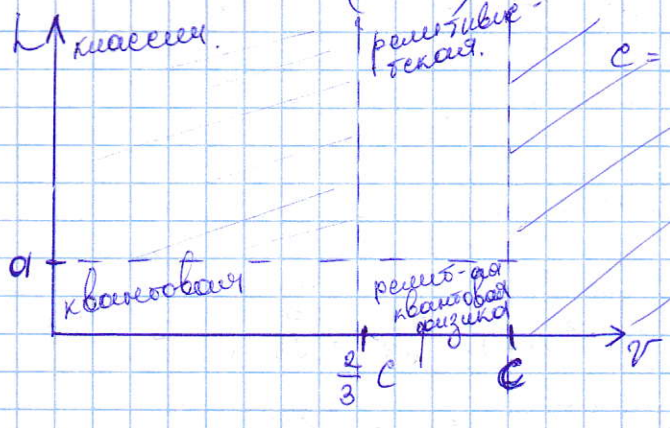
Физические основы механики.

Мех. движение – это изменение положения тел в пространстве, происходящее во времени. Движение однозначно опр., если указана система отсчёта.

Система отсчёта (СО) – система координат + ось времени



$c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$

$a \approx 10^{-7} - 10^{-6}$ см.

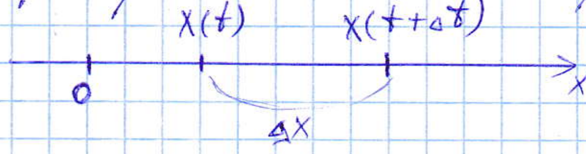
Кинематика материальной точки.

Кинематика даёт способы описания движения.

Материальная точка (МТ) – тело, размерами и формой которого можно пренебречь в данном конкретном случае. (мат. точка, частица, тело – в конкр. задачах.)

Кинематика прямолинейного движения.

Траектория – линия, по которой тело движется в пространстве



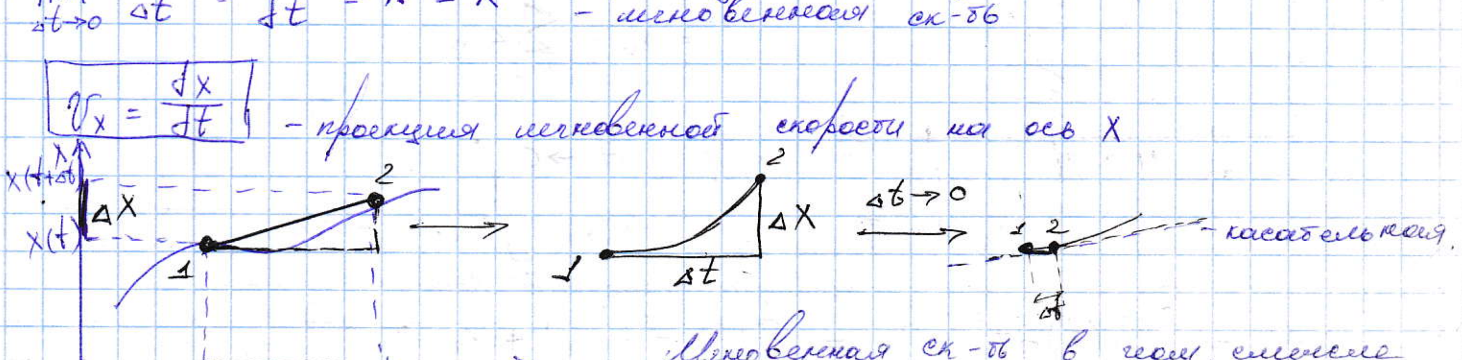
$x(t)$ – функция времени – закон движения МТ

$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$

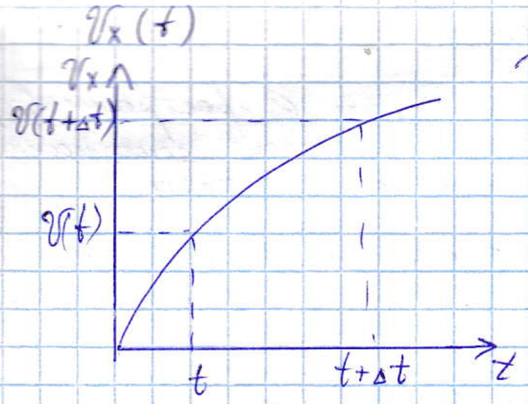
$\boxed{v_x^{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$ – проекция средней скорости МТ на ось X.

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x' \equiv \dot{x}$ – производная коорд. от времени (мат.)
– мгновенная ск-ть

$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}}$ – проекция мгновенной скорости на ось X



Мгновенная ск-ть в геом. смысле это касательная к функции $x(t)$.



$$\Delta v_x = v_x(t+\Delta t) - v_x(t)$$

$$\cancel{\frac{\Delta v_x}{\Delta t}} \quad \boxed{a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}}$$ — среднее ускорение

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \equiv \frac{dv_x}{dt} = v_x' = \dot{v}_x$$

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt}}$$ — мгновенное ускорение

Примеры:

1. $x(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^3$

α, β, γ — числа (const.)

$v_x(t),\ a_x(t)$ — ?

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha + \beta t + \gamma t^3) = \beta + 3\gamma t^2$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta + 3\gamma t^2) = 6\gamma t$$

Знаем $v_x(t) \to x(t) = ?$

1 способ: $x(t) = \int v_x(t)\,dt$

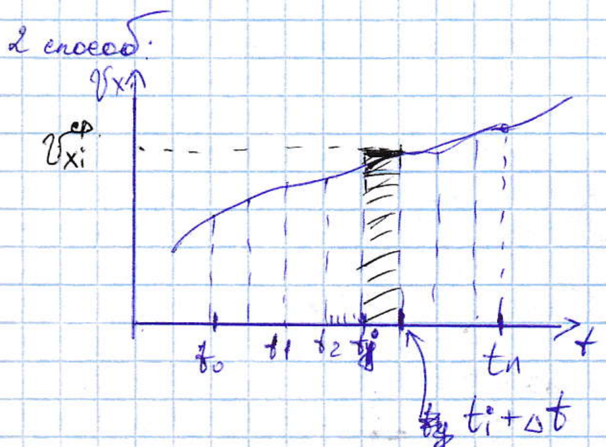
$$x(t) = \underbrace{F(t)}_{\text{первообразная}} + C$$ — постоянная интегрирования

Начальные условия: $x(t = t_0) = x_0$

$$\underbrace{x(t_0)}_{x_0} = F(t_0) + C \Rightarrow C = x_0 - F(t_0)$$

$$x(t) = x_0 + F(t) - F(t_0)$$

2 способ:



$$v_{xi}^{ср} = \frac{\Delta x_i}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x_i = v_{xi}^{ср} \cdot \Delta t$$

$$x(t) = x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_i + \ldots + \Delta x_n = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

При $\Delta t \to 0$

$$x(t) = \int^{t} v_x\,dt + x_0$$

формула Ньютона-Лейбница

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt' + x_0 = F(t) - F(t_0) + x_0$$

$x(t) = F(t) - F(t_0) + x_0$

Знаем $a_x(t)$
Нач. усл.:
$v_x(t=t_0) = v_0$

$v_x(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_x(t')\,dt'$

Пример:

$a_x(t) = A\cos\omega t$
A, ω - const

$v_x(t_0=0) = 0$
$x(t=0) = x_0$

$v_x(t) = ?$ $x(t) = ?$

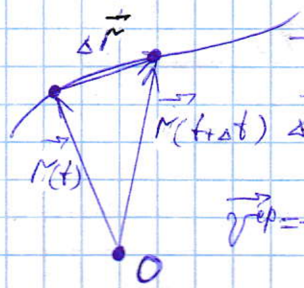
1) $v_x(t) = 0 + \int_0^t A\cos\omega t'\,dt' = A\cdot\frac{1}{\omega}\sin\omega t'\Big|_0^t = \frac{A}{\omega}\sin\omega t$

2) $x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{A}{\omega}\sin\omega t'\,dt' = x_0 - \frac{A}{\omega^2}\cos\omega t'\Big|_0^t = x_0 - \frac{A}{\omega^2}\cos\omega t + \frac{A}{\omega^2}$

Кинематика криволинейного движения.

$\Delta P \equiv \Delta r$ (ошибся в обознач.)

Способы описания движения м.т.



— траектория

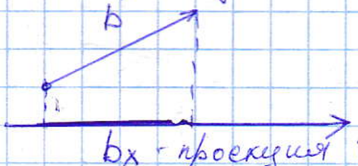
т. O - начало отсчёта.

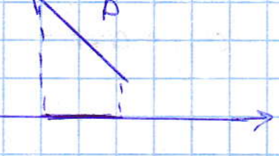
$\Delta\vec r = \vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)$ - вектор перемещения

$\vec v^{ср} = \frac{\Delta \vec{}}{\Delta t} \longrightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec r}{\Delta t} = \frac{d\vec r}{dt} = \vec r' \equiv \dot{\vec r}$

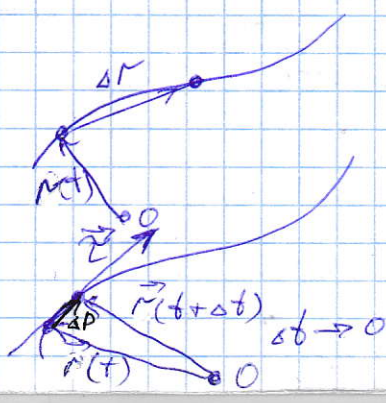
$\boxed{\vec v = \frac{d\vec r}{dt}}$ - мгновенная ск-ть

$\vec b$ - вектор
$b \equiv |\vec b|$ - модуль вектора, ≥ 0





b_x - проекция x $\gtrless 0$



$|\vec\tau| = 1$ - единичный вектор касательной

$\Delta\vec r \uparrow\uparrow \vec\tau$ $(\Delta t\to 0)$
$d\vec r \uparrow\uparrow \vec\tau$
$\vec v \uparrow\uparrow \vec\tau$ - мгновенная ск-ть напр. всегда по касательной к траектории

$\vec v = |\vec v|\cdot\vec\tau = v\cdot\vec\tau$

$$\vec{v}(t) \xrightarrow{\Delta t} \vec{v}(t+\Delta t)$$

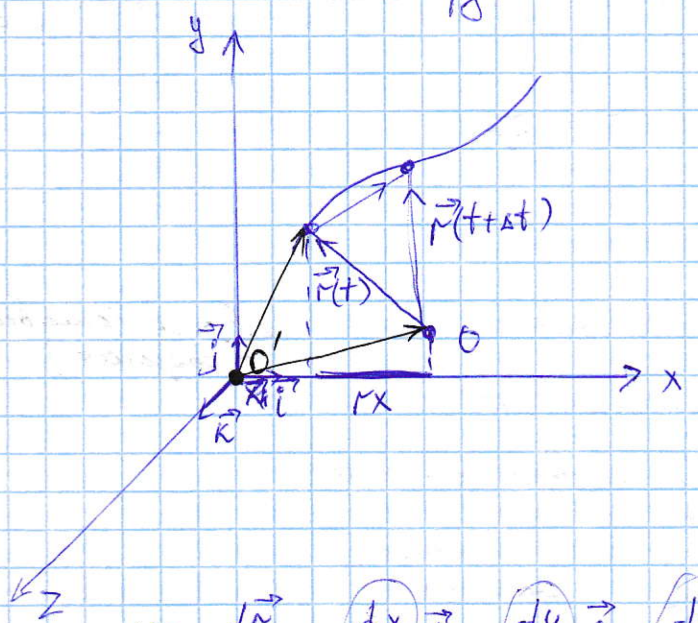
$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

$$\vec{a}^{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$ – среднее ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$ – мгновенное ускорение

Координатное представление
(координатный способ описания)



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{OO'}$$?

$$\vec{r}'(t+\Delta t) = \vec{r}(t+\Delta t) + \vec{OO'}$$

$$\Delta\vec{r}' = \vec{r}'(t+\Delta t) - \vec{r}'(t) = \Delta\vec{r}$$

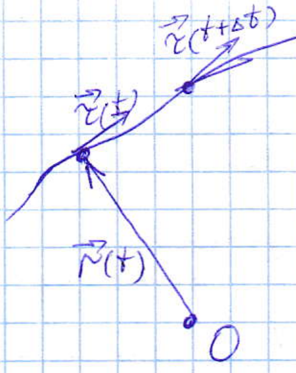
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v_x}\vec{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=v_y}\vec{j} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{=v_z}\cdot\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\cdot\vec{k}$$

~~$\vec{a} = a_x\vec{i}$~~

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Естественный способ описания
движения.
Нормальное и тангенциальное
ускорение.



$\vec v = v\vec\tau$

$|\vec\tau(t)| = |\vec\tau(t+\Delta t)| = 1.$

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{dv\cdot\vec\tau}{dt} + v\frac{d\vec\tau}{dt}$$

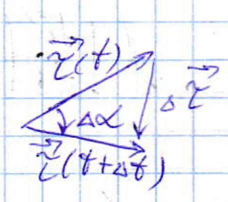
$\vec v\uparrow \Rightarrow \frac{dv}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt}\vec\tau \uparrow\uparrow \vec\tau$ — ск-ть со врем. растёт.

$\vec v\downarrow \Rightarrow \frac{dv}{dt} < 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt}\vec\tau \uparrow\downarrow \vec\tau$ — ск-ть со врем. убыв.

$\boxed{\vec a_\tau = \frac{d\vec v}{dt}\vec\tau}$ — тангенциальное ускорение

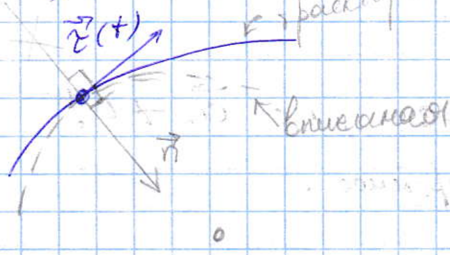
$\vec a_\tau \uparrow\uparrow \vec\tau$ — описывает как быстро или медленно меняется модуль скорости.

$v\frac{d\vec\tau}{dt}$ — отвечает за быстроту изменения направления ск-ти.



$\Delta\vec\tau = \vec\tau(t+\Delta t) - \vec\tau(t)$

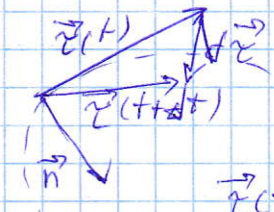
Если $\Delta t\to 0 \Rightarrow \Delta\alpha\to 0 \Rightarrow \Delta\vec\tau \perp \vec\tau$



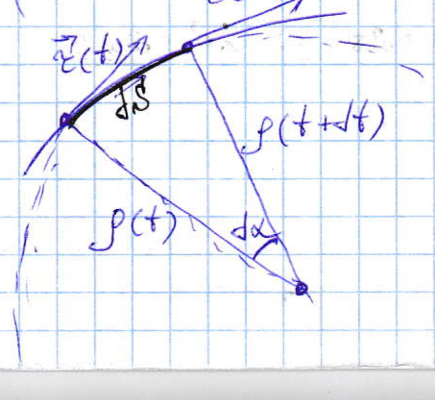
$|\vec n| = 1$ — ед. вектор нормали (напр. к центру впис. окружности.)

