуры.

Для самого магнитного поля:

$$\vec H = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{[\vec j(\vec r'),\vec R]}{R^3}\,dV' = \frac{1}{c}\sum_k I_k\oint\limits_{L_k}\frac{[d\vec l_k',\vec R]}{R^3}$$

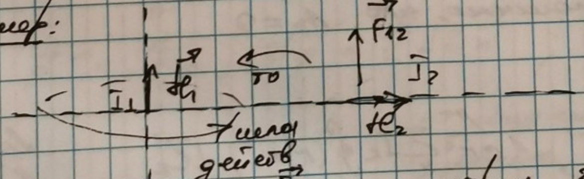
вклад от элемента контура:

$$dH_k = \frac{1}{c}I_k\frac{[d\vec l_k,\vec R]}{R^3}$$



Физ-ий смысл это всё приобр. имеет только после интегр., иначе можно придти к парадоксам.

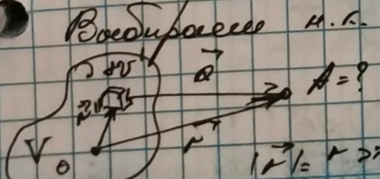
Пример:



на $\vec F_{21} = 0$ ~ наруш. 3го з-на Ньютона. но цепь на самом деле замкн.

Магнитное поле на большом расст-ии от источников. Разложение по мультиполям.

Выбираем н.к. внутри источн. или в окр-ти:



$|\vec r| = r \gg \max|\vec r'|$

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\frac{1}{R}\,dV'$ ⊜

Как в электростатике всё аналогично, разлаг. $\frac{1}{R}$.

⊜ $\frac{\mu}{c}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\left\{\frac{1}{r} + x'_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec{r}'=0} + \dots\right\}dV'$

Вспомним: $\left(\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec{r}'=0} = \frac{x_\alpha}{r^3}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu}{cr}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\,dV'}_{\vec{A}_0} + \underbrace{\frac{\mu}{c}\frac{1}{r^3}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\cdot \underbrace{x'_\alpha x_\alpha}_{(\vec{r},\vec{r}')}\,dV'}_{\vec{A}_1} + \dots$$

убедимся что соотв. магн. монополь.   соотв. магн. диполь

$\vec{A}_0 \overset{?}{=} 0 \to \int_V \vec{j}(\vec{r}')\,dV' \overset{?}{=} 0$ дост. убедиться для проекций j^x, j^y, или j^z

Напр. j^x:

$$div(x\vec{j}) = x\,div\vec{j} + (\underbrace{\nabla x}_{\vec{x}_0}, \vec{j}) = x\,div\vec{j} + j^x$$

Вычисл. интеграл по объёму:

$$\int_V j_x\,dV = \int_V \{div(x\vec{j}) - x\,div\vec{j}\}\,dV = \{по\ т.\ О.\text{-}Г.\} = \underbrace{\oint_{S_{R\to\infty}} x\vec{j}\,d\vec{S}}_{0} - \int_V x\,div\vec{j}\,dV$$

V – инт. по области источников

т.к. токи занимают конечное пр-во, а интегр. по беск. удал. поверхн.

$$\int_V j_x\,dV = -\int_V x\,div\vec{j}\,dV$$

Для огранич. в пр-ве токов, получили:

$$\int_V \vec{j}\,dV = -\int_V \vec{r}\,div\vec{j}\,dV$$

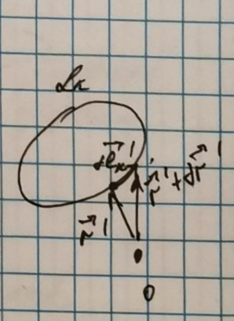
Но в статике $div\vec{j}=0 \Rightarrow \int_V \vec{j}(\vec{r}')\,dV' = 0 \Rightarrow \vec{A}_0 = 0$, ч.т.д.

Магн. зарядов нет => логично, что $\vec{A}_0 = 0$

Смотрим $\vec{A}_1$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu}{cr^3}\int_V \vec{j}(\vec{r}')(\vec{r},\vec{r}')\,dV' = \frac{\mu}{cr^3}\sum_k I_k \oint_{L_k}(\vec{r},\vec{r}')\underbrace{d\vec{l}'_k}_{d\vec{r}'}$$

зам-м $\vec{j}\,dV' = I_k\,d\vec{l}'_k$



Из рисунка: $d\vec{r}' = d\vec{l}'_k$

Запишем вспомогательные математ. соотношения:

$$d_{\vec{r}'}\{(\vec{r},\vec{r}')\vec{r}'\} = (\vec{r}, d\vec{r}')\vec{r}' + (\vec{r},\vec{r}')\,d\vec{r}'$$

$$[\vec{r},[\vec{r}', d\vec{r}']] = (\vec{r}, d\vec{r}')\vec{r}' - (\vec{r},\vec{r}')\,d\vec{r}'$$

$$d_{\vec{r}'}\{(\vec{r},\vec{r}')\vec{r}'\} - [\vec{r},[\vec{r}',d\vec{r}']] = 2(\vec{r},\vec{r}')\,d\vec{r}'$$

$$\vec A_1 = \frac{\mu}{cr^3}\frac{1}{2}\sum_k I_k \oint_{l_k} \{ d\vec r' \{(\vec r, \vec r')\vec r'\} + [[\vec r', d\vec r'], \vec r]\} \ominus$$

$\oint_{l_k} d\vec r' \{\ldots\} = 0$ по замкн. контуру от полного дифф-ла. $= 0$

$$\ominus \frac{\mu}{cr^3}\frac{1}{2}\sum_k I_k \oint_{l_k}[[\vec r', \underbrace{d\vec r'}_{d\vec l_k}], \vec r] = \frac{\mu}{cr^3}\frac{1}{2}\int_V [[\vec r', \vec j(\vec r')], \vec r]\, dV' \ominus$$

возвращаемся обратно к $\vec j\, dV' = I_k\, d\vec l_k'$

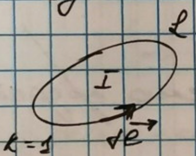
$$\ominus \frac{\left[\frac{\mu}{2c}\int_V[\vec r', \vec j(\vec r')]\,dV', \vec r\right]}{r^3}$$

$\Rightarrow \vec A_1 = \frac{[\vec p^m, \vec r]}{r^3}$, где $\vec p^m = \frac{\mu}{2c}\int_V [\vec r', \vec j(\vec r')]\, dV'$

— вектор магнитного дипольного момента.

Т.е. на очень большом расст. от источника можем рассчитать $\to \vec p^m$, а затем $\vec A_1$

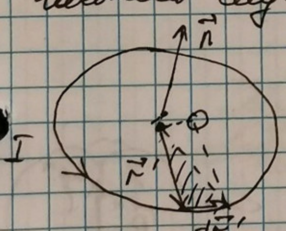
Пусть есть контур с током I.



$\vec j\, dV' = I\, d\vec l$

$$\vec p^m = \frac{\mu}{2c} I \oint_l [\vec r', \overbrace{d\vec l'}^{d\vec r'}]$$

Частный случай: виток в одной плоскости.



