

Перемещенное ЭМП.

1. Описание перемещенного ЭМП в общем случае. Дифференциальные ур-я второго порядка для электрического и магнитного полей.

Есть некоторые ограничения:

1) считаем, что тел нет сверхпроводящих материалов.

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) ; \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \quad \text{т.е. рассматриваем среду без дисперсии.}$$

2) ϵ, μ не зависят от t и $\vec{r}$ ($\epsilon, \mu = \text{const}$, однородная и стационарная среда).

Записываем ур-я Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & (1) \leftarrow \text{применяем rot} \Rightarrow \text{rot rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} & (2) \end{cases}$$

представляем $\text{rot } \vec{H}$

Все представляем и группируем:

$$\nabla \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Получили волновое уравнение. Из него видно, что носители тока являются током и зарядом.

Введём новый оператор: $\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square$ — даламбертиан, где $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

$\sqrt{\epsilon\mu} = n$ — показатель преломления

Можно получить волновое уравнение и для поля $\vec{H}$, применяя rot для (2) к уравнению:

$$\text{rot rot } \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j} \quad , \text{ учитывая из } \text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j} \right] \quad \text{или} \quad \square \vec{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}$$



Для примера: если есть только потенциальное поле (можно представить в виде градиента некоторой скалярной φ -ии) $\vec{j} = \nabla \varphi \rightarrow$ бегущих волн создать не могут, т.к. $\text{rot } \vec{j} = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \rightarrow f = f_1(t - \frac{x}{v}) + f_2(t + \frac{x}{v})$$

по оси x фазов. ось x .

2. Описание перемещенного ЭМП с помощью скалярного и векторного потенциалов. Граничные условия. Условия калибровки полей.

Рассматриваем однородную среду без дисперсии:

$$\begin{aligned} 1) \text{div } \vec{B} = 0 ; \vec{B} = \text{rot } \vec{A} ; \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \\ \text{rot } \nabla \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

подтверждается даламбертианом векторного потенциала.

3) Аналогично другим уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \frac{1}{\mu} \{ \nabla \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A} \}$ после преобразований получим:

$$\nabla \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}$$

$$\left\{ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j} + \nabla \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\} \quad (I)$$

$$3) \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon} \Rightarrow \operatorname{div} \left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi\rho}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A}} \quad (\text{II}')$$

Проверим это и выйдем с оператором даламбера (вект. и скал. уравнения)

$$\boxed{\Delta\varphi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t})} \quad (\text{II}'')$$

Возникает вопрос. Нельзя ли сделать так, чтобы $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$? Оказывается так можно сделать, т.к. потенциалы вводятся произвольно. Введем:

$$\vec{A}_{\text{нов}} = \vec{A}_{\text{ст}} - \nabla\psi \quad \text{так, чтобы} \quad \operatorname{rot} \vec{A}_{\text{нов}} = \operatorname{rot} \vec{A}_{\text{ст}} = \vec{B}$$

Компьютер должен обеспечить инвариантность не только $\vec{B}$, но теперь и $\vec{E}$ (т.к. изм. потенциал).

$$\vec{E} = -\nabla\varphi_{\text{нов}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{\text{нов}}}{\partial t} = -\nabla\varphi_{\text{ст}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{\text{ст}}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\nabla\varphi_{\text{нов}} - \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{A}_{\text{ст}} - \nabla\psi)}{\partial t} = -\nabla\varphi_{\text{ст}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{\text{ст}}}{\partial t}$$

$$\nabla\varphi_{\text{нов}} - \nabla \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla\varphi_{\text{ст}} \quad \sim \text{градиентная инвариант.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{\text{нов}} = \varphi_{\text{ст}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}} \quad \sim \text{т.е. можно выбрать скалярный потенциал для } \vec{E}$$

Проверим, можно ли сделать так: $\operatorname{div} \vec{A}_{\text{ст}} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi_{\text{ст}}}{\partial t} \neq 0$, а $\operatorname{div} \vec{A}_{\text{н}} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi_{\text{н}}}{\partial t} = 0$

$$\operatorname{div} (\vec{A}_{\text{ст}} - \nabla\psi) + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_{\text{ст}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = 0$$

$$\text{учитывая } \operatorname{div} \nabla\psi = \Delta\psi$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\psi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \operatorname{div} \vec{A}_{\text{ст}} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi_{\text{ст}}}{\partial t}} \quad \neq 0 \text{ при старых выборах}$$

т.е. это уравнение с волн. от 0 прав. имеет решение $\Rightarrow$ если хотим устранить разность, используем это уравнение $\Rightarrow$ можно получить

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \sim \text{условие калибровки Лоренца}$$

3. Выводим ур-я для потенциалов. Вектор Гельм. Максимальные потенциалы.

Это позволяет упростить уравнения (I) и (II):

$$\begin{cases} \square \vec{A} = -\frac{4\pi\vec{j}}{c} \\ \square \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} \end{cases} \rightarrow \text{из калибровки можно сразу получить}$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{1}{\epsilon\mu} \int \operatorname{div} \vec{A} dt}$$

$\Rightarrow$ всё сводится к определению векторного потенциала $\vec{A}$. Но в некотором смысле неудобно использовать калибровку Лоренца, а использовать калибровку Кулона:

$$\operatorname{div} \vec{A}_{\text{н}} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \vec{A}_{\text{ст}} \neq 0$$

$$\vec{A}_{\text{н}} = \vec{A}_{\text{ст}} - \nabla\psi$$

$$\Rightarrow \Delta\psi = \operatorname{div} \vec{A}_{\text{ст}} \quad \text{ур-е Пуассона всегда имеет решение}$$

Учитывая это калибровку:

$$(\text{II}') \quad \Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} \rightarrow \text{скалярная поправка } \varphi.$$

поскольку φ ищем:

$$(\text{I}) \quad \square \vec{A} = -\frac{4\pi\vec{j}}{c} + \frac{\epsilon\mu}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Rightarrow \text{найдем } \vec{A}.$$

Тогда будем использовать калибровку Лоренца.

Возникает $\vec{\Pi}$: вводится как

$$\vec{A} = \frac{e\mu}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}, \quad (\varphi = -\text{div } \vec{\Pi})$$

~ соответствуют условию калибровочного преобразования.

$$\text{div } \vec{A} + \frac{e\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{e\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e\mu}{c} \vec{j} \quad \text{возмем л/взаобразию:}$$

$$\Delta \vec{\Pi} - \frac{e\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \int \vec{j} d\tau$$

можно воспользоваться $\vec{j} = \vec{j}^{\text{ст}} = \frac{\partial \vec{p}^{\text{ст}}}{\partial t}$ ~ сформировав тогда можно охарактеризовать сформировав поляризующий

$$\Rightarrow \square \vec{\Pi} = -\frac{4\pi}{c} \vec{p}^{\text{ст}}$$

Если хотим найти $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{e\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{\Pi}$$

$$\text{или } \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \nabla \text{div } \vec{\Pi} - \frac{e\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}$$

~ все замкнуто, когда неточности и заряды электрические. Исползуем принцип преобразования двойственности:

$$\vec{j} = \vec{j}^e \rightarrow \vec{j}^m$$

Условия калибровочного преобразования для векторного потенциала магнитного типа:

$$\vec{p} = \vec{p}^e \rightarrow \vec{p}^m$$

$$\vec{A} = \vec{A}^e \rightarrow \vec{A}^m$$

$$\varphi = \varphi^e \rightarrow \varphi^m$$

$$(\epsilon, \mu) \rightarrow (\mu, \epsilon)$$

$$\text{div } \vec{A}^m + \frac{e\mu}{c} \frac{\partial \varphi^m}{\partial t} = 0$$

$$\square \vec{A}^m = -\frac{4\pi e}{c} \vec{j}^m, \quad \square \varphi^m = -\frac{4\pi}{\mu} \vec{p}^m$$

$$\vec{B}^e = \text{rot } \vec{A}^e \rightarrow -\vec{B}^m = \text{rot } \vec{A}^m \Rightarrow \vec{B}^m = -\text{rot } \vec{A}^m$$

$$\vec{E}^m = \frac{\vec{B}^m}{\epsilon}$$

~ обобщение электрических полей, порожденного магнитными токами и переменного типа.

$$\vec{E}^e = -\nabla \varphi^e - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} \rightarrow \vec{H}^m = -\nabla \varphi^m - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t}; \quad \vec{B}^m = \mu \vec{H}^m$$

Для калибровочного преобразования:

$$\vec{p}^e \rightarrow \vec{p}^m \Rightarrow \vec{\Pi} = \vec{\Pi}^e \rightarrow \vec{\Pi}^m \Rightarrow \square \vec{\Pi}^m = -\frac{4\pi}{\mu} \vec{p}^m$$

Если в металле есть $\vec{j}^{e,m}; \vec{p}^{e,m} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^m$ ~ по принципу суперпозиции.
 $\vec{H} = \vec{H}^e + \vec{H}^m$

4. Гармонические процессы. Комплексная запись полей и уравнений Максвелла. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Связь комплексных полей с потенциалом.

Одн. процесс $f(t)$ называется гармоническим во времени (монотональным), если его зависимость от t имеет следующий вид:

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{где } A \neq A(t), \quad \omega \neq \omega(t)$$

A - амплитуда

$$\omega = 2\pi \nu, \quad \text{где } \nu = \frac{1}{T} \text{ период процесса.}$$

Для монотонального процесса можно представить в виде интеграла Фурье:

$$f(t) = \int_0^\infty [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega = \int_0^\infty A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega$$

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}; \quad \varphi = -\arctg \frac{b(\omega)}{a(\omega)}$$

Общее решение записывается как суперпозиция для всех частот:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_E(\vec{r}))$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_H(\vec{r}))$$

Удобно ввести комплексную формулировку полей.

$$\Leftrightarrow \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i\varphi_E(\vec{r})}$$

вещественная амплитуда.

$$\vec{H}(\vec{r}, \omega) = \vec{H}_0(\vec{r}) e^{i\varphi_H(\vec{r})}$$

Если хотим получить вещественную частоту:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \}$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{H}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \}$$

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\text{Re } e^{i\alpha} = \cos \alpha$$

$$\text{rot } \{ \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \} = -\frac{1}{c} \mu \frac{\partial}{\partial t} \{ \vec{H}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \} \rightarrow \left[\frac{\omega}{c} = k_0 \right] \sim \text{волновое уравнение в свободном пространстве}$$

Уравнение примет следующий вид: $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -i\epsilon_0 \mu \vec{H}(\vec{r}, \omega)$

Продифференцируем аналогично:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, \omega) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \{ \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \}$$

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}, \omega) = i\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, \omega)$$

$$\text{div } \vec{D}(\vec{r}, \omega) = 4\pi \rho(\vec{r}, \omega)$$

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}, \omega) = 0$$

Примечание: в том, что мы не идем в направлении времени (и проигр. в. $\frac{1}{\partial t}$)

Далее будем опускать моды $(\vec{r}, \omega)$ (далее мы покажем по второму уравнению). Напишем для ур-я непрерывности: будет тогда иметь вид:

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{j}(\vec{r}, \omega) + i\omega \rho(\vec{r}, \omega) = 0$$

Комплексная зависимость

$$\text{rot } \vec{H} = i\epsilon_0 \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \quad \vec{j} = \vec{j}^{\text{в}} + \vec{j}^{\text{с}}$$

$$\text{rot } \vec{H} = i\epsilon_0 \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{\text{с}} \rightarrow i\epsilon_0 (\epsilon - i \frac{4\pi}{\omega}) \vec{E}$$

$$\text{Введём: } \epsilon_k = \epsilon - i \frac{4\pi}{\omega}$$

комп. ~ связанное с диссипацией энергии замещения:

$$\epsilon_k = \epsilon' - i\epsilon'', \quad \epsilon' \equiv \epsilon, \quad \epsilon'' = \frac{4\pi}{\omega} \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{H} = i\epsilon_0 \epsilon_k \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{\text{с}}$$

Для гармонических процессов: $\begin{cases} \epsilon = \epsilon(\omega) \\ \mu = \mu(\omega) \\ \vec{j} = \vec{j}(\omega) \end{cases}$

~ пока мы докажем (справедливо для временной зависимости)

В принципе можно было ввести мнимые потери: $\mu = \mu' - i\mu''$, $\mu'' \geq 0$

Важные уравнения для комплексных амплитуд

Учтём, что: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2$

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \nabla \rho \Rightarrow \Delta \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = \frac{4\pi \mu}{c^2} i\epsilon_0 \vec{j} + \frac{4\pi}{c} \nabla \rho$$

~ однородное ур-е Гельмгольца ~ волновое число в среде для комп. амплитуд.

$$\text{Здесь } \kappa = \epsilon_0 \sqrt{\epsilon \mu} = \epsilon_0 \mu$$

$$\text{Для } \vec{H}: \Delta \vec{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j} \Rightarrow \Delta \vec{H} + \kappa^2 \vec{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}$$

$$\text{Из } \text{div } \vec{H} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{H} + i\epsilon_0 \mu \varphi = 0 \Rightarrow \left\{ \varphi = \frac{i}{\epsilon_0 \epsilon \mu} \text{div } \vec{H} \right\} (*)$$

Получили для векторного и скалярного потенциалов:

$$(I) \quad \Delta \vec{A} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{j} \rightarrow \Delta \vec{A} + \kappa^2 \vec{A} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{j}$$

$$(II) \quad \Delta \varphi = -\frac{4\pi \rho}{\epsilon} \rightarrow \Delta \varphi + \kappa^2 \varphi = -\frac{4\pi \rho}{\epsilon}$$

$$\text{Всё также } \vec{B} = \text{rot } \vec{A}; \quad \vec{E} = -\nabla \varphi - i\omega \vec{A} \quad (\text{из } \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

$$\text{Если представим } (*): \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi - i\omega \vec{A} = -\frac{i}{\epsilon_0 \epsilon \mu} (\nabla \text{div } \vec{A} + \kappa^2 \vec{A})$$

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{\rho} \rightarrow \Delta \vec{A} + \kappa^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{\rho}$$

$$\vec{A} = \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \rightarrow \vec{A} = i\epsilon_0 \epsilon \mu \vec{P}$$

~ этого достаточно для доказательства.

Б. Комплексная теорема Пойнтинга.

Численные значения величин, зависящих от времени.

$a(t) = \text{Re} \{ a(\omega) e^{i\omega t} \}$, $b(t) = \text{Re} \{ b(\omega) e^{i\omega t} \}$ ~ пусть даны какие-то физические величины.

где $a(\omega) = \underbrace{|a(\omega)|}_A e^{i\alpha}$; $b(\omega) = \underbrace{|b(\omega)|}_B e^{i\beta}$

Хотим вывести формулу:

$$\overline{a(t)b(t)} = \frac{1}{T} \int_0^{t+T} a(t)b(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{t+T} A \cos(\omega t + \alpha) \cdot B \cos(\omega t + \beta) dt =$$

$$= \frac{AB}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{t+T} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)] dt = \frac{1}{2} AB \cos(\alpha - \beta)$$

Тогда такой же результат можно получить иначе:

$$\frac{1}{2} \text{Re} \{ a(\omega) b^*(\omega) \} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ A e^{i\alpha} \cdot B e^{-i\beta} \} = \frac{1}{2} AB \cos(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \overline{a(t)b(t)} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ a(\omega) b^*(\omega) \}$$

Важный частный случай:

$$\overline{a^2(t)} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ a(\omega) a^*(\omega) \} = \frac{1}{2} |a(\omega)|^2$$

Величинами из формулы:

$$q = \frac{1}{V} \rightarrow \overline{q} = \frac{1}{2} \frac{1}{V} |\vec{j}|^2$$

мож. представить потр. в единицу

Тогда аналогично для вектора Пойнтинга:

$$W = \int_V \frac{e \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2}{8\pi} dV \rightarrow \overline{W} = \int_V \frac{e |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2}{16\pi} dV \sim \text{справедливо в случае сред. значений.}$$

Комплексная теорема Пойнтинга.

Пусть $\epsilon_0 = \frac{\omega}{c}$, ϵ, μ - вещественные. $\Rightarrow \vec{j} = \vec{j}_\phi + \vec{j}^* = \nabla \vec{E} + \vec{j}^*$

(1) $\text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H} \quad | \cdot \vec{H}^*$ $\text{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_\phi + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^*$ $\leftarrow$ возмем * лев. соф.

(2) $\text{rot} \vec{H}^* = -i\omega \epsilon \vec{E}^* + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_\phi^* + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^*$ $| \cdot \vec{E}$

Вычитаем из (1) - (2):

$$\vec{H}^* \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \vec{H}^* = \text{div} [\vec{E}, \vec{H}^*] = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_\phi^* \vec{E} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}^* \vec{E} + i\omega (\epsilon \vec{E} \vec{E}^* - \mu \vec{H} \vec{H}^*) \quad | \cdot \frac{c}{8\pi}$$

Для компактности введем обозначения $\vec{S}_c = \frac{c}{8\pi} [\vec{E}, \vec{H}^*]$ - комплексный вектор Пойнтинга:

$$\text{Re} \vec{S}_c = \text{Re} \frac{c}{8\pi} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \vec{S}$$

тогда получим:

$$\text{div} \vec{S}_c = -\frac{1}{2} \frac{|\vec{j}_\phi|^2}{V} - \frac{1}{2} \vec{j}^* \vec{E} + 2i\omega \cdot \frac{e |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2}{16\pi} \sim \text{компл. теорема Пойнтинга в дифф-ой форме.}$$

$$-\frac{1}{2} \vec{j}_\phi^* \vec{E} = -\frac{1}{2} \frac{1}{V} \vec{j}_\phi^* \vec{j}_\phi = -\frac{1}{2} \frac{|\vec{j}_\phi|^2}{V}$$

В интегральной форме:

$$\int_V \vec{S}_c d\vec{r} = -\frac{1}{2} \int_V \frac{|\vec{j}_\phi|^2}{V} dV - \frac{1}{2} \int_V \vec{j}^* \vec{E} dV + 2i\omega \int_V \frac{e |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2}{16\pi} dV \quad (*)$$

Мы доказали их в случае чисто вещественных величин: $\epsilon = \epsilon'$, $\mu = \mu'$, $\sigma = 0$, $\mu'' = 0$. Получим теорему Пойнтинга для $\mu = \mu' - i\mu''$; $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$

Аналогично заменим уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H} \quad | \cdot \vec{H}^* \\ \text{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_\phi + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^* \end{cases} \leftarrow \text{к.е.} \Rightarrow \begin{cases} \vec{H}^* \text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* \\ \text{rot} \vec{H} = i\omega (\epsilon' - i\epsilon'') \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_\phi + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{rot} \vec{H}^* = -i\omega \epsilon' \vec{E}^* + i\omega \epsilon'' \vec{E}^* + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_\phi^* + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^*$$

даже если (2) из $\vec{E}$:

$$\begin{cases} \vec{H}^* \text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \omega \mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^* \\ \vec{E} \text{rot} \vec{H}^* = -i\omega \epsilon' \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \omega \epsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_\phi^* \vec{E} \end{cases}$$

$\rightarrow$ вычитаем из (1) - (2)

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}^*] = -\frac{1}{c} \vec{j} \sigma^* \vec{E} + i\omega \vec{E}' \vec{E} \vec{E}^* - \kappa_0 \vec{E}'' \vec{E} \vec{E}^* - i\kappa_0 \mu' \vec{H} \vec{H}^* - \kappa_0 \mu'' \vec{H} \vec{H}^*$$

Проделиваем аналогичные выкладки: домножим на $\frac{c}{8\pi}$.
 Напомним, поясним, почему кб сложено с $\vec{j} \sigma^*$. На самом деле мы ввели ранее $\vec{E}_k = \vec{E}' - i\vec{E}''$, где $\vec{E}_k = \vec{E} - i\frac{c}{\omega} \vec{j} \sigma^*$

из $\mu + \vec{H} = \frac{i\kappa_0 c}{\omega} \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \sigma^* \vec{E} + \frac{c}{\omega} \vec{j} \sigma^* \vec{E}$, т.е. ток проводимости учтен в $\vec{E}_k$. По сути здесь мы имеем форм-ко учитываем магнитные потери, вводя $\mu_k = \mu' - i\mu''$, где $\mu' = \mu$.

$$\Rightarrow \text{div} \vec{S}_k = -\frac{1}{2} \vec{j} \sigma^* \vec{E} + 2i\omega \cdot \frac{\epsilon' |\vec{E}|^2 - \mu' |\vec{H}|^2}{16\pi} - 2\omega \cdot \frac{\epsilon'' |\vec{E}|^2 + \mu'' |\vec{H}|^2}{2 \cdot 8\pi}$$

интегрируя по объему:

$$\left\{ \oint_S \vec{S}_k \cdot d\vec{S} = -2\omega \int_V \frac{\epsilon'' |\vec{E}|^2 + \mu'' |\vec{H}|^2}{16\pi} dV - \frac{1}{2} \int_V \vec{j} \sigma^* \vec{E} dV + 2i\omega \int_V \frac{\epsilon' |\vec{E}|^2 - \mu' |\vec{H}|^2}{16\pi} dV \right\} (**)$$

теорема Пойнтинга в более общей форме.

Очевидно, что при $\mu'' = 0$ (когда $\mu' = \mu$) последняя формула перейдет в (*), если воспользоваться соотношением $\epsilon'' = \frac{c}{\omega} \sigma$:

$$-\frac{\omega}{8\pi} \int_V [\epsilon'' |\vec{E}|^2 + \mu' |\vec{H}|^2] dV = -\frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}|^2 dV = -\frac{1}{2} \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

Из (*) берем реальные части:

$$\text{Re} \vec{S}_k = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \vec{S}$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{2} \int_V \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma} dV + \left(-\frac{1}{2}\right) \text{Re} \int_V \vec{j} \sigma^* \vec{E} dV$$

$\vec{P}$ — сферич. по времени поток энергии $\vec{P}$ через замкн. пов-ть S
 $\vec{Q}$ — сферич. по времени мгновенная диссипация энергии в объеме V
 $\vec{A} \sigma^*$ — сферич. по времени мгновенная скорость источников $\vec{j} \sigma^*$ в объеме V .

$$\Rightarrow \text{ЗСЭ: } \vec{P} + \vec{Q} = \vec{A} \sigma^* \quad \text{закон сохранения энергии для сферич. величин.}$$

Заметим, что для монохроматических процессов анализируя электрического магнитного поля явл. постоянными. Тогда сферич. по времени энергия ЭМП остается постоянной величиной, не зависящей от t :

$$\vec{W} = \int_V \vec{W} dV = \text{const}$$

$$\text{В отсутствие дисперсии: } \vec{W} = \int_V \frac{\epsilon' |\vec{E}|^2 + \mu' |\vec{H}|^2}{16\pi} dV = \vec{W}^E + \vec{W}^H \quad (1)$$

С учетом этих соотношений запишем "мнимую" часть комплексной теоремы Пойнтинга. (из *)

$$\text{Im} \oint_S \vec{S}_k \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{2} \text{Im} \int_V \vec{j} \sigma^* \vec{E} dV + 2\omega \int_V \frac{\epsilon' |\vec{E}|^2 - \mu' |\vec{H}|^2}{16\pi} dV$$

$$\text{Здесь } \int_V \frac{\epsilon' |\vec{E}|^2 - \mu' |\vec{H}|^2}{16\pi} dV = \vec{W}^E - \vec{W}^H$$

т.е. формула верна только при отсутствии дисперсии

В отличие от реальной части комплексной теоремы Пойнтинга, "мнимая" часть является чисто математическим соотношением. Но иногда используется для форм-ва некоторых утверждений.

Можно сказать про резонатор (см. лекции.)

б. Теорема единственности решения уравнений Максвелла для гармонических полей.

Теорему приходится переформулировать, т.к. для гармонических процессов нельзя задать начальные условия.

Теорема.

Решение ур-ий Максвелла для гармонических полей внутри объема V , огр. замкнул. пов-ью S , если заданы: 1) в объеме V : $\vec{j}$ и $\vec{\rho}$
2) на пов-ти S : $\vec{E}_2$ (либо $\vec{H}_2$)
3) в объеме V : $\vec{\nabla} \neq 0$

Док-во: пусть есть $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ и $\vec{E}_2, \vec{H}_2$, построим разностное поле: $\vec{E}_3 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$
и пусть выполнены условия: $\vec{H}_3 = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$

$$1) \vec{j}_3 = 0$$

$$2) S: \text{либо } \vec{E}_{3\tau} = 0, \text{ либо } \vec{H}_{3\tau} = 0 \rightarrow \text{Затянем разность полей}$$

$$3) \vec{\nabla} \neq 0$$

$$\oint_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = \frac{c}{8\pi} [\vec{E}_3, \vec{H}_3^*] \cdot \vec{n} = 0, \text{ так как } \operatorname{Re} \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = 0 \text{ по п. а) 1)}$$

$$\Rightarrow \text{из } \oint_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{2} \int_V \frac{|\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3|^2}{\epsilon} dV + (-\frac{1}{2}) \operatorname{Re} \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

$$\Rightarrow \int_V \frac{|\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3|^2}{\epsilon} dV = 0 \rightarrow \text{учитывая, что } \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2$$

$$\Rightarrow \int_V \epsilon |\vec{E}_3|^2 dV = 0 \Rightarrow \vec{E}_3 = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2, \text{ ч.т.д.}$$

Что для $\vec{H}_3$? Используем ур-я Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E}_3 = -i\omega \mu \vec{H}_3 = -i\frac{\omega}{c} \mu \vec{H}_3; \omega \neq 0 \Rightarrow \mu \vec{H}_3 = 0 \Rightarrow \vec{H}_3 = 0 \Rightarrow \vec{H}_1 = \vec{H}_2, \text{ ч.т.д.}$$

Здесь нужно иметь в виду, что из условия $\mu \vec{H}_3 = 0, \vec{H}_3 = 0$ при $\mu \neq 0$. Можно задавать, что это справедливо и произвольным μ . В реальных материалах μ явл. комплексной величиной ($\mu = \mu' - i\mu''$)

$\operatorname{Re} \mu = 0$, но в средах с дисперсией есть потери $\Rightarrow \mu = \mu' - i\mu'' = -i\mu'' \neq 0$ аналогично и для $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$

Тогда из формулы (**): $\oint_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = -2\omega \int_V \frac{\epsilon'' |\vec{E}_3|^2 + \mu'' |\vec{H}_3|^2}{16\pi} dV - \frac{1}{2} \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV + 2i\omega \int_V \frac{\epsilon' |\vec{E}_3|^2 - \mu' |\vec{H}_3|^2}{16\pi} dV$

используем при условии выше:

$$\int_V \frac{\epsilon'' |\vec{E}_3|^2 + \mu'' |\vec{H}_3|^2}{16\pi} dV = 0, \text{ т.к. } \epsilon'' \neq 0 \text{ и } \mu'' \neq 0 \Rightarrow \vec{H}_3 = 0 \text{ и } \vec{E}_3 = 0$$

Физический смысл: разностное поле не возникает, т.к.:

- 1) для него нет источников (внутри нет зарядов, энергии)
 - 2) нет потерь энергии (извне в V энергии не приходит)
- Если нет потерь, то возникает свободные колебания.

Замечание: Теорема остается справедливой, если вместо условия 1) потребовать, что на пов-ти S задано интегральное граничное условие: $\vec{E}_\tau = \eta_s [\vec{H}, \vec{n}]_S$

В этом случае:

$$\oint_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}_3, \vec{H}_3^*] \cdot \vec{n} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \eta_s \int_S (\vec{H}_3, \vec{H}_3^*) - \vec{H}_3 (\vec{n}, \vec{H}_3^*) \cdot \vec{n} dS =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \eta_s |\vec{H}_3|^2$$

$$\frac{c}{8\pi} \oint_S \operatorname{Re} \eta_s |\vec{H}_3|^2 dS = -\frac{1}{2} \int_V \epsilon |\vec{E}_3|^2 dV$$

$$\Rightarrow \frac{c}{8\pi} \oint_S \operatorname{Re} \eta_s |\vec{H}_3|^2 dS + \frac{1}{2} \int_V \epsilon |\vec{E}_3|^2 dV = 0$$

$\rightarrow$ учитывая условия выше

$$\vec{E}_3 = 0 \text{ и } \vec{H}_3 = 0$$

□

7. Квазистационарные процессы в проводящих средах. Распределение электрических полей в тонком проводящем полуцилиндре. Случай - заряд.

