Квалификационный минимум.

1. Уравнения Максвелла в дифф-ой и интегральной формах.

1. $\oint\limits_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_S \vec{B} d\vec{s}$

2. $\oint\limits_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_S \vec{D} d\vec{s}}_{\frac{4\pi}{c} I_{\text{см}}}$

3. $\oint\limits_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi Q = 4\pi \int\limits_V \rho dV$

4. $\oint\limits_S \vec{B} d\vec{S} = 0$

$\Leftrightarrow$

1. $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
2. $\text{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
3. $\text{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho$
4. $\text{div}\,\vec{B} = 0$

2. Плотность энергии ЭМ поля. Сила Лоренца.

$\vec{F_л} = \int\limits_V \{\rho\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}]\} dV$

$\vec{f_л} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}]$ ~ объёмная плотность силы Лоренца.

$W = \int\limits_V \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}}{8\pi} dV$

$w = \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}}{8\pi}$ ~ объёмная плотность энергии ЭМП.

3. Граничные условия для полей.

1) $[\vec{n}, \vec{E_2} - \vec{E_1}] = 0 \to E_{1\tau} = E_{2\tau}$

2) $[\vec{n_{12}}, \vec{H_2} - \vec{H_1}] = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,пов}$

$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} j^{пов}$

3) $(\vec{n_{12}}, \vec{D_2} - \vec{D_1}) = 4\pi\sigma \to D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$

4) $(\vec{n_{12}}, \vec{B_2} - \vec{B_1}) = 0 \to B_{2n} = B_{1n}$

5) $\varphi_1 = \varphi_2$ ~ потенциал непр. на границе раздела сред

по аналогии можно добавить:

$(\vec{n_{12}}, \vec{P_2} - \vec{P_1}) = -\sigma^{связ}$

$(\vec{n_{12}}, \vec{j_2} - \vec{j_1}) + \text{div}\,\vec{j} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}$

4. Материальные уравнения.

В общем случае для лин. сред:

$D_i(t, \vec{r}) = \int\limits_{-\infty} dt' \int\limits_V d\vec{r}'\, \varepsilon_{ij}(t, t', \vec{r}, \vec{r}')\, E_j(t', \vec{r}')$

В среде без дисперсии:

$D_i(t, \vec{r}) = \varepsilon_{ij} E_j(t, \vec{r})$

Для изотропной среды без дисперсии:

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\vec{H}$; $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

Анизотропные среды. (через тензоры)

$D_i = \varepsilon_{ij} E_j$; $B_i = \mu_{ij} H_j$; $j_i = \sigma_{ij} E_j$

Также наведений вектора поляризации

$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ $\quad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$

для ЛИД: $\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E}$

$\vec{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\vec{H}$

5. Ур-е непрерывности в дифф-ой и интегральной формах.

$\text{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho$; $\text{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$\text{div}\,\text{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\text{div}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\text{div}\,\vec{D}$

$\Rightarrow \boxed{\text{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$ (ЗСЭЗ)

~ ур-е непрер.-ти.

$\int\limits_V \text{div}\,\vec{j}\, dV + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho dV \Rightarrow \oint\limits_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho dV = 0$

$I + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{Q} = -I}$

$\boxed{\rho = -\int \text{div}\,\vec{j}\, dt}$

6. Теорема Пойнтинга. Вектор Пойнтинга. Мощность Джоулевых потерь.

$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t} = Q + \Pi - A^{ст}}$, где $W = \int\limits_V w dV$

$Q = \int\limits_V q dV$

$\Pi = \oint\limits_S \vec{S} d\vec{s}$

$A^{ст} = \int\limits_V a^{ст} dV$

В дифф-й форме:

$\boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = q + \text{div}\,\vec{S} - a^{ст}}$

Из мат. ур-й. (в док-ве теоремы):

$\boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}]}$

$\boxed{q = \frac{j^2}{\sigma} = \sigma E^2}$

$\boxed{a^{ст} = -\vec{j}^{\,ст}\vec{E}}$

7. Скалярный потенциал.

$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r_0}) - \int\limits_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{l}}$ ~ опр-е скал. потенциала.

$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2}$ - потенциал. непрерывен на границе раздела сред.

* для двойного слоя.

$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\vec{n_{12}}, \vec{p}^{\,пов})$

$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\sigma^{\circ} e)$ ($p^{пов}$)

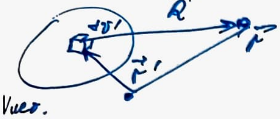
Теорема взаимности в электростатике.