Новая система коорд. $(\vec\tau;\vec n)$

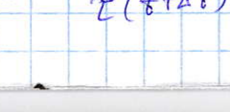
$\Delta t\to 0 \Rightarrow \Delta\vec\tau \to d\vec\tau \perp \vec\tau \Leftrightarrow d\vec\tau \parallel \vec n$



$\boxed{v\frac{d\vec\tau}{dt} \uparrow\uparrow \vec n}$ — нормальное ускорение

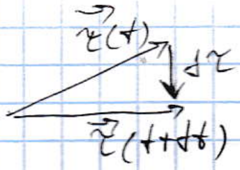


ρ — радиус кривизны траектории (радиус той окр. которую можно вписать в данную малую дугу траектории.)

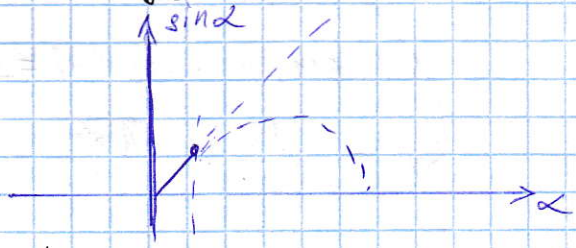


dS — длина траектории (дуги.)

$dS = \rho(t)\cdot d\alpha$ (в рад.)



$d\tau = \tau\, d\alpha$



$\sin\alpha \approx \alpha$
$\alpha \ll 1$

$tg\alpha = \sin\alpha = \alpha$ (в рад.) – при малых углах.

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{\tau}|}{dt} = \frac{\overset{1}{\tau}\, d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dS}{\rho \cdot dt} = \frac{1}{\rho}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{\rho}|\vec{v}| = \frac{v}{\rho}$$

$\boxed{\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}}$ – направление по нормали (уск-е следит за направлением вектором ск-ти.)

$dS = \rho(t)\cdot d\alpha$
$d\tau = \tau \cdot d\alpha$
$dS = |d\vec{r}|$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{\tau}|}{dt} = \frac{\tau\cdot d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dS}{\rho\, dt} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{1}{\rho}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| =$$
$$= \frac{1}{\rho}|\vec{v}| = \frac{v}{\rho}$$

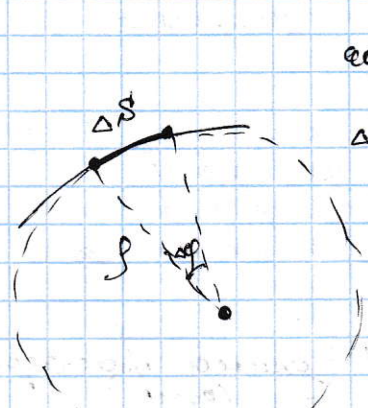
(1) Если $v = const \rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow a_\tau = 0$; но $\vec{a}_n \neq 0$!

Криволинейное движение – всегда ускоренное.

(2)

$\rho \rightarrow \infty$ (прямолинейное)
$\Rightarrow \vec{a}_n = 0$

Вращательное движение как частный случай криволинейного.



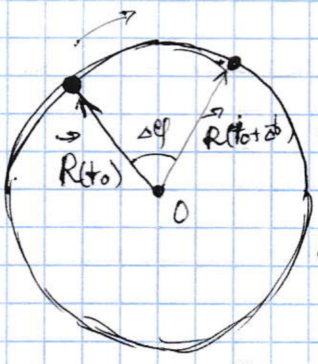
$\Delta\varphi \ll 1$: $\Delta S = \rho\Delta\varphi$

Полный оборот: $\Delta\varphi = 2\pi \Rightarrow \Delta S = 2\pi\rho$

Но $\Delta S = 2\pi R$

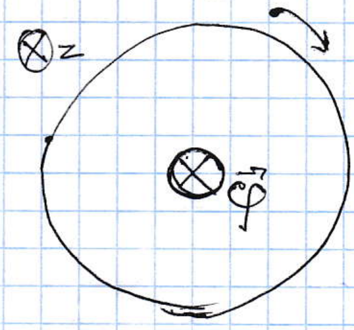
$\Rightarrow \rho = R = const$

Угловые величины для описания вращательного движения.



$\omega^{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ — ср. угловая скорость.

$\omega = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$ — мгновенная угловая ск-ть.

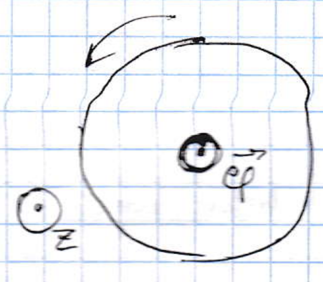


← По правилу правого винта.

$\boxed{\vec\omega = \frac{d\vec\varphi}{dt}}$ $\vec\omega \parallel \vec\varphi$ всегда.

$t_0: \vec\omega(t_0)$

$t_0+\Delta t: \vec\omega(t_0+\Delta t) = \vec\omega(t_0) + \Delta\vec\omega$



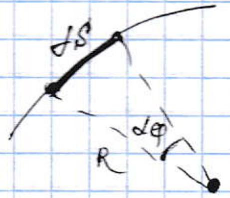
$\boxed{\vec\gamma^{ср} = \frac{\Delta\vec\omega}{\Delta t}}$ — среднее угловое ускорение

$\boxed{\vec\gamma = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec\omega}{\Delta t} = \frac{d\vec\omega}{dt}}$ — мгновенное угловое ускорение

Связь линейных и угловых величин.

1) $dS = R\cdot d\varphi = R\omega dt$

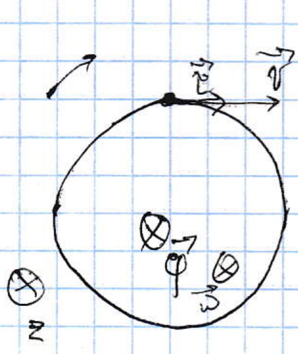
$d\varphi = \omega dt$

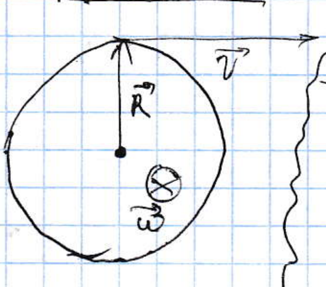


$\underbrace{\frac{dS}{dt}}_{v} = R\omega \Rightarrow v = R\omega$

2) $\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_\tau} = R\cdot\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\gamma_z}$ Ось z напр. так, как $\vec\varphi$

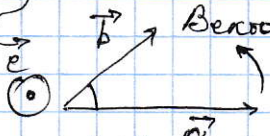
$\boxed{a_\tau = R\gamma_z}$





Математическое отступление:

Векторное произведение векторов. (правый винт.)



$[\vec a, \vec b] = \vec a \times \vec b$ — векторное пр-е (результатом будет вектор)

$c = ab\sin(\vec a\,\hat{}\,\vec b)$

$R \perp \omega \Rightarrow \sin(\omega\, R) = 1$

$\boxed{\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]}$

$\boxed{\vec{a_\tau} = [\vec{\gamma}, \vec{R}]}$

$\vec{d} = [\vec{b}, \vec{a}] = -\vec{c}$

$\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$

1)

2)

3)

Динамика материальной точки. Законы Ньютона.

1687 г. — „Математические начала научной философии" — Ньютон.

I. Закон инерции — изолированное тело (тело свободное от внешних воздействий) сохраняет свою ск-ть постоянной.
Существуют такие системы отсчёта, в которых эти условия выполняются — инерциальные системы отсчёта.

$\vec{p} = m\vec{V}$

II. Сила, как мера воздействия, вызывает не изменение ск-ти, а изменение импульса.

Сила $\vec{F}$ есть $\frac{d\vec{p}}{dt}$, той не нада!

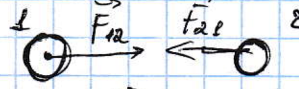
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Если $V \ll c \to m = const \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a}$

Если $V \lesssim c \to m = m(V) \neq const \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ — справедливо всегда.

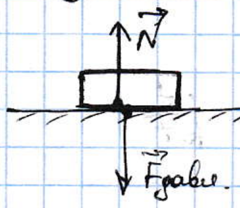
импульсная формулировка II з-на Ньютона.

III. Когда тела взаимодействуют между собой, то силы возникают парами.



$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ — это силы одной природы.

Для м.т. силы направлены вдоль линии, соед. эти точки.



Законы: то, что можно проверять экспериментально. ← $I = \frac{U}{R}$ — закон Ома

$\vec{F} = m\vec{a}$ — II з-н Ньютона

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ — опр. ускорения

это то, до чего люди договариваются

Св-ва сил ($\vec{F}$)

1) Мера воздействия (взаимодействия.)
2) Это векторная величина
3) $\vec{a} \sim \vec{F}$ → ускорение направлено туда же, куда и сила

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{F}$

4) 

$$\vec{a} \uparrow\uparrow (\vec{F_1}+\vec{F_2})$$

$$\underbrace{\vec{a} = \frac{\vec{F_1}+\vec{F_2}}{m}}$$ — принцип суперпозиции (независимого сложения сил)

5) Сила может зависеть (может быть const) от времени, от скорости, от положения. (t, v, r)

Св-ва массы (m)

1) Мера инертности тел (инертная или инерционная масса)

2) Скалярная величина.

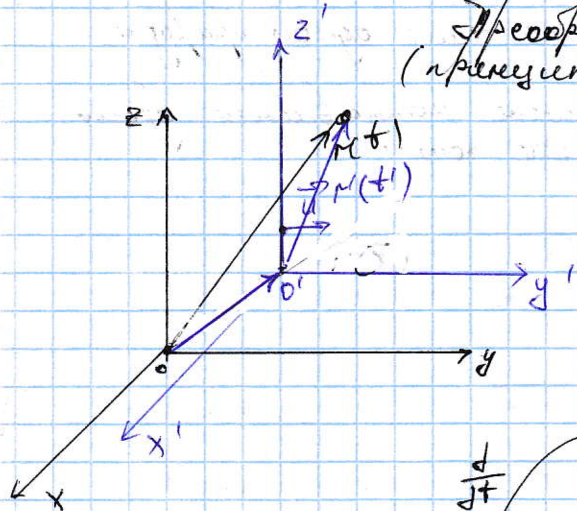
3) Масса не зависит от движения тела. (м.т.) $(v \ll c)$

4) Масса при ск-ях только $v \ll c$. (св-во аддитивности) $m = m_1 + m_2$

5) Инертная масса равна гравитационной массе (в пределах погрешности эксперимента) ↓

принцип эквивалентности масс

Преобразования Галилея.
(принцип относительности)



$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t') + \overset{\vec{\rho}}{\vec{OO'}}(t) \qquad \frac{d}{dt}$$

$$v \ll c \to t' = t$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

$$\underbrace{\vec{v}(t)}_{\text{абсолютная ск-ть}} = \underbrace{\vec{v}'(t)}_{\text{относительная ск-ть}} + \underbrace{\vec{u}}_{\text{переносная ск-ть (ск-ть ПСО)}} \qquad \vec{u} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

$\frac{d}{dt}$

$$\underbrace{\vec{a}}_{\text{уск в НСО}} = \underbrace{\vec{a}'}_{\text{относительное ускорение}} + \underbrace{\frac{d\vec{u}}{dt}}_{a_0}$$ — уск-е штрихованной сис.о отн. нештрих. (переносное уск.) $= \vec{a}_0$ в общем случае

Если $\vec{u} = const$, то $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$, тогда:

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{\rho}}{dt}$; $\vec{a}_0(t) = \frac{d\vec{u}}{dt}$

Если $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a}(t) = \vec{a}'(t)$

инерциальные с.о.

I з-н Ньютона: $\begin{cases} \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \\ \vec{a}' = \frac{\vec{F}'}{m} \end{cases}$; $\vec{a}' = \vec{a}$ $\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}'$ – принцип относитель-ти в механике.

Все мех. явления при одн. нач. усл. протекают одинаково во всех системах отсчёта – принцип относительности в механике.

В инерц. с.о ск-ть тела постоянна, когда нет внешнего воздействия. I з-н Ньютона выполнен только в инерциальной системе отсчёта.

II Закон Ньютона как дифференциальное уравнение. Модельные задачи механики.

$\begin{cases} \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \\ \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{F(t, \vec{v}, \vec{r})}{m}$ – дифференциальное уравнение. – уравнение 2-го порядка.

① Дано:
$\vec{F}(t, \vec{v}, \vec{r})$
Нач. усл.: $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$
$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$

$\vec{r}(t) = ?$

② Дано: $\vec{v}(t)$
$\vec{r}(t)$
Найти: $\vec{F}$

Методы решения:

1) Аналитический: проинтегрировать д.у.

2) Численное интегрирование д.у.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x(t, \vec{v}, \vec{r})}{m} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x}{m} \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y(t, \vec{v}, \vec{r})}{m}$$

I. Движение под действием постоянной силы. ($\vec{F} = const = \vec{F}_0$)

Дано: $\vec{F}_0$
$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$
$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$

Найти: $\vec{v}(t)$ - ?

$\vec{r}(t)$ - ?

$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{\vec{F_0}}{m} & \text{- II з-н Ньютона} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} & \Rightarrow \text{д.у. 1-го порядка.} \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\vec{F_0}}{m} \quad \Big| \cdot dt$$

$$\int_{v_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t \frac{\vec{F_0}}{m} \cdot dt'$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \frac{\vec{F_0}}{m} t \rightarrow \vec{v}(t) = \frac{\vec{F_0}}{m} t + v_0$$

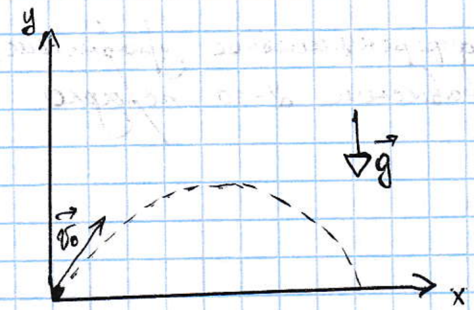
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\int_{r_0}^{r(t)} d\vec{r} = \int_0^t \left(\vec{v}_0 + \frac{F_0}{m} t\right) dt'$$

$$r(t) - r_0 = v_0 t + \frac{F_0 t^2}{2m}$$

$$\rightarrow r(t) = r_0 + v_0 t + \frac{F_0 t^2}{2m}$$

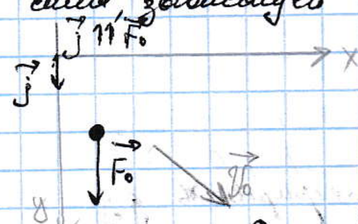
~ при действии постоянной силы траектория всегда будет плоской.



II. Движение под действием силы, зависящей от ск-ти. (движение в вязкой среде) $\rightarrow \vec{F}(\vec{v})$

Дано: $\vec{F} \sim \vec{v} \rightarrow \vec{F} = -\alpha \vec{v}$

$(\alpha = const,\ \alpha > 0)$



Есть ещё: $\vec{F_0} = const$.

$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$

$\vec{r}(t=0) = \vec{r_0} = 0$

$\vec{v}(t)$ - ?

$\vec{r}(t)$ - ?