Рассмотрим, являясь в стационарных проводниках, в проводящем электропроводящем полупроводнике, что скорее излучается полем на единичной величине, дугами сферической поверхности, удовлетворяющей уравнению Лапласа. Этот процесс удовлетворяет уравнению Лапласа.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ Квазистационарность: характерный временной масштаб зарядки $\tau \ll T$

Уравнение квазистационарного поля внутри проводника: $\Delta \varphi = 0$ (потенциал) $\nabla \varphi = -E$ (поле)

Рассмотрим поле, меняющееся по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$. Максимальное время релаксации заряда: $\tau = \tau_m$ найти $\rho(\vec{r}, t)$?

пусть $\rho(\vec{r}, 0) = \rho_0(\vec{r})$ начальное распределение заряда.

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{E} = 0$ - заряд "протекает" по сфере.

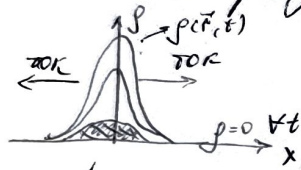
$\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi \rho}{\epsilon} = 0 \Rightarrow \rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-\frac{4\pi}{\epsilon} t}$

$\vec{E} = -\nabla \varphi$

т.е. в каждой точке пр-ва величина плотности заряда спадает по exp, там где $\rho(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \rho(\vec{r}, t) = 0$

$\frac{4\pi}{\epsilon} t = \frac{t}{\tau_m} \Rightarrow \tau_m = \frac{\epsilon}{4\pi \sigma}$ в терминах квазистационарных времён.

Но: незаряженные области НЕ ЗАРЯЖАЮТСЯ, т.е. из заряженных областей заряды побегут на ∞ , возникнет ток, но в изначально незаряженных областях проводника заряд локализуется не будет.



Это не диффузия, т.е. диффузионный процесс не происходит $\frac{\partial \rho}{\partial t} \dots + \Delta \dots$, а у нас $\Delta \rho = 0$.

$\text{rot} \vec{E} = i\omega \vec{H}$
 $\text{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ $\Rightarrow E_k = E - i \frac{4\pi \sigma}{\omega}$

применим div :

$\rho = \text{div} \text{rot} \vec{E} = i\omega \mu \text{div} \vec{H}$
 $0 = \text{div} \text{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon \text{div} \vec{E}$ $\Rightarrow \begin{cases} \text{div} \vec{E} = 0 \\ \text{div} \vec{H} = 0 \\ E_k = E - i \frac{4\pi \sigma}{\omega} \end{cases}$

т.е. $T \gg \frac{\epsilon}{4\pi \sigma} \Rightarrow \epsilon \ll 4\pi \sigma \frac{\epsilon}{\omega} \Rightarrow \epsilon \ll \frac{4\pi \sigma}{\omega} \Rightarrow E_k = E - i \frac{4\pi \sigma}{\omega}$ условие хорошего проводника.

чем лучше проводник, тем лучше выполняется это условие

Величины: $\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \vec{j}$ $\Rightarrow$ квазистационарное приближение (в терминах сложностей)

это сложность $\text{Re} E_k = E$ $\text{Im} E_k$

$|\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}| \ll \frac{4\pi}{c} |\vec{j}|$

$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi \sigma}{c} \vec{j}$, т.е. или по-другому: $|\vec{j}_{\text{ам}}| \ll |\vec{j}|$

Проводник хорошего качества, что так проводимость всегда оказывается много больше по сравнению с емкостью. Чем поле квазистационарнее, тем меньше $\vec{j}_{\text{ам}}$, т.е. $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ меньше. (при прочих равных условиях).

1) $\text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}$ $E_k = -i \frac{4\pi \sigma}{\omega}$
 $\text{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E}$ $\epsilon \ll \frac{4\pi \sigma}{\omega} \Rightarrow \omega \ll \frac{4\pi \sigma}{\epsilon}$ и выполняется вплоть до ЗФ

$\text{div} \vec{E} = 0$
 $\text{div} \vec{H} = 0$

Конденсатор для микр $\sim 25, 4 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2 \Rightarrow \omega \ll 10^{12} \text{ с}^{-1}$

2) не учитывается запаздывание поля: $T \gg \tau_{\text{ф}} \sim \tau_{\text{вд}} \sim 10^{-15} \text{ с}$
 $\Rightarrow \omega \ll 10^{15} \text{ с}^{-1}$ - показали условие применимости до МК

3) мы не учитывали не только временную, но и пространственную дисперсию. 5
 т.е. предполагали локальный связь между $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Это предполагает, что
 рассогласие L_E , на котором поле зафиксировано, меньше $L_{\text{провод.}} \sim \lambda_{\text{электромаг.}}$
 должно быть много больше $L_{\text{провод.}}$ и электронов.

$$L_E \gg L_{\text{провод.}} \sim \lambda \quad \omega \ll 10^{10} \text{ с}^{-1}$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = -i\kappa_0 \mu \text{ rot } \vec{H} \Rightarrow \Delta \vec{E} + \kappa_0^2 \epsilon_{\text{ж}} \vec{E} = 0$$

$$\tilde{\kappa}^2 = \kappa_0^2 \epsilon_{\text{ж}} \mu \quad (\text{было } \kappa^2 = \kappa_0^2 \epsilon \mu)$$

$$\text{где } \epsilon_{\text{ж}} \approx -i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \text{ — величина мнимая}$$

Аналогично:

$$\text{rot rot } \vec{H} = i\kappa_0 \epsilon_{\text{ж}} \text{ rot } \vec{E} \Rightarrow -\Delta \vec{H} = \kappa_0^2 \epsilon_{\text{ж}} \mu \vec{H} \Rightarrow \Delta \vec{H} + \kappa_0^2 \epsilon_{\text{ж}} \mu \vec{H} = 0$$

$$\tilde{\kappa} = \sqrt{\kappa_0^2 \epsilon_{\text{ж}} \mu} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} (-i \frac{4\pi\sigma}{\omega}) \mu} = \sqrt{-i} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{4\pi\sigma\mu\omega}}{c} = \pm \frac{1-i}{\delta}$$

$$\text{где } \delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\mu\omega}} \sim \text{глубина проникновения поля в проводник}$$

Переобозначим: $\tilde{\kappa} = \frac{1-i}{\delta}$ ($\pm$ произвольная), тогда получим:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

« упр. квазистат.

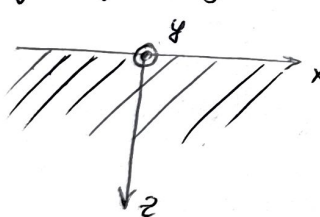
Рассмотрим теперь не обобщенное, а конкретное явление, но
 с теми же условиями $T \gg \tau_{\text{св.}} \sim \lambda_{\text{электромаг.}}$ (здесь $\tau_{\text{св.}}$ — характерная время жизни поля.)

$$\text{rot rot } \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \text{ rot } \vec{E} = \frac{4\pi\sigma}{c} \cdot \left(-\frac{1}{c} \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \Rightarrow \Delta \vec{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Поле не имеет} \\ \text{для отрезка} \\ \vec{H} \text{ в проводнике.} \end{array} \right\}$$

Здесь имеет вид ур. а диффузии $\rightarrow$ поле
 диффундирует через проводник.

Скин-эффект:

В хороший проводник проникает переменное поле на очень малую
 глубину. Возникает тонкий слой поля (скин-эффект).



$$\Delta \vec{E} + \tilde{\kappa}^2 \vec{E} = 0; \quad \vec{E} \parallel \vec{x}_0; \quad \vec{j} = \nabla \vec{E} = \vec{x}_0 j(z)$$

$$\Delta E_x + \tilde{\kappa}^2 E_x = 0$$

$$\Delta j + \tilde{\kappa}^2 j = 0 \quad (j = \nabla \vec{E}; \quad \nabla = \text{const})$$

$$\frac{d^2 j}{dz^2} + \tilde{\kappa}^2 j = 0, \quad \text{т.е. } j(0) = j_0 = \text{const.}$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{1-i}{\delta}; \quad \text{где } \delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\mu\omega}}$$

$$\Rightarrow j(z) = A_1 e^{-i \frac{1-i}{\delta} z} + A_2 e^{i \frac{1-i}{\delta} z} = A_1 e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}} + A_2 e^{\frac{z}{\delta} + i \frac{z}{\delta}}$$

$$j(0) = j_0 \Rightarrow A_1 = j_0 \Rightarrow j(z) = j_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}} = j_0 e^{-i \frac{1-i}{\delta} z}$$

Тогда:

$$E_x = \frac{j}{\sigma} = \frac{j_0}{\sigma} e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}}$$

при $z = \delta \rightarrow$ амплитуда поля снижается в e раз и характерная
 величина проникновения поля в проводник.

Симметрично, для поле $\vec{H}$:

$\vec{H} = \frac{1}{\kappa_0 \mu} \text{ rot } \vec{E}; \quad \text{rot } \vec{E} = -i\kappa_0 \mu \vec{H}$ — подобно подобно, но обратное поле, нулевое
 магнитное поле от внешнего поля.

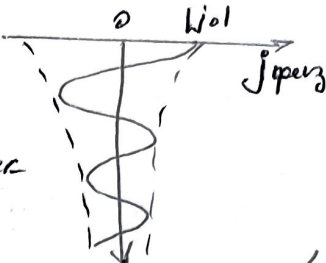
$$\vec{H} = \frac{1}{\kappa_0 \mu} [\nabla \times \vec{E}] = \frac{1}{\kappa_0 \mu} [\nabla E_x, \vec{x}_0] = \frac{1}{\kappa_0 \mu} \frac{\partial}{\partial z} (E_0 e^{-i \frac{1-i}{\delta} z}) \vec{y}_0 = \frac{1-i}{\delta} \frac{E_0}{\kappa_0 \mu} e^{-i \frac{1-i}{\delta} z} \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{H_0 = \frac{1-i}{\sqrt{2}\sqrt{\mu\sigma}} E_0} \Rightarrow H_y = H_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}} e^{i\omega t} = H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi)$$

$$\text{Re} \{ j e^{i\omega t} \} = \text{Re} \{ j_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}} e^{i\omega t} \} = j_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi)$$

$$\text{Пусть } \varphi=0, t=0 \Rightarrow j_{\text{прз}} = \text{Re} \{ j_0 e^{i\omega t} \} = j_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos \frac{z}{\delta}$$

Скин-эффект: $\delta(\omega)$ уменьшается с ростом частоты ($\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\gamma\mu\omega}}$) ~ величина показывается: на каком расстоянии от поверхности проводника поле спадает в e раз.
при $\gamma \rightarrow \infty \delta \rightarrow 0 \Rightarrow$ в идеальном проводнике поле не проникает.



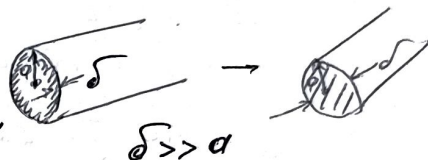
Резонансная фрагтовка скин-эффекта:

$$\text{пот } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}$$

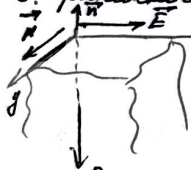
Электрическое поле $\vec{E}$, проникающее в проводник, индуцирует переменное электрическое поле, а поперек, вызывает ток (токи Фуко), дающего свой вклад (собр. эмиссия) в поле.

Условие плоскости квазилинейного проводника:

В случае переменного поля для квазилинейного проводника можно использовать доп. условие: толщина проводника должна быть много меньше толщины скин-слоя, чтобы ток был распределен квазиравномерно по сечению проводника.



8. Граничное условие Лонгвильма. Интегрирование соотношений с скин-эффектом.



Пусть дана л-ть хорошего проводника:

$$\text{Будем считать: } E_x(0) = E_0$$

$$H_y(0) = H_0 = \frac{1-i}{\sqrt{2}\sqrt{\mu\sigma}} E_0$$

Характеристический импеданс тангенциальных компонент

$$\eta_z = \frac{E_x(0)}{H_y(0)} = \frac{\mu\sigma\delta}{1-i} = \left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{c}{\sqrt{2\pi\gamma\mu\omega}} \\ \mu_0 &= \frac{c}{\omega} \end{aligned} \right\} = \frac{\mu_0\sigma\delta}{\sqrt{2}\sqrt{1-i}} = \sqrt{\frac{\mu}{-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{\text{компл.}}}}$$

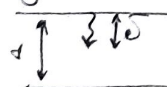
Вдоль нормали к границе:

Это и есть искомое ГУ Лонгвильма.

$$\vec{E}_z = \eta_z [\vec{H}', \vec{H}]_z = \frac{c}{\delta} E_x [\vec{H}', \vec{H}]_z, \text{ где } E_x = \frac{c}{\delta} \eta_z$$

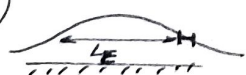
также для $\eta_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{\text{компл.}}}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\gamma}} (1 \pm i)$, если $\gamma \rightarrow \infty$; $\eta_z \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{E}_z = 0$ (скал раз по л-ти идеального проводника)

1) Пусть есть проводник конечной толщины:



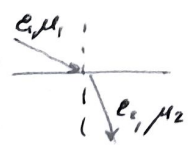
Если $\delta \ll a$ и среда не лабиринтная, а плоская, то фундаментально ГУ так же выполняется.

2)



Если $\delta \ll LE$ (изменения поля вдоль границы незначительны), можно считать, что E меняется мало и тогда ГУ тоже справедливо.

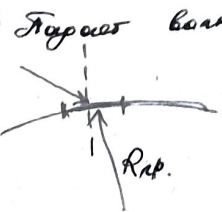
3)



$$\sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \gg \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \quad \eta_2 \gg \eta_1$$

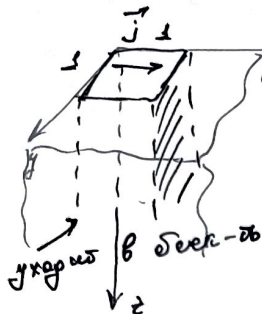
Если $|\epsilon_2 \mu_2| \gg |\epsilon_1 \mu_1| \rightarrow$ то в нижней среде проводимость почти по нормали и если в нижней среде также высокая проводимость, то искомое ГУ выполняется.

4)



Пусть волна на искривленную границу. Если $\delta \ll R_{\text{кр.}}$ т.е. волна гораздо больше, чем радиус кривизны $\rightarrow$ то ГУ так же справедливо

Энергетический эквивалент для скин-эффекта.



Вспомогательная функция с размерами, равными ширине и высоте проводника, фиксированная на поверхности.

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{|j|^2}{V} dz \quad (x \text{ и } y \text{ не входят т.к. они с 1-ой функцией})$$

$$j = j_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}} \Rightarrow |j| = |j_0| e^{-\frac{z}{\delta}}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{|j|^2}{V} dz = \frac{1}{2V} |j_0|^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}} dz = \frac{\delta}{2V} |j_0|^2 \sim \text{всегда говорит о потерях по времени.}$$

Найдём ток, который течёт по x:

$$I = \int_0^\infty j dz = \int_0^\infty j_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}} dz = \frac{j_0 \delta}{1+i} \Rightarrow |I| = \frac{|j_0| \delta}{\sqrt{2}} \Rightarrow |j_0| = \frac{\sqrt{2}}{\delta} |I|$$

Подставим в Q:

$$Q = \frac{|I|^2}{2V\delta} = \frac{1}{2} \frac{1}{V\delta} |I|^2, \text{ вспомогательная } Q = \frac{1}{2} R |I|^2$$

$\Rightarrow$ Как нафакт работает только "переходная" часть. $R_{\text{ex}} = \frac{L}{2\delta} = \frac{1}{2} \frac{L}{\delta}$

Магнитная часть энергии

Если будем считать функции W^m и W^e , в уел. сильного скин-эффекта $W^m \gg W^e$

$$W^m = \int_0^\infty \frac{\mu H^2}{16\pi} dz = \frac{\mu}{16\pi} \int_0^\infty \left| \frac{1-i}{\sqrt{2}} E_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}} \right|^2 dz = \frac{\mu}{16\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|j_0|^2}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}} dz =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{все величины} \end{array} \right\} = \frac{1}{2e^2} \cdot 2\pi \mu \delta \frac{|I|^2}{2} = \frac{1}{2e^2} L_{\text{ex}} \frac{|I|^2}{2}$$

сравним из формулы $W^m = \frac{1}{2e^2} L I^2 \Rightarrow \boxed{W^m = \frac{1}{2e^2} L \cdot \frac{|I|^2}{2}}$, где $L = 2\pi \mu \delta$

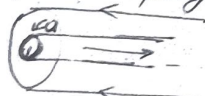
Различные интерпретации скин-эффекта. L_{ex} - индуктивность скин-эффекта.

$$Z_{\text{ex}} = \frac{4\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{4\pi}{c} \sqrt{\frac{\omega \mu}{8\pi \nu}} (1+i) = \left\{ \begin{array}{l} \text{разделим Re и Im части} \end{array} \right\} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega \mu}{8\pi \nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{\omega}{c^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{\text{ex}} = R_{\text{ex}} + i \frac{L_{\text{ex}}}{c^2}}$$

Доп-но: нужно проверить, что $W^e \ll W^m$

Пример. Расчёт коэф-та самодуки на границе длинн. проводника с радиусом a и магнитными свойствами проводника: цилиндр.



В начале $\omega = 0$
 $j = \frac{I_2}{\pi a^2}$, по теореме о циркуляции.

$$\text{Нер } 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j r a^2, \text{ при } r=a \Rightarrow H_0 = \frac{2I_2}{ca} \sim \text{всегда прав.}$$

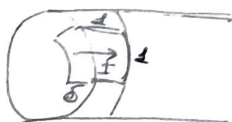
$$W^e = \int_0^\infty \frac{\mu H_0^2}{8\pi} 2\pi r dr = \left\{ \begin{array}{l} \text{все величины} \end{array} \right\} = \frac{1}{2e^2} \cdot \frac{\mu}{2} I_2^2 \Rightarrow L_1 = \frac{\mu}{2} \sim \text{всегда прав.}$$

на границе

В пределе поле: Если $\delta \gg a \rightarrow$ всё так же ток распр. равномерно.

Рассмотрим скин-эффект скин-эффекта $\delta \ll a$, $\omega \neq 0$:

$$W^e = \frac{1}{2e^2} L_1 \cdot \frac{|I_2|^2}{2}, \text{ не считаем все величины.}$$



$$I_2 = I_2 \pi a^2; I = \frac{I_2}{2\pi a}$$

$$W^m = \left(\frac{1}{2e^2} L_{\text{ex}} \frac{|I|^2}{2} \right) \cdot 2\pi a = \frac{1}{2e^2} \cdot 2\pi \mu \delta \cdot \frac{1}{2} \frac{|I_2|^2}{(2\pi a)^2} \cdot 2\pi a = \frac{1}{2e^2} \left(\mu \frac{\delta}{a} \right) \frac{|I_2|^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2e^2} L_1 \frac{|I_2|^2}{2} \Rightarrow L_1 = \frac{\mu \delta}{a} \text{ при } \frac{\delta}{a} \ll 1$$

и наоборот, нет в формуле, ну так.

3. Квазистационарные процессы в квазистационарных цепях с сосредоточенными параметрами. Возникает преобразование задерживающим эффектом взаимодействия и времени зоны квазистационарности.

Считаем, что ток распределяется равномерно. Условия применимости квазистационарного описания в данной цепи, чтобы характерный масштаб поля: $T = \frac{L}{v} \gg T_{\text{зона}}$ (задерживание ЭМ).

Величину $T_{\text{зона}}$ можно оценить $T_{\text{зона}} \approx \frac{L}{v}$, L - характерный пространственный масштаб цепи, $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ - скорость волны.

Рассмотрим пример: задерживание, не может колебаться так в точке.

можно преобразовать если $|\frac{\partial r}{v}| \ll \delta$

$T_{\text{зона}} \ll \delta$, а $\delta \approx \frac{2\delta}{\delta} \cdot \frac{L}{v} \ll \delta$ и если условие квазистационарности поля, при этом условии временно задерживания можно преобразовать.

Воспользуемся предл. решением статической задачи $H_0 = \frac{2I_0}{c} e^{i\omega t}$

$\Rightarrow$ Квазистационарный $\rightarrow T \gg T_{\text{зона}}$.

Квазистатическое $\rightarrow$ в зависимости от пространственных координат ведут себя как в статике.

Переходим к условию: $\delta \gg T_{\text{зона}}$.

$\frac{\partial r}{v} \ll 1$; $\frac{\partial r}{v} = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\epsilon\mu} \cdot r = \kappa r \Rightarrow \kappa r \ll 1$ - зона квазистатичности.

В этом случае пространственная структура поля оказывается такой же, как в статике, а само $\kappa \ll \frac{1}{T}$ - полн. поле квазистационарно.

С такой жестью др-ий Максвелла: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, $\vec{H} \approx \vec{H}_{\text{ст.ст.}}$
 $\text{rot } \vec{H}_{\text{ст.ст.}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

На самом деле $\vec{H} = \vec{H}_{\text{ст.ст.}} + \vec{H}_{\text{зона}}$ - дополняет к в. ст., но мы его не учитываем в статическом приближении.

Условно ставим связь др-ий:

$\vec{j} \rightarrow \vec{H}_{\text{ст.ст.}}, \vec{B}_{\text{ст.ст.}} \xrightarrow{\vec{E}, \vec{D}} \vec{E}, \vec{D} \xrightarrow{\vec{H}_{\text{зона}}} \vec{H}_{\text{зона}}$
 вихревое электр. поле, $(\text{rot } \vec{E} \neq 0)$

$\rightarrow$ переходим в квазистатическое приближение.

$\kappa r \ll 1$ $\text{rot } \vec{H}_{\text{ст.ст.}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$, если полное поле $\vec{H} = \vec{H}_{\text{ст.ст.}} + \vec{H}_{\text{зона}}$.
 $\Rightarrow \text{rot } \vec{H}_{\text{зона}} = i\kappa \vec{E}$, $\text{rot } \vec{E}_{\text{вихр.}} = -i\kappa \vec{H}_{\text{ст.ст.}}$

L - некоторый характерный масштаб (зона квазистатичности). Величину $\text{rot } \vec{E}$ по порядку величины можно считать той, как оцениваются поправки к статическому полю: $|\text{rot } \vec{E}| \sim \frac{|\vec{E}|}{L}$

$\Rightarrow \frac{|\vec{E}_{\text{вихр.}}|}{L} \sim \kappa_0 \mu |\vec{H}_{\text{ст.ст.}}| \Rightarrow |\vec{E}_{\text{вихр.}}| \sim \kappa_0 L \mu |\vec{H}_{\text{ст.ст.}}|$ (*) $\sim$ можно сделать такую оценку, когда выполняются в зоне квазистатичности $\kappa L \ll 1$; $\kappa = \kappa_0 \sqrt{\epsilon\mu}$.

Оценим добавку $\vec{H}_{\text{зона}}$:

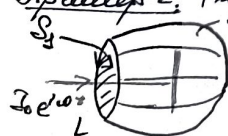
$\Rightarrow \frac{|\vec{H}_{\text{зона}}|}{L} \sim \kappa_0 \epsilon |\vec{E}_{\text{вихр.}}| \Rightarrow |\vec{H}_{\text{зона}}| \sim \kappa_0 L \epsilon |\vec{E}_{\text{вихр.}}| \sim (\kappa_0 L)^2 \epsilon \mu |\vec{H}_{\text{ст.ст.}}| = (\kappa L)^2 |\vec{H}_{\text{ст.ст.}}|$

т.е. $\vec{H}_{\text{зона}}$ величина 2го порядка малости $\rightarrow$ можно пренебречь (достаточно считать квазистационарное поле).

Представим себе в этом случае эл-ую и магнитную энергии, задерживание в зоне квазистатичности:

$\frac{W^{\text{эл.}}}{W^{\text{маг.}}} \sim \frac{w^{\text{эл.}} \cdot L^3}{w^{\text{маг.}} \cdot L^3} = \frac{\epsilon |\vec{E}_{\text{вихр.}}|^2 / 16\pi}{\mu |\vec{H}_{\text{ст.ст.}}|^2 / 16\pi} \sim \frac{\epsilon (\kappa_0 L)^2 \mu^2}{\mu} = (\kappa L)^2 \ll 1$. т.е. в зоне квазистатичности в основном сосредоточены магнитная энергия.

Пример 2: поле вокруг провода с прерывистыми токами и есть разрыв?



пусть $\kappa L \ll 1$ ($\kappa \ll 1$)
 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{4\pi}{c} I_{\text{емк.}}$

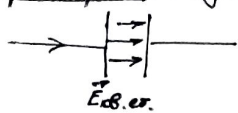
$\oint \vec{H}_{\text{ст.ст.}} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$, $\Rightarrow |I_{\text{емк.}}| \ll |I|$ $\rightarrow$ т.е. вл. сечения провода можно пренебречь токами емкостными.

Рассмотрим тельце другой по-т, магнитудно на $R \rightarrow R_2$:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} + \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} \text{ по правилу } \oint_{\Gamma} \vec{H} + \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{I \approx I_{\text{м} S_2}}$$

строгое рав-во: $I + I_{\text{м} S_2} = I_{\text{м} S_2}$, но амплитуда мала.

Пример 3 (конденсатор):



Размер конденсатора (характерный) L удовл. условию $KL \ll 1$.

В этом случае по в конденсаторе $\vec{E} \approx \vec{E}_{\text{в.с.}}$, где квазистационарная по ор-ся уравнениями:

$$\text{rot } \vec{E}_{\text{в.с.}} = 0$$

ρ - упр. распределение зарядов на обкладках

$$\rho \rightarrow \vec{E}_{\text{в.с.}}, \vec{D}_{\text{в.с.}} \xrightarrow{\text{div}} \vec{H}, \vec{B} \xrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_{\text{в.с.}}, \vec{D}_{\text{в.с.}}$$

будем предполагать это справедлив, покажем это:

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E}_{\text{в.с.}} \Rightarrow \frac{|\vec{H}|}{L} \sim \omega \epsilon |\vec{E}_{\text{в.с.}}| \Rightarrow |\vec{H}| \sim \omega \epsilon L |\vec{E}_{\text{в.с.}}|$$

по $\vec{E}_{\text{в.с.}} = -i\omega \mu |\vec{H}|$ — тогда чисел на кар-ом полей:

$$\frac{|\vec{E}_{\text{в.с.}}|}{L} \sim \omega \mu |\vec{H}| \Rightarrow |\vec{E}_{\text{в.с.}}| \sim \omega \mu L |\vec{H}| \sim \omega^2 \epsilon \mu L^2 |\vec{E}_{\text{в.с.}}| = (KL)^2 |\vec{E}_{\text{в.с.}}|$$

т.е. $\vec{E}_{\text{в.с.}}$ авл. величина это порядка меньше по ор-е $\vec{E}_{\text{в.с.}}$.

Относительная ошибка:

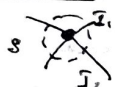
$$\frac{W}{W_{\text{с}}} \sim \frac{\mu |\vec{H}|^2}{\epsilon |\vec{E}_{\text{в.с.}}|^2} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{представим} \\ \text{векторы} \end{array} \right\} \sim \frac{\mu \omega^2 \epsilon^2 L^2}{\epsilon} = (KL)^2 \ll 1$$

в электродах в основном сосредоточена эл-ая энергия.

10. Законы Кирхгофа для цепей с переменным током.