Пусть задано огр-ое в пр-ве распр-е зарядов $\rho^{(1)}$, создающее распределение потенциала $\varphi^{(1)}$ и известны $Q_i^{(1)}$, $\varphi_i^{(1)}$ (полные заряды и соотв. им потенциалы). Пусть при сохранении той же конфигурации проводников и диэлектриков задано другое ограниченное в пр-ве $\rho^{(2)}$ и $\varphi^{(2)}$ и также известны $Q_i^{(2)}$, $\varphi_i^{(2)}$, тогда справедливо:

$$\int_V (\rho^{(1)}\varphi^{(2)} - \rho^{(2)}\varphi^{(1)})\,dV + \sum_i (Q_i^{(1)}\varphi_i^{(2)} - Q_i^{(2)}\varphi_i^{(1)}) = 0$$

1. Уравнение Пуассона и его решение для безграничного пр-ва.

$\Delta\varphi = -\dfrac{4\pi\rho}{\varepsilon}$ ~ ур-е Пуассона $\to$ $\varphi(\vec r) = \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{V_{ист}} \dfrac{\rho(\vec r\,')}{R}\,dV'$ ~ для безгр. пр-ва.



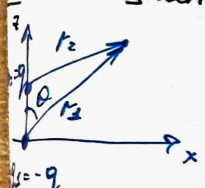
2. Потенциал и поле точечного заряда

$\oint_S \vec D\,d\vec S = 4\pi q$ $\to$ $D(r) = \dfrac{q}{r^2}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon E = \dfrac{q}{r^2}$ $\to$ $E = \dfrac{q}{\varepsilon r^2}$

$D(r)\cdot 4\pi r^2 = q\cdot 4\pi$

$\varphi(\infty) = 0 \Rightarrow \varphi(r) = \varphi(\infty) - \displaystyle\int_\infty^r \dfrac{q}{\varepsilon r^2}\,dr = +\dfrac{q}{\varepsilon}\cdot\dfrac{1}{r}\Big|_\infty^r = \dfrac{q}{\varepsilon r}$

4. Потенциал и поле точечного эл-ого диполя.



Принцип суперпозиции:

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{q_1}{r_1} + \dfrac{q_2}{r_2} = -\dfrac{q}{r_1} + \dfrac{q}{r_2} = -\dfrac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}}$

$r_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2zl+l^2} = \sqrt{r^2-2rl\cos\theta+l^2} = r\sqrt{1-\dfrac{2l}{r}\cos\theta+\left(\dfrac{l}{r}\right)^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{r}\left(1-\dfrac{2l}{r}\cos\theta + \cancel{\left(\dfrac{l}{r}\right)^2}\right)^{-1/2} \approx \dfrac{1}{r}\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot 2\dfrac{l}{r}\cos\theta\right)$

$\Rightarrow \varphi = -\dfrac{q}{r} + q\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{l}{r^2}\cos\theta\right) = \dfrac{ql\cos\theta}{r^2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{p\cos\theta}{r^2} = \dfrac{(\vec p\cdot\vec r)}{r^3}$

$\vec E = -\nabla\left(\dfrac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}\right) = -\left\{(\vec p\cdot\nabla)\dfrac{\vec r}{r^3} + \underbrace{\left(\dfrac{\vec r}{r^3}\cdot\nabla\right)\vec p}_{=0} + \vec p\times\underbrace{\operatorname{rot}\dfrac{\vec r}{r^3}}_{=0} + \dfrac{\vec r}{r^3}\underbrace{\operatorname{rot}\vec p}_{=0}\right\} = -(\vec p\cdot\nabla)\dfrac{\vec r}{r^3} =$

$= -\left\{\dfrac{r^3(\vec p\cdot\nabla)\vec r - \vec r(\vec p\cdot\nabla)r^3}{r^6}\right\} \ominus -\left\{\dfrac{r^3\vec p}{r^6} - \dfrac{\vec r\cdot 3r(\vec p\cdot\vec r)}{r^6}\right\} = \dfrac{3\vec r(\vec p\cdot\vec r)}{r^5} - \dfrac{\vec p}{r^3}$

$(\vec p\cdot\nabla)\vec r = \vec p$

$(\vec p\cdot\nabla)r^3 = 3r^2(\vec p\cdot\nabla)r = 3r^2\cdot\dfrac{(\vec p\cdot\vec r)}{r}$ $\nearrow$

$\Rightarrow \vec E = \dfrac{3\vec r(\vec p\cdot\vec r)}{r^5} - \dfrac{\vec p}{r^3}$

12. Энергия электростатического поля. Энергия взаимодействия заданного внешнего поля с точечным зарядом и точечным диполем.