1) II з-н Ньютона:

$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{\vec{F} + \vec{F_0}}{m} \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \end{cases} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\alpha \vec{v}}{m} + \frac{\vec{F_0}}{m}$$

$$x: \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\alpha v_x}{m}$$

$$y: \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\alpha v_y}{m} + \frac{F_0}{m}$$

1 $$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\alpha v_x}{m} \quad \Big| \cdot \frac{dt}{v_x}$$

$$v_x(0) = v_{x0}$$

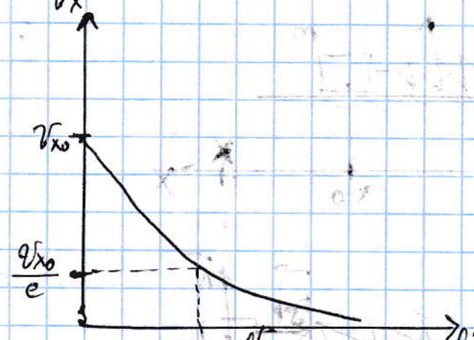
$$\int_{v_{x0}}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^t \frac{\alpha}{m} dt$$

$$\ln v_x \Big|_{v_{x_0}}^{v_x(t)} = -\frac{\alpha t}{m}$$

$$\ln v_x(t) - \ln v_{x_0} = -\frac{\alpha t}{m}$$

$$\ln\left(\frac{v_x(t)}{v_{x_0}}\right) = -\frac{\alpha t}{m}$$

$$v_x(t) = v_{x0} \cdot e^{-\frac{\alpha}{m} t}$$



τ – время установления

$$v_x(t=\tau) = \frac{v_{x0}}{e} = \frac{v_{x0} \cdot e^{-\frac{\alpha}{m}\tau}}{1}$$

$$\tau = \frac{m}{\alpha} \leftarrow$$

τ считается, что после этого момента ск-ть по оси x – уже установилась ($=0$), т.е. изменилась в e раз.

(2) $$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\alpha}{m} v_y + \frac{F_0}{m} \quad \Big/ \cdot \frac{dt}{\left(-\frac{\alpha}{m} v_y + \frac{F_0}{m}\right)}$$

$$v_y(0) = v_{y0}$$

$$\int_{v_{y0}}^{v_y(t)} \frac{dv_y}{\left(-\frac{\alpha}{m} v_y + \frac{F_0}{m}\right)} = \int_0^t dt'$$

Сделать замену переменных: $-\frac{\alpha}{m} v_y + \frac{F_0}{m} = u$

$$-\frac{\alpha}{m} dv_y + 0 = du$$

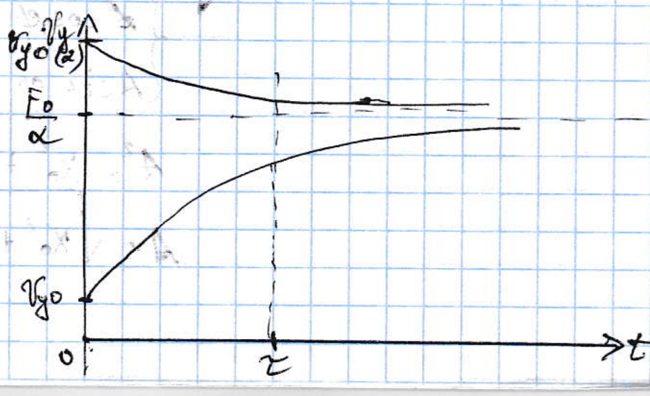
$$t = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{-\frac{m}{\alpha} du}{u} = -\frac{m}{\alpha} \ln u \Big|_{u_0}^{u(t)} = -\frac{m}{\alpha} \ln u(t) + \frac{m}{\alpha} \ln u_0 =$$

$$= -\frac{m}{\alpha} \ln\left(\frac{u(t)}{u_0}\right) = -\frac{m}{\alpha} \ln\left(\frac{-\frac{\alpha}{m} v_y(t) + \frac{F_0}{m}}{-\frac{\alpha}{m} v_{y0} + \frac{F_0}{m}}\right)$$

$$-\frac{\alpha}{m} v_y(t) + \frac{F_0}{m} = \left(-\frac{\alpha}{m} \cdot v_{y0} + \frac{F_0}{m}\right) e^{-\frac{\alpha}{m} t}$$

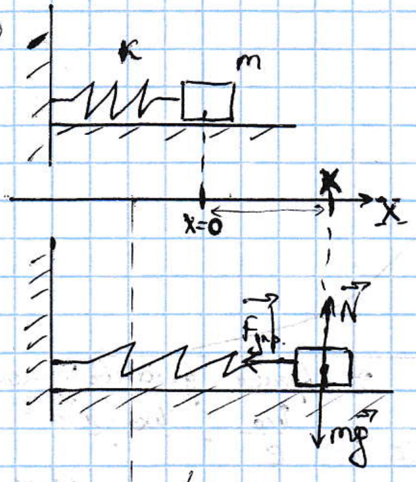
$$v_y(t) = \frac{F_0}{\alpha} + \left(v_{y0} - \frac{F_0}{\alpha}\right) \cdot e^{-\frac{\alpha}{m} t}$$

$\frac{F_0}{\alpha}$ – установившаяся скорость $\leftarrow$



III. Движение под действием „упругих“ сил. $(\vec{F}(\vec{r}))$. Гармонический осциллятор.

①



II з-н Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{упр.}$

$$OX:\ ma_x = F_{упр\,x}$$

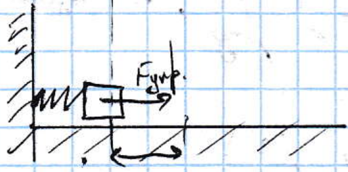
$$\begin{cases} a_x = -\dfrac{kx}{m} \\ a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Идеальная пружина: 1) $m_{пр.} = 0$
2) $F_{упр\,x} = -kx$



ω – циклическая частота колебаний

φ – начальная фаза колебаний

$(\omega t + \varphi)$ – фаза.

A – амплитуда колебаний – модуль наибольшего смещения от положения равновесия. ($A > 0$ всегда!)

A, φ – из нач. усл.

Пусть: $x(t=0) = x_0$
$v_x(t=0) = v_{x_0}$

$$\to \quad x(0) = A\cos\varphi = x_0$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -A\sin(\omega t + \varphi)\cdot\omega$$

$$t=0 \to v_x(0) = -A\omega\sin\varphi = v_{x_0}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{v_{x_0}}{\omega x_0}$$

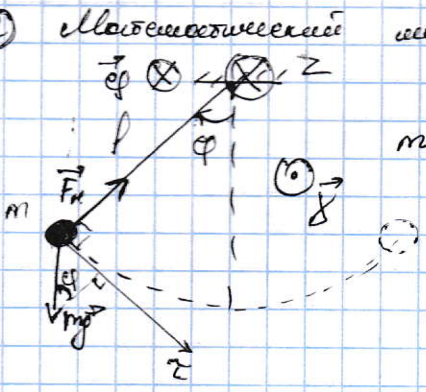
$$\begin{cases} A\cos\varphi = x_0 \\ A\sin\varphi = -\dfrac{v_{x_0}}{\omega} \end{cases}$$

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_{x_0}}{\omega}\right)^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x_0}}{\omega}\right)^2}$$

② Математический маятник.

Идеальная нить: 1) $m_{нити} = 0$
2) нерастяжима ($l = const$)



$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_н$

$O\tau$: $ma_\tau = mg\sin\varphi$

$a_\tau = g\sin\varphi$ (v)

$a_\tau = \gamma_z l$ (v)

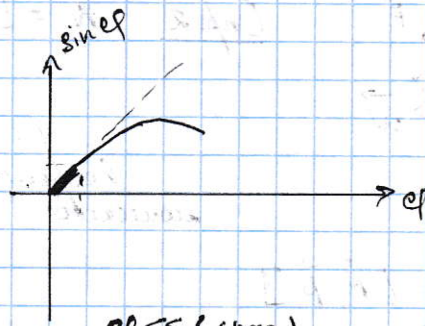
проекция углового ускорения.

$a_\tau > 0 \Rightarrow \gamma_z < 0$

$a_\tau < 0 \Rightarrow \gamma_z > 0$

$\gamma_z = -\gamma < 0$ (v)

$$\begin{cases} -\gamma l = g\sin\varphi \\ \gamma = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} \end{cases}$$



$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \quad \Big| \; \omega^2 = \frac{g}{l} \quad \longleftarrow$$

$\varphi \ll 1$ (рад.)

$\sin\varphi \approx \varphi$ (в рад. мере)

$\varphi(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$, где α — начальная фаза: опр. нач. условиями.

Частота колебаний опр. только св-вами самой системы.

Справедливо при $\varphi \ll 1$ (рад.)

Решение будет таким (движ. колебательно) если: 1) есть положение равновесия.

2) есть сила, возвр. мат. точку в положение равновесия.

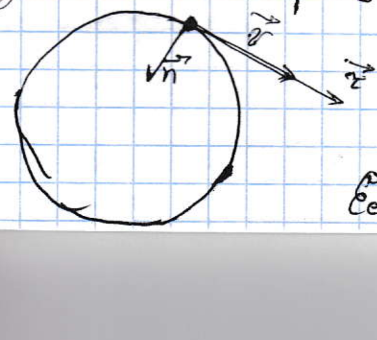
Движение будет происходить по закону косинуса — гармонические колебания. — если возвращающая сила линейно зависит от координаты.

$F_{упр.} \sim x$

$mg\sin\varphi \sim \varphi$ ($\varphi \ll 1$ рад.)

Замечание о динамике вращательного движения м.т.

вращ. движ.



$m\vec{a} = \vec{F}$

$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

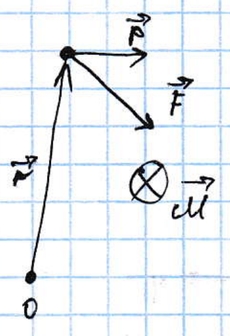
Если движение равномерно $v = const$, то $a_\tau = 0$

Всегда $a_n \neq 0 \iff F_n \neq 0$

Некоторые теоремы и законы сохранения для м.т.

интегралы движения
(величины, которые сохраняются при движении)

$$\vec r \times \Big| \ \frac{d\vec p}{dt} = \vec F \quad \longrightarrow \quad \left[\vec r, \frac{d\vec p}{dt}\right] = [\vec r, \vec F]$$



Опр.1. $\vec M = [\vec r, \vec F]$ – называется моментом силы.

Опр.2. $\vec N = [\vec r, \vec p]$ – момент импульса

Теорема об изменении момента импульса для м.т.

$\vec c = [\vec a, \vec b]$

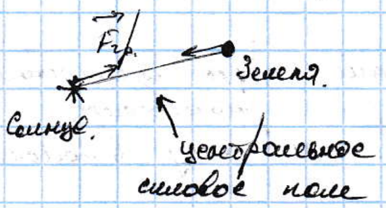
$c = ab\sin(\widehat{\vec a \vec b})$

$$\vec N = [\vec r, \vec p]$$

$$\frac{d\vec N}{dt} = \left[\frac{d\vec r}{dt}, \vec p\right] + \left[\vec r, \frac{d\vec p}{dt}\right] = \underbrace{[\vec v, \overset{m\vec v}{\vec p}]}_{=0} + \left[\vec r, \frac{d\vec p}{dt}\right]$$

$$\boxed{\frac{d\vec N}{dt} = \vec M}$$ – теорема об изменении момента импульса м.т.

Опр.3. Силы, которые удовл. условию $\vec F \parallel \vec r$, называются центральными.

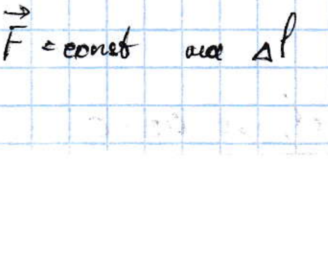


$$\vec M = [\vec r, \vec F] = 0 \Rightarrow \frac{d\vec N}{dt} = 0 \Rightarrow \vec N = const$$

~ условие для сохранения момента импульса

$\vec N \perp \vec r, \ \vec N \perp \vec v$ – траектория для м.т. всегда будет оставаться плоской.

Энергетические соотношения для материальной точки. Механическая работа



$A_F = ?$

$d\vec l \uparrow\uparrow \vec v$

$\vec F = const$ на $\Delta l \quad \longrightarrow \quad \Delta A = F \cdot \Delta l \cdot \cos(\widehat{\vec F \vec v})$

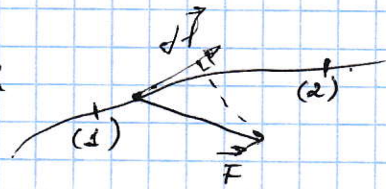
$dA = F\,dl\,\cos(\widehat{\vec F, \vec v}) = F\,dl\,\cos(\widehat{\vec F, d\vec l}) = \cancel{F\,dl} \equiv F_l\,dl \equiv$
$\equiv (\vec F, d\vec l)$

Расшифровка.

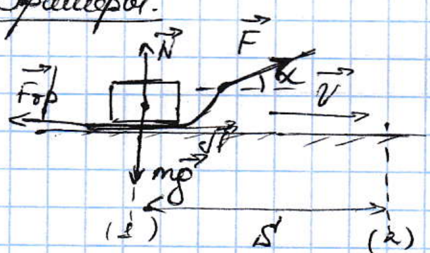
$$\boxed{A_F = \int_{(1)}^{(2)} F(l)\,dl}$$ – определение работы

$$\boxed{P = \frac{dA}{dt}}$$ – мощность.

$$dA = (\vec F, d\vec l)$$
$$P = \frac{(\vec F, d\vec l)}{dt} = \left(\vec F, \frac{d\vec l}{dt}\right) = (\vec F, \vec v)$$



Примеры:



$\vec F = const$

1) $A_{mg} = \int_{(1)}^{(2)} mg_l\,dl = 0$

2) $A_N = \int_{(1)}^{(2)} N_l\,dl = 0$ – всегда! $(\vec N \perp d\vec l)$

3) $A_F = \int_{(1)}^{(2)} F_l\,dl = \int_{(1)}^{(2)} F\cos\alpha\,dl = F\cos\alpha \cdot S$

4) $A_{Fтр.} = \int_{(1)}^{(2)} F_{тр\,l}\,dl = \int_{(1)}^{(2)} (-F_{тр.})\,dl = -F_{тр}\cdot S$

(меньше у силы трения сохр. всегда!)
$A_{тр_{ск}} < 0 \rightarrow$ всегда (скольж.)
$F_{тр_{ск}} \uparrow\downarrow \vec v$

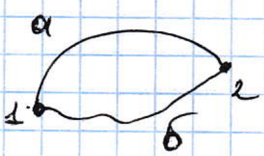
$A_{тр.пок.} = 0$ – всегда. $(d\vec l = 0)$

Понятие консервативных сил.

$\vec F(t, \vec v, \vec r)$ – в общем случае

$\rightarrow \vec F = \vec F(\vec r)$ – частный случай, который сейчас будем рассматривать.

Силы, работы которых не зависят от траектории называются консервативными!



$A_{1а2} = A_{1б2}$

$A_{1а2} = -A_{2а1}$

$A_\Sigma = A_{1a2б1} = A_{1a2} + A_{2б1} = A_{1a2} - A_{1б2} = 0$

~ для консервативных сил работа на замкнутой траектории всегда равна нулю.

$F_{тр.}$ – не консервативна!

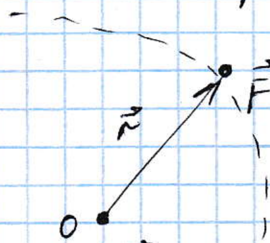
Но существуют силы, которые заведомо конс.-ы.

Центрально-симметричное силовое поле – назыв. такое силовое поле, которое зависит от модуля радиус-вектора.

$\vec F(\vec r) = \vec F(x, y, z)$

зависит от координат.