1. закон:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



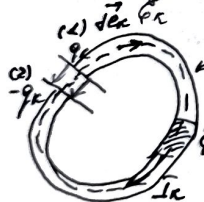
$$\text{div } \text{rot } \vec{H} = 0 \Rightarrow \text{div } (\vec{J} + \vec{J}_{\text{см}}) = 0 \quad \text{в квазистационарном приближении}$$

$$\vec{J} \gg \vec{J}_{\text{см}}$$

$\Rightarrow \text{div } \vec{J} = 0$, формулируем по пов-ти S:

$$\oint_S \text{div } \vec{J} dV = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{J} d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_k I_k = 0}$$

2 закон: Изобразим контур с номером k (может быть и другие контуры): его поверхность сгущенности L_k , он охватывает электроны S_k , электроны S_k и имеет контуровые R_k



$$\oint_{L_k} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_k} \vec{B} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

математически соотношения: $\vec{J} = \nabla(\vec{E} + \vec{E}_{\text{с}}) \Leftrightarrow \frac{\vec{J}}{\nabla} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{с}}$

интегрируем по пов-ти S_k т.е. по S-2.

$$\oint_{L_k} \vec{J} d\vec{l} = \oint_{L_k} \vec{E} d\vec{l} + \oint_{L_k} \vec{E}_{\text{с}} d\vec{l}$$

$$\oint_{L_k} \frac{\vec{J}}{\nabla} d\vec{l} = \oint_{L_k} \vec{J} d\vec{l} = \left\{ \begin{array}{l} \text{имеем, что} \\ \text{электрич. поле} \end{array} \right\} = \int_{L_k} \frac{I_k}{\nabla S} d\vec{l} = I_k \int_{L_k} \frac{d\vec{l}}{\nabla S}$$

(!) Введем I_k за знак интеграла, имеем, что пох во всех точках контура совпадает во времени и пространстве — это возможно только для безразмерных зарядов, т.е. в зоне квазистационарности. ($KL \ll 1$)

$$\Rightarrow I_k R_k = \oint_{L_k} \vec{E} d\vec{l} - \oint_{L_k} \vec{E}_{\text{с}} d\vec{l} + \Phi_k \Rightarrow I_k R_k = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} + \oint_{L_k} \vec{E} d\vec{l} + \Phi_k$$

Итак: $V_k = \frac{\Phi_k}{C_k}$ — можно ли пользоваться для переменных полей?

выраж. C_k

V_k — напряжение на k -ой конденсаторе.

Используя Φ_k в общем случае не эквивалентно V_k , но $KL \ll 1 \Rightarrow$ не эквивалентно $\Rightarrow$ можно пользоваться:

$$\Phi_k = -I_k \Rightarrow \Phi_k = -\int I_k dt$$

$$V_k = -\frac{1}{C_k} \int I_k dt$$

Что делать с I_k ?

$$\Phi_k = \Phi_k + \sum_{m \neq k} \Phi_{km} - \text{внешнее д.р. контуров}$$

Т.к. мы записываем (к.в.с.с.) $\rightarrow$ приближенно выполняются равенства:

$$\Phi_k = \frac{1}{c} L_{kk} I_k ; \quad \Phi_{km} = \frac{1}{c} L_{km} I_m$$

Все представляем:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (L_{kk} I_k) + R_k I_k + \frac{1}{c_k} \int I_k dt = \mathcal{E}_k^{ex} + (-1) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m \neq k} \Phi_{km}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (L_{kk} I_k) = L_{kk} \dot{I}_k$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (L_{km} I_m) = L_{km} \dot{I}_m$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{c^2} \sum_m L_{km} \dot{I}_m + R_k I_k + \frac{1}{c_k} \int I_k dt = \mathcal{E}_k^{ex} \right] \sim \text{закон Кирхгофа.}$$

Пример для одного контура с емкостью:

$$\frac{1}{c^2} L \dot{I} + RI + \frac{1}{c} \int I dt = \mathcal{E}^{ex} \quad \text{будем искать решение в виде } \mathcal{E}^{ex} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{1}{c^2} L \ddot{I} + RI + \frac{1}{c} I = \mathcal{E}^{ex} \Rightarrow \left(\frac{1}{c^2} L (i\omega)^2 + R + \frac{1}{c} \right) I_0 = i\omega \mathcal{E}_0 \quad | : i\omega$$

$$\left(\frac{i\omega L}{c^2} + R + \frac{1}{i\omega c} \right) I_0 = \mathcal{E}_0$$

$$\Rightarrow \left[Z = R + i\omega \left(\frac{L}{c^2} - \frac{1}{\omega^2 c} \right) \right]$$

Z — импеданс.

c^2 — из-за скорости св. Расеи-и свободные колебания: $\mathcal{E}_0 = 0; I_0 \neq 0$

$$2I_0 = 0 \Rightarrow Z = 0 \Rightarrow R = 0 \quad \text{должны исключить потери.}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{\omega^2 L} \Rightarrow \omega = \sqrt{LC} \quad \sim \text{т.е. все возм.}$$

т.е. мы I_0 свобод. колеб.

4. Дифференциальные уравнения в квантовой электродинамике. Дифференциальные уравнения Максвелла в комплексной форме. Расеи-и свободные колебания в безграничной, однородной среде в отсутствие источников.

Уравнения Максвелла в комплексной форме: $\text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}$ поле в безграничной, однородной среде в отсутствие источников.

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E} \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{Получили уравнения Гельмгольца: } \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

Рассеи-и свободные колебания:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \sim \text{ищем решение в виде плоской волны.}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad \text{где } k \sim \text{волновое число}$$

Пусть поле зависит от координаты z : $\vec{E}(z) = \vec{E}_0 E_x(z)$, т.е. предположим $k_x = 0, k_y = 0$.

$$\Rightarrow E_x(z) = E_0 e^{-ikz}$$

проверим выполнение уравнений:

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + k^2 E_x(z) = 0 \Rightarrow \left[(-ik)^2 + k^2 \right] E_0 e^{-ikz} = 0 \Rightarrow k_z^2 = k^2 \Rightarrow k_z = k$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 E_0 e^{-ikz} \quad k_z = k \quad \sim \text{Уравнения Максвелла для плоской волны.}$$

$$\text{div } \vec{E} = (\nabla, \vec{E}_0 e^{-ikz}) = (\nabla, \vec{E}_0) = (-ik, \vec{E}_0) ; \quad \text{rot } \vec{E} = [\nabla, \vec{E}_0 e^{-ikz}] = [-ik, \vec{E}_0]$$

Выделим $\vec{r} \sim$ волновое направление.

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega \mu} \text{rot } \vec{E} = \frac{1}{\omega \mu} [-ik, \vec{E}_0] \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\omega \mu} [-ikz_0, \vec{E}_0 e^{-ikz}] = \left(\frac{k}{\omega \mu} \right) \vec{y}_0 E_0 e^{-ikz}$$

отсюда:

$$\frac{k}{\omega \mu} = \frac{c \sqrt{\epsilon \mu}}{c \mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} ; \quad \left[\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 1 \right] \Rightarrow \vec{H} = \vec{y}_0 \frac{1}{\eta} E_0 e^{-ikz}$$

$\Rightarrow H_y = \frac{1}{\eta} E_0 e^{-ikz} = \frac{1}{\eta} E_k \leftarrow$ Подставим $\omega = e^{i\omega t}$ и возьмем реальную часть.

$E_x(z,t) = \text{Re} \{ E_0 e^{-ikz} \cdot e^{i\omega t} \} = |E_0| \cos(\omega t - kz + \varphi)$

аналогично:

$H_y(z,t) = \frac{1}{\eta} |E_0| \cos(\omega t - kz + \varphi)$

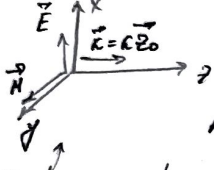
$\omega t - kz + \varphi$ — полная фаза волны, а φ — нач. фаза

Тождество продольной фазы: $\omega t - kz + \varphi = \text{const}$. — в фикс. момент времени t : $z = \text{const}$
 $\rightarrow$ скорости $\perp \omega z \rightarrow$ положению ωt и называемая линейной.

Ср. Плоской электромагнитической (однородной) ЭМВ называется волна, фазы которой в определенных точках пространства принимают постоянные значения или системы параллельных плоскостей.

неоднородная (в фазовом пространстве) Волны $\rightarrow$ неоднородные (пов-ть пост. фазы совпадают с пов-ью пост. температуры)

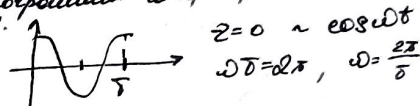
$\{ \vec{E}, \vec{H}, \vec{k} \}$ — ср. продольно попер. Волна $\vec{k}$ — волна распространяется.



Введём $\vec{E}_\perp = \eta [\vec{H}, \vec{n}]$
 $[\vec{n}_1, \vec{n}]$
 $\Rightarrow E_\perp = \eta [\vec{H}, \vec{z}_0]$

2-поперечный характеристический цилиндр. ($E_\perp$ и $H_\perp$ по отношению к поперечному направлению, вводится для безразмерной волны)

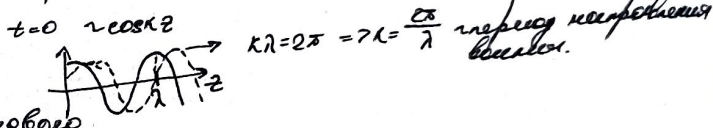
Имея выравненные соотношения можно построить симметричные и антисимметричные соотношения.



Для этого примем: $\vec{z}_0 = \vec{n}$; $\eta = \eta_\perp$
 $\Rightarrow E_\perp = \eta [\vec{H}, \vec{z}_0]$ — для однородных волн.

$\frac{1}{\eta} / \omega t - kz + \varphi = \text{const} \leftarrow$ для ω по времени

$\omega - kz = 0 \Rightarrow \boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{v}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} = v}$



$\rightarrow$ Фазовая ск-ть (скорость движения фазового фронта) совпадает с v .

Полезные соотношения: $v = \frac{\omega}{k} \rightarrow k = \frac{\omega}{v} \rightarrow$ представим в $\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{v}} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot v = v \cdot T$ — за период во времени смещается на длину волны λ

Вводится групповая скорость (ск-ть распространения энергии, информации):

$\boxed{v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}}$, вычислим $\frac{1}{v_{gr}} = \frac{\partial k}{\partial \omega}$

$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{\omega}{v}$, $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, пусть $\epsilon = \epsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$

$\Rightarrow \frac{1}{v_{gr}} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\omega}{v} \right) = \frac{1}{v} - \frac{\omega}{v^2} \frac{\partial v}{\partial \omega} = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{\omega}{v} \frac{\partial v}{\partial \omega} \right)$

$\Rightarrow \boxed{v_{gr} = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v} \frac{\partial v}{\partial \omega}}}$

для малых дисперсий. В отсутствие дисперсии $v \neq v(\omega) \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow v_{gr} = v_\phi$

В каких направлениях распр. энергии? (составим вектор Пойнтинга):

$\{ \vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*] \} = \{ \vec{E} = \eta [\vec{H}, \vec{z}_0] \} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} \{ \eta [\vec{z}_0, (\vec{H} \vec{H}^*)] - \vec{H} (\vec{z}_0, \vec{H}^*) \} = \frac{c}{8\pi} \eta |\vec{H}|^2 \vec{z}_0 = \frac{c}{8\pi} \eta |\vec{E}|^2 \vec{z}_0$

$\rightarrow$ энергия течёт по фазе (продольно), что ЭМВ течёт по фазе

Рассмотрим плоские волны в вакууме:

1) $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$, $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ действ. условия $\nabla \rightarrow \nabla - i\vec{k}$
 $\text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H} \Rightarrow [-i\vec{k}, \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}] = -i\omega \mu \vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} \Rightarrow \boxed{[\vec{k}, \vec{E}_0] = \omega \mu \vec{H}_0}$

2) Рассмотрим другие ур-я Максвелла:
 $\text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E} \Rightarrow [\vec{k}, \vec{H}_0] = -\omega \epsilon \vec{E}_0$

3) Для однородной фазы $\text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E}_0 = 0 \Rightarrow (\vec{k}, \vec{E}_0) = 0$
 $(\vec{v}, \vec{E}) = 0$

4) $\text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{H} = 0 \Rightarrow (\vec{v}, \vec{H}) = 0 \Rightarrow (\vec{k}, \vec{H}_0) = 0$

Пусть для определенности все будем выражать через поле E , тогда из (1):

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu} [\vec{k}, \vec{E}_0]$$

$$[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{E}_0]] = \vec{k}(\vec{k}, \vec{E}_0) - (\vec{k}, \vec{k}) \vec{E}_0 = -\kappa_0^2 \epsilon \mu \vec{E}_0 \Rightarrow (\vec{k}, \vec{k}) - \kappa_0^2 \epsilon \mu = 0, \text{ если } \vec{E}_0 \neq 0 \Rightarrow$$

$$= 0 \quad \boxed{(\vec{k}, \vec{k}) = \kappa_0^2 \epsilon \mu}$$

$\kappa_0 = \frac{\omega}{c}$, $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$, $\rightarrow$ решение этого μ - ϵ : $\omega = \omega(k)$ — дифференциальное соотношение для волн в изотропной изотропной среде.

Анализ дифференциального уравнения: (не оформили, все же покажем, что оно выполняется.)

Рассмотрим сферическую волну без потерь: ищем решение для μ - ϵ в виде:

$$\vec{k} = k_1 - i k_2 \text{ — симметрично, что } \vec{k} \text{ — симпл. в общем случае}$$

$$\Rightarrow (\vec{k}_1 - i \vec{k}_2)(\vec{k}_1 - i \vec{k}_2) = \kappa_0^2 \epsilon \mu \Rightarrow k_1^2 - k_2^2 - 2i(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \kappa_0^2 \epsilon \mu \Rightarrow \begin{cases} k_1^2 - k_2^2 = \kappa_0^2 \epsilon \mu \\ (\vec{k}_1, \vec{k}_2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Re } \vec{k} \quad \text{Im } \vec{k} \quad \text{— действительная, т.е. } \vec{k}_2 = 0 \Rightarrow \vec{k} = \vec{k}_1$$

Частные случаи:

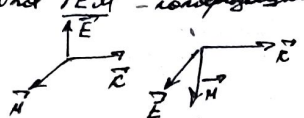
5. Волна в плоской волне — вектор $\vec{k}$ — действительный, т.е. $\vec{k}_2 = 0 \Rightarrow \vec{k} = \vec{k}_1$

$$k_1^2 = \kappa_0^2 \epsilon \mu \Rightarrow \vec{k} = \kappa_0 \vec{n} \text{ — произвольное направление}$$

Если $\vec{n} = \vec{z}_0$ — направление по волне, то плоскость поверхности постоянной фазы и

плоскость (поверхность) постоянной амплитуды совпадают.

Для ТЕМ — поляризации $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ — взаимно перпендикулярны.



Независимо от поляризации волны волн. фронт и поверхность фазовой с-по волн $\vec{k}$ — поляризационное вырождение.

Если сделать фронт изогнутой — вырождение пропадет.

Записываем (пример): пусть $E_x \neq 0$, $E_y = E_z = 0 \Rightarrow E_x = E_0 e^{-i k_y y - i k_z z}$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \kappa_0^2 \epsilon \mu$$

$$\Rightarrow e^{i \omega t}$$

$$\Rightarrow E_x(\vec{r}, t) = |E_0| \cos(\omega t - k_y y - k_z z + \varphi)$$

Если хотим посмотреть как волна распространяется — фронт какой-то сеч.

$$k_y \lambda_y = 2\pi \Rightarrow \lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}, \text{ аналогично } \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z}$$

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} = \infty \text{ — если нуль изменения по координате } x = \infty$$

Записываем верно, что $\lambda_y, \lambda_z \gg \lambda \Rightarrow$ значит от этой коор. с-ть распр. волн будет больше. (То есть фронт распр. волн — фронт фазового фронта с осевыми координатами.)

Об y : $x=0, z=0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} | \omega t - k_y y - k_z z + \varphi = \text{const} \Rightarrow \omega - k_y \dot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = \frac{\omega}{k_y} = \frac{v_{\text{ф}}}{k_y}$$

$$\text{Аналогично: } \dot{z} = \frac{\omega}{k_z}$$

$\Rightarrow v_{\text{ф}}(y, z) > v$ — но мы не можем интерпретировать как вектор (или не преобразуется в вектор).

$\Rightarrow$ только k_x, k_y, k_z могут быть векторами в вектор.

12. Нормальная теория волн в изотропной изотропной среде (волны с комплексными векторами). Дифференциальное соотношение. Поляризация волн, длина волны, фазовая скорость, направление распространения. Волны с комплексными векторами. Волны с комплексными векторами. Волны с комплексными векторами.

$$\text{II. В случае нормального плоской волны } k_2 \neq 0, k_1 \neq 0, \text{ но возможно } \vec{k}_1 \perp \vec{k}_2$$

$$\text{Пусть } \vec{k}_1 = k_1 \vec{z}_0, \vec{k}_2 = k_2 \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{k} = k_1 \vec{z}_0 - i k_2 \vec{x}_0$$

$$\Rightarrow (\vec{k}, \vec{k}) = k_1^2 - k_2^2 = \kappa_0^2 \epsilon \mu \text{ — дифференциальное уравнение для волн.}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} = \vec{E}_0 e^{-i k_1 z - i k_2 x} \Rightarrow \text{в нашей среде}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i k_1 z - i k_2 x} \Rightarrow \cos(\omega t - k_1 z - k_2 x)$$

$$\text{аналогично: } \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i k_1 z - i k_2 x}$$

Уравнение пов-ти постоянной фазы: $\omega t - k_1 z - k_2 x = \text{const} \Rightarrow z = \frac{\omega}{k_1} t - \frac{k_2}{k_1} x$

$$\omega - k_1^2 = \text{const} \Rightarrow v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k_1}$$

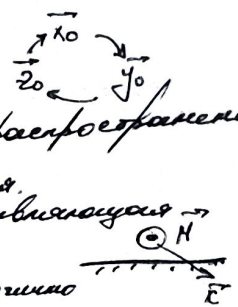
Но! Поверхности постоянной фазы не совпадают с пов-но постоянной амплитуды: $e^{-k_2 x} = \text{const} \Rightarrow -k_2 x = \ln(\text{const}) \Rightarrow x = -\frac{\ln(\text{const})}{k_2} \Rightarrow x = \text{const}$

пов-та пов. амплитуды $\perp$ пов. фазы.

Т.к. пов-та не совпадают $\rightarrow$ такая волна называется нормальной

Рассмотрим линейную поляризацию:

1) Пусть $\vec{k}_0 = k_0 \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{E}_0 = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} [\vec{k}, \vec{H}_0] = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} [k_0 \vec{y}_0, H_0 \vec{z}_0]$



$\vec{E}_0 = \frac{H_0}{\epsilon_0 \epsilon} (k_0 \vec{x}_0 + i \epsilon \vec{z}_0) \sim$ состоит из поперечной и продольной составляющих по отношению к направлению движения.

Из-за $i \rightarrow$ зап. сдвиг фаз на $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ эллиптическая поляризация.
 $\Rightarrow$ это ТМ-поляризация (т.е. $H_z = 0$ — магнитная составляющая — поперечна м-ти падения)

2. Пусть линейно поляризовано: $\vec{E} = E_0 \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{H}_0 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu} [\vec{k}, \vec{E}]$ — аналогично

$\vec{H}_0 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu} [k_0 \vec{y}_0, E_0 \vec{z}_0] \Rightarrow \vec{H}_0 = \frac{E_0}{\epsilon_0 \mu} (k_0 \vec{x}_0 + i \epsilon \vec{z}_0)$

$\Rightarrow$ это ТЕ-поляризация (т.е. $E_z = 0$ — электрическая составляющая — поперечна м-ти падения)

1) Рассеяние на свободных носителях массы:

$\hbar \omega = \hbar \frac{\omega}{\sqrt{\epsilon_0^2 \mu^2 + \epsilon^2}} < \frac{\omega}{\kappa} = \hbar v$ — для др. массы волны.

из дисперс. — κ^2 Если $\hbar \omega$ сравнимо с $\hbar \mu c^2 \Rightarrow$ то в м-рм. волне проявляются эффекты квантовой механики

2) Рассеяние длины волны:

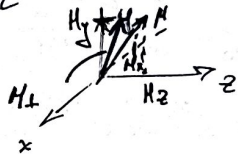
$\lambda = \lambda_z = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi}{\sqrt{\epsilon_0^2 \mu^2 + \epsilon^2}} < \frac{2\pi}{\kappa} = \lambda_{др.}$ $\rightarrow$ т.е. длина волны тоже меньше

3) Характеристический импеданс:

$\vec{E}_\perp = \eta_+ [\vec{H}, \vec{z}_0]$ может быть получена обратная формула
 $[\vec{z}_0, \vec{E}_\perp] = \eta_+ [\vec{z}_0, [\vec{H}, \vec{z}_0]] = \eta_+ \{ \underbrace{[\vec{z}_0, \vec{z}_0]}_0 - \vec{z}_0 [\vec{H}, \vec{z}_0] \} = \eta_+ \vec{H}_\perp$

$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_\perp = \frac{1}{\eta_+} [\vec{z}_0, \vec{E}_\perp]}$

это легко понять геометрически из $\vec{H}$ убирается z -компл. получим перпендикулярно по отношению к $\vec{z}_0$ (или $\vec{z}_0$)



Для разных поляризаций:

$\boxed{\eta_+^{(TE)} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\epsilon_0 \mu}{\epsilon}}$

$\leftarrow \vec{E}_\perp = \eta_+ [\vec{H}, \vec{z}_0] = \eta_+ [\vec{H}_\perp, \vec{z}_0] = \eta_+ [H_x \vec{x}_0 + H_y \vec{y}_0, \vec{z}_0] = \eta_+ [H_x \vec{x}_0, \vec{z}_0] = -\eta_+ H_x \vec{y}_0 \Rightarrow E_y = -\eta_+ H_x$

Аналогично:
 $\boxed{\eta_+^{(TM)} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\mu}{\epsilon_0 \epsilon}}$

$\leftarrow \vec{H}_\perp = \frac{1}{\eta_+} [\vec{z}_0, \vec{E}_\perp] = \frac{1}{\eta_+} [\vec{z}_0, E_x \vec{x}_0] = \frac{1}{\eta_+} [E_x \vec{x}_0, \vec{z}_0] = \frac{E_x}{\eta_+} \vec{y}_0 \Rightarrow \eta_+ = \frac{E_x}{H_y}$

— разные для разных поляризаций.

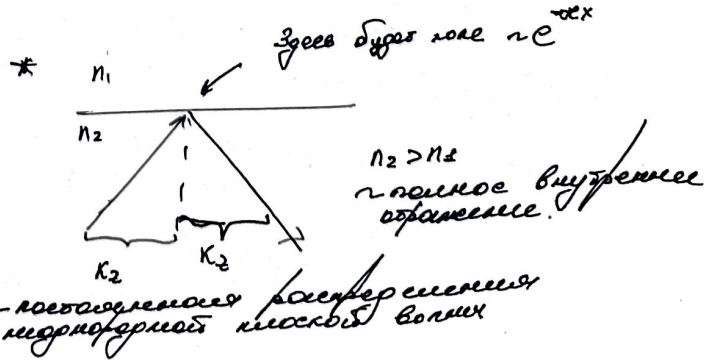
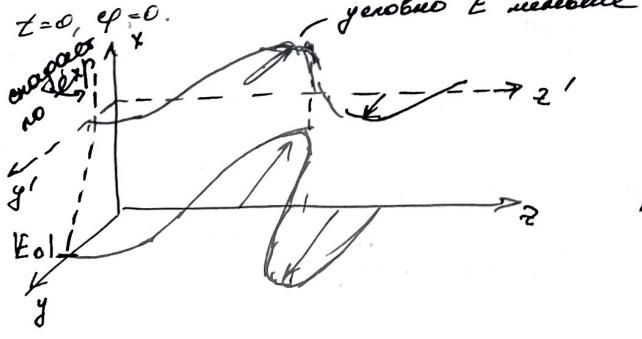
Судя делится энергия? Судя все $\vec{E}$ и $\vec{H}$ —

ТЕ: $\left\{ \vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [E_y \vec{y}_0, H_x^* \vec{x}_0] = \left\{ \text{Re} (E_y H_x^*) \right\} \vec{z}_0 \sim \right.$ фазовая комп. не даёт вклада
 $= \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\eta_+^{(TE)}} |E_y|^2 \vec{z}_0 = \frac{c}{8\pi} \eta_+^{(TE)} |H_x|^2 \vec{z}_0$ т.е. $H_z \sim$ емкостью i вклад не даёт.

ТМ: $\left\{ \vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [E_x \vec{x}_0, H_y \vec{y}_0] = \frac{c}{8\pi} E_x H_y \vec{z}_0 = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\eta_+^{(TM)}} |E_x|^2 \vec{z}_0 = \frac{c}{8\pi} \eta_+^{(TM)} |H_y|^2 \vec{z}_0 \right\}$

Построим график для ТЕ:

$E_y(\vec{r}, t) = |E_0| e^{-\epsilon x} \cos(\omega t - k z + \varphi)$



В плоские волны в однородной изотропной среде. Выразим для комплексного волнового числа k и k' соотношения.

т.е. говорим, что в среде нет потерь. Учесть их можно вводя комплексные величины:

Для фазовой скорости v и фазового действительного μ . тогда дисперсионное ур-е:

$$(\vec{k}, \vec{k}) = \omega^2 \epsilon \mu \rightarrow \vec{k} = \vec{k}' - i\vec{k}''$$

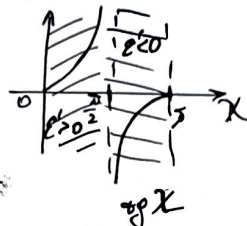
Здесь можно найти решение, если рассмотрим только случай $\vec{k}' \parallel \vec{k}''$

$$\rightarrow k'^2 - k''^2 - 2ik'k'' = \omega^2 (\epsilon' - i\epsilon'') \mu$$

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \omega^2 \epsilon' \mu \\ 2k'k'' = \omega^2 \epsilon'' \mu \end{cases} \sim \text{нужно найти решение уравнения.}$$

Введём полезное обозначение - угол потерь χ , введётся $\tan \chi = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$

$$\text{вспомогательный } \epsilon'' = \frac{4\pi\gamma}{\omega} \rightarrow \tan \chi = \frac{4\pi\gamma}{\omega \epsilon'}$$



$$\epsilon = \epsilon' - i\epsilon'' = |\epsilon| e^{-i \arctan \frac{\epsilon''}{\epsilon'}} = |\epsilon| e^{-i\chi}$$

$$\Rightarrow \epsilon' = |\epsilon| \cos \chi \sim \text{увеличим искомые уравнения}$$

$$\begin{cases} 2k'k'' = \omega^2 \epsilon' \mu \tan \chi \\ k'^2 - k''^2 = \omega^2 \epsilon' \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2k'k'' = \omega^2 \epsilon' \mu \tan \chi \\ k'^2 - k''^2 = \omega^2 \epsilon' \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2k'k'' = \omega^2 \epsilon' \mu \tan \chi \\ k'^2 - k''^2 = \omega^2 \epsilon' \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2k'k'' = \omega^2 \epsilon' \mu \tan \chi \\ k'^2 - k''^2 = \omega^2 \epsilon' \mu \end{cases}$$

$$\text{т.к. } \vec{k}' \parallel \vec{k}'' \parallel \vec{z}_0 \Rightarrow e^{-i\vec{k}'\vec{r}} = e^{-i(\vec{k}' - i\vec{k}'')\vec{r}} = e^{-i\vec{k}'\vec{r}} e^{-\vec{k}''\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}''\vec{r}} e^{-i\vec{k}'\vec{r}} \quad \text{или} \quad \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_k}} [\vec{H}, \vec{z}_0] \sim \text{здесь из-за наличия потерь в среде при распространении волны возникает дрейф плоскости поля} \vec{E} \text{ и } \vec{H}.$$

$\Rightarrow$ Решая систему получим:

$$\begin{cases} 2k'k'' = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \mu \tan \chi \\ k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \mu \end{cases} \rightarrow \text{найдем для } k'' \text{ (для } k' \text{ аналогично) } \rightarrow \begin{cases} 2k'k'' = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \mu \tan \chi \\ k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \mu \end{cases}$$

Получим:

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \mu \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \chi} + \frac{1}{2} \right]$$

$$k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \mu \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \chi} - \frac{1}{2} \right]$$

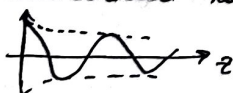
$$\tan \chi = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$$

Частные случаи:

1) $\epsilon'' > 0$, в случае малых потерь, т.е. $\tan^2 \chi = \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2 \ll 1 \sim$ разложением в ряд.

$$\sqrt{1 + \tan^2 \chi} \approx 1 + \frac{1}{2} \tan^2 \chi \Rightarrow k' \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu}; \quad k'' \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu} \left[\frac{1}{2} + \frac{\tan^2 \chi}{4} - \frac{1}{2} \right] \approx k' \frac{\tan \chi}{2} \approx \frac{k' \epsilon''}{2\epsilon'} \Rightarrow k'' \ll k'$$

Мгновенная плотность поля: $\sim e^{-\vec{k}''\vec{r}} e^{-i\vec{k}'\vec{r}}$



слабое затухание.