$W_e = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \rho\varphi\,dV + \dfrac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$

если $\rho = 0$ $\Rightarrow$ $W_e = \dfrac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$ ~ энергия системы проводников

$W_{вз} = \displaystyle\int_V \rho\varphi_0\,dV$ ~ энергия взаим. задан. поля φ_0. (выводится из $W_{вз} = \int_V \rho_1\varphi_2\,dV$)

1) Точечный заряд: $\rho = q\,\delta(\vec r - \vec r_q)$

$W_{вз} = \displaystyle\int_V q\,\delta(\vec r - \vec r_q)\,\varphi_0(\vec r)\,dV = q\,\varphi_0(\vec r_q)$ ~ энергетический смысл потенциала → потенциал поля в некоторой точке есть величина, которая численно совп. с энергией взаимод. единичного заряда, помещ. в данную точку этим полем.

2) Жесткий диполь:

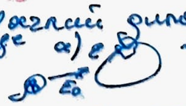
$\vec p = q\vec l$

$\rho = -q\,\delta(\vec r) + q\,\delta(\vec r - \vec l)$

$W_{вз} = -q\varphi_0(0) + q\cdot\varphi_0(\vec l) \approx$

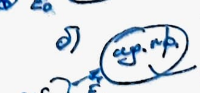
$\approx -q\varphi_0(0) + q\varphi_0(0) + q\cdot\nabla\varphi_0(0)\vec l = \underbrace{q\vec l}_{\vec p}\,\underbrace{\nabla\varphi_0(0)}_{-\vec E_0} = -(\vec p, \vec E_0)$

3) Мягкий диполь: можно представить в виде а) ε ~ диэлектрика



~ или сф. проводник.

б)



$Q_i = 0$

Исп. общую ф-лу: $\swarrow$ по т. взаимн.

$W_e = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \rho\varphi\,dV + \underbrace{\dfrac{1}{2}Q_i\varphi_i}_{а)\ нет\ \ б)\ =0} = \underbrace{\dfrac{1}{2}\int_V \rho_0\varphi_0\,dV}_{собств.} + \underbrace{\dfrac{1}{2}\int_V \rho_0\varphi_{дип}\,dV}_{W_{вз}}$ $\Rightarrow W_{вз} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \rho_0\varphi_{дип}\,dV = \dfrac{1}{2}\int_V \rho_{ind}\,\varphi_0\,dV$

$\Rightarrow W_{вз} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \rho_{ind}(\vec r)\,\varphi_0(\vec r)\,dV \approx \underbrace{\dfrac{1}{2}\int_V \rho_{ind}\,\varphi_0(0)\,dV}_{=0,\ т.к.\ у\ дип.\ \sum q=0} + \dfrac{1}{2}\int_V \rho_{ind}(\vec r)\,\vec r\,dV\,\underbrace{\nabla\varphi_0(0)}_{\Rightarrow\ -E_0}$

$W_{вз} = -\dfrac{1}{2}(\vec p, \vec E)$

13. Уравнение для векторного потенциала в магнитостатике и его решение для безграничного пр-ва. Закон Био-Савара. Поле магнитного диполя.

$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \end{cases}$ $\quad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, $\vec{A}$ – векторный потенциал.

$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$ ~ ур-е для вект. потенц. $\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}dV' = \frac{\mu}{c}\sum_k I_k\oint_{L_k}\frac{d\vec{\ell}\,'}{R}$

$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$

Закон Био-Савара:

$$\underline{\vec{H} = \frac{1}{c}\int_V\frac{[\vec{j}(\vec{r}\,'),\vec{R}]}{R^3}dV' = \frac{1}{c}\sum_k I_k\oint_{L_k}\frac{[d\vec{\ell}_k,\vec{R}]}{R^3}}$$

вклад от элемента контура: $d\vec{H}_k = \frac{1}{c}I_k\frac{[d\vec{\ell}_k,\vec{R}]}{R^3}$

Напряжённость поля $\vec{H}$ магнитного диполя:

$\vec{A} = \frac{[\vec{p}^{\,m},\vec{r}]}{r^3}$ ~ спр-во если находимся на большом расст-ии от точечн. диполя

$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A} = -\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}[\underbrace{\vec{p}^{\,m}}_{\vec{a}=\mathrm{const}},\underbrace{\nabla\frac{1}{r}}_{\vec{b}}]$$

вспоминаем ф-лу: $\mathrm{rot}[\vec{a},\vec{b}] = \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a} + (\vec{b},\nabla)\vec{a} - (\vec{a},\nabla)\vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}[\vec{p}^{\,m},\nabla\frac{1}{r}] = -\frac{1}{\mu}\{\vec{p}^{\,m}\,\mathrm{div}\,\nabla\frac{1}{r} - (\vec{p}^{\,m},\nabla)\nabla\frac{1}{r}\} = \frac{1}{\mu}(\vec{p}^{\,m},\nabla)\nabla\frac{1}{r} \overset{?}{=} -\frac{1}{\mu}\nabla(\vec{p}^{\,m},\frac{\vec{r}}{r^3})$$