зависит от нескольких переменных => силовое поле

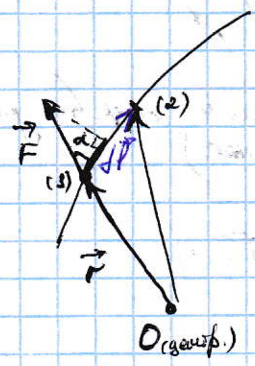


$\vec F \parallel \vec r$ – центральные.

$\vec F(\vec r) = \pm F(r)\cdot\frac{\vec r}{r}$; $\left|\frac{\vec r}{r}\right| = 1$

показыв. сонапр. или противоположн. напр.

Док-во, что центрально-симметричное силовое поле консервативно:

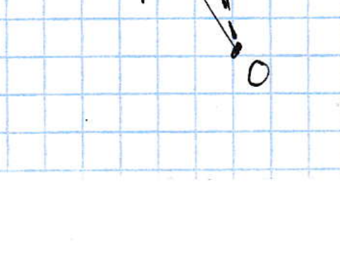


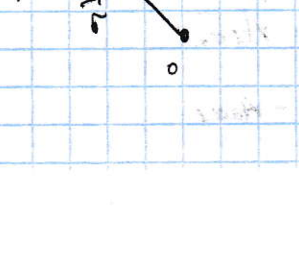
$A = \int_{(1)}^{(2)} F_l\,dl = \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} (F\cos\alpha)\,dl}_{dr\,(\vec F \uparrow\uparrow \vec r)} = \int_{(1)}^{(2)} F\,dr = \int_{(1)}^{(2)} F_r\,dr$

приращение модуля

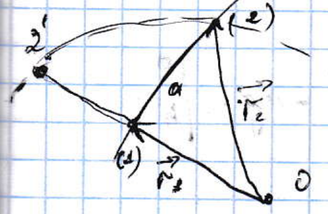
$F_l = F\cdot\cos\alpha$

проекция вектора силы на радиальное напр.





$\rightarrow \vec F \uparrow\downarrow \vec r \Rightarrow -dr = dl\cos\alpha$



$\Rightarrow$ A от траектории не зависит

$A_{1a2} = A_{1(2')2}$

$A_{2'2} = 0 \quad (dr = 0)$

~ доказали, что центрально-симметричное поле — консервативное

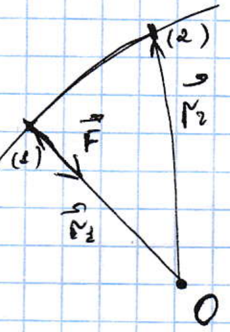
Пример: гравитационная сила

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow \vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

$G m_1 m_2 = k$

$$A = \int_{r_1}^{r_2}\left(-\frac{k}{r^2}\right)dr = -\frac{k r^{-1}}{-1}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{k}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = k\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

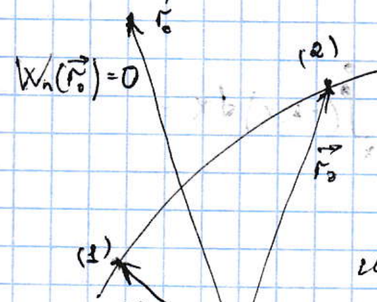
!



$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

Потенциальная энергия материальной точки.

W_n — потенц. энергия. — понятие потенц. энергии вводится только для консервативных сил.



Существует ф-я, которую мы называем потенц. энергией и которая $W_n(\vec{r}_1) - W_n(\vec{r}_2) = A_{12}^{конс}$ (разность равна работе.)

$$W_n(\vec{r}_1) - W_n(\vec{r}_2) = A_{12}^{конс} = \int_{(1)}^{(2)} F_l^{конс}\, dl$$

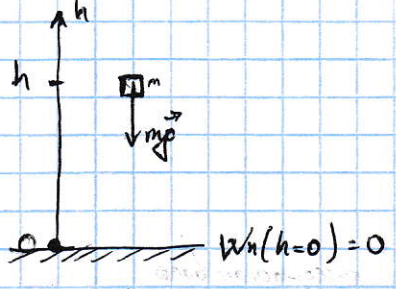
Можно назначить такую точку, в которой $W_n = 0$

Пусть $W(\vec{r}_0) = 0$, тогда $\boxed{W_n(\vec{r}_1) - \underbrace{W_n(\vec{r}_0)}_{=0} = A_{10}^{конс} = \int_{(1)}^{(0)} F_l\, dl}$

опр. потенц. энергии

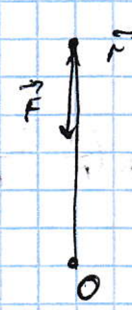
Примеры:

① Сила тяжести ($m\vec{g}$)



$$\rightarrow W_n(h) - \underbrace{W_n(0)}_{=0} = \int_h^0 m g_h \, dh = -mgh\Big|_h^0 = mgh, \quad g_h = -g$$

② Гравитационная сила $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

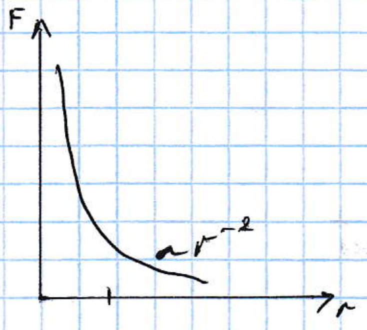


Пусть $W_n(r\to\infty)=0$

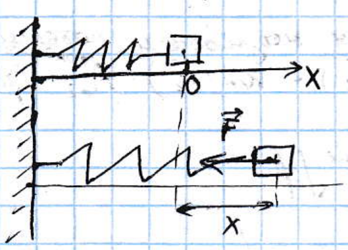
$$W_n(r) - \underbrace{W_n(r\to\infty)}_{=0} = \int_r^\infty F_r \, dr = \int_r^\infty \left(-\frac{k}{r^2}\right) dr =$$

$$= k\left(\underbrace{\frac{1}{r\to\infty}}_{\frac{1}{r_2}\Big|_{r_2\to\infty} \to 0} - \frac{1}{r}\right) =$$

$$W_n(r) = -\frac{k}{r}$$



③ Сила упругости ($F_x = -kx$)



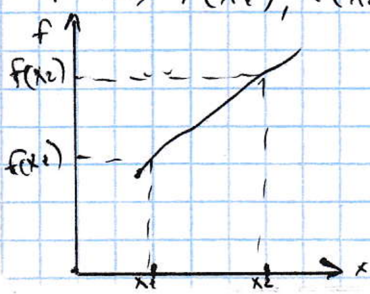
Пусть $W_n(x=0)=0$

$$W_n(x) - W_n(0) = \int_x^0 F_x \, dx = \int_x^0 (-kx)\, dx =$$

$$= -\frac{kx^2}{2}\Big|_x^0 = \frac{kx^2}{2}$$

Связь между потенциальной энергией и консервативными силами.

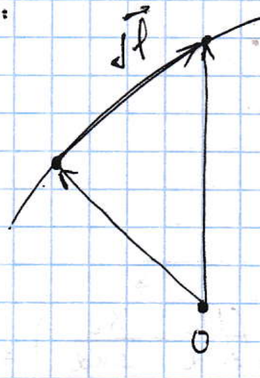
$f \rightarrow f(x_1),\ f(x_2)$



$\Delta x \equiv x_2 - x_1$

$\Delta f \equiv f(x_2) - f(x_1)$

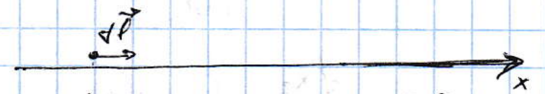
изменение какой-то величины (конечное минус начальное)



$$\underbrace{W_n(\vec r_1) - W_n(\vec r_2)}_{-\Delta W_n(\vec r)} = A_{12}^{конс.} = \int_{(1)}^{(2)} F_l \, dl$$

Пусть $F_l = const$ на $d\vec l$ $\Rightarrow -\Delta W_n = F_l \cdot \Delta l$

Пусть всё движение прямолинейное $\Rightarrow -\Delta W_n = F_x \Delta x \Rightarrow$
$\Rightarrow F_x = -\dfrac{\Delta W_n}{\Delta x}$



В общем случае ($\Delta x \to 0$): частная

$$F_x = -\frac{\partial W_n}{\partial x}$$ – частная производная.

$$F_y = -\frac{\partial W_n}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial W_n}{\partial z}$$

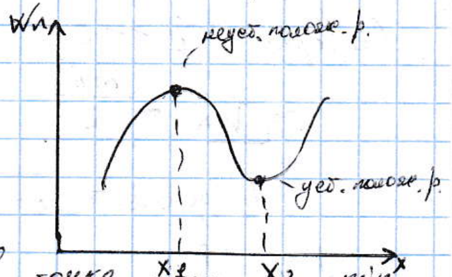
$$\vec F = -\left(\frac{\partial W_n}{\partial x}\vec i + \frac{\partial W_n}{\partial y}\vec j + \frac{\partial W_n}{\partial z}\vec k\right)$$ – выражение силы через потенциальную энергию

Потенциальная энергия и положение равновесия материальной точки.

$$\vec F = -\left(\frac{\partial W_n}{\partial x}\vec i + \frac{\partial W_n}{\partial y}\vec j + \frac{\partial W_n}{\partial z}\vec k\right) \equiv -grad\, W_n.$$ – градиент потенц. энергии (функции.)

$\vec F = F_x(x)\,\vec i$ | $\vec F = -\dfrac{\partial W_n}{\partial x}\vec i$

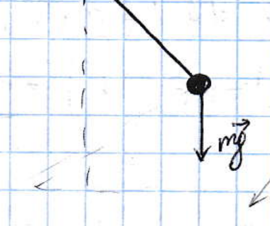
$W_n(\vec r) = W_n(x)$

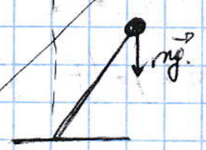


Состояние равновесия $\vec F = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial W_n}{\partial x} = 0$

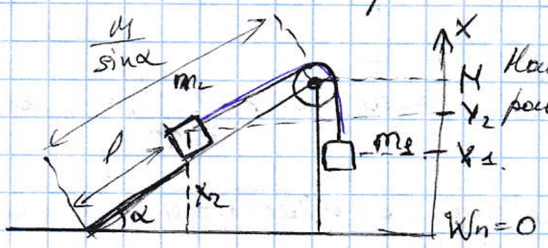
производная $= 0$ в точке max или min.

x_1, x_2 – положе. равновесия.





Найти сост. равн. можно ~~тоже~~ найти из этого условия



Найти при каких соотн. масс будет положе. равновесия. $\dfrac{m_1}{m_2}$ – ?

$W_n(x=0) = 0$

$$W_п(x) = m_1 g x_1 + m_2 g x_2$$

$$\frac{\partial W_п}{\partial x} = m_1 g \frac{dx_1}{dx} + m_2 g \frac{dx_2}{dx}$$

$$\frac{dx_1}{dx} = 1 \qquad x_2 = l\sin\alpha$$

$$L_{нити} = const = (H - x_1) + \left(\frac{H}{\sin\alpha} - l\right) + \underbrace{l_0}_{=const} = (H - x_1) + \left(\frac{H}{\sin\alpha} - \frac{x_2}{\sin\alpha}\right) + l_0$$

$$0 = \frac{dL_{нити}}{dx} = \frac{dL_{нити}}{dx_1} = 0 - 1 + 0 - \frac{dx_2}{dx_1}\cdot\frac{1}{\sin\alpha} + 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\sin\alpha$$

$$\frac{dW_п}{dx} = m_1 g - m_2 g \sin\alpha = 0$$ — 0 для сост. равновесия

$$m_1 = m_2 \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \sin\alpha$$ — ответ.

Кинетическая энергия м.т. Теорема об изменении кинетической энергии.

Оговорка: $v \ll c$

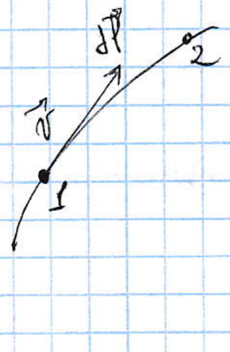
$$\boxed{W_к = \frac{mv^2}{2}}$$ — опр. кинетической энергии.

v - зависит от системы отсчета => $W_к$ - тоже зависит от с.о.

$dW_к = ?$

$$dW_к = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{m}{2} d(v^2) = \frac{m}{2} d((\vec v, \vec v)) = \frac{m}{2}\cdot 2(\vec v, d\vec v) = m(\vec v, \vec a\, dt) =$$

$$\boxed{\vec a = \frac{d\vec v}{dt} \Rightarrow d\vec v = \vec a\, dt} \qquad = (\vec v, m\vec a\, dt) = (\vec F, \vec v\, dt) = (\vec F, d\vec l) = dA$$



Проинтегрируем: — не имеет смысла раст. пределы.

$$\int_{W_{к1}}^{W_{к2}} dW_к = \int_{(1\to 2)} dA$$

$$W_{к.2} - W_{к.1} = A_{1-2}$$ — работа между двумя положениями.

$$\boxed{\Delta W_к = A_{12}}$$ — теорема об изменении кинетической энергии.

Механическая энергия в точках. Теорема об изменении мех. энергии. Закон сохранения энергии в механике.

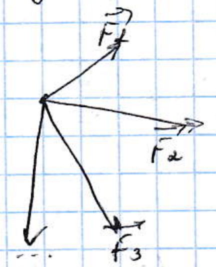
$\vec{v} = \vec{v}(t)$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\boxed{W_{мех.} = W_к + W_п}$$

$W_{мех.} = W_к + W_п(\vec{r})$ – определение мех. энергии.

Пусть на м.т. действует множество сил. (На участке 12)



$$\underset{\underset{W_{к2} - W_{к1}}{\parallel}}{\Delta W_к} = A_{12}^{всех\ сил} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = A_{12}^{конс.} + \underset{\underset{не\ консервативные}{\uparrow}}{A_{12}^{пр.\ сил.}}$$

$$-\Delta W_{п.} = W_{п.1} - W_{п2} = A^{конс}$$

$$W_{к2} - W_{к1} = W_{п1} - W_{п2} + A^{проч.\ сил.}$$

$$\underbrace{(W_{к2} + W_{п2})}_{W_{мех.2}} - \underbrace{(W_{к1} + W_{п1})}_{W_{мех.1}} = A_{12}^{проч.\ сил.}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta W_{мех} = A_{12}^{проч.\ сил.}}$ – теорема об изменении мех. энергии!

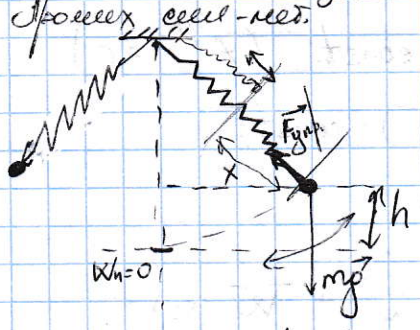
Если на м.т. действуют только консерв. силы, то это будет означать, что $\Delta W_{мех} = 0$ (т.е. мех-ая энергия сохраняется)

$\Updownarrow$

$W_{мех2} - W_{мех1} = 0$

Примеры применения закона сохранения.

① Прочих сил – нет.