2) в случае сильных потерь, т.е. $\tan^2 \chi = \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2 \gg 1$.

$$\Rightarrow k' \approx k'' \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu} \cdot \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \chi}{2}} = \frac{\sqrt{4\pi\gamma \mu \omega}}{c} = \delta$$

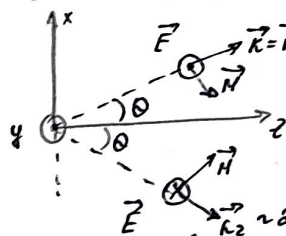
$$\text{представим } \tan \chi = \frac{4\pi\gamma}{\omega \epsilon'}$$

$$\text{Если учесть, что } k' \approx k'' \Rightarrow k = k' - ik'' \approx \frac{1-i}{\delta} = \tilde{k}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = \vec{E}_0 e^{-\frac{\tilde{k}}{\delta} \vec{r}} \sim \text{выражение аналогичное экв.-эффекту.}$$

14. Нескоррелированная плоская волна как суперпозиция двух коррелированных плоских волн.
 Полюризационный поля, амплитуда волны, фазовая скорость, корреляционный характеристический
 цилиндр, плоскость логарифма.

10



1 волна рассматриваем две волны.

$$k_{1z} = k_{2z} = k \cos \theta$$

$$k_{1x} = -k_{2x} = k \sin \theta$$

→ преобразуем фазу

$$k_{1z} = k_z$$

$$k_{1x} = k_x$$

Суммируем поля:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-ik_x x - ik_z z} - \vec{E}_0 e^{ik_x x - ik_z z} = \vec{E}_0 (-2i \sin(k_x x)) e^{-ik_z z}$$

$$E_{0z} = |E_{0z}| e^{i\varphi}$$

Тогда поверхность постоянной фазы:

$$\frac{1}{\omega} \rightarrow \omega t - k_z z + \varphi = \text{const} \rightarrow z = \text{const}$$

$$\omega - k_z \cdot \dot{z} = 0 \rightarrow \dot{z} = v_p = \frac{\omega}{k_z}$$

Поверхности постоянной амплитуды:

$$k_x x = \text{const} \rightarrow \text{не выполняется с пов. по постоянной фазы, т.е. получили}$$

х-const некоррелированную волну.

Преобразуем: $\vec{E} = E_y \vec{y}_0$, тогда $E_y = 0$, когда $\sin(k_x x) = 0$

Какая поляризация?

$$\text{т.е. } \text{rot } \vec{E} = -ik_0 \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{i}{k_0 \mu} \left| \begin{matrix} \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \partial_x & \partial_z \end{matrix} \right| \vec{E} \rightarrow \text{рассматриваем}$$

$$\vec{H} = \vec{y}_0 \cdot (-\partial_z E_y) + \vec{z}_0 \cdot \partial_x E_y = -\frac{k_z}{k_0 \mu} E_{0z} \sin(k_x x) e^{-ik_z z} + \frac{i k_x}{k_0 \mu} E_{0z} \cos(k_x x) e^{-ik_z z} \cdot \vec{z}_0$$

$$\Rightarrow H_x = -\frac{k_z}{k_0 \mu} E_{0z} \sin(k_x x) e^{-ik_z z} = -\frac{\cos \theta}{\eta} E_{0z} \sin(k_x x) e^{-ik_z z}$$

$$H_z = i \frac{k_x}{k_0 \mu} E_{0z} \cos(k_x x) e^{-ik_z z} = i \frac{\sin \theta}{\eta} E_{0z} \cos(k_x x) e^{-ik_z z}$$

учитывая, что $k_z = k \cos \theta$, $k = \frac{\omega}{v} \sqrt{\epsilon \mu}$, $k_x = k \sin \theta$, $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ получим.

т.е. фаза зависит по оси z → скажем, что по этому направлению бежит волна.

$\Rightarrow \vec{E} \uparrow \vec{y}_0$; а H имеет компоненты H_x и $H_z \rightarrow \vec{E}$ - поляризация.

Что с фазой величин?

$$\frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} > \frac{\omega}{k} = v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$v_p > v$ такую волну называют эвanesцентной.

Длина волны:

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} > \frac{2\pi}{k} = \lambda - \text{длин. волн.}$$

По характеристическому цилиндру

$$\begin{cases} \vec{E}_+ = \eta_+ [\vec{H}_-, \vec{z}_0] \\ \vec{H}_+ = \frac{1}{\eta_+} [\vec{z}_0, \vec{E}_+] \end{cases}$$

если делаем для бегущей волны η+ определяется коэффициентом соотношения полей.

TE - поляризация:

$$\eta_+^{(TE)} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k_0 \mu}{k_z} = \frac{k_0 \mu}{h}$$

принято в ДА $k_z = h$ и называют постоянной распространения.

аналогично для TM - поляризации

$$\eta_+^{(TM)} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{k_0 \epsilon}{k_z} = \frac{k_0 \epsilon}{h}$$

Какая бегущая энергия в такой волне? Бегущая энергия волн и фаза

$$S = \frac{1}{8\pi} \text{Re}[\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{1}{8\pi} \text{Re}[E_y \vec{y}_0, H_x \vec{x}_0] = \frac{1}{8\pi} \frac{k_z}{k_0 \mu} |E_{0z}|^2 \sin^2(k_x x) \vec{z}_0$$

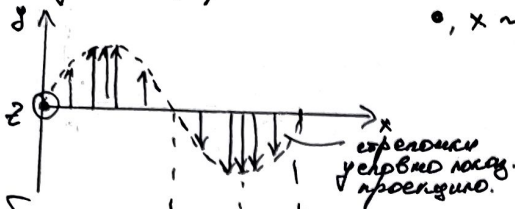
$$|E_{0z}|^2 = E_{0z} \cdot E_{0z}^*$$

15. Кристаллизация поля в волноводе из однородных плоских волн (на примере волны типа TE плоскостного волновода).

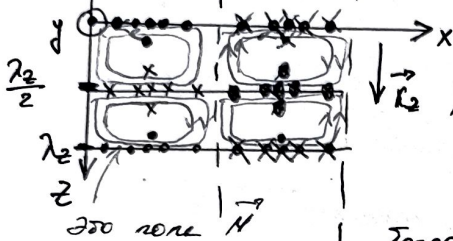
Рассмотрим неоднородную плоскую волну, обр. как суперпозиция двух однородных волн:

$$E_y(x, z) = |E_{02}| \sin(k_x x) \cos(\omega t - h z + \varphi)$$

построим для $t=0, \varphi=0$



Вид сверху:



это поле H

Тогда получим:

$x \sim$ синусоидально показывается направление поля E .

из $E_z = \eta_2 [H_1, z_0] \Rightarrow$ где $E_{1max} \rightarrow$ там и

H_1 max, если $E_z = 0 \rightarrow$ появляется H_z - продольная компонента.

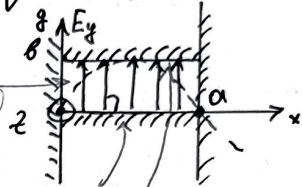
Можно увидеть, что если пов-ти, где $E_z = 0$, можно заметить где $E_y = 0 \rightarrow$ продольная.

$$k_x x = \pi m \rightarrow E_y = 0$$

между плоскостями можно наблюдать синусоид?

$$k_x a = \pi m, m = 1, 2, \dots$$

$$k_x = \frac{\pi m}{a}$$



Здесь E_z тоже равно 0, но $E_x \neq 0$ (вытесняется в стены по формуле.)

возникает бесконечная структура, когда замещаются поверхности.

Это и есть плоскостной волновод. При решении ур-ий Максвелла с такими граничными условиями получим решение с собственными значениями.

Концепция брэгговского в том, что волноводные волны (собственные моды волновода) можно считать из плоских волн.

Из $k_x = \frac{\pi m}{a}$, в зависимости от m получим дискретный коэф. k_x . Является обозначают

$$k_x = k_c = \frac{\pi m}{a} \Rightarrow h = k_z = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{\frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} - k_c^2}$$

$\sim$ т.е. для каждого m - своё значение h .

1) При критической частоте $h=0$:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - k_c^2 = 0 \Rightarrow \omega_{кр} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} k_c \sim \text{для каждой собственной моды, своё значение критической частоты.}$$

Если $\omega > \omega_{кр} \rightarrow h = \text{реальное} \rightarrow$ волна распространяющаяся по волноводу

Если $\omega < \omega_{кр}$, $\Rightarrow h = i|\gamma| \Rightarrow h = \pm i|\gamma|$ - знак выбирается, чтобы поле экспоненциально затухало. $\Rightarrow$ это уже не распространяющаяся волна. (она не подпадает по волноводу.)

2) Вводится критическая длина волны:

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{k_c} \mid \omega = \omega_{кр}$$

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{k_c} \mid \omega = \omega_{кр} = \frac{2\pi \cdot c}{\omega_{кр} \sqrt{\epsilon \mu}} \mid \omega = \omega_{кр} = \frac{2\pi \cdot c}{\frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} k_c \sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2a}{m} \leftarrow \text{Если } m=1 \rightarrow \text{указывается половина длины волны.}$$

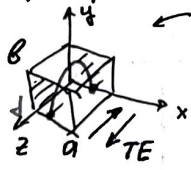
Если $\omega > \omega_{кр}$; $\lambda < \lambda_{кр}$ $\rightarrow$ волна "пропускается" в волновод и распространяется.

Если $\omega < \omega_{кр}$; $\lambda > \lambda_{кр}$ $\rightarrow$ волна не "входит" и получается распространяющаяся волна.

Если в волноводе пройти две волны друг-другу безупречно волны $\rightarrow$ возникают стоячие волны.

В общем случае интерференция волноводных распространяющихся, с некоторой концепцией брэгговского - довольно сложная. Далее будет решено задание о волноводных модах для кристаллов.

Пример: прямоугольный резонатор



Если замкстеллизовать в узлах поверхности, то получим замкнутые линии, т.е. должно выполняться:

$$\lambda_z = \lambda b$$

$$\lambda = \frac{\lambda_z}{b} = \frac{2\pi}{k} \quad \text{и помещается целое число полу волн.}$$

$$\text{Учитывая, что } \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{k} \Rightarrow k = \frac{\pi}{\lambda}$$

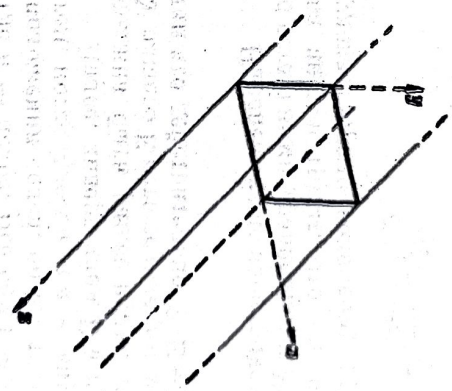
по т. Пифагора: $k^2 = k_x^2 + k_z^2 = \pi^2/a^2 + \pi^2/b^2$ — прямоугольный резонатор.

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{b}\right)^2 \sim \text{возможно только на таких частотах.}$$

и.б. $\epsilon(\omega), \mu(\omega)$

Если в среде нет дисперсии: $\omega_{moe} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{b}\right)^2}$ — собственные частоты.

* Далее идёт выписка из фреймворковых лекций про прямоугольные волноводы.



Фиг. 24.3. Выбор осей координат для прямоугольного волновода.

Начнем с прямоугольной трубы, ее проще всего анализировать. Сперва изложим все математически, а потом еще раз вернемся назад и рассмотрим вопрос более элементарно. Но этот более элементарный подход легко применить лишь к прямоугольным трубам. Основное же явление в любой трубе одно и то же, так что математически доводи звучит более основательно.

Поставим перед собой следующий вопрос: какого типа волны могут существовать в прямоугольной трубе? Выберем сначала удобные оси координат: ось z направим вдоль трубы, а оси x и y — вдоль стенок (фиг. 24.3).

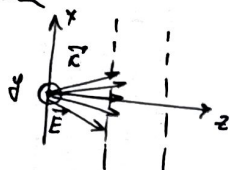
Известно, что когда волны света бегут по трубе, их электрическое поле поперечно; поэтому начнем с поиска таких решений, в которых E перпендикулярно z , скажем решим с одной только y -компонентой E_y (фиг. 24.4,а). Это электрическое поле

должно как-то меняться поперек волновода; действительно, ведь оно должно обратиться в нуль на сторонах, параллельных оси y : токи и заряды в проводнике устроятся всегда так, чтобы на его поверхности не осталось никаких электрических составляющих электрического поля. Значит, график E_y от x должен напоминать некоторую дугу (фиг. 24.4,б). Может быть, это найдется нами для плотности функции Бесселя? Нет, функции Бессели появляются только в задачах с цилиндрической симметрией. При прямоугольных сечениях волноводов — это обычные гармонические функции, что-нибудь вроде $\sin k_x x$.

Раз мы ищем волны, которые бегут вдоль трубы, то следует ожидать, что поле как функция z будет колебаться между положительными и отрицательными значениями (фиг. 24.5) и что

16. Представим поле ЭМ волнового пучка в виде суперпозиции однородных плоских волн (параксиальных волн). Зона геометрической оптики. Зона Френеля и дифракционная зона.

Ранее считали всего 2 волны, пусть теперь у нас конструкция $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ - в двумерном пучке, т.е.



$k^2 = k_x^2 + k_z^2 \Rightarrow \vec{E}(x, z) = E(x, z) \vec{y}_0$ - у нас поле в пучке направлено по оси y.

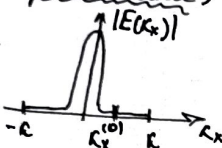
Запишем в виде суперпозиции:

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x) e^{-ik_x x - i\sqrt{k^2 - k_x^2} z} dk_x$$

Если $z=0$: $E(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x) e^{-ik_x x} dk_x$ - пространственный спектр пучка.

т.е. возмем второе сечение и разложим по пространственному спектру - найдем $E(k_x)$ и сделаем подстановку в интеграл.

В общем случае спектры $E(k_x)$ и $E(x, 0)$ связаны лишь тем, что $E(k_x)$ - параксиальное приближение.



если $k_x^{(0)} \ll k$ - т.е. имеем узкий пространственный спектр, как для пучка, что все k почти параллельны Oz.

Из теории интегралов Фурье (функция неопределенности):

$$k_x^{(0)} \sim \frac{\Delta x}{\lambda} \sim \frac{\Delta x}{\lambda_+} \text{ - для трехмерного пучка.}$$

тогда должно выполняться: $\frac{\Delta x}{\lambda_+} \ll \frac{\Delta x}{\lambda}$, т.е. $\lambda_+ \gg \lambda$

Для трехмерного пучка:

$$\Rightarrow E(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} E(k_x, k_y) e^{-ik_x x - ik_y y - i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z} dk_x dk_y dk_z$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

Обозначим $k_x x + k_y y = k_{\perp} r_{\perp}$

Условие параксиального приближения можно обобщить и для трехмерного случая:

$$\sqrt{k^2 - k_x^2} = k \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2}} \approx k \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{1}{8} \frac{k_x^4}{k^4} + \dots \right)$$

для паракс. прилн.

разложим $\sqrt{k^2 - k_x^2} = k \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2}} \approx k \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{1}{8} \frac{k_x^4}{k^4} + \dots \right)$

$$\Rightarrow E(x, z) = e^{-ikz} \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x) e^{-ik_x x + i \left(\frac{k_x^2}{2k} + \frac{k_x^4}{8k^3} + \dots \right) z} dk_x$$

плоская волна по z

У нас уже пространственный спектр, тем пучок параксиальный. Если будет в спектре фрезо пучка - отличный случай плоской волны по z.

$E^{(0)}(x, z) \sim$ медленно меняющаяся амплитуда (на хар-ном масштабе)

! $E(x, 0) = E^{(0)}(x, 0) \sim$ т.к. обусловлено, что поле направлено по $\vec{y}_0$ (параксиальное приближение)

$$\Rightarrow \vec{E}^{(0)}(x, z) = E^{(0)}(x, z) \vec{y}_0$$

Когда можно пренебречь величинами в скобке? (в exp.)

пусть $z > 0$: $\frac{k_x^2}{2k} \cdot z \ll \pi$, тогда $e^{(\dots)} \approx 1$.

Из теории Фурье и интегралов Фурье. λ_+ - "начальная" (при $z=0$) характеристическая ширина пучка:

$$k_x^{(0)} \sim \frac{\Delta x}{\lambda_+}$$

$$\frac{(\Delta x)^2}{2\lambda_+^2} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \cdot z \ll \pi, \text{ вводит } \boxed{\rho^2 = \frac{\lambda z}{\lambda_+^2}} \sim \rho \text{ - параметр Френеля}$$

$\Rightarrow \boxed{\rho^2 \ll 1}$ - чтобы пренебречь должно выполняться это условие.

т.е. $\sqrt{\lambda z} \ll \lambda_+$

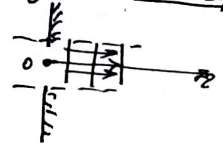
Тогда для этого приближения:

$$E^{(0)}(x, z) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x) e^{-ik_x x} dk_x = E(x, 0)$$

При выполнении $\rho^2 \ll 1$ получаем св-во: $E^{(0)}(x, z) \approx E(x, 0) \sim$ совпадает с полем пучка во вх-ом сечении.

$\boxed{\frac{k_x^2}{2k} z \ll \pi} \sim$ называется зоной геометр. оптики.

пучок распр - до неогранич



Зона Френеля и дифракционная зона.

Рассмотрим функцию $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ и потребуем только $\frac{\kappa_1^2}{8\kappa^2} z \ll \pi$ т.е. хотим применить только этот член.

$$\Rightarrow \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\kappa_1^2} \cdot \frac{1}{8} \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2} z \ll \pi \Rightarrow \frac{\lambda^2}{\kappa_1^2} \ll 4 \left(\frac{\kappa_1}{\lambda} \right)^2 \sim \text{условие дифракционной зоны.}$$

$r^2 \gg 1$ ~ из условия параллельности луча $\kappa_1 \gg \lambda$.

Данное неравенство завершено выполняется и при $r=1$. (зона Френеля.), т.е. в уел. диф-ой зоне входит и зона Френеля.

$1 \ll r^2 \ll 4 \left(\frac{\kappa_1}{\lambda} \right)^2$ ~ зона Фраунгофера, может тоже здесь выполняться.

В формуле они все дано дифракционной зоной.

* Замечание: другие авторы могут оценивать по формуле, например: $\kappa_1^{(0)} \sim \frac{1}{\kappa_1} \Rightarrow z \ll \kappa_1^2 \lambda^2 = \left(\frac{\kappa_1}{\lambda} \right)^2$ берет диф. радиусность луча $\gamma = \frac{r}{\kappa_1 \lambda} \sim \frac{\lambda}{\kappa_1} \ll 1$.

$\Rightarrow$ В дифракционной зоне:

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\kappa) e^{-i\kappa x + i \frac{\kappa^2}{2\kappa} z} d\kappa$$

как проводит расчеты этот величину? Разлагается в фазаневычтенный интеграл Фурье.

$$E(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\kappa) e^{-i\kappa x} d\kappa. \Rightarrow E(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(x', 0) e^{i\kappa x'} d\kappa' \sim \text{но вычислять довольно сложно.}$$

Проверяем, удовлетворяет ли функция уравнению:

$$(*) \quad D \cdot \frac{\partial^2 E^{(0)}(x, z)}{\partial x^2} = \frac{\partial E^{(0)}(x, z)}{\partial z}, \text{ где } D = -\frac{i}{2\kappa} = \frac{1}{2i\kappa}.$$

~ можно убедиться, что ф-е явно удовлетворяет этому соотношению.

(*) напомним ф-е диффузии. По сути это ф-е описывает дифракцию.

$$\frac{\partial^2 E^{(0)}(x, z)}{\partial x^2} = -\kappa^2 \cdot E^{(0)}(x, z), \quad \frac{\partial E^{(0)}(x, z)}{\partial z} = i \frac{\kappa^2}{2\kappa} E^{(0)}(x, z)$$

$$\rightarrow \text{проверяем: } -\frac{\kappa^2}{2\kappa} \cdot (-i) = i \frac{\kappa^2}{2\kappa} \sim \text{все верно.}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E^{(0)}(x, z)}{\partial x^2} = 2i\kappa \frac{\partial E^{(0)}(x, z)}{\partial z}$$



↑
поискерит фронтальные экраны в дифракционной зоне (зону параллельной дифракции) ~ т.е. экран дифрагирует.

Если учитывать зависимость не только от x , но и от y :

$$E_i^{(0)}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_i(\kappa, \kappa_y) e^{-i\kappa_1 x + i \frac{\kappa_1^2}{2\kappa} z} d\kappa_1 d\kappa_y$$

Если повторить все выкладки можно получить:

$$\Delta_z E^{(0)}(x, y, z) = 2i\kappa \frac{\partial E^{(0)}(x, y, z)}{\partial z} \leftarrow \text{выбор для экранирования.}$$

Из известности нашей функции можно получить общее решение этого диф-ого уравнения:

$$E^{(0)}(x, 0) \rightarrow E^{(0)}(x, z) \Rightarrow E^{(0)}(x, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D \cdot z}} \int_{-\infty}^{\infty} E^{(0)}(x', 0) e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dz}} dx'$$

разделив соэф-т $D = -\frac{i}{2\kappa} = \frac{1}{2i\kappa}$ получим:

$$E^{(0)}(x, z) = \sqrt{\frac{\kappa}{i2\pi z}} \int_{-\infty}^{\infty} E^{(0)}(x', 0) e^{-\frac{i\kappa(x-x')^2}{2z}} dx' \sim \text{поддается его фазе решать.}$$

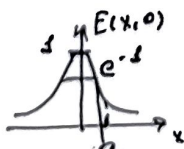
$E(x', 0) \leftarrow$ т.к. мы знаем, что поле и амплитуда ф-а совпадают.

* Пример с гауссовым пучком

$$\text{пусть } E(x, 0) = e^{-\frac{x^2}{4a_0^2}}$$

$$E(x', 0) = E^{(0)}(x', 0) = e^{-\frac{x'^2}{4a_0^2}}$$

$$\text{представим: } E^{(0)}(x, z) = \sqrt{\frac{\kappa}{i2\pi z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{4a_0^2} - \frac{i\kappa(x-x')^2}{2z}} dx'$$



$$\text{воспользуемся табличным интегралом: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{i\lambda}}, \quad \text{Im } \lambda \leq 0$$

с заменой переменной $x'^2 \rightarrow (x'-x)^2$ знаменатель интеграла не уменьшается

Основным выкладкам нужно следовать внимательно:

$$\begin{aligned} \frac{x'^2}{4a_0^2} + \frac{i\kappa(x'^2 - 2xx' + x^2)}{2z} &= \frac{x'^2}{4a_0^2} + \frac{i\kappa x'^2}{2z} - \frac{i\kappa xx'}{z} + \frac{i\kappa x^2}{2z} = \frac{i\kappa}{2z} \left(\frac{2z x'^2}{4a_0^2 i\kappa} + x'^2 - 2xx' + x^2 \right) = \\ &= \frac{i\kappa}{2z} \cdot \left(x'^2 \left(1 + \frac{z}{2a_0^2 i\kappa} \right) - 2xx' + x^2 \right) = \frac{i\kappa}{2z} \left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right) \left(x'^2 - \frac{2xx'}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}} + \frac{x^2}{\left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right)} \right) = \\ &= \frac{i\kappa}{2z} \left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right) \left(x' - \frac{x}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}} \right)^2 + A \end{aligned}$$

$\underline{=}$ — ищем добавку.

$$\frac{i\kappa}{2z} \left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right) \left(x'^2 - \frac{2xx'}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}} + \frac{x^2}{\left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right)} \right) - \frac{i\kappa}{2z} \left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right) \left(x'^2 - \frac{2xx'}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}} + \frac{x^2}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}} \right) = A$$

$$A = \frac{i\kappa}{2z} \left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right) \left(x'^2 - \frac{2xx'}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}} + \frac{x^2}{\left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right)} - x'^2 + \frac{2xx'}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}} - \frac{x^2}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}} \right)$$

$$A = \frac{i\kappa}{2z} \cdot \left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right) \cdot \frac{x^2}{\left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right)^2} - \frac{x^2 \left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right)}{\left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right)^2} = \frac{i\kappa}{2z} \cdot \frac{x^2 \cdot \frac{z}{2i\kappa a_0^2}}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}} = \frac{\frac{x^2}{4a_0^2}}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}}$$

и как в лакум.

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{4a_0^2} + \frac{i\kappa(x'^2 - 2xx' + x^2)}{2z} = i\frac{\kappa}{2z} \left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right) \left(x' - \frac{x}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}} \right)^2 + \frac{\frac{x^2}{4a_0^2}}{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}}$$

$$\Rightarrow E^{(0)}(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2}}} e^{-\frac{x^2}{4a_0^2 \left(1 + \frac{z}{2i\kappa a_0^2} \right)}} \text{ — снова гауссов импульс, но с фазовой добавкой.}$$

Если взять модуль:

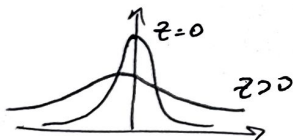
$$|E^{(0)}(x, z)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{2\kappa a_0^2} \right)^2}} e^{-\frac{x^2}{4a_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{2\kappa a_0^2} \right)^2 \right]}} = e^{-\frac{x^2}{4\tilde{L}^2(z)}}$$

$$\text{где } \tilde{L}^2(z) = 4a_0^2 + \frac{z^2}{(\kappa a_0)^2}$$

$$\text{если ввести } \tilde{z} = \frac{1}{\kappa a_0}$$

$$\Rightarrow \tilde{L}^2(z) = 4a_0^2 + \tilde{z}^2 z^2$$

— пучок диффундирует в продольном направлении.



Если знаем вид ожидаемой функции $E^{(0)}$.
 12. Уравнение поперечной диффузии (параболическое уравнение) для амплитуды волнового пакета и его решение.

Исходное волновое уравнение было гиперболического типа. В нашем случае поле описывается уравнением параболического типа. Выясним, при каких условиях это возможно.