$\frac{1}{2}[\vec r', d\vec r']$ — площадь заштрих. половинка параллелограмма.

$\frac{1}{2}[\vec r', d\vec r'] = dS'\vec n$

$\Rightarrow \vec p^m = \frac{\mu}{c} I \int dS' \vec n = \frac{\mu}{c} I S\vec n$; Если $S\to 0$, $I\to\infty$, так что $I\cdot S = const$

$\Rightarrow$ получим элементарный магн. диполь.

Напряжённость поля $\vec H$ магнитного диполя.

$\vec A = \frac{[\vec p^m, \vec r]}{r^3}$ — спр-ва если находимся на конечном расст-и от точечного диполя.

$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec r}{r^3}$

$$\vec H = \frac{\vec B}{\mu} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}\vec A = -\frac{1}{\mu} \operatorname{rot}[\underbrace{\vec p^m}_{\vec a}, \underbrace{\nabla\frac{1}{r}}_{\vec b}]$$

const

вспоминаем ф-лу

$$\mathrm{rot}[\vec a, \vec b] = \vec a\, \mathrm{div}\, \vec b - \vec b\, \underbrace{\mathrm{div}\, \vec a}_{0} + \underbrace{(\vec b, \nabla)\vec a}_{0} - (\vec a, \nabla)\vec b$$

$$\Rightarrow \vec H = -\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\left[\vec p^{\,m}, \nabla\frac{1}{r}\right] = -\frac{1}{\mu}\left\{\vec p^{\,m}\, \underbrace{\mathrm{div}\,\nabla\frac{1}{r}}_{\Delta \frac{1}{r} = 0} - (\vec p^{\,m}, \nabla)\nabla\frac{1}{r}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\mu}(\vec p^{\,m}, \nabla)\nabla\frac{1}{r} \overset{?}{=} -\frac{1}{\mu}\nabla\left(\vec p^{\,m}, \frac{\vec r}{r^3}\right)$$

при $r \neq 0$ — ф-я Грина

проверка:

$$-\nabla\left(\vec p^{\,m}, \frac{\vec r}{r^3}\right) = \nabla\left(\vec p^{\,m}, \nabla\frac{1}{r}\right) = \left[\vec p^{\,m}, \overset{=0}{\mathrm{rot}\,\nabla\frac{1}{r}}\right] + \left[\nabla\frac{1}{r}, \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec p^{\,m}}_{=0,\ \text{т.к. } \vec p^{\,m} = \mathrm{const}}\right] +$$

$$+ \underbrace{\left(\nabla\frac{1}{r}, \nabla\right)\vec p^{\,m}}_{=0} + (\vec p^{\,m}, \nabla)\nabla\frac{1}{r}$$, ч. т. д.

$$\Rightarrow \boxed{\vec H = -\nabla\frac{(\vec p^{\,m}, \vec r)}{\mu r^3}}$$

Если введём $\vec H = -\nabla\varphi^m$ $\Rightarrow$ $\varphi^m = \frac{(\vec p^{\,m}, \vec r)}{\mu r^3}$ — полный аналог ф-лы для эл-го диполя.

скалярный магнитный потенциал.

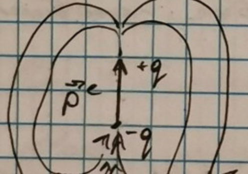
Всегда знал, что магн. поле вихревое, а не потенциальное, но почему-то ввели потенциал. Почему?

$\mathrm{rot}\,\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec j$ ($\vec j \neq 0$ только у источников.)

и вдали $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}\,\vec H = 0$ $\Rightarrow$ $\vec H = -\nabla\varphi^m$.

Т.е. вне источников магн. поле можно представ. через потенц. (локально потенциальное.)

Аналогия между дипольной электрост-й и магнитост-й, как частный случай принципа двойственности

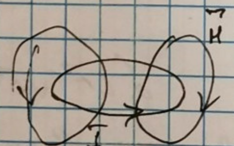


$\vec E = -\nabla\varphi^e$

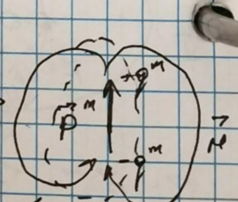
$\varphi^e = \frac{(\vec p^{\,e}, \vec r)}{\varepsilon r^3}$

Проведём заменой

$\vec E \to \vec H$
$\varepsilon \to \mu$
$\vec p^{\,e} \to \vec p^{\,m}$
$\varphi^e \to \varphi^m$



$\Leftrightarrow$



если смотреть только на область вне, наблюд.-ль не знает чем создано $\vec H$.

$\Rightarrow \vec H = -\nabla\varphi^m$, $\varphi^m = \frac{(\vec p^{\,m}, \vec r)}{\mu r^3}$

Можно получ. обр. заменой

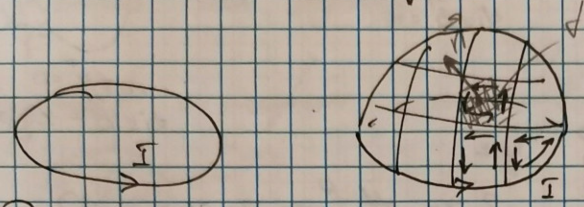
$\vec H \to -\vec E$
$\mu \to \varepsilon$
$\vec p^{\,m} \to -\vec p^{\,e}$
$\varphi^m \to -\varphi^e$

14.10.22.

Магнитный листок как эквивалент линейного контура с током.

~ „двойной магнитный слой".

Расс-м линейный контур с током, и натянем на неё пов-ть — сетку.



— На смежных участках ток компенсируется => ток течёт только по ободу как в начале.

Для малого элемента: $d\vec{p}^{\,m} = \frac{\mu}{c} I\, dS \cdot \vec{n}$

Магнитный дип. момент в ед. площади → пов. магн. момент:

$$\vec{p}^{\,m,\text{пов}} = \frac{d\vec{p}^{\,m}}{dS} = \frac{\mu}{c} I \vec{n}$$ — аналог эл-го двойного слоя.

Воспользуемся принципом перест. двойственности:

$$\varphi^e = \frac{1}{\varepsilon}\int_S \frac{(\vec{p}^{\,e,\text{пов}}, \vec{R})}{R^3}\, dS'$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^m = \frac{1}{\mu}\int_S \frac{(\vec{p}^{\,m,\text{пов}}, \vec{R})}{R^3}\, dS'$$

Для скачка потенциала:

$$\varphi_2^e - \varphi_1^e = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\vec{n}_{12}, \vec{p}^{\,e\,\text{пов}})$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_2^m - \varphi_1^m = \frac{4\pi}{\mu}(\vec{n}_{12}, \vec{p}^{\,m,\text{пов}})$$

Продолжение обсужд. аналогии между электростатикой и магнитостатикой
(на языке ур-ий)

Запиш. для областей вне источников.