$W_п^{тяж.} = mgh.$

$W_п^{упр.деф.} = \frac{kx^2}{2}$

$A^{проч.} = 0$

ЗСЭ: $\frac{kx_1^2}{2} + mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = \ldots$

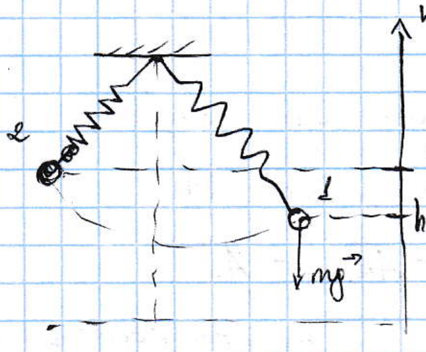
Пусть дано: v_1, h_1, h_2

Найти v_2 – ?

② Пусть действуют те же силы, но не знаем про консерв. или нет

$W_n^{упр} = \frac{kx^2}{2}$

$$A_{12}^{проч.} = A_{12}^{(mg)} = \int_{h_1}^{h_2} mg_h\,dh = -mgh\Big|_{h_1}^{h_2} = -mgh_2 + mgh_1.$$



Теорема об изменении мех. энергии.

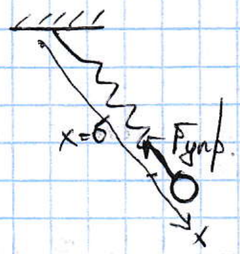
$$\underbrace{\left(\frac{kx_2^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}\right)}_{W_{мех.2}} - \underbrace{\left(\frac{kx_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2}\right)}_{W_{мех.1}} = A_{12}^{(mg)} = -mgh_2 + mgh_1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{kx_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = mgh_2 + \frac{kx_2^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

③ $W_n = mgh$. а для $F_{упр}$ — прочая сила.

$$A_{12}^{проч.} = A_{12}^{упр.} = \int_{x_1}^{x_2} F_{упр_x}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}(-kx)\,dx = -\frac{kx^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}$$



Теорема об изменении мех. энергии:

$$\left(mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2}\right) - \left(mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2}\right) = A_{12}^{пр.} = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}$$

$$\frac{kx_1^2}{2} + mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2}$$

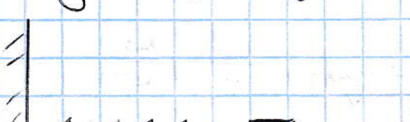
Можно обходиться без потенциальной энергии, считая работу (если не знаешь консервативная сила или нет.)

Примеры полного решения динамических задач о движении м.т. (действуют только консерват. силы)

$\vec F$ - конс. $\Rightarrow W_n(\vec r) \Rightarrow W_{мех} = W_к + W_n = const.$ $(A^{проч.} = 0)$

$$W_{мех} = \frac{mv^2}{2} + W_n(\vec r) = const.$$

① Одномерное движение: $W_n(\vec r) = W_n(x)$



$$\underbrace{\frac{mv_1^2}{2} + W_n(x_1)}_{= W_{мех1} = const} = \frac{mv_2^2}{2} + W_n(x_2)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$$

$$\dot{x}_2^2 = \dot{x}_1^2 + \frac{2}{m}\left(W_n(x_1) - W_n(x_2)\right)$$

Нач. усл: v_1, x_1 - дано

$\Rightarrow W_{к1}$, W_{n1} - дано

$\Rightarrow W_{мех.1}$ - дано

$$\dot{x}_2^2 = \frac{2}{m}\left(W_{мех} - W_п(x_2)\right)$$

$$\dot{x}_2 = \sqrt{\frac{2}{m}\underbrace{\left(W_{мех} - W_п(x_2)\right)}_{\text{должна быть } \geq 0}}$$

$\boxed{2.10.20}$

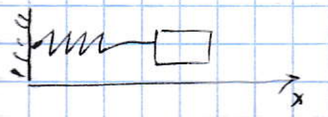
$$W_{мех} = W_к + W_п = const.$$

Дано: $v_0 \Rightarrow W_{к0}$

$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 \Rightarrow W_{п0}$ $\Big\}$ $W_{мех0}$ — дано

$$\frac{mv^2}{2} + W_п(\vec{r}) = W_{мех0}$$

$$v^2 = \frac{2}{m}\left(W_{мех0} - W_п(\vec{r})\right) \geq 0$$

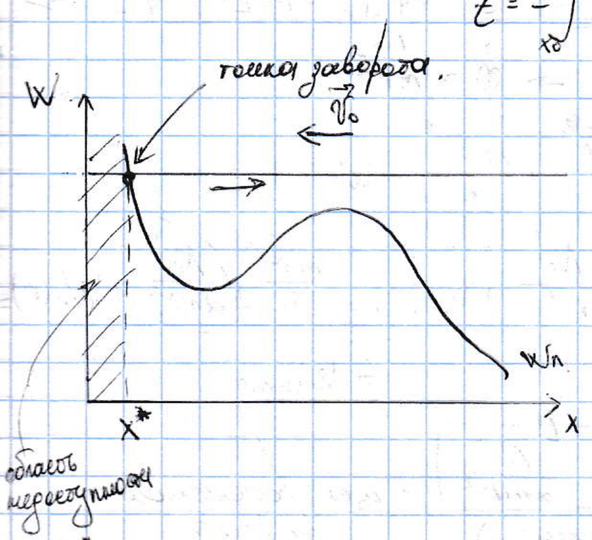


В одномерном случае $\dot{x}^2 = \frac{2}{m}\left(W_{мех0} - W_п(x)\right)$

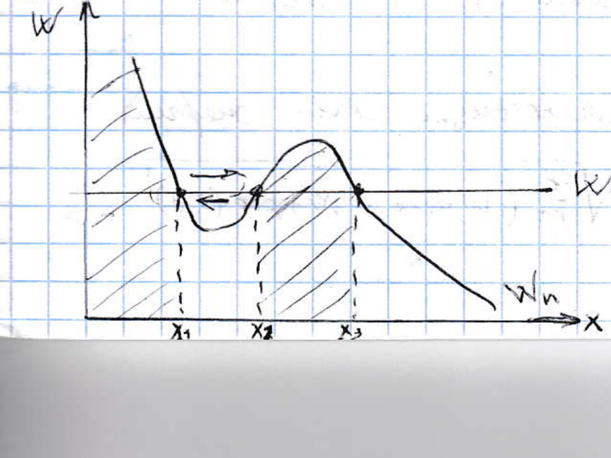
$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(W_{мех0} - W_п(x)\right)}$$

$$\int_0^t dt' = \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(W_{мех0} - W_п(x')\right)}}$$

$$t = \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(W_{мех0} - W_п(x)\right)}}$$



~ Инфинитное движение (неограниченное)



$x < x_1$, $x \in [x_2, x_3]$ — недоступен.

~ Финитное движение (ограниченное)

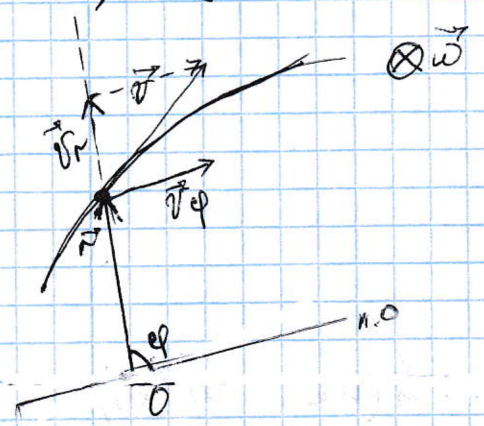
Движение м.т. в центрально-симметричном поле. Задача Кеплера.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \pm F(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

① Центральное => консервативное -> $W_п(\vec{r})$ | $W_{мех} = const = W_{мех\,0}$

② Симметричное | $\vec{N} = const = \vec{N}_0$ (момент импульса.)

$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$ — момент импульса.



$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi$

$(\vec{v}_r \perp \vec{v}_\varphi)$

$v_r = \frac{dr}{dt} \equiv \dot{r}$

$v_\varphi = \dot{\varphi}\cdot r$

$\underset{(вращ.)}{\vec{v}'} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = [\dot{\vec{\varphi}}, \vec{r}]$

$v' = \dot{\varphi}\cdot r\cdot \underbrace{\sin(\widehat{\vec{\varphi}\,\vec{r}})}_{1}$

① $\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = [\vec{r}, m(\vec{v}_r + \vec{v}_\varphi)] = m\left(\underbrace{[\vec{r}, \vec{v}_r]}_{0} + [\vec{r}, \vec{v}_\varphi]\right) = m[\vec{r}, \vec{v}_\varphi] \Rightarrow$

$\Rightarrow N = m\cdot r\cdot v_\varphi\cdot \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\sin\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = N_0 \quad \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{N_0}{mr^2}$

② $W_{мех} = W_к + W_п(r) = \frac{mv^2}{2} + W_п(r) = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_\varphi^2}{2} + W_п(r) =$

$= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + W_п(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2N_0^2}{2m^2r^4} + W_п(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{N_0^2}{2mr^2} + W_п(r) =$

$= W_{мех.0}$

$\dot{\varphi} = \frac{N_0}{mr^2} \rightarrow$

$\boxed{W_{цб} = \frac{N_0^2}{2mr^2}}$ — центробежная энергия
(центробежная.)

$W_{цб} + W_п(r) = W_{эфф}(r)$ — эффективная потенциальная энергия

$\frac{m\dot{r}^2}{2} + W_{эфф.}(r) = W_{мех.0} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(W_{мех0} - W_{эфф}(r))} \Rightarrow$

$\Rightarrow t(r)$ - находится.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{N_0}{mr^2} \rightarrow dt = \frac{d\varphi}{N_0} \cdot mr^2$$

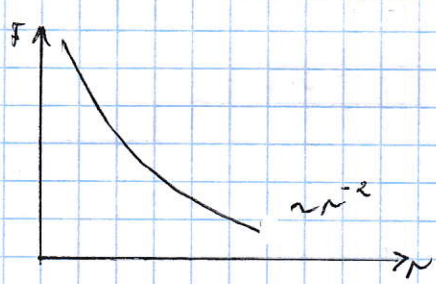
$$\frac{dr}{d\varphi}\frac{N_0}{mr^2} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(W_{мех0} - W_{эфф}(r)\right)}$$

$$d\varphi = \pm\frac{N_0\, dr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(W_{мех0} - W_{эфф.}(r)\right)}}$$ ~ если проинтегрировать, то найдём траекторию (смысл. нач. дел.)

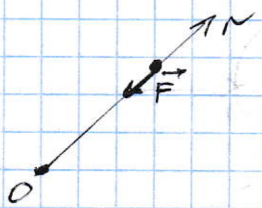
$\Rightarrow \varphi(r)$ - находится.

Задача Кеплера - движение в поле тяготения.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{k}{r^2}$$

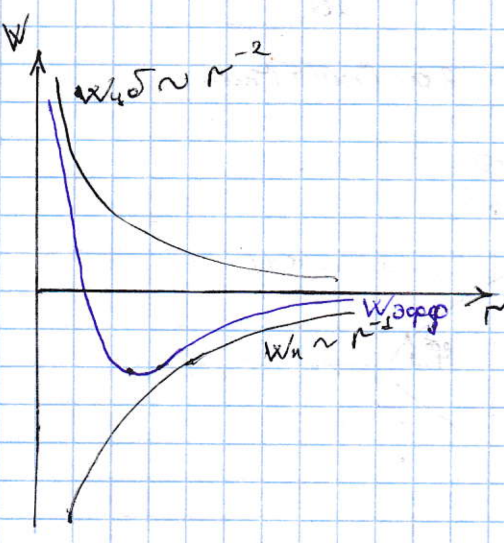


$W_п(r \to \infty) = 0$



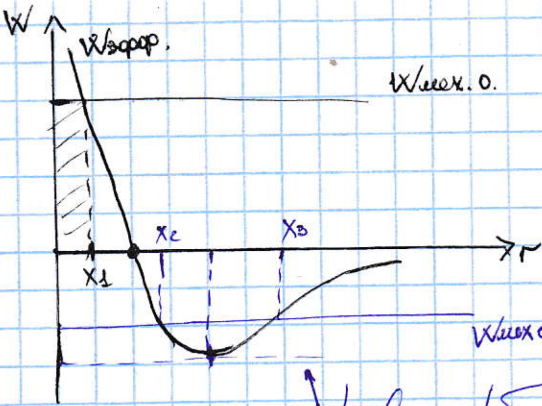
$$W_п(r) - W_п(r \to \infty) = A_{r\to\infty} = \int_r^{\infty} F_r\, dr = -\int_r^{\infty}\frac{k}{r^2}\, dr = +\frac{k}{r}\Big|_r^{\infty} =$$

$$= 0 - \frac{k}{r} \Rightarrow W_п(r) = -\frac{k}{r}$$



$$W_{цб} \sim \frac{1}{r^2}$$

$$W_{эфф} = W_{цб} + W_п.$$



$W_{мех.0}$ => $x > x_1$ — инфинитное движение.

$W_{мех0}$ => $x \in [x_2; x_3]$ — финитное движение.

круговая орбита.

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}; \qquad p = \frac{N_0^2}{mk} \text{ — параметр}, \qquad k = G m_1 m_2$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2W_{мех.0} N_0^2}{mk^2}} \text{ — эксцентриситет.}$$

Частные случаи.

① $e = 0$ (при $W_0 < 0$) => $r(\varphi) = p = const$ — окружность.

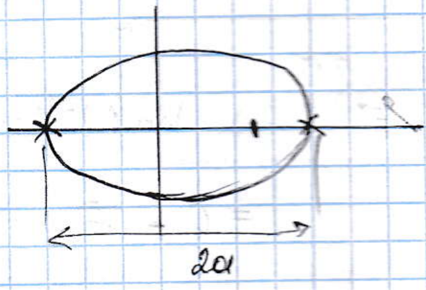
$$r = \frac{N_0^2}{mk} = \frac{m^2 r^2 v^2}{m G M m} = \frac{r^2 v^2}{GM}$$

$$|\vec{N}| = |[\vec{r}, m\vec{v}]|$$

$$r = \frac{GM}{v^2}$$

② $0 < e < 1$ — финитное, эллипс.

$$\left.\begin{aligned} r_{min} &= \frac{p}{1 + e \cdot 1} = \frac{p}{1+e} \\ r_{max} &= \frac{p}{1-e} \end{aligned}\right\} \text{эллипс.}$$

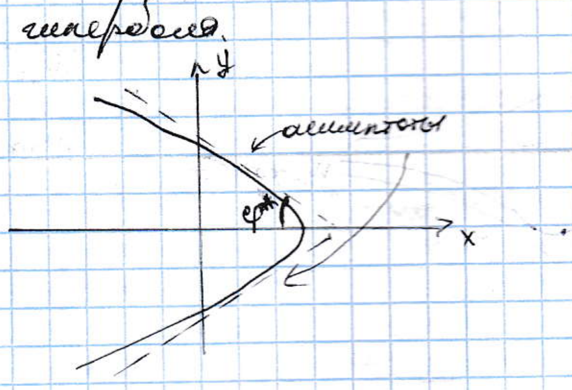


$2a = r_{min} + r_{max}$.

③ $e > 1$. ($W_0 > 0$) — инфинитное, гипербола.

$$1 + e\cos\varphi^* = 0$$

$$\cos\varphi^* = -\frac{1}{e}$$



④ $e = 1$ — инфинитное ($W_0 = 0$) (без асимптот)

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi} \text{ — парабола.}$$

Все такие траектории — конические сечения

$r(\varphi) = \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$ — ур-е конических сечений.

Основные виды сил.
(механические силы.)

1. Электромагнитные силы.