Для i -й компоненты поля:

$$(*) \quad \begin{cases} \Delta E_i + k^2 E_i = 0 \\ \text{div } \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \text{Учтем, что } \Delta = \nabla^2$$

$$E_i = E_i^{(0)}(\vec{r}) e^{-ikz}$$

предположим малую амплитуду.

$$\nabla E_i = \nabla (E_i^{(0)}(\vec{r}) e^{-ikz}) = (\nabla E_i^{(0)}) e^{-ikz} - ik E_i^{(0)} e^{-ikz}$$

$$\text{div}(\nabla E_i) = (\Delta E_i^{(0)}) e^{-ikz} + (-ik, \nabla E_i^{(0)}) e^{-ikz} + (\nabla(E_i^{(0)} e^{-ikz}), -ik) = (\Delta E_i^{(0)}) e^{-ikz} + (-ik) E_i^{(0)} e^{-ikz}$$

Если представим в (*) элементы сократятся:

$$\Delta E_i^{(0)} - (2ik, \nabla E_i^{(0)}) + (-k^2) E_i^{(0)} + k^2 E_i^{(0)} = 0 \Rightarrow \Delta E_i^{(0)} = 2i(k, \nabla E_i^{(0)})$$

$$\Rightarrow \Delta E_i^{(0)} = 2i(k, \nabla) E_i^{(0)} \quad (1)$$

Аналогично предельно для $\text{div } \vec{E} = 0$. ($\vec{E} = \vec{E}^{(0)} e^{-ikz}$)

$$\text{div}(\vec{E}^{(0)} e^{-ikz}) = e^{-ikz} \text{div} \vec{E}^{(0)} + (-ik, \vec{E}^{(0)}) e^{-ikz} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{E}^{(0)} = i(k, \vec{E}^{(0)}) \quad (2)$$

Выберем для конкретности $\vec{k} = k\vec{z}_0$, тогда преобразим уравнения (1), (2):

$$(1) \Rightarrow \Delta_{\perp} E^{(0)} + \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial z^2} = 2ik \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z} \rightarrow \text{перейдет в параболическое, если выкинуть } \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

поперечная ось

$$(2) \Rightarrow \text{div}_{\perp} \vec{E}^{(0)} + \frac{\partial E_2^{(0)}}{\partial z} = ik E_2^{(0)}$$

Пусть выполняются условия $k \left| \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial z^2} \right|$, введя характерный масштаб $\rho_{\perp}$, $\rho_{\parallel}$, тогда производные $\vec{E}^{(0)}$ в поперечном и продольном направлениях: $\rho_{\perp}, \rho_{\parallel}$, тогда производные заменяются:

$$\Rightarrow k \frac{|\vec{E}^{(0)}|}{\rho_{\parallel}} \gg \frac{|\vec{E}^{(0)}|}{\rho_{\parallel}^2} \Rightarrow k \rho_{\parallel} \gg 1 \sim \text{пока просто математически так написать.}$$

тогда получим:

$$\Delta_{\perp} E^{(0)} = 2ik \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z} \sim \text{параболическое уравнение } \vec{E}^{(0)}(x, y, z)$$

Смотрим (2), там требуем $\left| \frac{\partial E_2^{(0)}}{\partial z} \right| \ll k |E_2^{(0)}| \Rightarrow \frac{|E_2^{(0)}|}{\rho_{\parallel}} \ll k |E_2^{(0)}| \Rightarrow k \rho_{\parallel} \gg 1$

тогда и (2) тоже можно преобразовать:

$$\begin{cases} \text{div}_{\perp} \vec{E}^{(0)} = ik E_2^{(0)} \\ \Delta_{\perp} E^{(0)} = 2ik \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \text{Мы уже имели ранее первое уравнение. Выкинем } \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z}, \text{ которые преобразуются, соответствует продольной диффузии.}$$

$$\Delta_{\perp} E^{(0)} = 2ik \frac{\partial E^{(0)}}{\partial z} \rightarrow \frac{|\vec{E}^{(0)}|}{\rho_{\perp}^2} \sim k \frac{|\vec{E}^{(0)}|}{\rho_{\parallel}} \Rightarrow k \rho_{\parallel} \sim (k \rho_{\perp})^2$$

Если мы говорим, что лучок параксимальный знаем:

$$\rho_{\perp} \gg \lambda \Leftrightarrow k \rho_{\perp} \gg 1 \Rightarrow k \rho_{\parallel} \gg 1$$

$\Rightarrow$ в приближении параксимального луча можно получить параболическое уравнение.

Оценивая слова левую часть (2):

$$\frac{|\vec{E}_{\perp}^{(0)}|}{\rho_{\perp}} \sim k |E_2^{(0)}| \Rightarrow |E_2^{(0)}| \sim \frac{|\vec{E}_{\perp}^{(0)}|}{k \rho_{\perp}} \rightarrow \text{покажем, что для параксимального луча } |E_2^{(0)}| \ll |\vec{E}_{\perp}^{(0)}|$$

$$E_2^{(0)} = \frac{1}{ik} \text{div}_{\perp} \vec{E}^{(0)}$$

По аналогии с двумерным случаем можно написать решение (1) ур-я:

$$\vec{E}^{(0)}(\vec{r}) = \left(\frac{k}{\sqrt{2\pi z}} \right)^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^{(0)}(x', y', 0) \cdot e^{-\frac{ik(x-x')^2}{2z} - \frac{ik(y-y')^2}{2z}} \frac{dx' dy'}{\sqrt{z}}$$

перепишем в компактном виде:

$$\left\{ \vec{E}^{(0)}(\vec{r}) = \frac{ik}{2\pi z} \int_{S_1} \vec{E}^{(0)}(\vec{r}_1) e^{-\frac{ik(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2}{2z}} d\vec{r}_1 \right\}$$

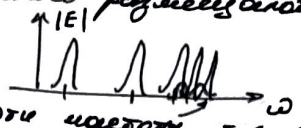
$$\vec{E}(x', y', 0) \equiv \vec{E}(\vec{r}_1)$$

* В основной теории в силу того, что λ мало в открытом диапазоне, выполняются условия параллельных лучей.

Сравнение "для других волн их называют координатными (квазиотомка)".



Это используется в открытых резонаторах: у камерного резонатора есть собственные частоты, которые постепенно размещаются всё ближе друг к другу в спектре.



нужно убрать эти частоты, т.к. они наиболее перекрывают друг друга. Нужно увеличивать потери, чтобы не было резонансов и наклеев. (прозрачные слои).

Вари этого достигается с закрытых систем, к открытым направляются с боков, чтобы не уходила энергия.



Например: в зак. резонаторах;

полн $Q \approx 500 \div 1000$
 в открытых:
 $Q \approx 5000$

Если дана волна с заданной амплитудой $E(t)$ и частотой ω , то в изотропной среде с временной дисперсией $\epsilon(\omega)$ и пространственной дисперсией $\epsilon(\vec{k})$ поле E и векторное поле D связаны:

Если в среде нет пространственной дисперсии связи:

$$\{D_i(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_j(t-t') E_j(t, \vec{r}) dt'\}$$

В изотропной среде: $\tilde{E}_j(t-t') = \tilde{E}(t-t') \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \vec{D}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(t-t') \vec{E}(t, \vec{r}) dt'$$

Введем новые переменные: $\tau = t - t'$; $d\tau = -dt'$ $\Rightarrow \vec{D}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau$

Удобно описывать поля разложением в интеграл Фурье:

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad \vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right\} d\tau = \{ \text{математический порядок интегрирования} \} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \{ \text{представим как} \} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{D}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

тогда $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) \tilde{E}(\omega) \leftarrow \text{спектр } \tilde{D}(\omega)$

если $\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \sim \text{одностороннее преобразование Фурье}$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \tilde{E}(\omega)}$$

Итак, для гармонических процессов комплексная амплитуда $\tilde{D}(\omega)$ и $\tilde{E}(\omega)$ связаны соотношением $\tilde{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \tilde{E}(\omega)$, где $\epsilon(\omega)$ — функция частоты.

Среды, для которых $\epsilon = \epsilon(\omega)$ называются средами с временной дисперсией.

Все аналогично рассуждения для μ и γ .

Замечание: если бы ϵ не было пространственной дисперсией, то док-но пришлось бы разлагать по пространственному преоб. Фурье: $\Rightarrow \tilde{D}(\omega, \vec{k}) = \epsilon(\omega, \vec{k}) \tilde{E}(\omega, \vec{k})$

Можно заметить, что получили комплексные величины:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega); \quad \mu(\omega) = \mu'(\omega) - i\mu''(\omega)$$

покажем преобразования:

$$n = \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)} = n'(\omega) - in''(\omega); \quad \Rightarrow k = k_0 n = k' - ik''$$

В реальных средах, т.е. n — комплексная величина, есть частота ω_0 , где максимальное поглощение, в остальных областях можно считать без потерь.

Вне ω_0 можно различать средами прозрачными, где $n'' < 0 \rightarrow$ волна не может распространяться (область непрозрачности), где $n'' > 0 \rightarrow$ области прозрачности. Существуют функции $n'(\omega) \leftrightarrow n''(\omega) \sim \text{соотношения Крамерса} \dots$

т.е. если есть дисперсия $\rightarrow$ есть потери (и наоборот).

Почему проводимость среды учтена в величине ϵ_k , не является выделенной ток проводимости в $j_{\text{микро}}$.

$$\text{введем: } \vec{j}_{\text{микро}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \text{ — сложить}$$

т.е. теперь мы перенесли μ и γ в формулу ускоренно:

$$\vec{j}_{\text{микро}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{сложим}, \text{ где } \vec{P} = \vec{E} + \chi \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

не будет явно фигурировать проводимость, занесем в $\vec{P}$.

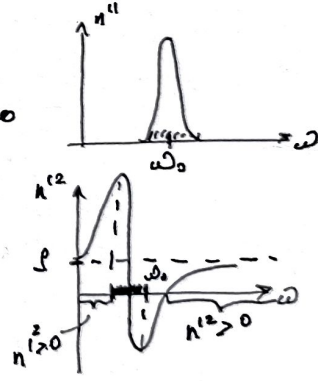
Маленькое Диагональное поле:

Запишем теорему Глоуба (для сферических источников)

$$\text{div } \vec{J}(t) = -\frac{1}{4\pi} \left(\vec{E}(t) \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial t} + \vec{H}(t) \frac{\partial \mu(t)}{\partial t} \right), \quad \vec{j}_{\text{микро}} = 0, \text{ занесем в } \vec{P}$$

$$\text{где } \vec{J}(t) = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}(t), \vec{H}(t)]$$

$$\text{Можно привести к виду: } \text{div } \vec{J} = -q - \frac{\partial \omega}{\partial t}$$



а) Для монохроматических процессов ($e^{i\omega t}$) значения энергии не зависят $\Rightarrow \vec{W} = \text{const}(t)$

б) $q=0$ - если рассматривать частоту фотона от источника (в доп. фотонности)
 $\text{div } \vec{S} = -\frac{\partial W}{\partial t}$ Для монохром. полей q , френсф. потерями $\rightarrow W$ одновременно получить для макроскопических полей нельзя.

Получим q , перейдя к комплексной форме записи:

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*]$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{S} = -\frac{1}{8\pi} (\vec{E}(t) \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial t} + \vec{H}(t) \frac{\partial \mu(t)}{\partial t}) = -\frac{1}{8\pi} \cdot \frac{1}{2} \text{Re} (\vec{E}^* i\omega(\epsilon' - i\epsilon'') \vec{E} + \vec{H}^* i\omega(\mu' - i\mu'') \vec{H})$$

$$= -\frac{\omega}{8\pi} (\epsilon'' |\vec{E}|^2 + \mu'' |\vec{H}|^2)$$

$$\Rightarrow \left\{ \vec{q} = \frac{\omega}{8\pi} (\epsilon'' |\vec{E}|^2 + \mu'' |\vec{H}|^2) \right\}, \epsilon'', \mu'' > 0$$

Например для проводящей среды: $\mu''=0$; $\epsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega} \Rightarrow \vec{q} = \frac{1}{2} \sigma |\vec{E}|^2$ - как раньше.

13. Квазимонохроматические процессы. Энергия поля в среде с дисперсией. Рассмотрим теперь область частот, где потери (в том приближении) можно пренебречь. В этой области можно говорить о "законсервированной" энергии. Мы вернём выражение для энергии в области прозрачности для квазимонохроматического сигнала.

Для такого сигнала:

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2} (\vec{E}_0(t) e^{i\omega t} + \vec{E}_0^*(t) e^{-i\omega t}) \ominus \text{Re} \{ \vec{E}_0(t) e^{i\omega t} \}$$

на масштабе $\delta = \frac{2\pi}{\omega}$ поле почти не меняется.

нерезко меняющаяся амплитуда, но теперь не монохромат.

$$\vec{H}(t) = \frac{1}{2} (\vec{H}_0(t) e^{i\omega t} + \text{к.с.}) = \text{Re} \{ \vec{H}_0(t) e^{i\omega t} \}$$

где ω - квазилокальная частота, т.е. само поле $\vec{E}_0$ отн. медл. частоты не мен.

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}_0(t), \vec{H}_0^*(t)]$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E}(t) \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial t} + \vec{H}(t) \frac{\partial \mu(t)}{\partial t})$$

рассмотрим только 1-е слагаемое: $\vec{D}_0(t) e^{i\omega t} \leftrightarrow \vec{E}_0(t) e^{i\omega t}$ - нужно найти связь.

$$\vec{D}_0(t) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\epsilon}(z) \vec{E}_0(t-z) e^{i\omega(t-z)} dz = \{ \text{рассматриваем по } z=0 \} \ominus$$



Нужно также, чтобы $|\vec{E}_0|$ изменялся нерезко на том масштабе, где резко меняется $\tilde{\epsilon}(z)$.

$$\ominus \int \tilde{\epsilon}(z) [\vec{E}_0(t) - z \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}] e^{-i\omega z} dz e^{i\omega t} = \int \tilde{\epsilon}(z) e^{-i\omega z} dz \cdot \vec{E}_0(t) e^{i\omega t} +$$

$$+ \int (-z) \tilde{\epsilon}(z) e^{-i\omega z} dz \cdot \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} e^{i\omega t} = [\epsilon(\omega) \vec{E}_0(t) - i \frac{\epsilon(\omega)}{\omega} \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}] e^{i\omega t}$$

$-i \frac{\epsilon(\omega)}{\omega}$

$\Rightarrow$ В случае квазимонохроматического процесса:

$$\vec{D}_0(t) = \epsilon(\omega) \vec{E}_0(t) - i \frac{\epsilon(\omega)}{\omega} \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}$$

Проверка: для чистого монохроматического процесса: $\vec{D}_0(t) = \epsilon(\omega) \vec{E}_0(t)$
 $\Rightarrow \frac{\partial \vec{D}_0(t)}{\partial t} = \epsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{D}_0(t) e^{i\omega t}) = i\omega \vec{D}_0(t) e^{i\omega t} + \frac{\partial \vec{D}_0(t)}{\partial t} e^{i\omega t} = \{ \text{все представляем} \} = i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_0(t) e^{i\omega t} + \frac{\epsilon(\omega)}{\omega} \frac{\partial^2 \vec{E}_0(t)}{\partial t^2} e^{i\omega t}$$

вторая производная отлагается в малой поправке.

Если знаем вид ожидаемой п.м. $\vec{E}_0(t)$
 Преобразуем к ур. (1) и (2):

$$\left[\frac{1}{4\pi} \vec{E}(t) \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\vec{E}_0(t) e^{i\omega t} + \vec{E}_0^*(t) e^{-i\omega t} \right) \left(i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_0(t) e^{i\omega t} + \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} e^{i\omega t} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (-i\omega) \epsilon(\omega) \vec{E}_0^*(t) e^{-i\omega t} + \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} \frac{\partial \vec{E}_0^*(t)}{\partial t} e^{-i\omega t} \right) \right) = \{ \text{давайте всё можно переписать} \}$$

из канон. представления.

Е считаем действ., тогда $\vec{E}_0 \rightarrow \vec{E}_0^*$ и $\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_0^*$ не надо.

$$= \frac{1}{16\pi} \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} \left(\vec{E}_0^*(t) \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} + \vec{E}_0(t) \frac{\partial \vec{E}_0^*(t)}{\partial t} \right) + \text{членов } (e^{2i\omega t}, e^{-2i\omega t})$$

$$= \frac{1}{16\pi} \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{E}_0(t)|^2$$

+ всё аналогично для магнитной части, тогда получим:

$$\left\{ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E}(t) \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} + \vec{B}(t) \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \right) \right\} = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{E}_0(t)|^2 + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{H}_0(t)|^2$$

интегрируя по времени:

$$\vec{W} = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} |\vec{E}_0(t)|^2 + \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} |\vec{H}_0(t)|^2 \right)$$

применяя:

а) в среде без дисперсии $\frac{\partial\epsilon}{\partial\omega} = 0$ и $\frac{\partial\mu}{\partial\omega} = 0$

$$\Rightarrow \vec{W} = \frac{1}{16\pi} \left(\epsilon |\vec{E}_0(t)|^2 + \mu |\vec{H}_0(t)|^2 \right)$$

б) среда ; $\mu=1$; $\epsilon=1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ — плазменная частота.

$$\vec{H}_0 = \vec{B}_0 ; \quad \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Rightarrow \vec{W} = \frac{1}{16\pi} \left(\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) |\vec{E}_0(t)|^2 + |\vec{B}_0(t)|^2 \right)$$

20. Распространение импульсного сигнала в среде с временной дисперсией.
 Групповая скорость.

21. Уравнение для ожидаемой импульса в среде с временной дисперсией. Распространение импульса при распространении волны, распространяющейся по z:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_0 e^{i\omega(t - \frac{z}{v_g})}$$

$$\text{Обозначения: } \frac{\omega}{v_g} = k ; \quad v_g = v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\epsilon(\omega), \mu(\omega) \rightarrow v_g(\omega)$$

Хорошо известно, что передача сигнала с монохроматической волной невозможна из-за её дисперсии в пр-ве. Поэтому сигнал всегда имеет некоторый спектр.

$$\Rightarrow \vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega(t - \frac{z}{v_g(\omega)})} d\omega ; \quad \vec{E}_{\text{физ}}(z,t) = \text{Re} \{ \vec{E}(z,t) \}$$

Пусть известна форма сигнала при $z=0$:

$$\vec{E}(0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \leftarrow \text{когда } v_g \text{ — const. будет распр. по всей фазовой скорости}$$

$$\text{Сл. } \frac{\partial v_g}{\partial\omega} = 0 \Rightarrow \vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega(t - \frac{z}{v_g})} d\omega \cdot \vec{E}(0, t - \frac{z}{v_g}) \Rightarrow$$

говорит об отсутствии временной дисперсии. Скоростельно сигнал будет распространяться как целое (без искажений), но с запаздыванием. Истинное решение для каждой частоты. Но есть частоты с фундаментальными анамнестическими решениями.

Волновой пакет в дисперсионной среде.

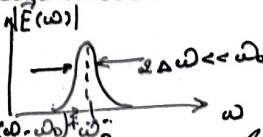
По определению волновой пакет — квазимонохроматический сигнал (т.е. сигнал с узким спектром).

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$$

Далее будем рассуждать вне области резонансов.

$$\Rightarrow k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)} = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_0 (\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

"0" = $\omega = \omega_0$ $k(\omega)$ на самом деле является быстро (резко) меняющейся функцией, поэтому и рассуждаем в области резонансов



a $\vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega t - i\kappa(\omega)z} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{[i\omega t + i\omega z - i\omega z - i\kappa(\omega)z - i(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}})_0(\omega - \omega_0)z - i\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}})_0(\omega - \omega_0)^2 z + \dots]} d\omega$

Преобразуем слагаемые в экспоненте разложения можно, если

б $\left| \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}} \right)_0 (\omega - \omega_0)^2 z \right| \ll \pi$
 обозначим $\omega - \omega_0 = \Omega$; $\Delta\omega \sim \Omega_{\max}$
 $t - \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}} \right)_0 z = \tau$; $\tau = \tau(z,t)$

при $z=0$: $\tau(0,t) = t \Rightarrow \vec{E}(\omega) = \vec{E}(\omega_0 + \Omega) = \vec{E}(\Omega)$

тогда можно переписать:

$\vec{E}(z,t) = e^{i(\omega_0 t - \kappa(\omega_0)z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\Omega e^{i\Omega \tau - i\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}} \right)_0 \Omega^2 z} d\Omega$

$\vec{E}_0(z,\tau)$ — огибающая волнового пакета (сигнал/фронт), что есть таковой импакт как у плоской волны, но с доп. членом.

Если ширина спектра $\rightarrow 0 \Rightarrow \vec{E}_0(z,\tau)$ — фронт волны, который должен удовлетворять условиям:

$\left| \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}} \right)_0 \Omega_{\max}^2 z \right| \ll \pi \Rightarrow \vec{E}(z,t) = e^{i(\omega_0 t - \kappa(\omega_0)z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\Omega e^{i\Omega \tau} d\Omega$

обозначим τ и t — фронт в данный момент, а в др. м. (фронт огибающей)

при $z=0$: $\tau = t$

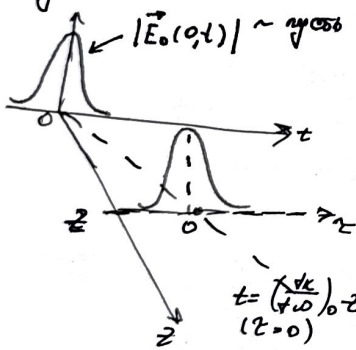
$\Rightarrow \vec{E}(0,t) = e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\Omega e^{i\Omega t} d\Omega$

→ сравним формулы:

$\vec{E}_0(z,t) = \vec{E}_0(0,\tau) = \vec{E}_0(0, t - \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}} \right)_0 z)$

— совпадают по форме с сигналами фронт $z=0$, но при этом с запаздыванием.

Рисунок:



$\Rightarrow$ т.е. в данную точку z фронт с запаздыванием по времени.

$\frac{1}{2} \left(t - \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}} \right)_0 z \right) = \text{const} \sim$ ур-е движения точки огибающей (пакет, амплитуда)

$\Rightarrow 1 - \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}} \right)_0 \dot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z}_f = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}} \right)_0} = \left(\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\epsilon}} \right)_0 \bigg|_{\omega=\omega_0} \quad (*)$

$t = \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}} \right)_0 z$
 $(z=0)$

Соберём все условия, когда фронт $\neq$ фронт, справедливо:

- а) Сигнал — квазиоднохроматический, справедливо;
- б) Находимся в области прозрачности;
- в) $\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}} \right)_0 \Omega_{\max}^2 z \ll \pi$

* Средний вектор Пойнтинга для данного сигнала:

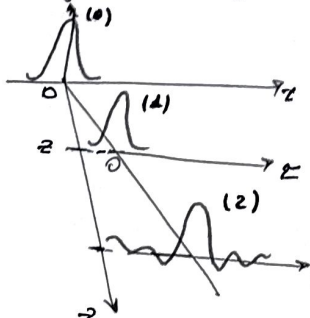
$\vec{S}_z = \vec{W} \cdot \vec{V}_f$ (7.20) — Гильбертова.

Если $\omega = \omega(\vec{k})$ можно показать, что справедливо соотношение:

$\vec{V}_f = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \vec{v}_g \omega(\vec{k}) = \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right\} \Rightarrow \vec{S} = \vec{W} \cdot \vec{V}_f$

можно заметить, что $\vec{V}_f \geq 0$ и $|\vec{V}_f| < c$.

②) При достаточно больших значениях z условие в) нарушается → нужно учитывать дополнительные слагаемые в разложении (учитывается огибающая) и уже нельзя пользоваться правилом определения фазовой скорости.



$\vec{E}_0(z,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\Omega e^{i(\Omega \tau - \frac{1}{2} \kappa''_0 \Omega^2 z)} d\Omega$, где $\kappa''_0 = \left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\omega}} \right)_0''$

можно показать, что процесс эволюции огибающей описывается параболическим уравнением:

$\frac{\partial^2 \vec{E}_0(z,\tau)}{\partial z^2} = D \frac{\partial^2 \vec{E}_0(z,\tau)}{\partial \tau^2}$, $D = \frac{\kappa''_0}{2}$

$\Rightarrow$ При малом τ в проекции распространения огибающей по времени τ фронт огибающей волнового пакета описывается уравнением $\tau = \text{const}$ в шесте координат z, τ . В результате при распространении пакета возникает амплитудная $|\vec{E}_0(z,\tau)|$ и фазовая модуляция импульса.

Если знаем вид ожидаемой $\vec{E}$ при $z=0$: $\vec{E}_0(z, t) \rightarrow \vec{E}_0(z, z)$ можем найти решение (из м.п.р.)

$$\vec{E}_0(z, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D z}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_0(0, z') e^{-\frac{(z'-z)^2}{4Dz}} dz' = \frac{1}{\sqrt{2\pi i k'' z}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_0(0, z') e^{\frac{i(z'-z)^2}{2k'' z}} dz'$$

Пример: разбиваем Гессовый импульс.

$\vec{E}_0(0, t) = \vec{E}_0(0, z) = \vec{E}_0 e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}$

$$\vec{E}_0(z, z) = \vec{E}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi i k'' z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{2\tau^2} + \frac{i(z'-z)^2}{2k'' z}} dz' \rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0(z, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i2k'' z}{\tau^2}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(t - \frac{z}{v_{gr}})^2}{\tau^2 (1 + \frac{i2k'' z}{\tau^2})} \right\}$$

вычисление интеграла сводится к вычисл. гауссоваго $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$
 здесь учтено: $z = t - \frac{z}{v_{gr}}$

Св-во: некое опис. гессового фр-та, то при $z \neq 0$ такое резуль. опис. гессового фр-та, но сев. изменилось i .
 Чтобы не было целочисл.: $|\frac{i2k'' z}{\tau^2}| \ll 1 \Rightarrow |\frac{2k'' z}{\tau^2}| \ll 1$ ~ фактически условие в).
 $v_{gr} = (\frac{d\omega}{dk})_0$
 $\frac{1}{\tau^2} \sim \rho_{max}$
 $\Rightarrow |\frac{1}{\tau^2} (\frac{d^2 k}{d\omega^2})_0 z \rho_{max}^2| \ll 1$

22. Корреляционное падение волн на плоской границе раздела двух сред. Взаимодействие двух координатных осей и приближений.

Вспомогательные штрихи и импульсы:
 $\vec{E}_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2}}{\epsilon_{1,2}}}$; $k_{1,2} = k_0 \sqrt{\epsilon_{1,2} \mu_{1,2}}$
 Пусть волна падает нормально (без преломления).
 ②: $\vec{E}^{(i)} = \vec{E}_0^{(i)} e^{-i k_{1,2} z}$
 $\vec{H}^{(i)} = \frac{1}{\eta_1} [\vec{n}^{(i)}, \vec{E}^{(i)}] = \frac{1}{\eta_1} [\vec{z}_0, \vec{E}_0^{(i)}] e^{-i k_{1,2} z}$

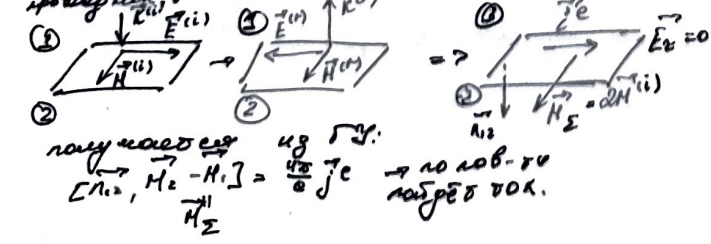
③: $\vec{E}^{(r)} = \frac{\vec{E}_0^{(r)}}{\epsilon_1} e^{+i k_{1,2} z}$
 $\vec{H}^{(r)} = \frac{1}{\eta_1} [\vec{n}^{(r)}, \vec{E}^{(r)}] = -\frac{1}{\eta_1} [\vec{z}_0, \vec{E}_0^{(r)}] e^{i k_{1,2} z}$
 ④: $\vec{E}^{(t)} = \frac{\vec{E}_0^{(t)}}{\epsilon_2} e^{-i k_{2,2} z}$
 $\vec{H}^{(t)} = \frac{1}{\eta_2} [\vec{n}^{(t)}, \vec{E}^{(t)}] = \frac{1}{\eta_2} [\vec{z}_0, \vec{E}_0^{(t)}] e^{-i k_{2,2} z}$

Требуем выполнение граничных условий:
 при $z=0$: $\begin{cases} \vec{E}_1^{(i)} + \vec{E}_1^{(r)} = \vec{E}_2^{(t)} \\ \vec{H}_1^{(i)} - \vec{H}_1^{(r)} = \vec{H}_2^{(t)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \Gamma = T \\ \frac{1}{\eta_1} - \frac{\Gamma}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2} \end{cases}$ ~ решаем систему с.н. Γ и T

$\Gamma = T - 1 \Rightarrow \frac{1}{\eta_1} - \frac{T-1}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2} \Rightarrow \frac{2}{\eta_1} = T(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}) \Rightarrow \frac{2}{\eta_1} = \frac{T(\eta_2 + \eta_1)}{\eta_1 \eta_2} \Rightarrow \Gamma = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$
 $\Rightarrow \Gamma = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} - 1 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \Rightarrow \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$

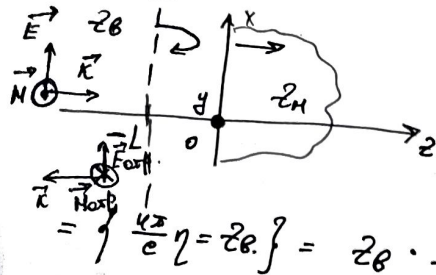
Частные случаи:
 а) Г.О. при малом контрасте:
 $\eta_2 = \eta_1 \Rightarrow \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$ ~ волна не отражается.