Электростатика	Магнитостатика
$\text{rot}\,\vec{E} = 0 \quad (\vec{E} = -\nabla\varphi^e)$	$\text{rot}\,\vec{H} = 0 \quad (\vec{H} = -\nabla\varphi^m)$
$\text{div}\,\vec{D} = 0$	$\text{div}\,\vec{B} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$	$\vec{B} = \mu\vec{H}$

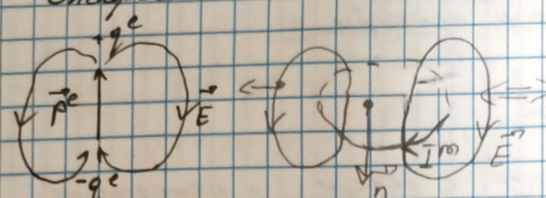
гр. условия

E_τ — непр.	H_τ — непр.
D_n — непр.	B_n — непр.

14.10.22.

Данные аналогии можно продолжить, вводя фиктивные магнитные токи.

Электростатика



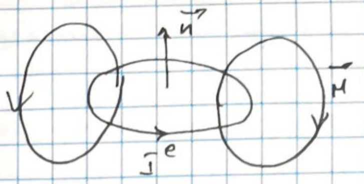
$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$

$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho^e$

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}^m$

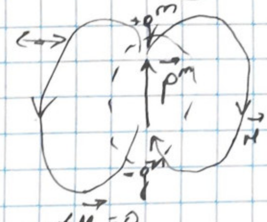
$\operatorname{div} \ldots = 0$

Магнитостатика.



$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^e$

$\operatorname{div}\vec{B} = 0$



$\operatorname{rot}\vec{H} = 0$

$\operatorname{div}\vec{B} = 4\pi\rho^m$

$$\Rightarrow \vec{p}^e = -\frac{\varepsilon}{2c}\int[\vec{r}', \vec{j}^m(\vec{r}')]\,dV' \quad \text{где}$$

также из принципа п.д.

$$\vec{p}^m = \frac{\mu}{2c}\int[\vec{r}', \vec{j}^e(\vec{r}')]\,dV'$$

И возник. вопрос → нельзя ли в электростатике создать то же поле $\vec{E}$ с помощью кольцевого тока.

Из принципа двойственности → можно, введя магн. токи.

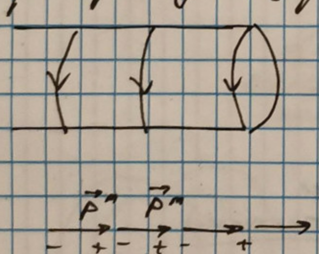
Т.е. чтобы перейти слева на право переходят заменой

↳ $\vec{E} \to \vec{H}$, $\vec{p}^e \to \vec{p}^m$, $\varepsilon \to \mu$, $\vec{j}^m \to -\vec{j}^e$

наоборот из права влево:

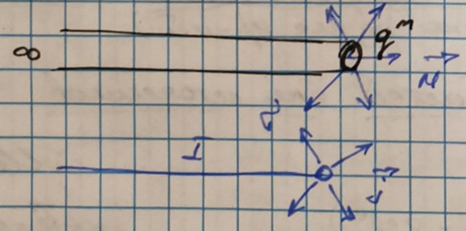
$\vec{H} \to -\vec{E}$, $\vec{p}^m \to -\vec{p}^e$, $\mu \to \varepsilon$, $\vec{j}^e \to \vec{j}^m$

Пример: идеализированный соленоид (намотаны витки плотно)



Разобьём на элементарные витки с током.

Возьмём тонкий соленоид (малый радиус, чтобы воспринимался конец как точечный).



Можно моделировать

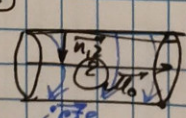
Поля, создаваемые намагниченными телами.

$\vec{M}^{ст} \neq 0$

$\vec{j}^e = c\operatorname{rot}\vec{M} \quad \Rightarrow \quad \vec{j}^{ст} = c\operatorname{rot}\vec{M}^{ст}$ ст - сторонние.

$\vec{i}^e = c[\vec{n}_{12}, \vec{M}_2 - \vec{M}_1]$ - как граничное условие.

Пусть для опр-ти имеем цилиндр (3)



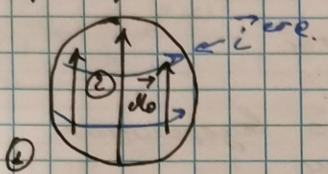
И пусть внутри есть вектор намагн. $\vec{M}_2 = \vec{M}^{ст} \equiv \vec{M}_0$

$$\vec{M}_1 = 0 \Rightarrow \vec{i}^{\,ст.е} = c[\vec{n}_{12}, \underbrace{\vec{M}_2^{ст}}_{\vec{M}_0} - \underbrace{\vec{M}_1^{ст}}_{0}] = c[\vec{n}_{12}, \vec{M}_0]$$

=> ток обтекает соленоид.

Т.е. это сторонн. намагн. ток, который можно заменить исх. задачу.

<u>Например</u> с шаром, если провести всё аналогично:



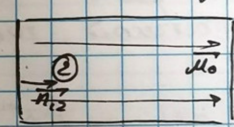
Есть и другой способ, он связан с поляризацией, из принципа двойственности:

$$\rho^e = -\mathrm{div}\vec{P} \to \rho^m = -\mathrm{div}\vec{M}$$

а для дивергенции знаем хар-ное граничное условие

$$\zeta^m = -(\vec{n}_{12}, \vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

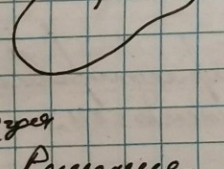
$$\zeta^{ст.m} = -(\vec{n}_{12}, \underbrace{\vec{M}_2}_{\vec{M}_0} - \vec{M}_1) = -(\vec{n}_{12}, \vec{M}_0)$$



И дальше рассчитывать поле от магнитных зарядов, или эл-их., потом замена по принц. двойств. =>

<u>Единственность решения задачи магнитостатики.</u>

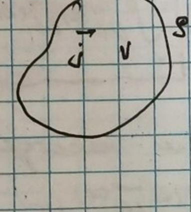
Знаем $\vec{H} = -\nabla\varphi^m$



Поэтому на S можем задать:

$$S: \varphi|_S, \text{ или } \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S$$

было можно, если есть токи.



тогда

Решение единств., если на S задается:

$$S: \vec{A}_\tau, \text{ либо } \vec{B}_\tau \leftrightarrow \frac{\partial\vec{A}}{\partial n}\Big|_S$$

Док-во: аналогично электростатики.