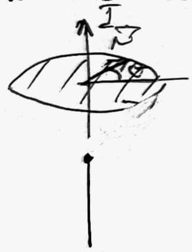
проверка:

$$-\nabla(\vec{p}^{\,m},\frac{\vec{r}}{r^3}) = \nabla(\vec{p}^{\,m},\nabla\frac{1}{r}) = [\vec{p}^{\,m},\mathrm{rot}\,\nabla\frac{1}{r}] + [\nabla\frac{1}{r},\mathrm{rot}\,\vec{p}^{\,m}] + \underbrace{(\nabla\frac{1}{r},\nabla)\vec{p}^{\,m}}_{=0} + (\vec{p}^{\,m},\nabla)\nabla\frac{1}{r}$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = -\nabla\frac{(\vec{p}^{\,m},\vec{r})}{\mu r^3}}$ если введём $\vec{H} = -\nabla\varphi^m$

$\Rightarrow \varphi^m = \frac{(\vec{p}^{\,m},\vec{r})}{\mu r^3}$ ~ скалярный магнитный потенциал.

14. Поле бесконечного прямого провода с током.

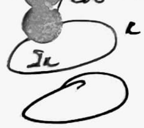


$\oint_L \vec{H}d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c}\iint_S(\vec{j},\vec{n})dS = \frac{4\pi}{c}I$

$2\pi r\cdot H_\theta(r) = \frac{4\pi}{c}I \Rightarrow \underline{H_\theta(r) = \frac{2I}{cr}}$

15. Определение коэффициентов взаимной и самоиндукции.

Пусть есть система витков



$\Phi = \int_S\vec{B}d\vec{S} = \int_S\mathrm{rot}\,\vec{A} = \oint_L\vec{A}d\vec{\ell}$; $\vec{A} = \frac{\mu}{c}\int_V\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}dV'$

$\vec{j}dV' = Id\vec{\ell}\,'$ ~ замена перехода к виткам с током.

$\vec{A} = \frac{\mu}{c}\sum_m I_m\oint_{L_m}\frac{d\vec{\ell}_m'}{R}$, дальше ' не пишем.

$\vec{A} = \frac{\mu}{c}\sum_m I_m\oint_{L_m}\frac{d\vec{\ell}_m}{R} = \sum_m\vec{A}_m \Rightarrow \boxed{\vec{A}_m = \frac{\mu}{c}I_m\oint_{L_m}\frac{d\vec{\ell}_m}{R}}$ ~ отдельный вклад взаимодействия витков.

Поток через k-ый виток:

$\Phi_k = \oint_{L_k}\vec{A}d\vec{\ell}_k = \oint_{L_k}\sum_m\vec{A}_m d\vec{\ell}_k = \sum_m\underbrace{\oint_{L_k}\vec{A}_m d\vec{\ell}_k}$ ~ магнитный поток через виток k, созд. током витка m.

$\Rightarrow \boxed{\Phi_k = \sum_m\Phi_{km}}$ или $\Phi_k = \sum_m\overbrace{\oint_{L_k}\vec{A}_m d\vec{\ell}_k}^{\Phi_{km}} = \sum_m\oint_{L_k}\{\frac{\mu I_m}{c}\oint_{L_m}\frac{d\vec{\ell}_m}{R}\}d\vec{\ell}_k \Rightarrow \Phi_k = \frac{1}{c}\sum_m I_m\mu\oint_{L_k}\oint_{L_m}\frac{d\vec{\ell}_k d\vec{\ell}_m}{R}$

$\Phi_{km} \sim I_m$ ~ можно ввести коэф-т пропорциональности.

$\Phi_{km} = \frac{1}{c}L_{km}I_m$, если $k\neq m$ L_{km} ~ коэф. взаимной индукции $\Rightarrow \boxed{L_{km} = \frac{c\Phi_{km}}{I_m}}$ опр-я

если $k=m$ L_{kk} ~ коэф. самоиндукции ($L_{kk}\equiv L_k$) $\Rightarrow \boxed{L_k = \frac{c\Phi_{kk}}{I_k}}$

или другая ф-ла:

$\boxed{L_{km} = \mu\oint_{L_k}\oint_{L_m}\frac{d\vec{\ell}_k d\vec{\ell}_m}{R}}$ ~ из неё видно, что $L_{km} = L_{mk}$.

$L_{km} = \frac{\mu}{I_k I_m}\int_{V_k}\int_{V_m}\frac{\vec{j}_k\vec{j}_m}{R}dV_k dV_m$