б) Решим короткого замыкания: $\eta_2 = 0 \rightarrow \Gamma = 1$
 ~ случай, когда волна падает на идеально проводящую поверхность.



в) решим "холостого хода": $\eta_2 = \infty$
 $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \Rightarrow \Gamma = 1$ ~ полн. отраж. с фазовым сдвигом π .
 $\eta_{1,2} = \frac{4\pi}{c} \eta_{1,2}$ $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{\infty - \eta_1}{\infty + \eta_1} = 1$
 $T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2\infty}{\infty + \eta_1} = 2$
 $\eta_2 = \infty$ (абсолютно идеаль. проводник).
 $\eta_1 = \infty$ (а в 5-й формуле - волновое импеданс).

3. Формула переноса интервала. Координаты отражения от несколько параллельных металлов.



Введем интервал:
 $\eta(-L) = \frac{E_x}{H_y} \Big|_{z=-L}$
 $\Rightarrow \eta(-L) = \frac{4\pi}{c} \eta(-L) = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{E_0 e^{-ikz} + \Gamma E_0 e^{ikz}}{2 e^{-ikz} - \Gamma E_0 e^{ikz}} \Big|_{z=-L} \oplus \left\{ \frac{E}{H} \text{ прямо} \right\} = \left\{ \frac{E}{H} \text{ через опр-е} \right\}$
 $= \left\{ \frac{4\pi}{c} \eta = z_B \right\} = z_B \cdot \frac{e^{ikL} + \frac{z_H - z_B}{z_H + z_B} e^{-ikL}}{e^{ikL} - \frac{z_H - z_B}{z_H + z_B} e^{-ikL}} \oplus \left\{ e^{\pm ikL} \cdot \cos(KL) \pm i \sin(KL) \right\}$

$\Rightarrow \boxed{\eta(-L) = z_B \frac{z_H \cos(KL) + i z_B \sin(KL)}{z_B \cos(KL) + i z_H \sin(KL)}}$, где $z_H = z(0)$

Для координаты отражения: $\sim$ позволяет преобразовать интервал в г. -L отн. 0.

$\boxed{\Gamma(-L) = \frac{E_x^{(H)}}{E_x^{(i)}} \Big|_{z=-L} = \frac{\Gamma E_0 e^{ikz}}{E_0 e^{-ikz}} \Big|_{z=-L} = \Gamma e^{-i2KL}}$, где $\Gamma = \Gamma(0)$

(*) $\boxed{\Gamma(-L) = \frac{z(-L) - z_B}{z(-L) + z_B}}$ т.к. наблюдатель может считать, что $z_H = -L$ (в новом смысле) $\rightarrow$ нагрузка

Если представить полученную ф-лу в (*) можно дока-ть:

$|\Gamma(-L)| = \frac{|z(-L) - z_B|}{|z(-L) + z_B|} = \frac{|z_B| \cdot |z_H \cos(KL) + i z_B \sin(KL) - z_B \cos(KL) + i z_H \sin(KL)|}{|z_B| \cdot |z_H \cos(KL) + i z_B \sin(KL) + z_B \cos(KL) + i z_H \sin(KL)|} =$
 $= \frac{\sqrt{(z_H^2 - z_B^2) \cos^2(KL) + (z_B - z_H)^2 \sin^2(KL)}}{\sqrt{(z_H + z_B)^2 \cos^2(KL) + (z_B + z_H)^2 \sin^2(KL)}} = \frac{|z_H - z_B|}{|z_H + z_B|} = |\Gamma| \quad (|e^{-i2KL}| = 1)$

Удобно для некоторых задач, например есть много слоев:



$\rightarrow$ достаточно преобразовать интервалы для каждого слоя, а не "символ" поля между собой через ГЗ.

Пример: Отражение от несколько параллельных металлов.

① $z_H = z_{B1}$ $\Gamma(-L) = \frac{z(-L) - z_{B1}}{z(-L) + z_{B1}}$ в ф-ле для $z(-L)$ и z_B - то же ф-лу, где z_H заменяется z_{B1} .
 ② $z_H = z_{B2}$ $\Rightarrow z(-L) = z_{B2} \frac{z_{B1} \cos(K_2 L) + i z_{B2} \sin(K_2 L)}{z_{B1} \cos(K_2 L) + i z_{B2} \sin(K_2 L)}$
 ③ z_{B2} $\Rightarrow$

Может ли быть реализовано $\Gamma(-L) = 0$? , т.е. экран будет согласован.

$\Rightarrow z(-L) = z_{B1}$

$\Rightarrow z_{B2} [z_{B1} \cos(K_2 L) + i z_{B2} \sin(K_2 L)] = z_{B1} [z_{B2} \cos(K_2 L) + i z_{B1} \sin(K_2 L)]$

$\Rightarrow (z_{B2}^2 - z_{B1}^2) \sin(K_2 L) = 0$ $\sim$ приравняем Re и Im части

а) $z_{B1} = z_{B2}$, $\forall L$ тривиальное решение.

б) $z_{B1} \neq z_{B2} \Rightarrow K_2 L = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$

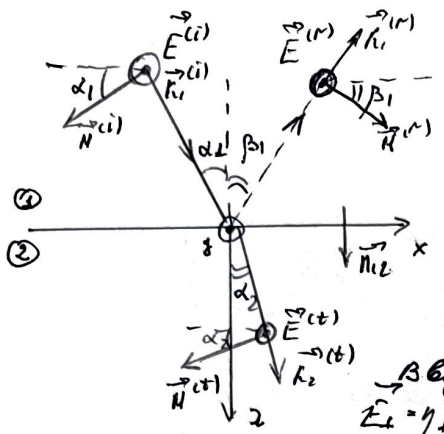
Если $K_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \Rightarrow L = \frac{\lambda_2}{2} n$

$\sim$ это верно, если экран слева и справа от наблюдателя одинак. $z(-L) = z_{B1}$ (имеем решение задачи задачи).

иногда
гет
с
ф-лу
иногда
гет
1

24. Законы отражения и преломления плоских волн на плоской границе раздела двух однородных сред. (Закон Снелля.)

ТЕ (з-поляризация - "электромагнитная") ~ поле $\vec{E}$ перпендикулярно к плоскости падения. Для ДМ (р-поляризация) ~ плоскость падения - плоскость, образованная векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$.

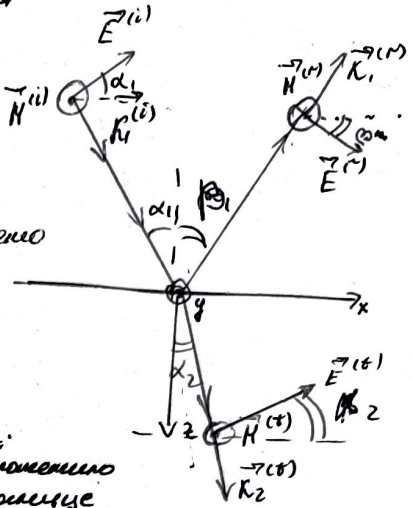


Вспомогательные поля, чтобы не смешать закон Френеля $\vec{E}$ (а так можно вывести Френеля).

Вспомогательные: $\vec{E} = \eta [\vec{H}, \vec{n}]$
 $\vec{H} = \frac{1}{\eta} [\vec{n}, \vec{E}]$

Введем поперечный шаг $\vec{z}_0$ ~ поперечный по отношению к $\vec{z}_0$ (к нормали границе раздела сред).

$\vec{H}_\perp = \frac{1}{\eta_\perp} [\vec{z}_0, \vec{E}]$



Для ДЕ:
 $\eta_\perp^{(DE)} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\eta}{\cos \alpha}$, где $\alpha = (\vec{n}, \vec{z}_0)$
 $\eta_{1\perp}^{(i)} = +\frac{\eta_1}{\cos \alpha_1}$; $\eta_{1\perp}^{(r)} = \frac{\eta_1}{\cos(\pi - \beta_1)} = -\frac{\eta_1}{\cos \beta_1}$
 $\eta_{2\perp}^{(t)} = \frac{\eta_2}{\cos \alpha_2}$

Для ДМ:
 $\eta_\perp^{(DM)} = \frac{E_x}{H_y} = \eta \cos \alpha$
 $\eta_{1\perp}^{(i)} = \eta_1 \cos \alpha_1$; $\eta_{1\perp}^{(r)} = \eta_1 \cos(\pi - \beta_1) = -\eta_1 \cos \beta_1$
 $\eta_{2\perp}^{(t)} = \eta_2 \cos \alpha_2$

$\vec{E}_\perp^{(i)} = E_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(i)} \cdot \vec{r}}$; $\vec{E}_\perp^{(r)} = \Gamma_\perp E_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(r)} \cdot \vec{r}}$; $\vec{E}_\perp^{(t)} = \tau_\perp E_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_2^{(t)} \cdot \vec{r}}$

Граничные условия:
 $\vec{E}_\perp^{(i)} + \vec{E}_\perp^{(r)} = \vec{E}_\perp^{(t)} \Big|_{z=0}$
 $\vec{H}_\perp^{(i)} + \vec{H}_\perp^{(r)} = \vec{H}_\perp^{(t)} \Big|_{z=0}$

$\Rightarrow \vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(i)} \cdot \vec{r}} + \Gamma_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(r)} \cdot \vec{r}} = \tau_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_2^{(t)} \cdot \vec{r}} \Big|_{z=0}$

И делим на $\frac{1}{\eta_\perp} [\vec{z}_0, \vec{E}_{0\perp}] e^{-i\vec{k}_1^{(i)} \cdot \vec{r}} + \frac{\Gamma_\perp}{\eta_\perp^{(r)}} [\vec{z}_0, \vec{E}_{0\perp}] e^{-i\vec{k}_1^{(r)} \cdot \vec{r}} = \frac{\tau_\perp}{\eta_\perp^{(t)}} [\vec{z}_0, \vec{E}_{0\perp}] e^{-i\vec{k}_2^{(t)} \cdot \vec{r}} \Big|_{z=0}$

Такое равенство можно сделать только при условии, что показатели в эксп. будут равны:

$\Rightarrow \vec{k}_1^{(i)} \cdot \vec{r} = \vec{k}_1^{(r)} \cdot \vec{r} = \vec{k}_2^{(t)} \cdot \vec{r} \Big|_{z=0}$

$k_{1x} x = k_{1x} x = k_{2x} x \Rightarrow k_1 \sin \alpha_1 = k_1 \sin \beta_1 = k_2 \sin \alpha_2$

Тангенциальные компоненты $\vec{k}$ не преобразуются: $\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$ т.е. угол падения равен углу отражения:

$k_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \alpha_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin \alpha_2 \Rightarrow \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1}$

закон Снелля

Сфазовознаки: $\eta_{1\perp}^{(i)} = \eta_{1\perp}$; $\eta_{1\perp}^{(r)} = \eta_{1\perp}$; $\eta_{2\perp}^{(t)} = \eta_{2\perp}$

Тогда получим систему уравнений:

$\begin{cases} 1 + \Gamma_\perp = \tau_\perp \\ \frac{1}{\eta_{1\perp}} - \frac{\Gamma_\perp}{\eta_{1\perp}} = \frac{\tau_\perp}{\eta_{2\perp}} \end{cases}$ ~ решаем

$\Rightarrow \Gamma_\perp = \frac{\eta_{2\perp} - \eta_{1\perp}}{\eta_{2\perp} + \eta_{1\perp}}$
 $\tau_\perp = \frac{2\eta_{1\perp}\eta_{2\perp}}{\eta_{2\perp} + \eta_{1\perp}}$

Имеем в виду, что для ДЕ и ДМ для $\eta_{1\perp}$ и $\eta_{2\perp}$ свои формулы.

$\frac{1}{\eta_{1\perp}} - \frac{\Gamma_\perp}{\eta_{1\perp}} = \frac{1}{\eta_{2\perp}} + \frac{\Gamma_\perp}{\eta_{2\perp}}$
 $\frac{1}{\eta_{1\perp}} - \frac{1}{\eta_{2\perp}} = \Gamma_\perp \left(\frac{1}{\eta_{1\perp}} + \frac{1}{\eta_{2\perp}} \right)$

25. Находимое выражение для коэффициента отражения Γ и коэффициента пропускания T для плоской волны на плоской границе раздела двух сред. Выводимые формулы Френеля.

Нормальная компонента:

$$\Gamma = \frac{E_y^{(r)}}{E_y^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{E^{(r)}}{E^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{\frac{\eta_2}{\cos \alpha_2} - \frac{\eta_1}{\cos \alpha_1}}{\frac{\eta_2}{\cos \alpha_2} + \frac{\eta_1}{\cos \alpha_1}}$$

$$T = \frac{E_y^{(t)}}{E_y^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{E^{(t)}}{E^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{2 \frac{\eta_2}{\cos \alpha_2}}{\frac{\eta_2}{\cos \alpha_2} + \frac{\eta_1}{\cos \alpha_1}}$$

Тангенциальная компонента:

$$\Gamma = \frac{E_x^{(r)}}{E_x^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{\frac{E^{(r)} \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}}{E^{(i)} \cos \alpha_1} \Big|_{z=0} = \frac{E^{(r)}}{E^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{\eta_2 \cos \alpha_1 - \eta_1 \cos \alpha_2}{\eta_2 \cos \alpha_2 + \eta_1 \cos \alpha_1}$$

$$T = \frac{E_x^{(t)}}{E_x^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{\frac{E^{(t)} \cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}}{E^{(i)} \cos \alpha_1} \Big|_{z=0} = \frac{E^{(t)}}{E^{(i)}} \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \frac{2 \eta_2 \cos \alpha_2}{\eta_2 \cos \alpha_2 + \eta_1 \cos \alpha_1}$$

вероятность

26. Эффект Брюстера. Угол Брюстера.

Как известно, случай полного внутреннего отражения имеет место, когда $\Gamma = 1$, т.е. отраженной волны нет.

ИМ: $\Gamma = 0 \Rightarrow \eta_2 \cos \alpha_2 = \eta_1 \cos \alpha_1$ — это имеет место когда выполняется (ан. ф-лы Френеля).



$$1 = \frac{\eta_2 \cos \alpha_2}{\eta_1 \cos \alpha_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1}} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}}{\cos \alpha_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1} \quad (*)$$

Выводим формулу для угла Брюстера $\alpha_{Бр}$ — это угол, при котором коэффициент отражения равен нулю.

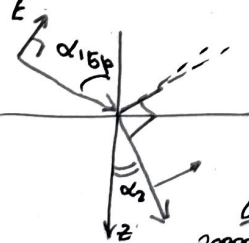
$$\Rightarrow \frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1} \cdot \frac{1 - \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \sin^2 \alpha_{Бр}}{\cos^2 \alpha_{Бр}} = 1 \Rightarrow \frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1} \left(1 + \tan^2 \alpha_{Бр} - \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \tan^2 \alpha_{Бр} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1} + \frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1} \tan^2 \alpha_{Бр} - \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} \tan^2 \alpha_{Бр} = 1 \Rightarrow \frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1} - 1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tan^2 \alpha_{Бр} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha_{Бр} = \frac{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1} - 1}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)} = \frac{(\epsilon_1 \mu_2 - \epsilon_2 \mu_1) \epsilon_2^2 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_1 \cdot \epsilon_1 (\epsilon_1 \mu_1 - \mu_2 \epsilon_2)} = \frac{(\epsilon_1 \mu_2 - \epsilon_2 \mu_1) \epsilon_2}{\epsilon_1 (\epsilon_1 \mu_1 - \mu_2 \epsilon_2)} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{(\epsilon_1 \mu_2 - \epsilon_2 \mu_1)}{(\epsilon_1 \mu_1 - \mu_2 \epsilon_2)}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha_{Бр} = \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \frac{1}{\epsilon_1 \mu_1} (\epsilon_2 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_2)}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)} = \frac{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1} - 1}{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1} - 1} \Rightarrow \tan^2 \alpha_{Бр} = \frac{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1} - 1}{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1} - 1}$$

Как известно, случай $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$;



$\tan \alpha_{Бр} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$

нужно доказать, что $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ при $\alpha_1 = \alpha_{Бр}$.

из ф-лы Снеллиуса: $\sqrt{\epsilon_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{\epsilon_2} \sin \alpha_2$

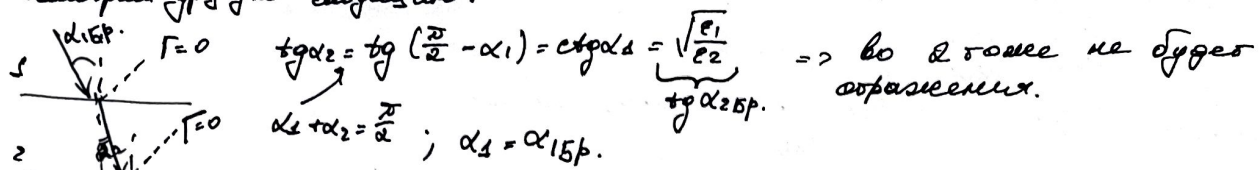
$$\sin \alpha_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \sin \alpha_2 \Rightarrow \cos \alpha_1 = \sin \alpha_2$$

возможно если

О получении эффекта Брюстера:

Эффект Брюстера связан не с элементарными диполями. Пусть $\epsilon_1 = 1$ (вакуум) — здесь диполь нет. Он связан с поляризованными токами на границе раздела, которые существуют при $\alpha_1 = \alpha_{Бр}$ таким образом, что отраженной волны нет.

Рассмотрим границу раздела:



В случае δE поляризации: $\Gamma_1 = 0 \Rightarrow \frac{n_2}{\cos \alpha_2} = \frac{n_1}{\cos \alpha_1}$;

$$r = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}} \cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \left\{ \text{фазовая аналогия выкладки} \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}}{\cos \alpha_1} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1} = \dots =$$

$$\Rightarrow \tan \alpha_2 = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}(\tilde{\mu} - \tilde{\epsilon})}{\tilde{\epsilon}\tilde{\mu} - 1}} = \left\{ \begin{matrix} \tilde{\mu} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \\ \tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_2}{\mu_1}(\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})}{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1} - 1}}$$

Если $\mu_2 = \mu_1 \Rightarrow \tilde{\mu} = 1 \Rightarrow \sqrt{\dots} = \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{\epsilon - 1}} = \sqrt{-1} \Rightarrow$ т.е. не м.б. эффекта Брюстера.

Но в более общем случае $\mu_2 \neq \mu_1 \Rightarrow$ и эффект Брюстера.

27. Полное внутреннее отражение. Возникновение неоднородных плоских волн при полном отражении.

Пусть $\epsilon_1 \mu_1 > \epsilon_2 \mu_2 \Rightarrow \alpha_2 > \alpha_1$

$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} \Rightarrow$ может быть при $\alpha_2 = \alpha_1^*$: $\sin \alpha_1^* \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} = 1$ ($\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$)

$\Rightarrow \alpha_1^*$ - угол полного внутреннего отражения.

(при $\alpha_1 > \alpha_1^*$ полное внутреннее отражение).

$\Rightarrow \sin \alpha_2 > 1$ (в физике комплексный).

пусть $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + i\tau$

$\sin \alpha_2 = \sin(\frac{\pi}{2} + i\tau) = \cosh \tau \geq 1$

$\cos \alpha_2 = \cos(\frac{\pi}{2} + i\tau) = -i \sinh \tau$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh x = -i \sin(ix)$; $\cos(ix) = \cosh x$

Как это соотносится с полем? Возьмем для определенности ТЕ-волны.

$E_y = E_0 e^{-ik_2 z} e^{-ik_2 x} = E_0 e^{-k_2 \cos \alpha_2 z} e^{-ik_2 \sin \alpha_2 x}$

Теперь перейдем к комплексному внутреннему отражению $\rightarrow \alpha_2$ стал комплексным:

$\rightarrow E_y = E_0 e^{-k_2 (\sinh \tau) z} e^{-ik_2 (\cosh \tau) x}$

оно затухает по x.

но 2. амплитуда поля растет.

Такая волна в физике и неоднородная плоская волна.

Что будет с коэффициентом отражения?

$\Gamma_1 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$, где $n_{2,1} = \sqrt{\frac{\epsilon_{2,1}}{\mu_{2,1}}}$ (ТЕ) $\Rightarrow n_{2,1}$ считается мнимым, а $n_{1,2}$ есть чисто действительным

$\Rightarrow |\Gamma_1| = \frac{|\alpha - \beta|}{|\alpha + \beta|} = 1 \Rightarrow$ полное внутреннее отражение.

Нам нужна картинка для поля:

$\Rightarrow V_2 < V_{ф}^{(x)} < V_2$

$\epsilon_1 \mu_1 > \epsilon_2 \mu_2$.

можно замечать, что $\Rightarrow$ логично волновое, т.е. первая и вторая волны.

д.е. можно переосмыслить эквивалентно бегущей волне.

(взаимодействие волн)

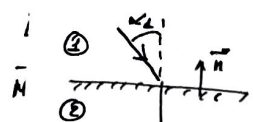
можно замечать, что $\Rightarrow$ логично волновое, т.е. первая и вторая волны.

д.е. можно переосмыслить эквивалентно бегущей волне.

(взаимодействие волн)

28.

Одразрешим от хробоно поворончел поворончел. Зелови леонтовина.



$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_2}}, \text{ где } \epsilon_2 \approx -i \frac{4\pi \nu}{\omega}$$

у хробоно поворончел γ велико, так что

$$|\epsilon_2| \mu_2 \gg \epsilon_1 \mu_1$$

тогда

$$\gamma_{12} = \begin{cases} \frac{\epsilon_2}{\cos \alpha_2} (\text{TE}) \\ \gamma_2 \cos \alpha_2 (\text{TM}) \end{cases} \approx \gamma_2. \Rightarrow \cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} \approx 1.$$

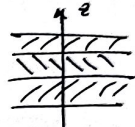
$\Rightarrow$ Связь между полями в среде.

$$\vec{E}_\perp = \gamma_2 [\vec{H}, \vec{z}_0] = \gamma_2 [\vec{n}, \vec{n}] \sim \text{ГУ Леонтовина}$$

Это справедливо, потому что $\sin \alpha_2 \ll 1$, т.е. преломление света почти по z .

29. Уравнения, описывающие волны TE-типа в плоскопараллельной среде с плавно изменяющимися параметрами. ВКБ приближение. Плоскопараллельная среда, параметры которой зависят от z и пренебреж. Рассмотрим плоскопараллельную среду, в которой $\epsilon = \epsilon(z)$. Будем считать, что $\mu = \text{const}$ ($\mu = 1$)

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E} \end{cases}$$



$$\text{rot rot } \vec{E} = \nabla \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -i\omega \text{rot } \vec{H} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \nabla \text{div } \vec{E} + \kappa_0^2 \epsilon \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\text{rot rot } \vec{H} = \nabla \text{div } \vec{H} - \Delta \vec{H} = i\omega \text{rot } (\epsilon \vec{E}) \Rightarrow \Delta \vec{H} + \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial z}, \text{rot } \vec{H} \right] + \kappa_0^2 \epsilon \vec{H} = 0 \quad (2)$$

Ур-е (1) удобно использовать для TE-поляризации, (2) - для TM.

Ищем поля в виде: $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(z) e^{-ik_x x}$, $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(z) e^{-ik_x x}$

Решение в две плоскости, для TE и TM поляризации:

TE: $\vec{E}(\vec{r}) = E_y(\vec{r}) \vec{y}_0 \Rightarrow H_x, H_z$
 обратим $x \Rightarrow E_y(\vec{r}) = E(z) e^{-ik_x x}$ (1)

TM: $\vec{H}(\vec{r}) = H_y(\vec{r}) \vec{y}_0 \Rightarrow E_x, E_z$
 $H_y(\vec{r}) = H(z) e^{-ik_x x}$ (2)

Угнем, что поле зависит только от x и z : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\left[\frac{\partial \epsilon}{\partial z}, \text{rot } \vec{H} \right] = \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon(z)}{\partial z} \vec{z}_0, \vec{z}_0 \left(-\frac{\partial H}{\partial z} \right) + \vec{z}_0 \frac{\partial H}{\partial x} \right] = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon(z)}{\partial z} \cdot \frac{H(z)}{\partial z} e^{-ik_x x} \begin{bmatrix} z_0, x_0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} + [\kappa_0^2 \epsilon(z) - k_x^2] E(z) = 0 \sim \text{в общем случае аттени. не решается.}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 H(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{\epsilon^2(z)} \frac{\partial \epsilon(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial H(z)}{\partial z} + [\kappa_0^2 \epsilon(z) - k_x^2] H(z) = 0$$

$$\vec{H} = \frac{i}{\kappa_0} \text{rot } \vec{E} = \frac{i}{\kappa_0} \left\{ \vec{x}_0 (-1) \frac{\partial}{\partial z} [E(z) e^{-ik_x x}] + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial x} (E(z) e^{-ik_x x}) \right\} = i k_x E(z) e^{-ik_x x}$$

$$\vec{E} = -\frac{i}{\kappa_0 \epsilon} \text{rot } \vec{H} = -\frac{i}{\kappa_0 \epsilon} \left\{ \vec{x}_0 (-1) \frac{\partial}{\partial z} (H(z) e^{-ik_x x}) + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial x} (H(z) e^{-ik_x x}) \right\} = -i k_x H(z) e^{-ik_x x}$$

Возврат соотношения: $\kappa_z^2(z) = \kappa_0^2 \epsilon(z) - k_x^2$
 $\lambda_z(z) = \frac{2\pi}{\kappa_z(z)}$, $\kappa_z > 0$

Введем характерный проформированный параметр $\epsilon(z) \leftrightarrow \lambda_z$, где $\epsilon(z)$ уменьшено λ_z или

$\lambda_z \ll \lambda_z \sim$ условие невырожденной фн. (т.е. уменьшено λ_z)

Это условие можно переписать по-другому:

$$\left| \frac{\partial \kappa_z(z)}{\partial z} \cdot \frac{1}{\kappa_z} \right| \ll |\kappa_z| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\partial z} \cdot \frac{1}{\kappa_z(z)} \right| \ll 1$$

Метод Вентцеля - Кроссера - Бриллюэна (ВКБ)
Будем искать метод для ТЕ-полюбопроводов.

$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + [k_0^2 \epsilon(z) - k_x^2] E(z) = 0$, $k_0^2 \epsilon(z) - k_x^2 = k_0^2 [\epsilon(z) - \frac{k_x^2}{k_0^2}] = k_0^2 [\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0] = k_z^2(z)$

Будем искать решение в виде: $E(z) = A(z) e^{-i k_0 \psi(z)}$

Если бы среда была однородной, то $A(z) = const$, $\Rightarrow E(z) = A e^{-i k_0 \frac{k_z}{k_0} z}$
и $\psi(z) = \frac{k_z}{k_0} z$, т.е. $A(z) = A$, $\psi(z) = \frac{k_z}{k_0} z \rightarrow \psi'(z) = \frac{k_z}{k_0} = const$.

В случае ПЛАВНО-неоднородной среды $\rightarrow$ темпы $A(z)$ и $\psi'(z)$ медленно меняющиеся функции.
 $A(z) \sim L_z$
 $\psi'(z) \sim L_z$) характерные масштабы изменения

$\Rightarrow \psi' \sim \frac{k_z(z)}{k_0}$ должны быть примерно одного порядка.

$E'(z) = A'(z) e^{-i k_0 \psi(z)} - i k_0 \psi'(z) A(z) e^{-i k_0 \psi(z)}$

$E''(z) = A''(z) e^{-i k_0 \psi(z)} - 2 i k_0 \psi'(z) A'(z) e^{-i k_0 \psi(z)} - i k_0 A(z) \psi''(z) e^{-i k_0 \psi(z)} - k_0^2 A(z) (\psi'(z))^2 e^{-i k_0 \psi(z)}$

$\rightarrow$ подставляем в исходное уравнение:

$A'' - [2 i k_0 \psi' A' + i k_0 \psi'' A] + k_0^2 [\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0 - (\psi')^2] A = 0 \quad / \cdot \frac{1}{k_z^2}$

$$\underbrace{\frac{k_0^2}{k_z^2} [\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0]}_{\sim \frac{k_0^2}{k_z^2}} - (\psi')^2 \approx 0$$

$$\sim \left(\frac{k_z}{k_0} \right)^2$$

Увеличим далее (после решения) L_z соответствующе:

$\frac{|A''|}{k_z^2} \sim \frac{|A|}{(L_z k_z)^2} \sim$ величина второго порядка малости

$k_z = \frac{E \pi}{\lambda_z}$, $\lambda_z \ll L_k \Rightarrow k_z L_z \gg 1 \sim$ это по сути предположение диффузий.