Если есть $\vec{A}_1, \vec{H}_1$ и $\vec{A}_2, \vec{H}_2$

и введем разностное поле: $\vec{A}_3 = \vec{A}_1 - \vec{A}_2$ $\quad \vec{j}_3 = 0$

$(\vec{H}_3 = \vec{H}_1 - \vec{H}_2)$

$S: \vec{A}_{3\tau} = 0$, либо $\vec{B}_{3\tau} = 0$; $\mu \vec{H}_{3\tau} = 0$

$\vec{H}_{3\tau} = 0$

т.е. доказываем от противного.

$$div[\vec{A}_3, \vec{H}_3] = \vec{H}_3 \underbrace{rot \vec{A}_3}_{\vec{B}_3 = \mu \vec{H}_3} - \vec{A}_3 \underbrace{rot \vec{H}_3}_{\frac{4\pi}{c}\vec{j}_3 = 0}$$, т.к. $\vec{j}_3 = 0$

далее интегрируем по $\int_V \dots dV$

$$\oint_S [\vec{A}_3, \vec{H}_3] \underbrace{d\vec{S}}_{\vec{n}dS} = \int_V \mu \vec{H}_3^2 dV$$

вклад дают только τ-ые компоненты.

$$\oint_S \underbrace{[\vec{A}_{3\tau}, \vec{H}_{3\tau}]}_{=0} \vec{n} dS \Rightarrow \int_V \mu \vec{H}_3^2 dV = 0$$ — это возможно если

$\vec{H}_3 = 0 \Rightarrow \vec{H}_1 = \vec{H}_2$ т.е. решение единственно.

Теорема взаимности в магнитостатике.

Вводятся фиктивные магнитные заряды. Всё аналогично с электростатикой, только формулируем для магн. зарядов:

$$\int_V \rho^{m(1)} \varphi^{m(2)} dV = \int_V \rho^{m(2)} \varphi^{m(1)} dV; \quad \rho^m = -div \vec{M}$$

преобразуем:

$$\int_V \rho^{m(1)} \varphi^{m(2)} dV = -\int_V div \vec{M}^{(1)} \cdot \varphi^{m(2)} dV = -\int_V \{div(\varphi^{m(2)} \vec{M}^{(1)}) - (\nabla \varphi^{m(2)}, \vec{M}^{(1)})\} dV =$$

$$= \{\text{по т. О.-Г.}\} = -\oint_{S_{R\to\infty}} \varphi^{m(2)} \vec{M}^{(1)} d\vec{S} + \int_V \nabla \varphi^{m(2)} \vec{M}^{(1)} dV =$$

— на бесконечности $\vec{M}^{(1)} = 0$ — нет в беск. намагн. тел.

$$\nabla \varphi^{m(2)} = -\vec{H}^{(2)}$$

$$= -\int_V \vec{M}^{(1)} \vec{H}^{(2)} dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V \vec{M}^{(1)} \vec{H}^{(2)} dV = \int_V \vec{M}^{(2)} \vec{H}^{(1)} dV}$$ — "полевая" формулировка теорема взаимности.

Получим некоторые следствия:

$\int_V \vec{M}^{(1)} \vec{H}^{(2)} dV$ пусть размер тела $\to 0$ в т. (1), тогда поле можно считать пост. в этой точке.

$$\Rightarrow \int_V \vec{M}^{(1)} \vec{H}^{(2)} dV = \vec{H}^{(2)}(1) \underbrace{\int_V \vec{M}^{(1)} dV}_{\vec{P}^{m(1)}} = \vec{P}^{m(1)} \vec{H}^{(2)}(1)$$

Если повторим такие же рассуждения для правой части:

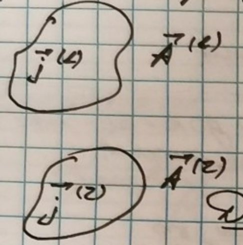
$$\Rightarrow \boxed{\vec p^{\,m(1)} \vec H^{(2)}(1) = \vec p^{\,m(2)} \vec H^{(1)}(2)}$$

Но должно получаться из принципа двойственности:

$$\boxed{\vec p^{\,e(1)} \vec E^{(2)}(1) = \vec p^{\,e(2)} \vec E^{(1)}(2)}$$

— но могли вывести и раньше.

Другая формулировка теоремы взаимности:



$$\boxed{\int_V \vec j^{(1)} \vec A^{(2)}\, dV = \int_V \vec j^{(2)} \vec A^{(1)}\, dV}$$

<u>Док-во:</u> запишем ур-я Максвелла для ист. 1 и 2

$$\operatorname{rot} \vec H^{(1)} = \frac{4\pi}{c} \vec j^{(1)} \quad \Big| \cdot \vec A^{(2)}$$

$$\operatorname{rot} \vec H^{(2)} = \frac{4\pi}{c} \vec j^{(2)} \quad \Big| \cdot \vec A^{(1)} \qquad \Big) -$$

$$\underbrace{\vec A^{(2)} \operatorname{rot} \vec H^{(1)} - \vec A^{(1)} \operatorname{rot} \vec H^{(2)}}_{(*)} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec j^{(1)} \vec A^{(2)} - \vec j^{(2)} \vec A^{(1)}\right)$$

Нужно док-ть, что $\int_V (*)\, dV = 0$

вычислим: $\operatorname{div}[\vec A^{(2)}, \vec H^{(1)}] = \vec H^{(1)} \underbrace{\operatorname{rot} \vec A^{(2)}}_{\vec B^{(2)} = \mu \vec H^{(2)}} - \vec A^{(2)} \operatorname{rot} \vec H^{(1)}$

$\operatorname{div}[\vec A^{(1)}, \vec H^{(2)}] = \vec H^{(2)} \underbrace{\operatorname{rot} \vec A^{(1)}}_{\vec B^{(1)} = \mu \vec H^{(1)}} - \vec A^{(1)} \operatorname{rot} \vec H^{(2)}$

) — вычитаем из 1го 2е и интегр. результат по V.

$$\operatorname{div}\left\{[\vec A^{(2)}, \vec H^{(1)}] - [\vec A^{(1)}, \vec H^{(2)}]\right\} = \underbrace{\vec A^{(1)} \operatorname{rot} \vec H^{(2)} - \vec A^{(2)} \operatorname{rot} \vec H^{(1)}}_{(*)}$$

$$\int_V \left(\vec j^{(1)} \vec A^{(2)} - \vec j^{(2)} \vec A^{(1)}\right) dV = \int_V \frac{c}{4\pi} \{*\}\, dV = \underbrace{\frac{c}{4\pi} \oint_{S_{R\to\infty}} \left\{ \underbrace{[\vec A^{(1)}, \vec H^{(2)}]}_{\sim \frac{1}{R^3}} - \underbrace{[\vec A^{(2)}, \vec H^{(1)}]}_{\sim \frac{1}{R^3}} \right\} d\vec S}_{=0}$$

рассматр. интегр. на беск. пр-во

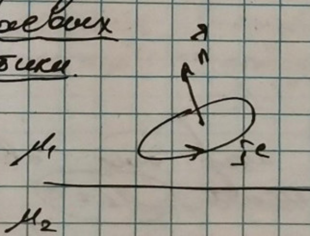
вдали $\vec A = \frac{[\vec p^{\,m}, \vec r]}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}$, тогда rot спадает ещё быстрее

$$\Rightarrow \int_V \vec j^{(1)} \vec A^{(2)}\, dV = \int_V \vec j^{(2)} \vec A^{(1)}\, dV$$

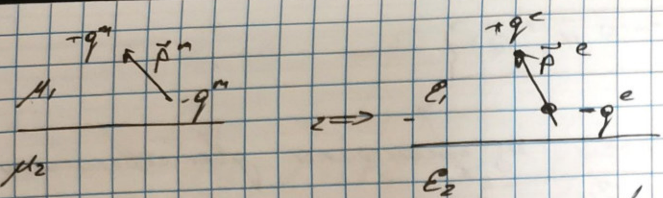
ч. т. д.