Электрический заряд (имеют два знака „+" и „−")
~ электрический заряд дискретен.

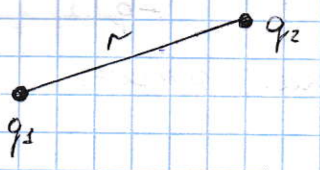
$q_e < 0$

$q = n q_e$

Точечный заряд. (если заряд находится на теле, размерами которого можно пренебречь.)

м.т. с q → т.з.

Закон Кулона. (1785г.? 1795г.?)



$F \sim \dfrac{1}{r^2}$

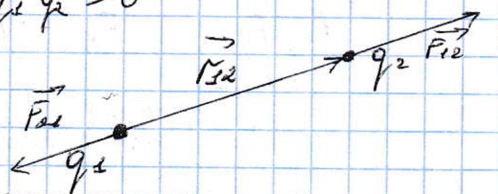
$F \sim |q_1 q_2|$

Закон Кулона: $F = k\dfrac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}$ размерность?

SI: $k = 9 \cdot 10^9 \dfrac{Н \cdot м^2}{Кл^2}$

CGSE: $k = 1$.
см. гр. с.

• $q_1 q_2 > 0$



$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{k q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}}$$

$r = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_{21}|$

• $q_1 q_2 < 0$

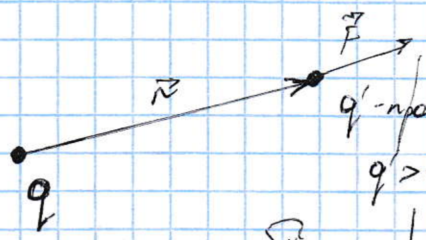
$\vec{F}_{21} = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$

По III з-ну Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Электрическое поле.

Напряжённость электрического поля ($\vec{E}$)

$$\vec{F} = k\frac{q\,q'}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$



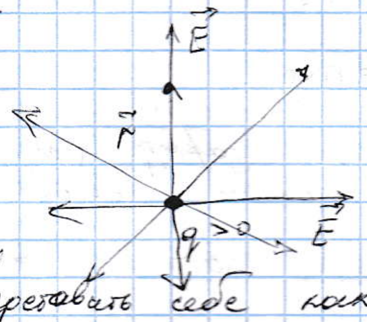
q' - пробный заряд.

q' > 0 всегда

По определению: $\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}}$

[F] = Н

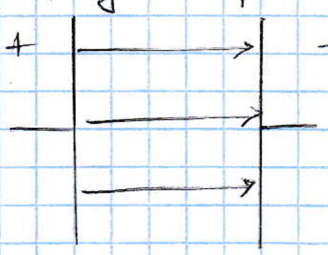
[q] = Кл ; [E] = $\frac{В}{м}$.



$\vec{E}$ точечного заряда $= \vec{E} = \frac{kq}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

Силовая линия эл. поля - это линия в каждой точке которой $\vec{E}$ направлен по касательной. Эти линии позволяют представлять себе как выглядит эл. поле.

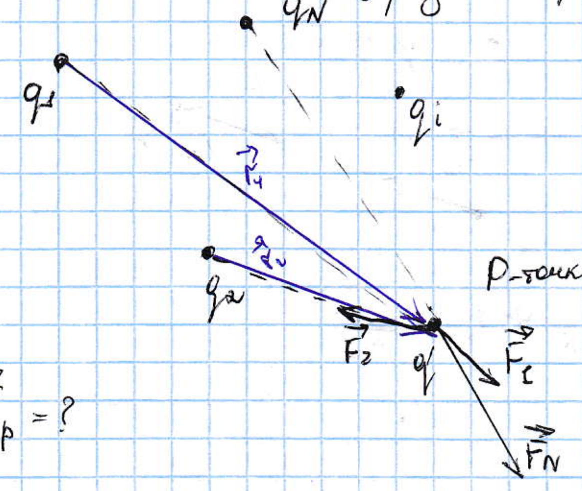
конденсатор



электрический диполь.

Вычисление полей заданного распределения заряда.

Система точечных зарядов: $q_1, q_2, \ldots q_i \ldots q_N$.



$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N \to \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} F_i$ - принцип суперпозиции.

P - точка наблюдения.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

$\vec{E}_p = ?$

$$\vec{E} = k\left(\frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + \frac{q_2\vec{r}_2}{r_2^3} + \ldots + \frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i + \ldots + \frac{q_N}{r_N^3}\vec{r}_N\right)$$

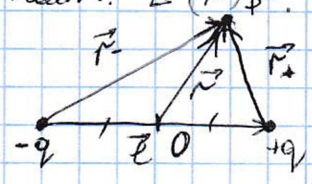
Пример:

Напряжённость поля электрического диполя.

$\vec l$ - плечо диполя

$\vec p = q\vec l$ - электрический дипольный момент (задан)

Найти: $\vec E(\vec r)_P$ - ? при $r >> l$



$$\vec r_- = \frac{\vec l}{2} + \vec r$$

$$\vec r_+ = -\frac{\vec l}{2} + \vec r$$

$$\vec E = \vec E_+ + \vec E_- = k\left(\frac{q_+}{r_+^3}\vec r_+ + \frac{q_-}{r_-^3}\cdot \vec r_-\right) = kq\left(\frac{\vec r_+}{r_+^3} - \frac{\vec r_-}{r_-^3}\right)$$

$$q_+ = -q_- = q$$

$$r_-^2 = \vec r_-^{\,2} = \left(\frac{\vec l}{2} + \vec r\right)^2 = \cancel{\frac{l^2}{4}} + r^2 + (\vec l\,\vec r) \simeq r^2\left(1 + \frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right)$$

$$r_+^2 = (\vec r_+)^2 = \cancel{\frac{l^2}{4}} + r^2 - (\vec l\,\vec r) \simeq r^2\left(1 - \frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right)$$

$$\boxed{(1+x)^n \simeq 1+nx \quad x<<1}$$

$$r_- \simeq \sqrt{r_-^2} = r\left(1 + \frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right)^{\frac12} \simeq r\left(1 + \frac12\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right)$$

$$r_+ \simeq r\left(1 - \frac12\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right)$$

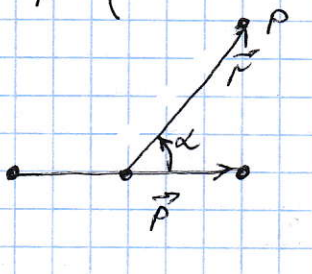
$$r_-^{-3} = r^{-3}\left(1 + \frac12\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right)^{-3} \simeq \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac32\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right)$$

$$r_+^{-3} \simeq \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac32\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right)$$

$$\vec E = \frac{kq}{r^3}\left(\left(-\frac{\vec l}{2} + \vec r\right)\left(1 + \frac32\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right) - \left(\frac{\vec l}{2} + \vec r\right)\left(1 - \frac32\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{kq}{r^3}\left(-\frac{\vec l}{2} + \cancel{\vec r} - \cancel{\frac34\vec l\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}} + \frac32\vec r\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2} - \frac{\vec l}{2} - \cancel{\vec r} + \cancel{\frac34\vec l\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}} + \frac32\vec r\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right) =$$

$$= \frac{kq}{r^3}\left(-\vec l + 3\vec r\frac{(\vec l, \vec r)}{r^2}\right) = \frac{k}{r^3}\left(-\vec p + 3\vec r\frac{(\vec p, \vec r)}{r^2}\right)$$



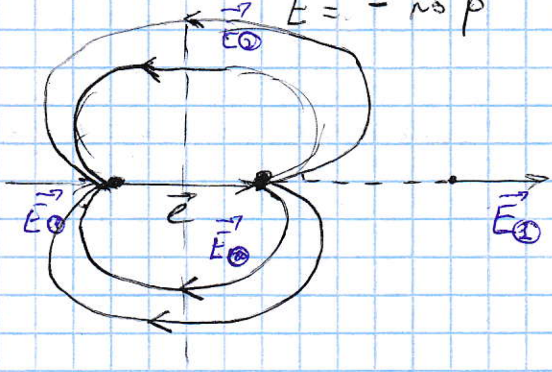
① $\alpha = 0$ (на оси диполя) $\Rightarrow (\vec p, \vec r) = pr$

$\vec r \uparrow\uparrow \vec p$

$$\vec E = \frac{k}{r^3}\left(-\vec p + 3\vec r\frac{p}{r}\right) = \frac{k}{r^3}\left(-\vec p + 3\frac{\cancel{r}}{\cancel{r}}\vec p\right) = \frac{k}{r^3}\cdot 2\vec p$$

② $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\vec{p}, \vec{r}) = 0$

$$\vec{E} = -\frac{k}{r^3}\vec{p}$$



т.з. $E \sim \frac{1}{r^2}$

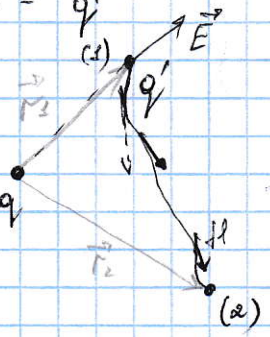
Для диполь $E \sim \frac{1}{r^3}$

14.10.2020

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$$

$$W_n(\vec{r}_1) - W_n(\vec{r}_2) = A_{r_1 r_2} = \int_{(1)}^{(2)} F_l\, dl$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} \quad \rightarrow \quad W_n(\vec{r}_1) - W_n(\vec{r}_2) = q'\int_{(1)}^{(2)} E_l\, dl \;\Big|\cdot\frac{1}{q'}$$



$$\underbrace{\frac{W_n(\vec{r}_1) - W_n(r_2)}{q'} \equiv \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)}_{\sim \text{разность потенциалов (опр-е.)}}$$

$\vec{r}_2 \equiv \vec{r}_0: \quad W_n(\vec{r}_0) = 0 \Rightarrow \varphi(\vec{r}_0) = 0$

$\vec{r}_1 \equiv \vec{r}$

$$W_n(\vec{r}) = q'\int_{(\vec{r}_0)}^{(\vec{r})} E_l\, dl$$

$$\underbrace{\varphi(\vec{r}) = \int_{(\vec{r}_0)}^{(\vec{r})} E_l\, dl}$$ — формула, связывающая напряжённость и потенциал.

Обратная связь.

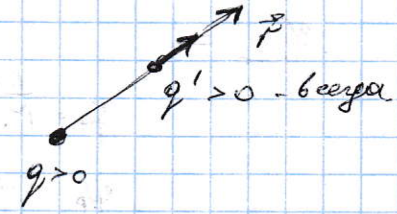
$$F_x = -\frac{\partial W_n}{\partial x}$$

$$q'E_x = -\frac{\partial(q'\cdot\varphi)}{\partial x} \rightarrow E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Пример.

① Потенциал поля точечного заряда.

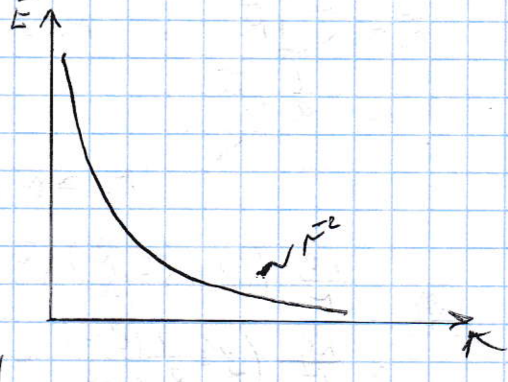


$$\vec E = \frac{kq\vec r}{r^3}$$

$\varphi(r) = ?$

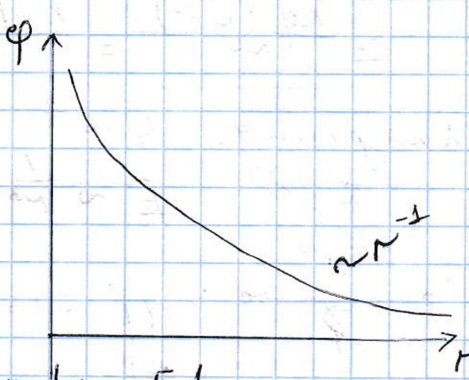
$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E_r(r')\,dr'$$

$r_0 \to \infty$; $\varphi(r_0) = 0$

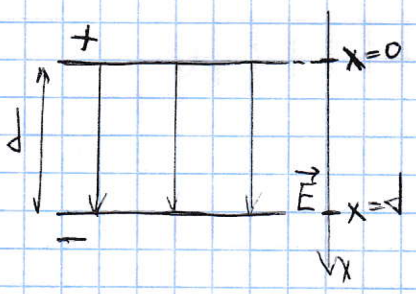


$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \int_r^{r_0} E_r\,dr$$

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \frac{kq}{r'^2}\,dr' = -\frac{kq}{r}\Big|_r^{\infty} = +\frac{kq}{r}$$



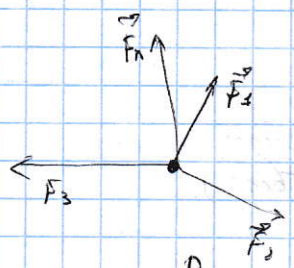
② Разность потенциалов в плоском конденсаторе.



$\vec E$ = const.

Пусть $\varphi(x=0) = 0$

$$\underbrace{\varphi(x=0)}_{=0} - \varphi(x=d) = \int_0^d E_x\,dx = E\cdot d$$

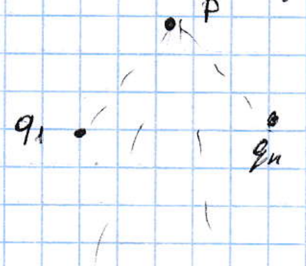


Принцип суперпозиции для потенциала.

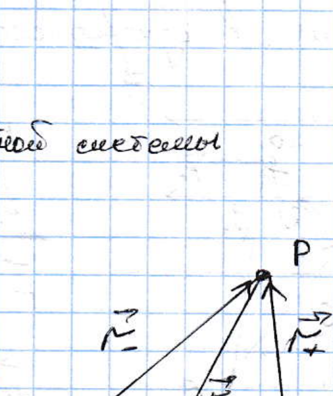
$$\vec F = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i$$

$$\Downarrow$$

$$\vec E = \sum_{i=1}^{n} \vec E_i$$



$\rightarrow \boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i}$ — для дискретной системы



Пример: потенциал поля диполя. $(r >> l)$

$\vec p = q\vec l$ — дипольный момент.