$\left| \frac{2 k_0 \psi' A'}{k_z^2} \right| \sim \left| \frac{k_0 \cdot \frac{k_z}{k_0} \cdot \frac{A}{L_z}}{k_z^2} \right| \sim \left| \frac{A}{k_z L_z} \right| \sim$ величина 1-го порядка малости (оставим).

$\left| \frac{k_0 \psi'' A}{k_z^2} \right| \sim \left| \frac{k_0 \frac{\psi'}{L_z} A}{k_z^2} \right| \sim \left| \frac{A}{k_0 L_z} \right| \sim$ величина 1-го порядка малости.

В уравнении преобладаем оставшим членами членами нулевого порядка малости:

$[\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0 - (\psi')^2] A = 0$

Пусть $A \neq 0$, тогда. $\psi'^2 = \epsilon(z) - \sin^2 \theta_0 = \frac{k_z^2(z)}{k_0^2}$, $\Rightarrow \psi'(z) = \pm \frac{k_z(z)}{k_0} = \pm \frac{\sqrt{k_z^2 - k_x^2}}{k_0}$

$\Rightarrow \psi(z) - \psi(z_0) = \pm \int_{z_0}^z \sqrt{\epsilon(z') - \sin^2 \theta_0} dz'$
сб. для простоты всегда можно так считать.

Запишем члены второго порядка малости:

$2 i k_0 \psi' A' + i k_0 \psi'' A = 0$, где $A \neq 0$ / $\cdot A$

$\frac{1}{A} \frac{d}{dz} (\psi' A^2) = 0$

$\psi' A^2 = const$, т.е. $\Rightarrow A = \frac{C}{\sqrt{\psi'}} = \frac{C}{\sqrt{\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0}}$, C - произвольная константа.

Общее решение будет иметь вид:

$E(z) = \frac{C_1}{\sqrt{\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0}} e^{-i k_0 \int_{z_0}^z \sqrt{\epsilon(z') - \sin^2 \theta_0} dz'} + \frac{C_2}{\sqrt{\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0}} e^{i k_0 \int_{z_0}^z \sqrt{\epsilon(z') - \sin^2 \theta_0} dz'}$

$\sim$ Общее решение - суперпозиция двух волн, независимо распространяющихся в $+z$ и $-z$ - направлениях.

Решение нарушается при $\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0 \rightarrow 0$;

$\sqrt{\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0} = \frac{k_z}{k_0}$. Если $k_z \neq 0$, то $\lambda_z \rightarrow \infty$ и нарушается условие $\lambda_z \ll L_z$.

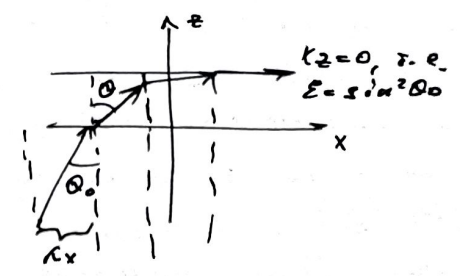
* Пример:

Пусть $\epsilon(z)$ убывает с ростом z , например $\epsilon(z) = 1 - \frac{z-z_0}{L_z}$. Тогда $L = L_z$, что возможно в случае плазмы, когда

$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{N(z) N_0}{N \omega^2}$, где $N(z) = N_0 \frac{z}{L}$

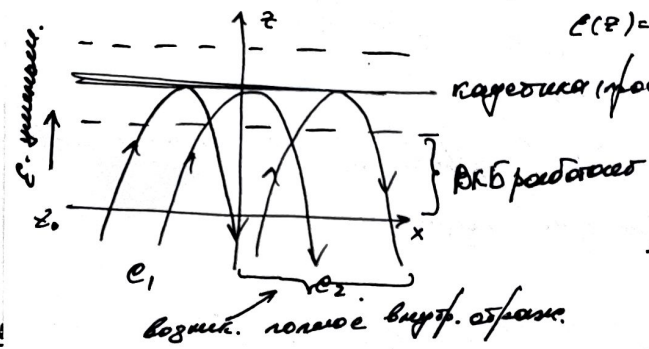
$z_0 = 0 : \epsilon(z_0) = \epsilon$

$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N_0}{m \omega^2} \cdot \frac{1}{L} z = 1 - \frac{z}{L} \frac{m \omega^2}{4\pi e^2 N_0}$



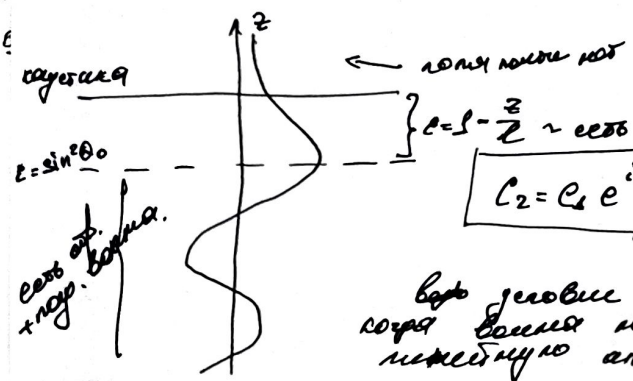
Построим картину волн (приближение геом. оптики):

$\epsilon(z) = \sin^2 \theta_0$



$k_x = k_0 \sin \theta_0 = \text{const}$
 $k_0 \sin \theta_0 = k_0 \sqrt{\epsilon} \sin \theta$
 $\Rightarrow \sin \theta = \sin \theta_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sim 3\text{-я величина}$

Величина $\epsilon(z) = \sin^2 \theta_0 = \frac{k_z^2(z)}{k_0^2} \rightarrow 0$ по мере приближения к $k_z = 0 \Rightarrow k_z(z) = \frac{2\pi}{\lambda_2(z)} \Rightarrow \lambda_2 \rightarrow \infty$
 → процесс не-т.б. медленн.

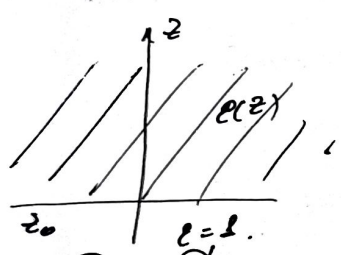


← волна идет по z
 $\epsilon = 1 - \frac{z}{L} \sim$ есть точное решение (ф-я Эйри.)

$C_2 = C_1 e^{i \frac{\pi}{2}}$

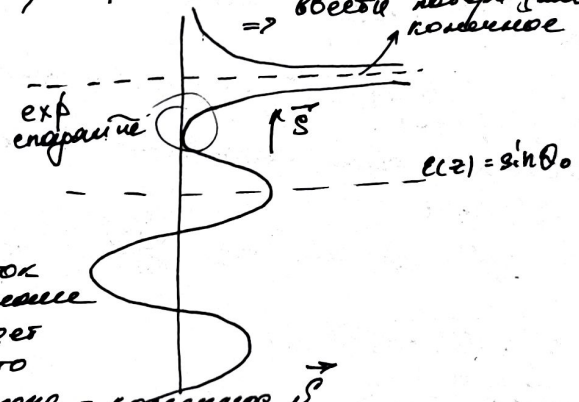
~ без разл-ва. → при обращении в координаты фазы скачком меняется на $\frac{\pi}{2}$.

вот условие формирования: $\lambda_2(z) \ll L_2$ не работает далее, когда волна не доходит до координаты z_0 для $\lambda_1(z)$ непрерывно аппроксимировать в прекуассимптотической области.



$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sim (z - z_0)$; $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m} \sim (z - z_0)$

⇒ ввести потери (маленькие) чтобы избежать большого лог



Т.е. $\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz}$, ϵ можно перейти через "0"

$\epsilon(z) = 0$ при потере энергии возникает поток энергии т.е. резонансное поглощение энергии → в отраженной волне будет меньше энергии → фронты не имеют стоячей волны, мало потерь и без потерь = резонанс $\vec{S}$

22. Функция Грина неоднородного волнового уравнения при произвольной зависимости от t и $\vec{r}$.

Используем закон сохранения энергии в бездисперсионной среде. В однородных линиях получаем уравнение неоднородного волнового уравнения для скалярного потенциала (для продольной, бездисперсионной, изотропной среды без дисперсии):

$$\square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t), \quad \square = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$$\square \varphi = -\frac{4\pi \rho(\vec{r}, t)}{c}$$

Для записи этих уравнений используем потенциалы Лоренца: $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. Зависимость зарядов и токов (зарядов) от $t, \vec{r}$ - произвольная. (одно из уравнений выполняется уравнение непрерывности $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$)

$$\vec{j}(\vec{r}, t), \rho(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t), \varphi(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Обозначим буквой ψ модуль из функции $\vec{A}$, а буквой φ - модуль из величин (или φ) $\frac{\mu \chi \psi}{c}$, либо $\frac{\rho}{c}$.

$$\Rightarrow [\square \psi(\vec{r}, t) = -4\pi \rho(\vec{r}, t)] \text{ - неоднородное волновое уравнение}$$

Функция Грина / общее решение неоднородного волнового уравнения: (при произвольной зависимости от времени для функции без дисперсии).

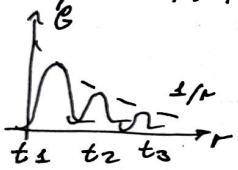
Найдем ф-ию Грина решения уравнения: $\square \psi = -4\pi \chi(t) \delta(\vec{r}) \rightarrow \psi = G(\vec{r}, t); \quad r = |\vec{r}|$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi \chi(t) \delta(\vec{r})$$

$\vec{r} \neq 0; \delta(\vec{r}) = 0 \Rightarrow G(r, t) = \frac{u(r, t)}{r}$ - радиационная сферическая волна.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \leftarrow \text{общее решение такого уравнения: } u(r, t) = f(t - \frac{r}{v}) + f(t + \frac{r}{v})$$

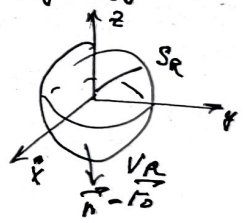
Смотрим f : $f = \cos \omega t \Rightarrow t - \frac{r}{v} = \cos \omega t = -\frac{t_0}{v} \Rightarrow r = v(t - t_0)$



Очевидно, что слагаемое $G = \frac{f(t - \frac{r}{v})}{r}$ описывает радиационную сферическую волну, а слагаемое $G = \frac{f(t + \frac{r}{v})}{r}$ - сходящуюся.

Будем далее рассматривать радиер. волну:

$$\Delta G - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi \chi(t) \delta(\vec{r})$$



переведем в это уравнение $G = \frac{f(t - \frac{r}{v})}{r}$ и проинтегрируем по области V_R .

$$\int_{V_R} \Delta G dV = \oint_{S_R} \nabla G \cdot \vec{n} dS = \oint_{S_R} \frac{\partial G}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 / r = R$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f(t - \frac{r}{v})}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} f(t - \frac{r}{v}) - \frac{1}{v} \frac{1}{r} f'(t - \frac{r}{v})$$

$$\int_{V_R} \Delta G dV = -4\pi f(t - \frac{R}{v}) - 4\pi \left(\frac{1}{v} \right) f'(t - \frac{R}{v}) \Big|_{r=R} \Rightarrow \lim_{R \rightarrow 0} \int_{V_R} \Delta G dV = -4\pi f(t)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{V_R} (-1) \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dV = -\frac{1}{v^2} \lim_{R \rightarrow 0} \int_{V_R} \frac{1}{r} f''(t - \frac{r}{v}) dV = 0 \sim \text{т.е. возникает } \frac{R^2}{2}$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{V_R} \Delta G dV = 1 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow 0} \int_{V_R} (-4\pi \chi(t) \delta(\vec{r})) dV = -4\pi \chi(t)$$

Тогда имеем: $-4\pi f(t) = -4\pi \chi(t) \Rightarrow f(t) = \chi(t)$, таким образом функция Грина, есть:

$$G(\vec{r}, t) = \frac{\chi(t - \frac{r}{v})}{r}$$

Если смотреть $f(t + \frac{r}{v}) \Rightarrow G(r, t) = \frac{\chi(t + \frac{r}{v})}{r}$ и этого не хватает в силу граничных условий (будет не физическим из-за наличия источника).

$$\Rightarrow \square \psi = -4\pi \chi(t) \delta(\vec{r}) \rightarrow \psi = G(r, t) = \frac{\chi(t - \frac{r}{v})}{r}; \quad r = |\vec{r}|$$

Замечание: для уравнения $-4\pi \chi(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \Rightarrow \psi = G(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$

$$\text{Просто заменим радиус-вектор}$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0, t) = \frac{\chi(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{v})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

30. Функция Грина и общее решение неоднородного волнового уравнения при гармонической зависимости от времени. Представление векторного потенциала в виде интеграла по источнику излучения. Условие излучения.

Искомый вид будет иметь для полей, гармонически меняющихся во времени:

$$\chi(t) = \text{Re} \{ \chi_c(t) \}, \text{ где } \chi_c(t) = e^{i\omega t}$$

$$\chi(\vec{r}, t) = \chi(\vec{r}) e^{i\omega t} \rightarrow \chi(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \chi_c(\vec{r}, t) \} = \text{Re} \{ \chi(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$$

$$G(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ G_c(\vec{r}, t) \} = \text{Re} \{ G(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$$

Для комплексных амплитуд $\chi(\vec{r})$ имеем:

$$\Delta G_c + \kappa^2 G_c = -4\pi e^{i\omega t} \delta(\vec{r})$$

$$\Delta G + \kappa^2 G = -4\pi \delta(\vec{r})$$

$$G_c = \frac{\chi_c(t - \frac{r}{v})}{r} = \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{v})}}{r} = \frac{e^{-i\kappa r}}{r} e^{i\omega t}$$

$$\frac{\omega}{v} = \kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} \Rightarrow G(\vec{r}) = \frac{e^{-i\kappa r}}{r}, \quad r = |\vec{r}|$$

$$\Delta G + \kappa^2 G = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow \text{заменим переменную} \rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-i\kappa |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Это верно и для среды с дисперсией: $\epsilon(\omega), \mu(\omega)$, ведь при рассмотрении монохроматической волны $\omega = \text{const}$.

Решение волнового ур-я при гармонической зав-ти от времени.

Пусть потенциал имеет вид $\varphi = g(\vec{r}) e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \Delta \varphi_c + \kappa^2 \varphi_c = -4\pi g(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

$$\Delta \varphi + \kappa^2 \varphi = -4\pi g(\vec{r}) \quad (*)$$

Вспомогательная вторая интегральная формула Грина:

$$\int_V [G(\vec{r}', \vec{r}_1) \Delta \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_1) \Delta G(\vec{r}', \vec{r}_1)] dV' = \oint_S [G(\vec{r}', \vec{r}_1) \frac{\partial \varphi(\vec{r}_1)}{\partial n} - \varphi(\vec{r}_1) \frac{\partial G(\vec{r}', \vec{r}_1)}{\partial n}] dS'$$

$$\underbrace{\frac{e^{-i\kappa |\vec{r} - \vec{r}_1|}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} (-4\pi g(\vec{r}_1) - \kappa^2 \varphi(\vec{r}_1))}_{= -4\pi g(\vec{r}_1)} + \underbrace{4\pi \int_V \varphi(\vec{r}_1) \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) dV'}_{= \varphi(\vec{r})} = \oint_S \left[\frac{e^{-i\kappa |\vec{r} - \vec{r}_1|}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-i\kappa |\vec{r} - \vec{r}_1|}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right] dS'$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \int_V g(\vec{r}_1) \frac{e^{-i\kappa R}}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{e^{-i\kappa R}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-i\kappa R}}{R} \right] dS'$$

Рассмотрим область интегрирования на бесконечности $R \rightarrow \infty$. Будем считать, что источник замкнутый аф. области ф-ва.)
 При $R \rightarrow \infty$ $\varphi \sim \frac{e^{-i\kappa R}}{R}$ — условие излучения Зоммерфельда.

$$\Rightarrow R \rightarrow \infty: \oint_S [\dots] dS' = 0$$

$$G = \frac{e^{-i\kappa R}}{R}$$

решение для гармонической волны на бесконечности конечный излучатель однозначно определяет поведение математически строго условие Зоммерфельда:



$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} + i\kappa \varphi \right] = 0$$

если убывает R и.д. решение $\varphi = e^{-i\kappa R}$, чего не может быть, иначе функция не будет убывать.



Напишем решение ур-я Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + \kappa^2 \varphi = -4\pi g(\vec{r})$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V g(\vec{r}_1) \frac{e^{-i\kappa R}}{R} dV'; \quad \kappa = \kappa_0 \sqrt{\epsilon \mu}$$

$\varphi_c(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) e^{i\omega t}$ — для гармонического процесса.

Век. потенциал: $\Delta \vec{A} + \kappa^2 \vec{A} = -4\pi \vec{j}$, $\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial R} + i\kappa \vec{A} \right] = 0$
 — означает, что форма излучения сферическая, но и.д. каноническая радиация.
 В итоге $\kappa = \frac{\omega}{c}$, $\omega = 0 \Rightarrow \kappa = 0 \rightarrow$ решение лог в статике.

31. Общее решение неоднородного волнового уравнения при произвольной зависимости от времени. Представление потенциалов в виде интегралов по области источников. Уравнение Даламбера для отклонения ф-ции φ :

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi g(\vec{r}, t)$$

можно было использовать лишь для упрощения формул. Напомним, что ф-ция гармонической зависимости от времени для комплексной амплитуды φ имеет ур-е Гельмгольца

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -4\pi g(\vec{r})$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V g(\vec{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} dV'$$

Разложим источник $g(\vec{r}, t)$ в интеграл Фурье:

$$g(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (*)$$

тогда и решение нужно искать в виде спектра:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}, \omega) = \int_V g(\vec{r}', \omega) \frac{e^{-ikR}}{R} dV' \quad , \quad \text{где } k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} ; \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$$\Rightarrow \left[\varphi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{g(\vec{r}', \omega)}{R} e^{i\omega(t - \frac{R}{v})} dV' d\omega \right] \sim \text{общее решение, если есть дисперсия.}$$

Частный случай (без дисперсии): $\frac{v}{c} = 1 \Rightarrow v = c$ экв.

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{1}{R} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}', \omega) e^{i\omega(t - \frac{R}{v})} d\omega \right] dV' \quad - \text{сравниваем с представлением } g(\vec{r}, t). \quad (*)$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{g(\vec{r}', t - \frac{R}{v})}{R} dV' \quad , \quad \text{примая обозначение } [g] = g(\vec{r}', t - \frac{R}{v})$$

Про векторный потенциал:

Пусть ф-ция векторная, бездивергентная, но без дисперсии:

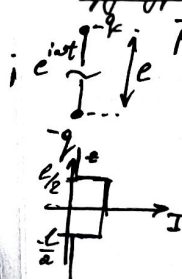
$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Решение в таком случае:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{v})}{R} dV' = \frac{1}{c} \int_V \frac{[\vec{J}]}{R} dV'}$$

Для произвольной зависимости от времени поле $\vec{A}$ распространяется на конечной скорости v и для каждого момента времени выполняется условие Заммерфельда.

82. Элементарный электрический диполь (диполь Герца). Общее выражение для поля излучения. Структура поля в квазистатическом и волновом зонах.



$\vec{p} = q\vec{l}$ — дипольный момент статического диполя.

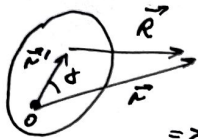
Мы забываем, что всё переменное

Элементарный излучатель: $l \ll \lambda$ (малый по сравнению с длиной волны.)
и таким образом, что выполняются условия дальнего поля: $l \ll r$
Начало координат либо внутри, либо в малой окрестности:
Упр-е для векторного потенциала:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} e^{-ikR} dV'$$

по теореме косинусов:

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta} = r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \theta + \frac{r'^2}{r^2}} \approx r \left(1 - \frac{r'}{r} \cos \theta\right)$$



можно сказать, что $R \approx r$ — только в знаменателе (но в экспоненте нет, там получается $\sin$ и $\cos$ — осциллирующие функции)

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \vec{j}(\vec{r}') e^{-ikr + ikr' \cos \theta} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \vec{j}(\vec{r}') e^{-ikr + ikr' \cos \theta} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \vec{j}(\vec{r}') e^{ikr' \cos \theta} dV'$$

смотрим на exp: $|kr' \cos \theta| \leq kr' \leq \frac{2\pi r'}{\lambda} \ll \pi \Rightarrow$ в силу условия (*) можем положить exp ≈ 1 .

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \vec{j}(\vec{r}') dV'$$

В разделе магнитостатика (разложение по мультиполям) была доказана формула для ограниченного в $\vec{r}$ -ве распределения источников:

$$\int \vec{j}(\vec{r}', t) dV' = - \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t) dV'$$

$$\Rightarrow \int \vec{j} dV = - \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = - \oint \vec{j} \cdot \vec{r} dV = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{е другое} \\ \text{свойство} \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{P} dV = \int \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} dV$$

т.е. если задан сторонний ток $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} = i\omega \vec{P}$, вернемся к нашему интегралу

$$\int \vec{j}(\vec{r}') dV' = i\omega \vec{P}, \text{ учитывая } \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} \text{ получим:}$$

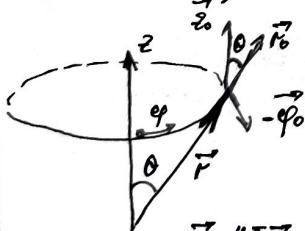
$$\boxed{\vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{P} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}}$$

если $r \rightarrow 0$, то решение является точным
 $\epsilon \rightarrow 0: \vec{P} = \vec{P}_0(\vec{r})$

$$\vec{j} = i\omega \vec{P} = i\omega \vec{P}_0(\vec{r})$$

Переходим к вычислению полей:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla}, \mu_0 \epsilon_0 \vec{P} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}] = \mu_0 \epsilon_0 [\vec{\nabla}, \frac{e^{-ikr}}{r}] \cdot \vec{P}_0 = \mu_0 \epsilon_0 (-ik - \frac{1}{r}) \frac{e^{-ikr}}{r} [\vec{r}_0, \vec{z}_0] = -\frac{\epsilon_0}{r^2} \sin \theta$$



$$= \frac{\epsilon_0}{r^2} \mu_0 P_0 \sin \theta \left(-\frac{k_0 k}{r} + \frac{i k_0}{r^2} \right) e^{-ikr}$$

$$B_\phi = \mu H_\phi$$

$$\Rightarrow \left\{ H_\phi = \left(\frac{i k_0}{r^2} - \frac{k_0 k}{r} \right) P_0 \sin \theta e^{-ikr} \right\}$$

$$\text{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \quad r \gg r_0: \vec{j} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_\phi \\ \vec{H}_\theta \\ \vec{H}_r \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_\phi \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_r \\ \vec{E}_\theta \\ \vec{E}_\phi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_r \\ \vec{E}_\theta \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{k_0 \epsilon} \text{rot} \vec{H} = -\frac{1}{k_0 \epsilon} \cdot \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_\phi \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_r \\ \vec{E}_\theta \\ 0 \end{array} \right\}$$

если всё расписать: $E_r = -\frac{1}{k_0 \epsilon} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot H_\phi)$; $E_\theta = \frac{1}{k_0 \epsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi)$

Аналогично представляем все выкладки и представим H_ϕ можно получить:

$$\textcircled{I} \left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2ik}{r} \right) e^{-ikr} P_0 \cos \theta \\ E_\theta = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} - \frac{k^2}{r} \right) e^{-ikr} P_0 \sin \theta \\ H_\phi = \left(\frac{ik_0}{r^2} - \frac{k_0 k}{r} \right) e^{-ikr} P_0 \sin \theta \end{array} \right.$$

$$\sim \text{комплексная амплитуда}$$

Получим реальные величины:

$$P e^{i\omega t - ikr} = P e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}$$

$$i\omega P e^{i\omega t - ikr} = \frac{\partial}{\partial t} P e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}$$

$$-\omega^2 p e^{i\omega t - ikr} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} p e^{i\omega(t - \frac{r}{v})}$$

$$Re \{ p e^{i\omega t} \} = p(t)$$

$$\Rightarrow Re \{ p e^{i\omega(t - \frac{r}{v})} \} = p(t - \frac{r}{v}) = [p]$$

$$Re \{ i\omega p e^{i\omega(t - \frac{r}{v})} \} = \frac{\partial}{\partial t} p(t - \frac{r}{v}) = [\dot{p}]$$

$$Re \{ -\omega^2 p e^{i\omega(t - \frac{r}{v})} \} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(t - \frac{r}{v}) = [\ddot{p}]$$

$$\Rightarrow Re \{ E_{r0} e^{i\omega t} \} = E_{r0}(r, t)$$

$$Re \{ H_{\phi} e^{i\omega t} \} = H_{\phi}(r, t) \quad , \quad \kappa_0 = \frac{\omega}{c} \quad , \quad \kappa = \frac{\omega}{v}$$

$$\textcircled{II} \quad \begin{aligned} E_r(r, t) &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{2[p]}{\kappa^2} + \frac{2[\dot{p}]}{v\kappa^2} \right) \cos\theta \\ E_{\theta}(r, t) &= \frac{1}{r^3} \left(\frac{[p]}{\kappa^2} + \frac{[\dot{p}]}{v\kappa^2} + \frac{[\ddot{p}]}{v^2\kappa} \right) \sin\theta \\ H_{\phi}(r, t) &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{[p]}{\kappa^2} + \frac{[\dot{p}]}{v\kappa} \right) \sin\theta \end{aligned}$$

} ~ векторные поля при этом $\epsilon = \epsilon(\mu)$
 $\mu = \mu(\omega)$

- 1) I и II являются решениями для точечного излучателя
 - 2) Проверка II с помощью сравнения для параметризуемых сфер (при произвольной зависимости от времени дипольного момента $p = p(t)$).
структура поля диполя Гюгса в радиальной области (в вакууме гармонической зависимости).
- В случае точечного диполя условия $\epsilon \ll \lambda$, $\epsilon \ll \lambda$ выполняются автоматически, т.к. $\epsilon \rightarrow 0$.

Зона квазистатики. (можно предположить задерживанием)

$$\kappa r \ll 1, \text{ т.е. } r \ll \lambda$$

можно обделить зону квазистатики условием:
 $\epsilon \ll r \ll \lambda$

тогда: $\frac{r}{v} \ll \tau_{\text{зап.}} \ll \tau = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \left(\frac{\omega}{v} \right) r \ll 2\pi$ (аналогично $\kappa r \ll 1$)

Возьмем выражение $\textcircled{II}$ и с учетом условий выше будут выполняться неравенства:
 $\frac{1}{r^2} \gg \frac{\kappa}{r^2} \gg \frac{\kappa^2}{r}$

пренебрежем выражения для полей:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2p \cos\theta}{\epsilon r^2} \\ E_{\theta} &= \frac{p \sin\theta}{\epsilon r^2} \\ H_{\phi} &= \frac{i\kappa p \sin\theta}{\mu} \end{aligned}$$

совпадает с полем диполя из электростатики. Проверим:

$$\vec{E} = -\nabla \left(\frac{(\vec{p}, \vec{r})}{\epsilon r^3} \right) = \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{3\vec{r}(\vec{p}, \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right\}$$

$\Rightarrow E_r = \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{3pr}{r^3} - \frac{pr}{r^3} \right\} = \frac{2pr}{\epsilon r^3} = \frac{2p \cos\theta}{\epsilon r^2}$

$$E_{\theta} = -\frac{p\theta}{\epsilon r^3} = -\frac{(-p \sin\theta)}{\epsilon r^3} = \frac{p \sin\theta}{\epsilon r^2}$$

Но во вращении магнитного поля гармоническая структура магнитных линий:

$$E_{r0} \sim \frac{1}{r^2}; H_{\phi} \sim \frac{1}{r^2}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

то будет с $\vec{S} = \frac{c}{8\pi} Re [\vec{E}, \vec{H}^*] \rightarrow H_{\phi} i \rightarrow -i$

$$p r^* = |p|^2$$

получим нулевое выражение.