<u>Методы решения краевых задач магнитостатики</u>

<u>1. Метод изображений</u>



Найти поле, но виток можно заменить [illegible] магн. диполем.



~ по замен. по принципу двойств.

=> Исп. метод изобр. для электростатики и по принципу двойств. наиб. решение

2) Заполнение. (магнетика.)

а) Заполн. вдоль силовых трубок магн. поля.

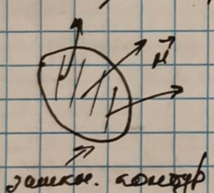
$\nabla\mu \perp \vec{H}, \vec{B}$ => Сохр-ся структура $\vec{H}$, док-во не треб., т.к. всё переводится из электростатики.

Если при таком заполн. сохр. фикс. токи, то сохр. не только структура $\vec{H}$ (ман. момент), но и знач. $\vec{H}$

$$\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$$

б) Заполнение вдоль (магнитных) эквипотенциалей.

$\nabla\mu \parallel \vec{H}, \vec{B}$ → Сохр-ся структура $\vec{B}$

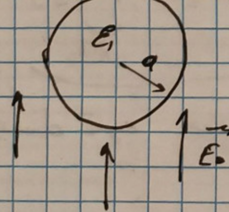


$$\int_S \vec{B}\,d\vec{S} = \Phi$$

Если данное заполнение реал. при фикс. магн. потоков, то сохр. не только структура $\vec{B}$, но и значение.

3) О методе разделения переменных.

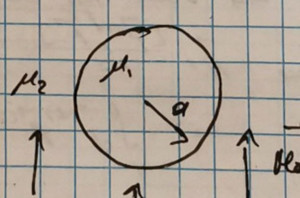
ограничимся одним примером: шар.



получим: $\vec{p}^e = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot \varepsilon_2 a^3 \vec{E}_0$

реш. можно получить заменой

$\vec{E}_0 \to \vec{H}_0$
$\varepsilon_{1,2} \to \mu_{1,2}$
$\vec{E}_{1,2} \to \vec{H}_{1,2}$
$\vec{p}^e \to \vec{p}^m$



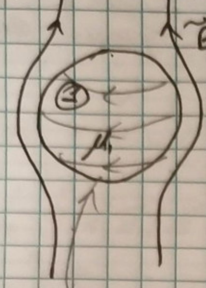
~ получим реш. для такой задачи.

$$\Rightarrow \vec{p}^m = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \mu_2 a^3 \vec{H}_0$$

Т.е., чтобы шар был сверхпроводящим нужно положить $\mu_1 = 0$ (см. ниже), тогда

$$\vec{p}^m = -\frac{1}{2} \mu_2 a^3 \vec{H}_0$$

Вопрос о сверхпроводимости:



$\Rightarrow B_{en} = 0$

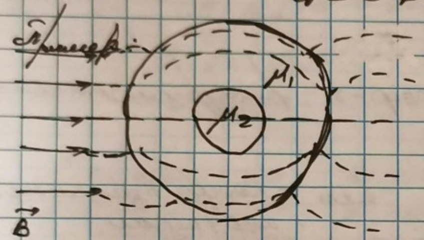
$\parallel$

$B_{in} = \mu_1 H_{1n} \Rightarrow \mu_1 = 0.$

μ_0

это и есть сверхпроводящие токи ~возникают из-за скачка тангенц. компонент $\vec{H}$.

Замечание об экранировании в магнитостатике.



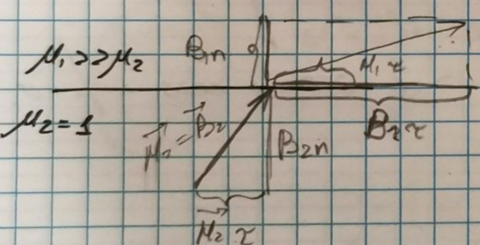
и пусть $\mu_1 >> \mu_2$

Силовые линии преломляются и поэтому через центр пройдёт меньше линий

Оценочно:

$$\frac{|\vec{B}_{in}|}{|\vec{B}_0|} \sim \frac{\mu_2}{\mu_1} << 1.$$

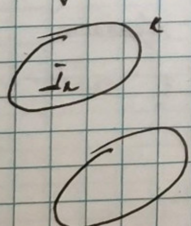
Модельно, качественно можно объяснить рассмотрев:



~ Т.е. всё следует из граничных условий

Поле системы квазилинейных токов. Коэфф-ты самоиндукции и взаимоиндукции.

Пусть есть система витков



Ⓢ

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} = \int_S \mathrm{rot}\vec{A}\, d\vec{S} = \oint_L \vec{A}\, d\vec{l}\ ; \quad \vec{A} = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\, dV'$$

$\vec{j}\, dV' = I\, d\vec{l}'$ – замена перехода к виткам с током.

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c}\sum_m I_m \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}'_m}{R}$$

, дальше ' (штрихи) не пишем, интегр. по контуру.

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c}\sum_m I_m \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_m}{R} = \sum_m \vec{A}_m$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}_m = \frac{\mu}{c} I_m \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_m}{R}}$$

– отдельный вклад индивидуальных витков.

Поток через к-ый виток:

$$\Phi_k = \oint_{L_k} \vec{A}\, d\vec{l}_k = \oint_{L_k} \sum_m \vec{A}_m\, d\vec{l}_k = \sum_m \overbrace{\oint_{L_k} \vec{A}_m\, d\vec{l}_k}^{\Phi_{km}}$$

Φ_{km} — магн. поток через виток k, созд. полем витка m

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_k = \sum_m \Phi_{km}}$$

$$\Rightarrow \Phi_k = \sum_m \oint_{L_k} \vec{A}_m\, d\vec{l}_k = \sum_m \oint_{L_k} \left\{ \frac{\mu I_m}{c} \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_m}{R} \right\} d\vec{l}_k$$

$$\Rightarrow \Phi_k = \frac{1}{c} \sum_m I_m\, \mu \oint_{L_k} \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_k\, d\vec{l}_m}{R},$$

$\Phi_{km} \sim I_m$ — можно ввести коэф-т пропорциональности.

$\Phi_{km} = \frac{1}{c} L_{km} I_m$, если $k \neq m$ L_{km} — коэф. взаимной индукции.

$$\Rightarrow L_{km} = \frac{c\, \Phi_{km}}{I_m}$$

если $k = m$ L_{kk} — коэф. самоиндукции. $(L_{kk} \equiv L_k)$

$$L_k = \frac{c\, \Phi_{kk}}{I_k}$$

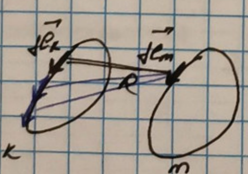
→ это и есть опр-я.

$$\Rightarrow \Phi_k = \sum_m \Phi_{km} = \frac{1}{c} \sum_m L_{km} I_m$$

$$\Rightarrow L_{km} = \mu \oint_{L_k} \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_k\, d\vec{l}_m}{R}$$

— из неё видно, что $L_{km} = L_{mk}$.