$\varphi_p = ?$

$\varphi_{r\to\infty} = 0$

$$\varphi_+ = \frac{kq}{r_+} \quad ; \quad \varphi_- = \frac{k(-q)}{r_-}$$

$$\varphi_p = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{kq}{1}\cdot\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$ ← можно пренебречь

$$\vec{r}_- = \frac{\vec{l}}{2} + \vec{r} \Rightarrow r_- \equiv |\vec{r}_-| = \sqrt{r^2 + \cancel{\frac{l^2}{4}} + (\vec{r}\cdot\vec{l})} \simeq r\left(1 + \frac{(\vec{l}\cdot\vec{r})}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{r}_+ = -\frac{\vec{l}}{2} + \vec{r}$$

$$\searrow \quad r_+ \simeq r\left(1 - \frac{(\vec{l}\cdot\vec{r})}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_p = \frac{kq}{r}\left(\left(1 - \frac{(\vec{l},\vec{r})}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{(\vec{l}\cdot\vec{r})}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \approx$$

$(1+x)^n \approx 1 + nx$ ②

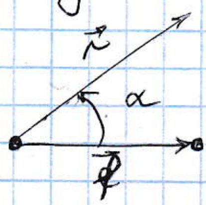
$(|x| \ll 1)$

$$\approx \frac{kq}{r}\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\frac{(\vec{l}\vec{r})}{r^2} - \cancel{1} + \frac{1}{2}\frac{\vec{l}\vec{r}}{r^2}\right) \simeq$$

$$\simeq \frac{kq(\vec{l}\vec{r})}{r^3} = \frac{k(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$$

Для диполя: $\varphi \sim \frac{1}{r^2}$

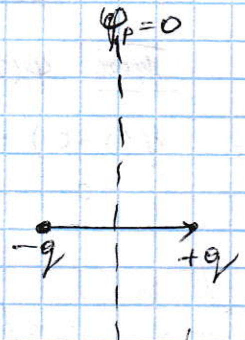
$E \sim \frac{1}{r^3}$ ~ всегда больше на 1. (степень)



$(\vec{p},\vec{r}) = pr\cos\alpha$

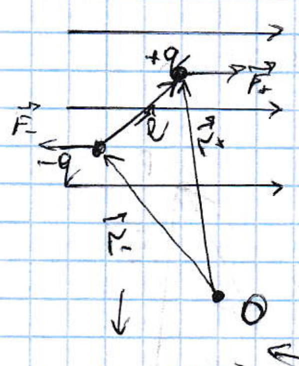
$\alpha = 0 \Rightarrow \varphi_p = \frac{kp}{r^2}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_p = 0$ ⟶



Диполь во внешнем электрическом поле. Молекулярные силы.
(силы межмолекулярного взаимодействия.)

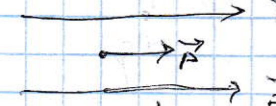
① Диполь в однородном эл. поле.



$\vec{F}_+ = q\vec{E}$

$\vec{F}_- = -qE$

$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$



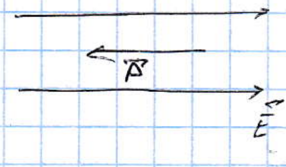
$\vec{M}_+ = [\vec{r}_+, \vec{F}_+] = q[\vec{r}_+, \vec{E}]$

$\vec{M}_- = [\vec{r}_-; \vec{F}_-] = -q[\vec{r}_-, \vec{E}]$

$\vec{M} = \vec{M}_+ + \vec{M}_- = q([\vec{r}_+, \vec{E}] - [\vec{r}_-; \vec{E}]) =$

$$= q[\underbrace{\vec r_+ - \vec r_-}_{\vec l}, \vec E] = q[\vec l, \vec E] = [\vec p, \vec E]$$

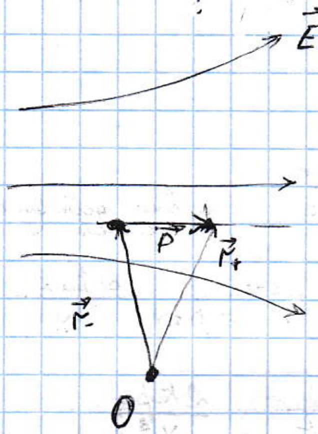
$$[\vec p, \vec E] = 0$$

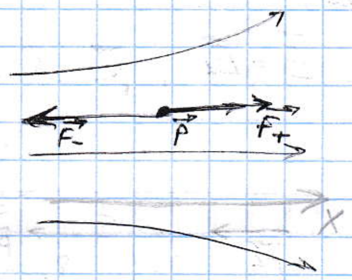


— неустойчивое равновесие.

② Диполь в слабонеоднородном поле

$$|\Delta E| = |\vec E(\vec r_-) - E(\vec r_+)| \ll \min\{|\vec E(\vec r_-)|, |\vec E(\vec r_+)|\}$$



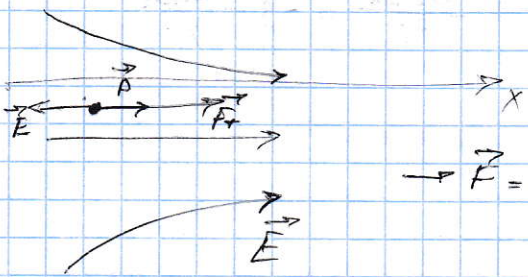


$$\vec F_+ = q\vec E_+ \equiv q\vec E(\vec r_+)$$

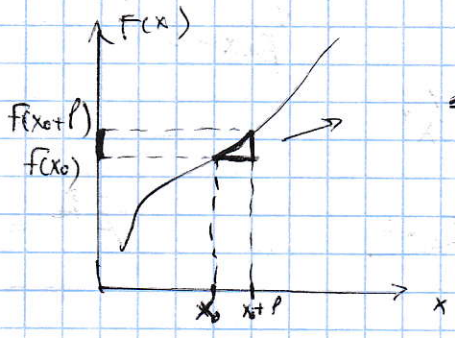
$$\vec F_- = -qE(\vec r_-)$$

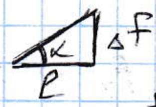
$$\vec F \neq 0$$

$\vec F = q(\vec E_+ - \vec E_-) \to F_x < 0$ — диполь втягивается в более сильное поле.



$$\to \vec F = \vec F_- + \vec F_+ \neq 0 \qquad F_x > 0$$





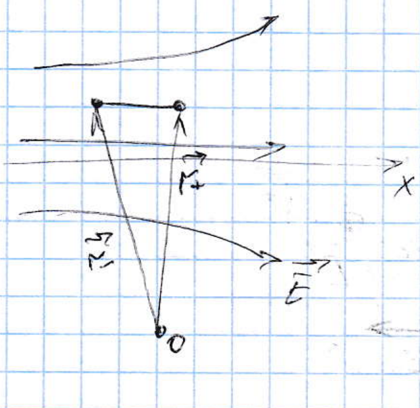
$$\vec F = q(\vec E(\vec r_+) - E(\vec r_-))$$

$$F_x = q\underbrace{(E_x(\vec r_+) - E_x(\vec r_-))} = q\Delta E_x = q\cdot\frac{\partial E_x}{\partial x}\cdot l = p\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

$$\Delta f = f(x_0 + l) - f(x)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta f}{l}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{df}{dx}$$

$$\Delta f = \frac{df}{dx}\cdot l$$

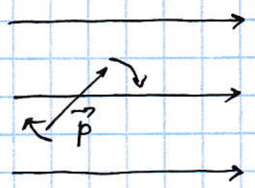


$$\Rightarrow \boxed{\vec F = p_x\frac{\partial E_x}{\partial x}\vec i + p_y\frac{\partial E_y}{\partial y}\vec j + p_z\frac{\partial E_z}{\partial z}\vec k}$$

$\vec F \not\parallel \vec p$, $\vec F \not\parallel \vec E$ — всё зависит от производной

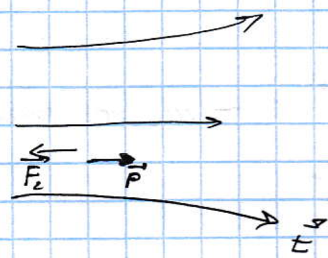
16.10.2020.

$E \sim \frac{1}{r^3}$



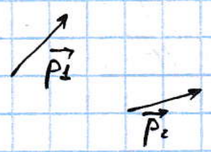
$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$

В неоднородном поле диполь втягивается в более сильное поле.



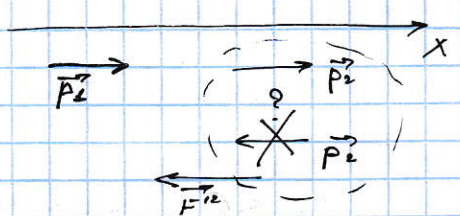
Взаимодействие двух диполей на больших расстояниях.

1.) Полярные молекулы (H_2O)



$\vec{E} = \vec{E}_1$, $\vec{p}_2$ в поле $\vec{E}_1$. первый действует на второй

$$F_x^{1-2} = p_{2x} \frac{\partial E_{1x}}{\partial x}$$



$p_{2x} = p_2$ заранее.

$$E_{1x} = \frac{2kp_1}{x^3}$$

$$\frac{\partial E_{1x}}{\partial x} = -3 \cdot \frac{2kp_1}{x^4}$$

$$\to F_x^{1-2} = -6k \frac{p_1 \cdot p_{2x}}{x^4}$$

Следствия:

1) Необходимо: $F_x^{1-2} < 0$ — притяжение

$\downarrow$

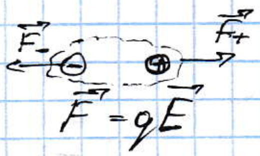
$p_{2x} > 0$

2) $F_x \sim 1/x^4$

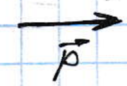
3) $F \propto p_1 \cdot p_2$ $\qquad \vec{F}^{1-2} = -\vec{F}^{2-1}$

2) Неполярные молекулы ($O_2, N_2, \dots$)

$q_+ + q_- = 0$, если $\vec{E} = 0$



$\vec{F} = q\vec{E}$

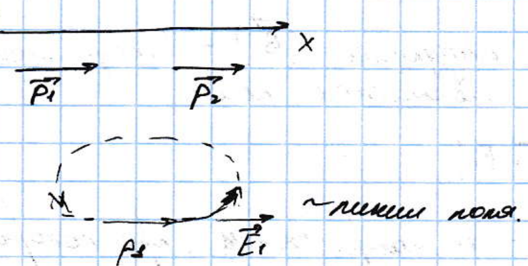


$\vec{p_1} \Rightarrow \vec{p_2} = f(\vec{E_1})$

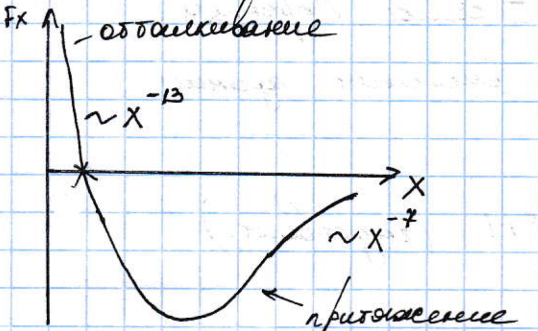
$\vec{p_2} = \alpha \vec{E_1}$, где α – коэффициент пропорциональности.

$$F_x^{1-2} = p_2 \frac{\partial E_{1x}}{\partial x} = \alpha E_{1x} \cdot \frac{\partial E_{1x}}{\partial x}$$

$$\sim \frac{-1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{-1}{x^7}$$



$F_x < 0$



$F_x = \frac{a}{x^{13}} - \frac{b}{x^7}$, a, b – const, > 0

σ – эффективный диаметр молекулы

На малых расстояниях молекулы отталкиваются. (если они химически не взаимодействуют.

$$W_п(x) - W(x_0) = \int_x^{x_0} F_x \, dx$$

$x_0 \to \infty \Rightarrow W_п(x_0) = 0$ ~ Найти потенциал самостоятельно! (потенциал Леннарда-Джонса.)

$$\Pi(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

Макроскопические проявления молекулярных сил.

Пример: процесс каплеобразования; процессы смачивания.

Магнитное поле.
Сила Лоренца.

1.) Возникает сила, завис. от св-в магнита и величины заряда.

Магнитная индукция ($\vec{B}$) - вектор магнитной индукции (силовая характеристика магнитного поля.)

$$\begin{cases} F \sim |v \cdot B| \\ \vec{F} = 0 \end{cases}$$ - то напр. ск-ти, при котором $F = 0$ → при $\vec{v} \parallel \vec{B}$

$$\vec{F} \sim [\vec{v}, \vec{B}] \to \boxed{\vec{F}_л = f q [\vec{v}, \vec{B}]}$$ - сила Лоренца.

зависит от выбора системы единиц.

$$f = \begin{cases} 1, & SI \\ \frac{1}{c}, & CGSM \text{ (гауссовая.)} \end{cases}$$

ск-ть света.

$\vec{F}_л \perp \vec{v}$, $\vec{F}_л \perp \vec{B}$

$\Downarrow$

$A_{F_л} = 0$

Ед. изм.: $[B] = 1$ Тл. (SI)

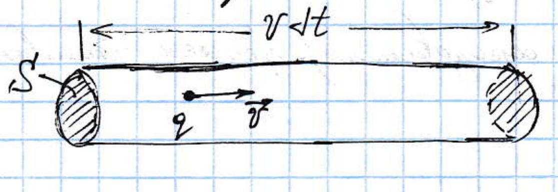
$[B] = 1$ Гс. (CGSM) - „гаус"

1 Тл. $= 10^4$ Гс

Сила Ампера.

Сила Ампера - сумма сил Лоренца. → $\vec{F}_A = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{iл}$

SI. $\vec{F}_л = q[\vec{v}, \vec{B}]$

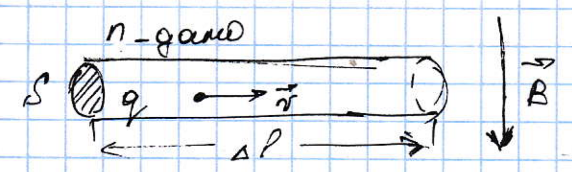


n - число зарядов в единице объёма (концентрация)

$$I = \frac{dQ}{dt} = qnvS$$

$$dQ = q \cdot dN = qnSvdt$$

$$dN = n \cdot dV = n \cdot S \cdot v \cdot dt$$

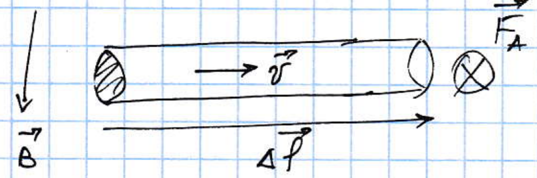


$$\rightarrow F_A = \sum_{i=1}^{N} F_{\Lambda i} = F_\Lambda \cdot N = q\, v B \cdot n \cdot \underbrace{S \cdot \Delta l}_{\Delta V} =$$

Пусть $\vec{B} \perp \vec{v}$

$F_\Lambda = |q| v B$

$$= q \cdot v \cdot n \cdot S \cdot B \cdot \Delta l = BI\Delta l,$$

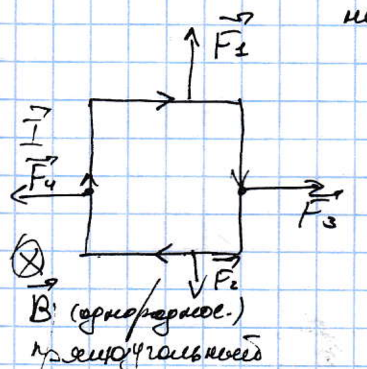


$\vec{F_A} \uparrow\uparrow \vec{F_\Lambda}$

$\Delta l \uparrow\uparrow \vec{v}$

$\boxed{\vec{F_A} = I[\Delta\vec{l}, \vec{B}]}$ – сила Ампера

Действие магнитного поля на рамку с током.