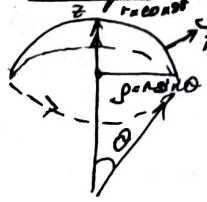
$$\Rightarrow \vec{S} = 0?$$



Но источник излучает, откуда берется энергия? Но это лишь прибл. значения, ожидаемое сглаженное диффузное $\vec{S} \neq 0$ (именно они обеспечивают для переноса энергии).

Вблизи диполя демонстрируется магнитное с $\frac{1}{r^2}$ по дальности демонстрируется структура с $\frac{1}{r}$ как у расходящихся сферических волн.

2й вопрос: автоматически ли поле показано логичным способом? Нет! пот $\vec{H} \neq 0$ и пот $\vec{H}$ ведет к созданию тока магнитного, даже дальше от источника (тока магнитного).



Рассматриваем аналогичную в.14 *

$$\vec{H} \nabla \vec{E} = \frac{1}{c} \nabla \int \vec{E} \vec{S}$$
$$i\kappa \epsilon \int E_{r0} S_r$$

$$M_{\varphi} \sin \theta = i k_0 \epsilon \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r \sin \theta'}{r^2} r^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

$$\Rightarrow M_{\varphi} \sin \theta = i k_0 \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^R \sin \theta' r^2 d\theta' d\varphi' \rightarrow M_{\varphi} = \frac{i k_0 \rho \sin \theta}{r^2}$$

Второй способ (неформальный) → исл-ть з-н Био-Савара:

$$\text{стронтия } \vec{j} = i\omega \vec{P} = i\omega \vec{p} \delta(\vec{r}) = i\omega \vec{p} \delta(\vec{r}) [\vec{r}(\vec{r}'), \vec{r}'] = i k_0 \rho \int \frac{[\vec{r}_0, \vec{r}_0']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}' = \frac{i k_0 \rho [\vec{r}_0, \vec{r}_0']}{r^2}$$

$$\Rightarrow M_{\varphi} = \frac{i k_0 \rho \sin \theta}{r^2}$$

Нельзя так делать, т.к. з-н Био-Савара это решение ур-н:

$$\text{пот } \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \vec{H} \quad (\text{действительн div})$$

$$\Rightarrow \text{div } \text{пот } \vec{H} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{j} = 0 \text{ — так должен быть ток, а у нас есть разрыв на границе.}$$

если взять $\text{пот } \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{j} + \frac{c}{4\pi} \vec{j}_{\text{св}}$ → $\text{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{св}}) = 0$
 исл-ть не абсолютна — можно брать с током смещения, и ответ будет правильным из-за того, что ток смещения сбалансирован.

Что будет внутри от диполя?

~ пусть диаметр $\lambda \ll r \Rightarrow k \ll 1$ — зона широчин. Можно использовать уравнения равновесия, но работает условие: $k \ll 1$

Если учесть еще разность $r \gg \lambda \Rightarrow k \gg 1$ — вановская зона → выполняется:

$k \ll 1 \ll k$ → должны соответствовать условиям более высоких степеней, получим:

$$\frac{1}{r} \sim E_0 = -\frac{k^2}{\epsilon} \frac{e^{-ikr}}{r} \rho \sin \theta$$

$$M_{\varphi} = -k_0 k \frac{e^{-ikr}}{r} \rho \sin \theta = \frac{E_0}{2}$$

$$E_r = \frac{2ik}{\epsilon} \frac{e^{-ikr}}{r^2} \rho \cos \theta$$

используем $k = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$, $\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ — волновой момент ширине фронта.

$$\rho = |\rho_0| e^{i\varphi} \rightarrow \omega t - k r + \varphi = \text{const} \sim \text{ур-е постоянной фазы} \Rightarrow \text{сфера}$$

Можно заметить, что E и H в фазе → значит не нулевой вклад в $\vec{S}$
 $\vec{E} = E_0 \vec{\rho}_0$, $\vec{H} = M_{\varphi} \vec{\varphi}_0$; $\vec{r}_0 = \vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \rho [\vec{H}, \vec{r}] \text{, используем } [\vec{\varphi}_0, \vec{r}_0] = \vec{\rho}_0, [\vec{r}_0, \vec{\rho}_0] = \vec{\varphi}_0$$

в волновой зоне поляризация как у плоской волны.

Если выполнено условие с расстоянием: $r \ll \Delta r \ll \lambda$

Значит волна внутри сферы Δr .

Как изменяется амплитуда?

$$\frac{1}{r} \sim \frac{1}{r + \Delta r} \sim \frac{1}{r} \text{ — по } r \text{ не заметим сдвига.}$$

Если посмотреть по углу:

$$\sin \theta \approx \sin(\theta + \Delta \theta)$$

$$\Delta \theta = \frac{\Delta r}{r} \ll 1$$

→ значит изменение по углу тоже не заметим.

⇒ Наблюдатель скажет, что волна плоская (но это формально справедливо).

Какое велико амплитуда поля в разных зонах:

$\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^3}$ — множители уменьшаются на одной деке везде, но разное по величине. Поля разрабатывают у диполя!



33. Дифракция направленности излучения по мощности. Соотношение излучения. Взаимосвязь
 для дифракции направленности, лемма мощности излучения и соотношения
 излучения элементарного электрического диполя.

Плотность потока энергии: $\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}[\vec{E} \vec{H}^*]$

В волновод зоне: $\kappa \gg 1$: $E_0 = -\frac{c^2}{e} \frac{e^{-i\kappa r}}{r} p \sin \theta$

$H_\varphi = \frac{E_0}{Z}$

$\Rightarrow \vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} E_0 \cdot \frac{E_0^*}{Z} \left[\vec{e}_0, \vec{e}_0 \right] = \vec{e}_0 \cdot \frac{c}{8\pi Z} |E_0|^2 \rightarrow$ представляя E_0 : (+ учитываем, что r и.б. комплексной $\rightarrow$ с фазой).

$\Rightarrow S_r = \frac{c}{8\pi} \frac{\kappa^4 |p|^2}{e^2 \eta r^2} \sin^2 \theta$, где $\kappa = \kappa_0 \sqrt{\epsilon \mu}$, $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

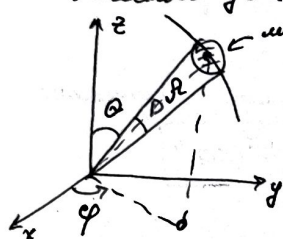
Можно по формуле:

$S_r = \frac{c}{8\pi} \mu \sqrt{\epsilon \mu} \cdot \frac{\kappa^4 |p|^2}{e^2 \eta r^2} \sin^2 \theta$, при $\theta = 0, \pi$: $S_r = 0$

Энергия не преобразуется по θ и φ - поверхности макс: $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin^2 \theta = 1$.

Дифракция направленности излучения по мощности.

~ по определению это - угловое распределение мощности, излучаемой в единицу телесного угла.



малый элемент угла.

$\Delta P = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Delta \Omega} S_r r^2 d\Omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Delta \Omega} S_r r^2 d\Omega$

$r \rightarrow \infty$ - чтобы не зависеть от масштаба или зоны

$\Rightarrow D(\theta, \varphi) = \lim_{\Delta \Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta \Omega}$

применяем теорему о среднем:

$\Delta P = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Delta \Omega} S_r r^2 d\Omega = \lim_{r \rightarrow \infty} S_r \cdot r^2 \Delta \Omega \Rightarrow D(\theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} S_r(r, \theta, \varphi) r^2$

Составим вместе для элементарного диполя: $S_r = \frac{c}{8\pi} \frac{\kappa^4 |p|^2}{e^2 \eta r^2} \sin^2 \theta$

рисует:



$\Rightarrow D(\theta, \varphi) = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{e^2 \eta} \kappa^4 |p|^2 \sin^2 \theta$

Число строк дифракции направленности и фазовые соотношения.

Если форма строк может не быть такая дифракция направленности? Нет, необходимо быть и может - не обязательно.

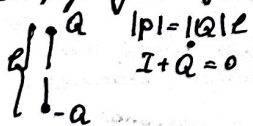
Полная мощность излучения элементарного диполя.

$P_\Sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} D(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{c}{8\pi} \frac{1}{e^2 \eta} |p|^2 \kappa^4 \sin^3 \theta d\theta d\varphi$

отдельно: $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1) d\cos \theta = \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) \Big|_0^\pi = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow P_\Sigma = \frac{1}{3} \frac{c}{e^2 \eta} \kappa^4 |p|^2$

Из формулы видно: $P_\Sigma \sim \omega^4 |p|^2$



$I + \dot{Q} = 0 \rightarrow I = -\dot{Q}$ - т.к. процесс гармонический.

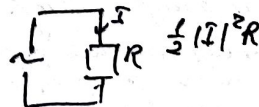
$-i\omega Q \Rightarrow |Q| = \omega |Q| \rightarrow |p| = \frac{|Q|}{\omega} e$ - представим в P_Σ

$P_\Sigma = \frac{1}{3} \frac{c}{e^2 \eta} \kappa^4 \frac{1}{\omega^2} e^2 = \frac{1}{3} |I|^2 \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu^2}{\eta} (\kappa_0 e)^2$

$P_\Sigma = \frac{1}{2} |I|^2 R_Z$

равняем $R_Z = \frac{e}{3c} \frac{\mu^2}{\eta} (\kappa_0 e)^2$
 ~ величина сопротивлений и соотношения излучения.

От соотношения излучения - величина, равная активной мощности, на которой при име той излучающей, выделяется мощность излучающей мощности



$\Rightarrow R_Z = \frac{1}{e} \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu^2}{\eta} (\kappa_0 e)^2$

Возьмем диполь излучает в вакууме: $\epsilon = \mu = 1$. $\Rightarrow R_Z^{(0)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (\kappa_0 e)^2$

* правило перекреста в ЗЛ: $\frac{1}{2} \rightarrow 30 \text{ (Ом.)}$; $\kappa_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

$\Rightarrow R_{\Sigma \Sigma}^{(0)} = 80 \mu^2 \left(\frac{e}{\lambda_0} \right)^2 [\text{Ом}]$

87. Элементарный магнитный диполь. Структура поля в волновой зоне, диаграмма направленности и линия излучения излучения. Сопротивление излучения дурового вибратора магнитных электрических радиаторов



Этого действии по принципу представления действительности. Далее представим в виде вибратора с токами.

Радиус характеризует магнитным моментом: $\vec{p}^m = \frac{I}{c} \vec{S} \vec{n}$, где $S = \pi a^2$

Если $a \ll \lambda$, то поле вибратора совпадает (при $r \gg a$) с полем элементарного магнитного диполя. Поле магнитного диполя описывается из формул для электрического с помощью ППА:

Из формул (I) $\vec{r}^e \rightarrow \vec{r}^m; \vec{E} \rightarrow \vec{H}; \vec{H} \rightarrow -\vec{E}; \epsilon \rightarrow \mu; \mu \rightarrow \epsilon; \eta \rightarrow \frac{1}{\eta}$

$$\begin{cases} E_r = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r^3} + \frac{2ik}{r^2} \right) e^{-ikr} p^m \cos\theta \\ E_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) e^{-ikr} p^m \sin\theta \\ H_\varphi = \left(\frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) e^{-ikr} p^m \sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_r = \frac{1}{\mu} \left(\frac{2}{r^3} + \frac{2ik}{r^2} \right) e^{-ikr} p^m \cos\theta \\ H_\theta = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) e^{-ikr} p^m \sin\theta \\ E_\varphi = - \left(\frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) e^{-ikr} p^m \sin\theta \end{cases}$$

Аналогично для диаграммы направленности:

$$D^e(\theta, \varphi) = \frac{e}{\delta \delta} \cdot \frac{1}{\epsilon^2 \eta} k^4 |p^e|^2 \sin^2 \theta \Leftrightarrow D^m = \frac{e}{\delta \delta} \cdot \frac{1}{\mu^2} k^4 |p^m|^2 \sin^2 \theta \sim \text{функционально вид не меняется.}$$

Нужно понимать, что всё это справедливо в волновой зоне $L \ll \lambda$ ($L \ll r$), где $L \approx a$.

$$R_\Sigma^e = \frac{1}{3} \frac{e}{\epsilon^2 \eta} k^4 |p^e|^2 \Leftrightarrow R_\Sigma^m = \frac{1}{3} \frac{e}{\mu^2} k^4 |p^m|^2$$

Подставим выражение для p^m :

$$\Rightarrow R_\Sigma^m = \frac{1}{3} \frac{e}{\mu^2} k^4 \cdot \frac{\mu^2}{c^2} |\vec{I}|^2 (\pi a^2)^2 = \frac{|\vec{I}|^2}{2} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{2}{3} \eta \pi^2 (ka)^4 \Rightarrow \boxed{R_\Sigma^m = \frac{1}{3} \frac{2}{3} \eta \pi^2 (ka)^4}$$

Сопротивление излучения:

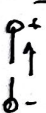
В вакууме $\epsilon = \mu = 1$: $R_\Sigma^{(0)} = \frac{1}{3} \frac{2}{3} \pi^2 (ka)^4$

Можно задать вопрос: какой излучатель эффективнее? Пусть радиаторы одинаковы и одинаковы ток: $R_\Sigma \sim (ka)^2$ для вибратора $L \ll \lambda$ | $a \ll \lambda$ При равных условиях излучения $R_\Sigma^m < R_\Sigma^e$

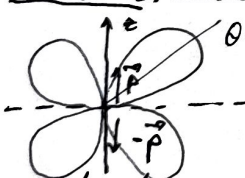
$$R_\Sigma^m \sim (ka)^4$$

$\Rightarrow$ Магнитный диполь излучает много хуже электрический, если линейные размеры обоих диполей одинаковы и одинаковы ток обоих излучателей.

Физически: если нарушаем в какой-то момент t эл. диполь. $\rightarrow$ у него заряды перекосятся $\rightarrow$ это всегда противоположные токи $\rightarrow$ то вверх, то вниз. $\rightarrow$ рамки с током в данный момент перпендикулярны друг от друга.



Замечание: можно считать и для более сложных излучателей (мультиполь):



$\theta = \frac{\pi}{4}$ - симметр. расщепленные диполь, колеблется в фазе вибратора. $\vec{r}^e \downarrow \vec{r}^m$ - квадратично.

$\sim$ так имеет больше вариаций $\rightarrow$ получается больше лепестков. Чем выше порядок мультиполя $\rightarrow$ больше изрезанная ДН.

1) При радиальной шесте лепестков, диаграмма обстоит с масштабом $L \ll \lambda$, поле можно считать результатом суперпозиции полей элементарных мультиполей, лежащих в начале координат.

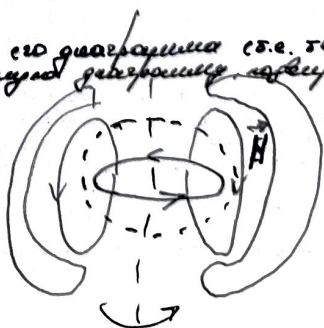
2) Все диполи имеют различные диаграммы, но их поля в волновой зоне складываются $\rightarrow$ переходят в сферическую волну.

3) В более точных расчетах это справедливо при $kr \gg 1$, где k - число волн от источника.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow r \gg \lambda \sim \text{волновая зона 1-го диполя.}$$

4) Чем выше порядок мультиполя, тем более "изрезана" его диаграмма с.е. тем более резкие лепестки диаграммы. Можно задавать неоднородные радиально-поперечные мультиполи.

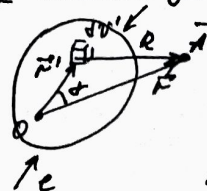
Если полярный наблюдатель далеко от магнитного диполя, а не стилист его от электрического, т.е. структура поля в принципе остается той же.



35. Общее представление поля излучения флуидальной системы заданных геометрических форм в дальней зоне. Вектор излучения.

У источника габаритов может быть флуидальной размер

36. Дальняя зона - это зона, где поля E и H подчиняются закону $\frac{1}{r}$. Н.к. лежит в области источника. (L - характерный размер источника.)



Должны выполняться условия:

- 1) $r \gg L$
- 2) $\frac{\sqrt{\lambda r}}{L} \gg 1$ (зона Фраунгофера)
- 3) $kr \gg \pi \gg 1$ условие волновой зоны, где π - число волновых зон

Дальняя зона.

Совокупность условий 1) - 3) определяет дальнюю зону флуидальной системы заданных геометрических форм.

Почему равные не возникло 4е условие? Оно выполнялось автоматически:

$$\frac{\sqrt{\lambda r}}{L} = \sqrt{\frac{\lambda}{L}} \cdot \frac{r}{L} \gg 1, \text{ т.к. было } L \ll \lambda; L \ll r.$$

Используем общую формулу для векторного потенциала:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} dV'$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta} = r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \theta + \frac{r'^2}{r^2}} = \begin{cases} \text{так } r' \ll r \\ \text{получим из условия 1), тогда } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots \end{cases} =$$

$$\Rightarrow R \approx r \left\{ 1 - \frac{r'}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} - \frac{1}{8} \cdot 4 \frac{r'^2}{r^2} \cos^2 \theta + \dots \right\} = r \left\{ 1 - \frac{r'}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} \sin^2 \theta + \dots \right\}$$

тогда:

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r(1 - \frac{r'}{r} \cos \theta)} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'}{r} \cos \theta \right) \leftarrow \text{в знаменателе.}$$

подставив, получим:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \left(1 + \frac{r'}{r} \cos \theta \right) e^{-ikr + ikr' \cos \theta - ikr \frac{r'^2}{2r^2} \sin^2 \theta} dV'$$

Из условия 2) хотим сделать в экспоненте:

$$kr \frac{r'^2}{2r^2} \sin^2 \theta \leq \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{L^2}{2r} = \pi \cdot \frac{L^2}{\lambda r} \ll \pi \rightarrow \text{можно пренебречь.}$$

перепишем:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \left(1 + \frac{kr'}{r} \cos \theta \right) e^{-ikr + ikr' \cos \theta} dV'$$

Дополним введем волновой вектор: $\vec{k} = k\vec{r}_0$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \left\{ \int \vec{j}(\vec{r}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} dV' + \frac{ik}{r} \int \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} dV' \right\} \rightarrow \text{отдельно анализируем интегралы:}$$

$\vec{N}$ - вектор излучения (суммарное направление излучения) - по сути пространственное преобразование Фурье.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \vec{j}(\vec{r}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} dV' \sim \text{Фурье спектр радиационной сферической волны.}$$

Оцениваем отдельно:

$$\vec{N}_{\text{пр}} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') [k_x x' + k_y y' + k_z z'] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} dV' = \left\{ \begin{array}{l} \text{по сути радиация} \\ \text{на } \vec{N} \text{ интеграла} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \{ \vec{I}_x + \vec{I}_y + \vec{I}_z \}$$

сделаем отдельно:

$$\vec{I}_x = \int k_x x' \vec{j}(\vec{r}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} dV' = \left\{ \begin{array}{l} \text{можно брать форму интегрирования} \\ \text{от } -\infty \text{ до } +\infty \text{ т.к. источник бесконечно мал} \\ \text{заменим координатную систему} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x x' + ik_y y' + ik_z z'} dy' dz' \int k_x x' \vec{j}(\vec{r}') e^{ik_x x'} dx' \equiv i \int \vec{j}(\vec{r}') + x' \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}')}{\partial x'} e^{ik_x x'} dx'$$

$$\int k_x x' \vec{j}(\vec{r}') e^{ik_x x'} dx' = (-i) \int x' \vec{j}(\vec{r}') d(e^{ik_x x'}) = (-i) \left[x' \vec{j}(\vec{r}') e^{ik_x x'} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \vec{j}(\vec{r}') e^{ik_x x'} dx' \right]$$

Тогда получим:

$$\vec{N}_{\text{пр}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int \vec{j}(\vec{r}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} dV' + \int \left(x' \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}')}{\partial x'} + y' \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}')}{\partial y'} + z' \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}')}{\partial z'} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} dV' \right\}$$

из условия 3) $|\vec{N}| \gg \frac{\partial \vec{N}}{\partial r}$, т.к. $kr \gg 1$ $\frac{\partial \vec{N}}{\partial r} \sim \frac{1}{r}$ т.е. этим слагаемым можно пренебречь.

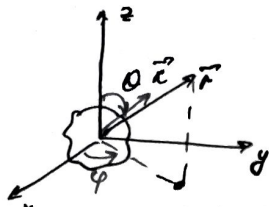
Оценим второе слагаемое:

$$x' \frac{\partial \vec{j}}{\partial x'} + y' \frac{\partial \vec{j}}{\partial y'} + z' \frac{\partial \vec{j}}{\partial z'} \sim \frac{L}{\lambda} \sim \pi \vec{j} \text{ (число волновых зон)}$$

$$\Rightarrow \vec{N}_{\text{пр}} = \frac{1}{4\pi} \{ 3\vec{N} + \pi \vec{N} \}, \text{ учитывая 3) } \rightarrow kr \gg \pi \gg 1 \Rightarrow |\vec{N}| \gg \frac{\partial \vec{N}}{\partial r} \sim \text{тоже можно пренебречь.}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \frac{e^{-ikr}}{r} \vec{N}(\vec{r}) \quad , \quad \text{где} \quad \vec{N}(\vec{r}) = \int \vec{j}(\vec{r}') e^{i\vec{k}\vec{r}'} d\vec{r}' \quad \leftarrow \text{Фурье преобразование, не забыть "+" и "-" в exp.}$$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \vec{N}(k_x, k_y, k_z)$$



Компоненты в сферической системе координат:

$$\begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \varphi \\ k_y = k \sin \theta \sin \varphi \\ k_z = k \cos \theta \end{cases}$$

или представить $\Rightarrow \vec{N} = N(\theta, \varphi)$, т.е. в выражении $\vec{A}(\vec{r})$ разделив условно переменные:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \frac{e^{-ikr}}{r} \vec{N}(\theta, \varphi)$$

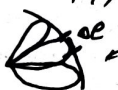
Векторная погрешность:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = [\nabla, \vec{A}] = [\nabla, \frac{1}{c} e^{-ikr} \frac{1}{r} \vec{N}(\theta, \varphi)]$$

Можно считать преобразованием фазы, если будем знать какая ф-я меняется быстрее, а какая медленнее. Если ф-я меняется медленно + фаза ф-я $\propto r$, основной вклад дает дифференцирование функции. (она меняется на малом масштабе.)

$\Rightarrow$ ищем самый маленький характерный масштаб:

$$e^{-ikr} \sim \lambda \quad ; \quad \frac{1}{r} \sim r \Rightarrow \vec{N}(\theta, \varphi)$$



чтобы сеть n -элементов будем использовать $\Delta l \sim r \frac{\Delta \theta}{n}$

$$\text{Сравним на границе } n \sim \frac{2\pi}{\lambda} \quad r \gg \lambda \Leftrightarrow \frac{\pi}{\lambda} r \gg n \Rightarrow \frac{\pi r}{\lambda} \gg n$$

$\Rightarrow$ характерный масштаб изменения $\vec{N} \gg \lambda$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \quad k r \gg 1 \rightarrow r \gg \lambda$$

$\Rightarrow$ самый маленький масштаб у e^{-ikr} ; тогда достаточно преобразовать ∇ только на экспоненту.

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [\nabla e^{-ikr}, \frac{1}{r} \vec{N}] = \{ \vec{r} \cdot \nabla, \frac{1}{r} \vec{N} \} = [-i\vec{k}, \vec{N}]$$

- является абсолютно точным для малых волн, но становится растоянием сферическая волна локально плоская.

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{\mu} [-i\vec{k}, \vec{E}]$$

$$\text{Ищем } \vec{E}: \text{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E} + \underbrace{\frac{1}{c} \nabla}_{=0} \quad \text{в дальней зоне.}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{\omega \epsilon} [\nabla, \vec{H}] \quad , \quad \text{учитывая, что } \nabla \sim -i\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{\omega \epsilon} [-i\vec{k}, \vec{H}] = \frac{1}{\omega \epsilon} [\vec{H}, \vec{k}] = \{ k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \}$$

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\vec{H}, \vec{k}] = \eta [\vec{H}, \vec{k}] = \eta [\vec{H}, \vec{n}]$$

$$\Rightarrow \{ \vec{E}, \vec{H}, \vec{k} \} - \text{правая тройка.}$$



$\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\epsilon}$ - всегда не дают.

36. Основание характеризации направленности излучающей системы (распределение направленности) - коэффициент направленного действия (КНД). Вектор направленности для диаграммы направленности излучения плоской системы антенных элементов

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*], \text{ используем } \vec{E} = \eta [\vec{H}, \vec{r}_0]$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{c}{8\pi} \eta \operatorname{Re} [\vec{H}, \vec{r}_0], \vec{H}^* = \frac{c}{8\pi} \eta [\vec{H}, \vec{r}_0]^* \vec{r}_0$$

$$\vec{S}(\vec{H}, \vec{H}^*) - \vec{H}(\vec{r}_0, \vec{H}^*) = 0 \sim \text{ортогональны в данной зоне}$$

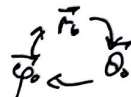
Вычисляем диаграмму направленности:

$D = S_{\text{max}} \cdot r^2 \sim$ уже предполагается, что работаем в дальней зоне (лит не пишем).

$$\vec{H} = \frac{A}{r} = \frac{1}{r} [-ik \vec{r}_0, \vec{A}] = \frac{1}{r} \frac{e^{-ikr}}{r} (-ik) [\vec{r}_0, N_0 \vec{r}_0 + N_\varphi \vec{\varphi}_0 + N_\theta \vec{\theta}_0] = \left\{ \text{применим правило векторного произведения} \right\} = \frac{1}{r} \frac{e^{-ikr}}{r} (-ik) \{ -N_\varphi \vec{\varphi}_0 + N_\theta \vec{\theta}_0 \}$$

$$D = S_{\text{max}} r^2 = r^2 \cdot \frac{c}{8\pi} \eta |\vec{H}|^2, \text{ учтем } |\vec{H}|^2 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2} k^2 \{ |N_\varphi|^2 + |N_\theta|^2 \}$$

$$\Rightarrow D(\theta, \varphi) = \frac{2}{8\pi c} k^2 \{ |N_\theta(\theta, \varphi)|^2 + |N_\varphi(\theta, \varphi)|^2 \}$$



Можно создать нормированную диаграмму направленности:

Берем при $\theta = \theta_{\text{max}}$ и $\varphi = \varphi_{\text{max}} \rightarrow D = D_{\text{max}}$.

$$\Rightarrow f(\theta, \varphi) = \frac{D(\theta, \varphi)}{D_{\text{max}}} = \frac{D(\theta, \varphi)}{D(\theta_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}})}$$

Коэф-т направленного действия: (КНА)

КНА ~ для мощности в направлении главного максимума D_{max} .

$$P_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \sim \text{суммарная мощность}$$

$\frac{P_z}{4\pi} \sim$ мощность в единицу телесного угла.

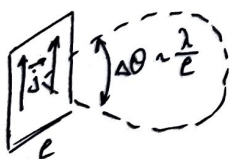
$$\Rightarrow \text{КНА} = \frac{D_{\text{max}}}{P_z / 4\pi}$$

Для антенн также вводится КПД (efficiency) - (какая-то часть мощности может быть излучена).

$$\text{КПА} = \frac{P_z}{P_{\text{вв}}} \leftarrow \text{приведенная мощность}$$

$G(\text{gain})$ - коэффициент усиления антенны:

$$G = \text{КПА} \cdot \text{КНА} = \frac{D_{\text{max}}}{P_{\text{вв}} / 4\pi}$$



Обычно говорят, что для получения узкой диаграммы нужна антенна больших электрических размеров. Это верно только для систем с симметричными токами. (с несимметричными радирующими элементами) - полнота на антенне.

Можно создать антенну малых электрических размеров. Для этого нужно лишь обеспечить высокую мультипольность источника. (т.е. ток в обл. излучения должен быть близок к идеальной функции коэффициента) $\rightarrow$ высокая директивность.

Обычно в реальности такие параметры неизвестны.

Иногда ток и концы проводов антенны, знаем лишь ток на концах $\rightarrow$ но ток идет в каб. с ГЧ и их нужно считать. (но для этого требуется теория.)