18.10.22.

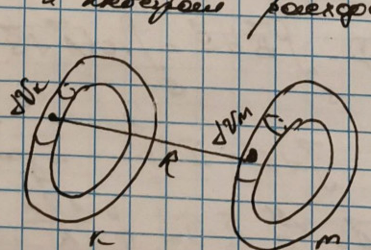


например при фикс. $d\vec{l}_m$ считаем по контуру $d\vec{l}_k$, потом двигаем $d\vec{l}_m$ и повторяем процедуру.

Но если взять L_{kk}, то $R \to 0$ и интеграл расходится. Нужна другая модель.

$\vec{j}_k\, dV_k = I_k\, d\vec{l}_k \Rightarrow d\vec{l}_k = \ldots$

$\vec{j}_m\, dV_m = I_m\, d\vec{l}_m \Rightarrow d\vec{l}_m = \ldots$



$$\Rightarrow L_{km} = \frac{\mu}{I_k I_m} \int_{V_k} \int_{V_m} \frac{\vec{j}_k \vec{j}_m}{R}\, dV_k\, dV_m$$

— в проводниках, которые из них выходит R → и уже при переходе L_{kk} $R \to 0$ сработает

Энергия и силы в постоянном магнитном поле.

Представление энергии м.п. в виде интегралов по объему.

$$W^m = \frac{1}{8\pi}\int_V \vec{H}\underbrace{\vec{B}}_{\text{rot}\vec{A}}\,dV = \frac{1}{8\pi}\int_V \vec{H}\,\text{rot}\vec{A}\,dV = \frac{1}{8\pi}\int_V \{\underbrace{\text{div}[\vec{A},\vec{H}]}_{\vec{H}\,\text{rot}\vec{A} - \vec{A}\,\text{rot}\vec{H}} + \vec{A}\underbrace{\text{rot}\vec{H}}_{\frac{4\pi}{c}\vec{j}}\}\,dV =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\oint_{S_{R\to\infty}}[\vec{A},\vec{H}]\,d\vec{S} + \frac{1}{2c}\int_V \vec{j}\vec{A}\,dV$$

если брать инт. от беск. объема, всё равно инт. будет там, где есть источники.

Можно разложить по мультиполям: (в беск. т. набл.)

$$W^m = \underbrace{\frac{1}{8\pi}\oint_{S_{R\to\infty}}[\vec{A},\vec{H}]\,d\vec{S}}_{R^2\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{R^3}\;=\;0} + \frac{1}{2c}\int_V \vec{j}\vec{A}\,dV$$

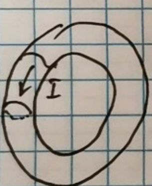
$$\Rightarrow \boxed{W^m = \frac{1}{2c}\int_V \vec{j}(\vec{r})\vec{A}(\vec{r})\,dV}$$

Ответить на вопрос, где размещена энергия, как и в электростатике, в магнитостатике нельзя.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\,dV'$$

$$W^m = \frac{\mu}{2c^2}\int_V\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\,dV\,dV'$$

$\vec{j}$ – одно и тоже, но в разных точках объема.



$$W^m = \frac{I^2}{2c^2}\cdot\underbrace{\frac{\mu}{I^2}\iint_{V\,V}\frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\,dV\,dV'}_{L}$$

L – коэф-т самоиндукции проводника.

$$\Rightarrow \boxed{W^m = \frac{LI^2}{2c^2}}$$

Энергия системы квазилинейных контуров.

Полная энергия:

$$\boxed{W^m} = \frac{1}{2c}\int_V \vec{j}\vec{A}\,dV = \frac{1}{2c}\sum_k I_k \underbrace{\oint_{L_k}\vec{A}\,d\vec{l}_k}_{\Phi_k} \boxed{= \frac{1}{2c}\sum_k I_k\Phi_k}$$

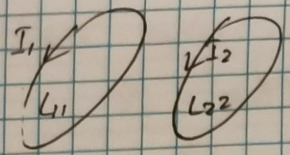
$$\vec{j}\,dV = I_k\,d\vec{l}_k$$

Если у нас мн-во витков. $\Phi_k = \sum_m \Phi_{km}$ – магнитный поток от всех m_x контуров $+\Phi_{kk}$ собств. магн. поток.

$$\Rightarrow W^m = \frac{1}{2c}\sum_k\sum_m I_k\Phi_{km} = \left\{\Phi_{km} = \frac{1}{c}L_{km}I_m\right\} = \frac{1}{2c^2}\sum_k\sum_m L_{km}I_kI_m$$

Собственная энергия и энергия взаимодействия с квазилин. токами.

имеется в виду, что после приведения во взаим. токи в контурах не изменяется



$$\Rightarrow W^m = \frac{1}{2c^2}\left(L_{11}I_1^2 + L_{22}I_2^2 + \underbrace{L_{12}I_1I_2 + L_{21}I_2I_1}_{\text{Энергия взаим.}}\right)$$

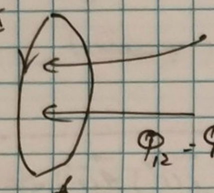
$L_{12} = L_{21}$

$$\boxed{W^m_{вз} = \frac{1}{c^2}L_{12}I_1I_2}$$

заметим $\frac{1}{c}L_{12}I_2 = \Phi_{12}$, перепишем: $\boxed{W^m_{вз} = \frac{1}{c}I_1\Phi_{12}}$

Пусть есть виток 1, поток от 2-го (где-то из бесконечности) – внешний → обозначим Φ_0,
т.е. удобно, если знаем внешний поток.

$I_1 = I$



$$\boxed{W^m_{вз} = \frac{1}{c}I\Phi_0}$$

$\Phi_{12} = \Phi_0$ $\quad$ Φ_0 – не содержит собственного потока!

Замечания о потоке магнитного поля через контур, обр-й идеальным квазилинейным проводником.

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{ст}) \Rightarrow \frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{E}^{ст}$$

$$\underbrace{\oint_L \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l}}_{\oint_L \frac{I}{\sigma S} dl} = \underbrace{\oint_L \vec{E} d\vec{l}}_{-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_S \vec{B} d\vec{S}}_{\Phi}} + \underbrace{\oint_L \vec{E}^{ст} d\vec{l}}_{\mathcal{E}^{ст}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{E}^{ст}$$

$$\Rightarrow IR = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{E}^{ст}$$

В случае идеального провод. $R = 0$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{E}^{ст} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}^{int} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

$\mathcal{E}^{int} + \mathcal{E}^{ст} = 0$

Рассмотрим частные случаи:

а) $\mathcal{E}^{ст} = 0$

$\Rightarrow \mathcal{E}^{int} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Phi = const$, где

$\Phi = \Phi_{собств.} + \Phi_0$ $\quad$ Если крутим виток → Φ_0 меняется, тогда мен. и $\Phi_{собст}$, чтобы $\Phi = const$, а $\Phi_{собств} \sim I \Rightarrow$ меняется собств. ток в контуре.

б) $\mathcal{E}^{ст} \neq 0$, и требуем $I = const$

$$\Rightarrow \mathcal{E}^{ст} = -\mathcal{E}^{int} = \frac{1}{c}\underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_I}_{\text{при пост. токе}} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}\right)_I$$

$\Rightarrow \mathcal{E}^{ст}$ должно меняться по так. закону.

в) Посчитаем работу:

Δt, ΔP, рассм-м когда $I = const$.

$dq = I\,dt \iff \Delta q = I\,\Delta t$. $\Rightarrow \Delta P = \int \frac{\Phi^{ст}}{c}\,dq = \int \frac{\Phi^{ст}}{c} I\,dt = I \int \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}\right)_I dt = \frac{1}{c} I \underbrace{(\Delta\Phi_0)_I}_{(\Delta\Phi)_I}$

$$\boxed{\Delta P = \frac{1}{c} I (\Delta\Phi)_I}$$

Энергетический метод расчёта обобщ. сил в магнитостатике.

Аналогия с электростатикой

$$\underbrace{F_\alpha \delta\xi_\alpha}_{\vec F\delta\vec\xi} = -\delta(W^m - P)$$

1) Если $P=0$ $\Rightarrow$ $F_\alpha\delta\xi_\alpha = -(\delta W^m)_\Phi$

$$F_\alpha = -\left(\frac{\partial W^m}{\partial \xi_\alpha}\right)_\Phi$$

2) I-фикс., $P\neq 0$ (витки с фикс. токами.)

$$F_\alpha\delta\xi_\alpha = -\delta(W^m-P)_I = -(\delta W^m)_I + (\delta P)_I$$

смотрим на прошлые формулы, только меняем для вариаций:

$$(\delta P)_I = \frac{1}{c}\sum_k I_k(\delta\Phi_k)_I$$

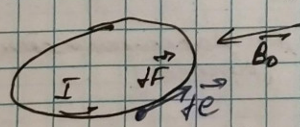
Из $W^m = \frac{1}{2c}\sum_k I_k\Phi_k \Rightarrow (\delta W^m)_I = \frac{1}{2c}\sum_k I_k(\delta\Phi_k)_I$

$$\Rightarrow F_\alpha\delta\xi_\alpha = -\frac{1}{2c}\sum_k I_k(\delta\Phi_k)_I + \frac{1}{c}\sum_k I_k(\delta\Phi_k)_I = \frac{1}{2c}\sum_k I_k(\delta\Phi_k)_I = (\delta W^m)_I$$

$$\Rightarrow F_\alpha\delta\xi_\alpha = (\delta W^m)_I \quad \to \quad F_\alpha = \left(\frac{\partial W^m}{\partial\xi_\alpha}\right)_I$$

Работа положит., → положит. и измен. энергии, что кажется неправ., но есть сторонние источники! Из-за них увелич. эн-я.

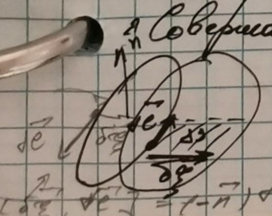
1. Сила, действующая на элемент квазилинейного контура с фикс. током.



$\vec F = \oint_l d\vec F$ — только тогда имеет смысл.

$\vec F\delta\vec\xi = \oint_l d\vec F\cdot\delta\vec\xi = (\delta W^m)_I = (\delta W^m_{вз})_I$, т.к. ток фиксир. эн. витка и внешн. поля не измен.

Совершаем виртуальное перемещение витка.



$[\delta\vec\xi, d\vec l] = (-\vec n)\,dS$

Исп-м $W^m_{вз} = \frac{1}{c} I\Phi_0$

$$\Rightarrow \vec F\delta\vec\xi = (\delta W^m_{вз})_I = \frac{1}{c} I(\delta\Phi_0)_I =$$

$$= \frac{I}{c}\oint [\underbrace{\delta\vec\xi, d\vec l}_{\vec n\, dS}]\,\vec B_0 = \frac{I}{c}\oint [d\vec l, \vec B_0]\,\delta\vec\xi$$

$[\delta\vec\xi, d\vec l] \parallel \vec n$ — как бы с одной стороны площадь добавл., а с другой убирается, в итоге интеграл дает суммарный поток.

$$\Rightarrow d\vec F = \frac{I}{c}[d\vec l, \vec B_0] \quad \text{— сила Ампера.}$$

$$\Rightarrow \vec F = \oint_L \frac{I}{c}[d\vec l, \vec B_0] = \oint_L \frac{I}{c}[d\vec l, \vec B]$$

на самом деле можно написать так, собственные поля скомпенсируются и останется только внешнее поле.

2. Объёмная пл-ть силы в магн. поле.

Из предыдущей ф-лы: $I\,d\vec l = \vec j\,dV$

$$\vec F = \int_V \frac{[\vec j, \vec B]}{c}\,dV = \int_V \vec f\,dV$$

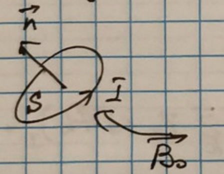
$$\boxed{\vec f = \frac{1}{c}[\vec j, \vec B]}$$

3. Сила, действующая на виток с фикс. током, вращающий момент, действующий на виток.

$$W^m_{вз} = \frac{1}{c} I \Phi_0 = \frac{1}{c} I \underbrace{(\vec B_0, \vec n)\cdot S}_{\int \vec B_0 \vec n\, dS} = \Big(\underbrace{\frac{\mu}{c} I S\vec n}_{\vec p^m}, \vec H_0\Big) = (\vec p^m, \vec H_0) = (\vec p^m_м, \vec B_0)$$

одн. поле; умнож. нормаль в

$\vec p^m$ — магнитный диполь.



$$\underset{\text{новое}}{\vec p^m_м} = \frac{\vec p^m}{\mu}$$

Вспомним электростатику: $W^e_{вз} = -(\vec p^e, \vec E_0)$ минус.

Но ситуации разные! Диполь висит сам по себе, а мы смотрим на виток, на который действ. сторонние ист.

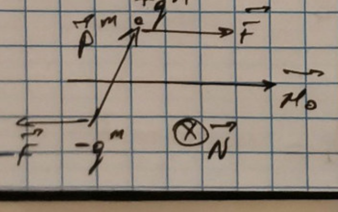
Если минус $W^m_{вз} = -(\vec p^m, \vec H_0)$ — то формул. фиктивный магнитный диполь!

$$\vec F = (\nabla W^m)_I = (\nabla W^m_{вз})_I = \nabla(\vec p^m, \vec H_0) = [\vec p^m, \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec H_0}_{=\frac{4\pi}{c}\vec j_0 = 0}] + [\vec H_0, \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec p^m}_{=0}] + (\vec p^m, \nabla)\vec H_0 + \underbrace{(\vec H_0, \nabla)\vec p^m}_{=0} =$$

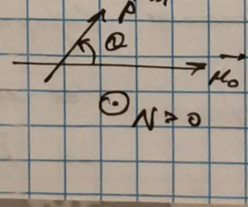
$\frac{4\pi}{c}\vec j_0 = 0$ в т. расположения диполя!

$$= (\vec p^m, \nabla)\vec H_0$$

$$\Rightarrow \vec F = (\vec p^m_м, \nabla)\vec B_0$$



Есть соглашение



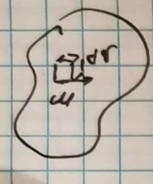
$$N = \frac{\partial}{\partial\theta}(W^m_{вз})_I = \frac{\partial}{\partial\theta}\underbrace{(\vec p^m, \vec H_0)}_{p^m H_0\cos\theta} = -p^m H_0 \sin\theta$$

$$\boxed{\vec N = [\vec p^m, \vec H_0] = [\vec p^m_м, \vec B_0]}$$

21.10.22. **Объёмная пл-ть пондеромоторной силы в магнетиках.**

Связано с намагниченностью и соотв. магнитным моментом.

Ранее:
$\vec F = (\vec p^m, \nabla)\vec H_0$ (должно напис не лишним)



$d\vec p^m = \vec M\, dV$

$\Rightarrow d\vec F = (\underbrace{d\vec p^m}_{\vec M dV}, \nabla)\vec H$

$\Rightarrow \vec f = \frac{d\vec F}{dV} = (\vec M, \nabla)\vec H = \frac{\mu-1}{4\pi}(\vec H, \nabla)\vec H$

$\vec M = \frac{\mu-1}{4\pi}\vec H$

Чуть преобразуем: $\nabla\vec H^2 = \nabla(\vec H, \vec H) = 2[\vec H, \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec H}_{\frac{4\pi}{c}\vec j = 0}] + 2(\vec H, \nabla)\vec H$

~ в том месте, где имеем магнетик (это сторон. токи.)

Тогда получим:

$$\boxed{\vec f = \frac{\mu-1}{8\pi}\nabla\vec H^2}$$

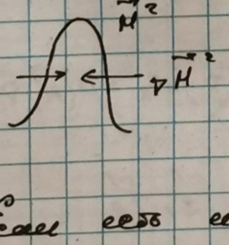
но есть дефект — не учит. эффект стрикции.

Пусть плотность магнетика $\tau \to \mu = \mu(\tau)$ под возд. внешнего поля. (магнитострикция.)

Без вывода, с её учетом: $\vec f = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec H^2\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau\right) - \frac{\vec H^2}{8\pi}\nabla\mu$

Если имеем дело с жидкими или газообр. магнетиками, то для них обычно $\mu = 1 + C\tau$

$\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau = C\tau = \mu - 1 \Rightarrow \vec f = \frac{1}{8\mu}\nabla\left((\mu-1)\vec H^2\right) - \frac{\vec H^2}{8\pi}\nabla\mu = \frac{\mu-1}{8\pi}\nabla\vec H^2$



Магнетики делятся на:
- **парамагнетики** $\mu > 0$ ~ магн. втягив. в область сильного поля.
- **диамагнетики** $\mu < 0$ ~ для них наоборот.

Если есть ещё токи, то действ. доп. магн. сила Лоренца.

Сведение объёмных сил к пов-ым натяжениям в магнитостатике.

$\vec F = \int_V \vec f\, dV' = \oint_S \vec f^{пов}\, dS$ ~ им можно интерпр. как действие к элементарным поверхностям,

сила прил. к каждому элемент. объёму

Тогда можно ввести тензор натяжения:

$\vec f = \mathrm{div}\,\hat T$; $\vec f^{пов} = \hat T \cdot \vec n$

$$\vec{f} = \underbrace{\frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}]}_{f'} + \underbrace{\frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec{H}^2 \frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau\right)}_{f''} \underbrace{- \frac{1}{8\pi}\vec{H}^2\nabla\mu}_{f'} = \vec{f}' + \vec{f}''$$

Тогда и тензор $\hat{T} = \hat{T}' + \hat{T}''$

стрикц. часть тензора натяжений.

$$\vec{F}^{пов}(\hat{T}' + \hat{T}'')\vec{n} = \vec{F}^{пов'} + \vec{F}^{пов''}$$

Начнём со стрикц. слагаемого:

$$\vec{f}'' = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec{H}^2\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau\right)$$

из электростатики: $\vec{f}'' = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)$

$\hat{T}'' = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\hat{I}$

то чисто по аналогии, проделывая те же выкладки (просто заменой можно получ.)

$$\hat{T}'' = \frac{1}{8\pi}\vec{H}^2\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau\hat{I}$$

Сложнее с максвелловским натяжением:

$$\vec{f}' = \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}] - \frac{1}{8\pi}\vec{H}^2\nabla\mu, \quad \text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \to \vec{j} = \frac{c}{4\pi}\text{rot}\vec{H}$$

$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\text{rot}\vec{H}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{f}' = -\frac{\mu}{4\pi}[\vec{H}, \text{rot}\vec{H}] - \frac{1}{8\pi}\vec{H}^2\nabla\mu$$

– здесь выкладки опущ.

$$\nabla\vec{H}^2 = \nabla(\vec{H}, \vec{H}) = 2[\vec{H}, \text{rot}\vec{H}] + 2(\vec{H}, \nabla)\vec{H}$$

, $\text{rot}\vec{H}$ не зануляем, т.к. нужно для более общего случая, когда есть токи.

$$-[\vec{H}, \text{rot}\vec{H}] = -\frac{1}{2}\nabla\vec{H}^2 + (\vec{H}, \nabla)\vec{H}$$

$$\vec{f}' = -\frac{\mu}{8\pi}\nabla\vec{H}^2 + \frac{\mu}{4\pi}(\vec{H}, \nabla)\vec{H} - \frac{1}{8\pi}\vec{H}^2\nabla\mu = \frac{\mu}{4\pi}(\vec{H}, \nabla)\vec{H} - \frac{1}{8\pi}\nabla(\mu\vec{H}^2)$$

Запишем в виде проекций на коорд. оси:

$$f'_x = \frac{\mu}{4\pi}(\vec{H}, \nabla)H_x - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\mu\vec{H}^2)$$

, аналогично f'_y, f'_z

сделаем вспомог. соотношение:

$$\text{div}(H_x\vec{B}) = H_x\underbrace{\text{div}\vec{B}}_{0} + (\nabla H_x, \vec{B}) = (\vec{B}, \nabla H_x) = (\underbrace{\vec{B}}_{\mu\vec{H}}, \nabla)H_x = \mu(\vec{H}, \nabla)H_x$$

$$f'_x = \frac{1}{4\pi}\text{div}(H_x\underbrace{\vec{B}}_{\mu\vec{H}}) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu H^2}{8\pi}\right)$$

, и аналогично f'_y, f'_z

$$\Rightarrow f'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu H_x H_x}{4\pi} - \frac{\mu H^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu H_x H_y}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu H_x H_z}{4\pi}\right) =$$

$$= \frac{\partial T'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T'_{xz}}{\partial z}$$

Обобщённо:

$$T'_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{4\pi}\left(H_\alpha H_\beta - \frac{H^2}{2}\delta_{\alpha\beta}\right)$$

$$T''_{\alpha\beta} = T''_{\beta\alpha}; \quad T'_{\alpha\beta} = T'_{\beta\alpha}$$