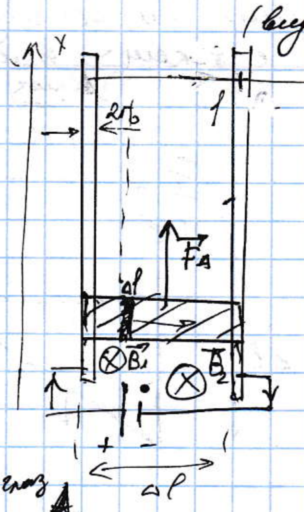
$\vec{F_A} = I[\Delta\vec{l}, \vec{B}]$

$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$

$\vec{F_3} = -\vec{F_4}$

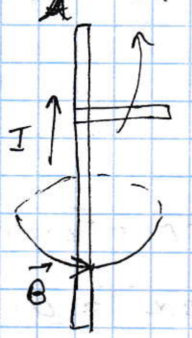
$\vec{F_\Sigma} = 0$

Рельсотрон: (вид сверху)

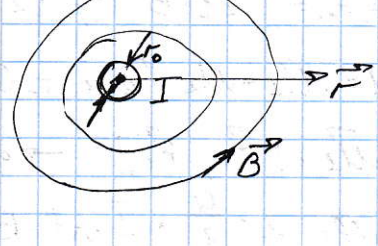


$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{\text{ампер.}} = \int_0^L F_x\, dx$$

$$\Delta\vec{F_A} = I[\Delta\vec{l}; \vec{B}]$$



SI: $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{1}{2}$



μ_0 – магнитная постоянная.

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(l-r)} \cdot \frac{1}{2}$$

По принципу суперпозиции: $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$

$B = B_1 + B_2$

$$F_A = I\int_{r_0}^{l-r_0}(B_1 + B_2)\,dr =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left(\int_{r_0}^{l-r_0}\frac{dr}{r} + \int_{r_0}^{l-r_0}\frac{dr}{l-r}\right) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left(\ln\frac{l-r_0}{r} - \underbrace{\ln(l-r)\Big|_{r_0}^{l-r_0}}_{\ln\frac{r_0}{l-r_0}}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \cdot 2\ln\frac{l-r_0}{r_0}$$

$$A_{\text{ампер.}} = \int_0^L F_{Ax}\, dx = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{l - r_0}{r_0} \cdot L, \quad l - r_0 \approx l$$

1) $V_1 \ll V_2$

$$\frac{m V_2^2}{2} \approx \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \cdot L \ln \frac{l}{r_0}$$

$$I = \sqrt{\frac{\pi m V_2^2}{\mu_0 L \cdot \ln \frac{l}{r_0}}}$$

Оценка. (2015г.)

$m = 10$ кг.

$V_2 = 2{,}3 \ \frac{\text{км}}{\text{с}}$

$l = 1$ м

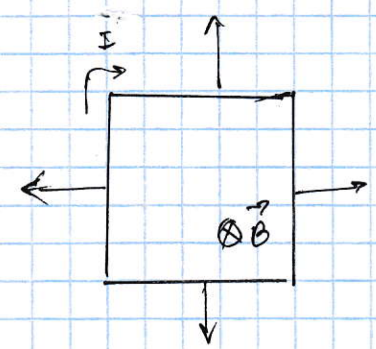
$r_0 = 10$ см

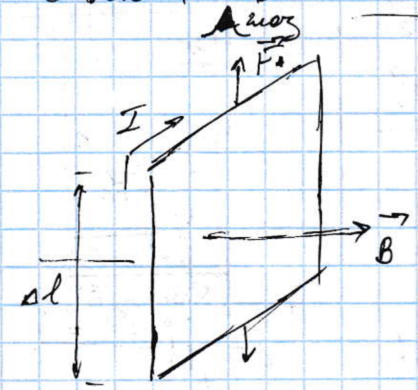
$L = 50$ м.

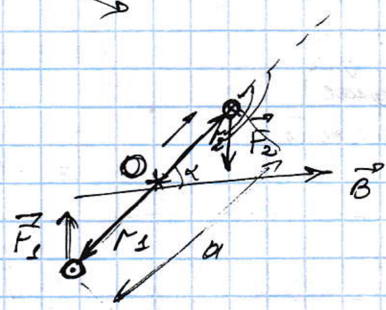
$I \sim 10^6 A$

23.10.2020

Момент сил, действующих на рамку с током в магнитном поле.







$\vec{F_A} = I\,[\Delta \vec{l}, \vec{B}]$

$F_1 = F_2 = I \cdot \Delta l \cdot B \quad ; \quad r_1 = r_2$

$M = M_1 + M_2$ (отн. т. O)

$\vec{M_1} = [\vec{r_1}, \vec{F_1}] \rightarrow M_1 = r_1 \cdot F_1 \cdot \sin(\widehat{\vec{r_1}, \vec{F_1}}) = r_1 \cdot F_1 \cos\alpha$

$M = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot I \cdot \Delta l \cdot B \cos\alpha = a \cdot I \cdot \Delta l \cdot B \cos\alpha$

Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях.

$\vec{E}, \vec{B}$

$$\vec{F}_\Sigma = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$ — обобщённая сила Лоренца.

$$m\vec{a} = \vec{F}_\Sigma$$

$m, q>0$

$$\vec{F}_л \perp \vec{v} \Rightarrow A_л = 0$$

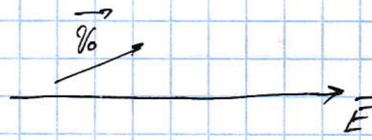
$$\vec{F}_{эл} = q\vec{E} \text{ — конс} \Rightarrow \Delta W_п = \int_{(1)}^{(2)} q\vec{E}\,d\vec{l}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + \underbrace{W_{п1}}_{q\varphi(\vec{r}_1)} = \frac{mv_2^2}{2} + \underbrace{W_{п2}}_{=q\varphi(\vec{r}_2)}$$

1) Движение заряженной частицы в однородном эл. поле.

$\vec{E}, (\vec{B}=0)$; $\vec{v}(t=0)=\vec{v}_0$; $\vec{r}(t=0)=0$; $\vec{E} = const.$

Найти: $\vec{v}(t)$, $\vec{r}(t)$



$$m\vec{a} = q\vec{E}$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = const.$$

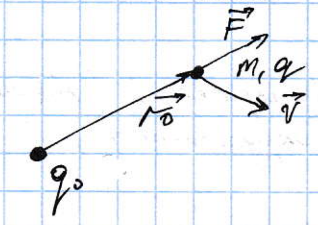
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\,dt' = \underbrace{\vec{v}_0}_{=0} + \frac{q}{m}\vec{E}t = \frac{q}{m}\vec{E}t$$

Траектория плоская, лежит в пл-ти $(\vec{v}_0, \vec{E})$ ⇐

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t')\,dt' = \vec{v}_0 t + \frac{q}{2m}\vec{E}t^2$$

2) Движение заряженной частицы в поле неподвижного точечного заряда.

$\Downarrow \vec{B} = 0$



$q_0 > 0$

$$\vec{E} = \frac{kq_0}{r^3}\cdot\vec{r}$$

II з-н Ньютона: $m\vec{a} = q\vec{E}$ — Не реализуемо!

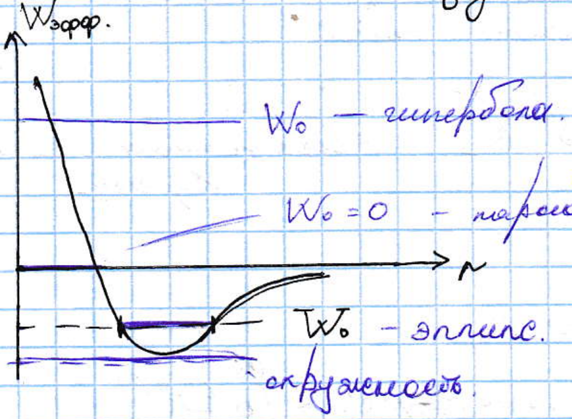
$$\cancel{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\cdot\frac{kq_0\cdot\vec{r}}{r^3}}$$

$$\varphi(r) = \frac{kq_0}{r}$$

$$W_0 = \frac{mv_0^2}{2} + q\frac{kq_0}{r_0} = const = \frac{mv^2}{2} + \frac{qkq_0}{r}$$

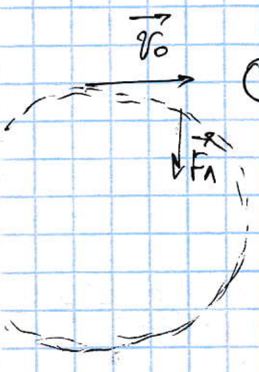
Момент импульса: $\vec{N}_0 = [\vec{r}_0, m\vec{v}_0] = const = [\vec{r}, m\vec{v}]$

~ задача Кеплера! (в прошлом.)



③. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле. ($\vec{E}=0$), $\vec{B}=const$)

а) $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$; $q>0$



$$m\vec{a} = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

1) $\left.\begin{array}{l} \vec{F}_л \perp \vec{v} \\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{F}_л \end{array}\right\} \vec{a} \perp \vec{v}$

2) $F_л$ – не совершает работу:

$A_л = 0$ (т.к. $\vec{F}_л \perp \vec{v}$)

$\Downarrow$

$W_к = const.$ $\Rightarrow$ $v = const \Leftrightarrow a_\tau = 0$

$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{a}_n$

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ $\Rightarrow$

$a_n = const$ (т.к. $v = const$) $\Rightarrow$ $\rho = const$

$\Downarrow$

$F_л = const$

т.е. траекторией будет окружность! (ларморовская окружность)

$\rho = R_B$ – ларморовский радиус.

$$\frac{mv^2}{R_B} = qvB \quad \rightarrow \quad R_B = \frac{mv}{qB}$$

T_B - ларморовский период.

$$T_B = \frac{2\pi R_B}{v} = \frac{2\pi m v}{qBv} = \frac{2\pi m}{qB}$$

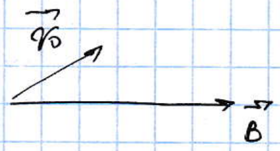
ω_B - ларморовская частота:

$$\omega_B = \frac{2\pi}{T_B} = \frac{qB}{m} \qquad \Rightarrow T_B \text{ и } \omega_B \text{ - не зависят от ск-ти!}$$

б) $\vec{v} \not\perp \vec{B}$

$$m\vec{a} = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

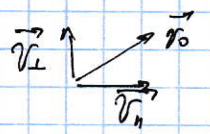
$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$



$$\vec{F}_Л = q[\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \vec{B}] =$$

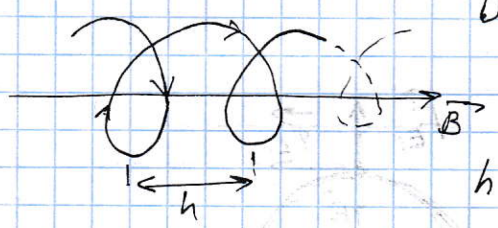
$$= q(\underbrace{[\vec{v}_{\parallel}, \vec{B}]}_{=0} + [\vec{v}_{\perp}, \vec{B}]) =$$

$$= q[\vec{v}_{\perp}, \vec{B}]$$



$$R_B = \frac{mv_{\perp}}{qB}; \quad T_B = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$\vec{v}_{\parallel} = const.$$



– винтовая линия.

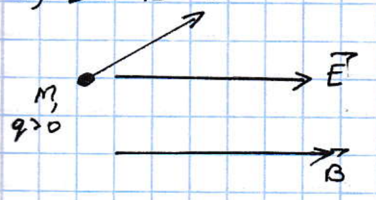
h - шаг винта.

$$h = v_{\parallel} \cdot T_B = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{qB}$$

28.10.2020

4) $\vec{E} \neq 0$, $\vec{B} \neq 0$, однород.
$\vec{E} = const$, $\vec{B} = const$

а) $\vec{E} \parallel \vec{B}$ $\vec{v}_0$



$$m\vec{a} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}] \qquad (SI)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad (\text{по отн. к } \vec{E} \text{ и } \vec{B})$$

$$[\vec{v}, \vec{B}] = \underbrace{[\vec{v}_{\parallel}, \vec{B}]}_{=0} + [\vec{v}_{\perp}, \vec{B}]$$

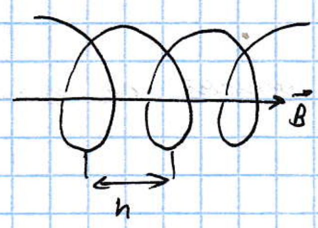
$$\frac{m\,d\vec{v}_{\parallel}}{dt} + \underline{\frac{m\,d\vec{v}_{\perp}}{dt}} = q\vec{E} + \underline{q[\vec{v}_{\perp}, \vec{B}]}$$

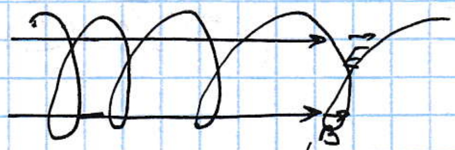
1) $$\frac{m\,d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q[\vec{v}_{\perp}, \vec{B}]$$

$$R_B = \frac{mv_{\perp}}{qB}, \quad T_B = \frac{2\pi m}{qB}$$

2) $$\frac{m\,d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = q\vec{E}$$

$$\vec{a}_E = \frac{q\vec{E}}{m} = \overrightarrow{const} \Rightarrow \vec{v}_{\parallel} = \vec{v}_{0\parallel} + \frac{q\vec{E}}{m}t$$



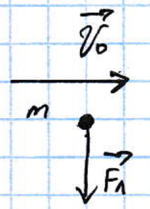


~ ускоренный дрейф вдоль этих полей.

$$h = v_{\parallel} \cdot T_B$$

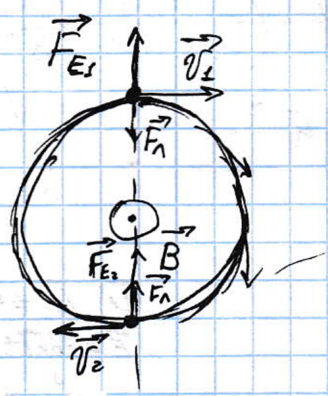
Если $q<0$ – самостоятельно.

б) $\vec{E} \perp \vec{B}$ (движение в скрещенных полях)



$$|\vec{F_{\Sigma 1}}| = |\vec{F_{E1}} + \vec{F_{\Lambda 1}}| = |qE - qv_1 B|$$

$$|\vec{F_{\Sigma 2}}| = |qE + qv_2 B|$$



$$q\vec{E} \neq 0 \Rightarrow v_1 > v_2$$

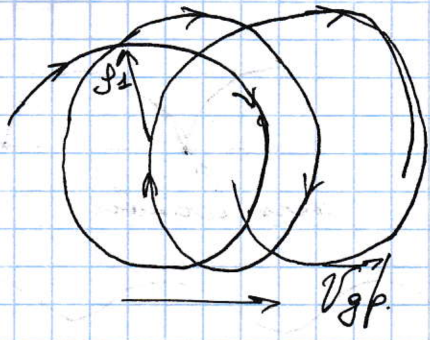
$$\left.\begin{aligned} &\vec{F_{E1}} \parallel \vec{F_{\Lambda 1}} \\ &\vec{F_{E2}} \parallel F_{\Lambda 2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\vec{a_1} \perp \vec{v_1} \\ &\vec{a_2} \perp \vec{v_2} \end{aligned} \qquad a_1 = \frac{v_1^2}{\rho_1} \qquad a_2 = \frac{v_2^2}{\rho_2}$$

$$\vec{a_2} \uparrow\uparrow \vec{F_{\Sigma 2}}$$

$$|\vec{F_{\Sigma 1}}| = |qE - qv_1 B| = \frac{mv_1^2}{\rho_1} \rightarrow \frac{1}{\rho_1} = \frac{q}{m}\left(\frac{E}{v_1^2} - \frac{B}{v_1}\right)$$

$$|\vec{F_{\Sigma 2}}| = |qE + qv_2 B| \rightarrow \frac{1}{\rho_2} = \frac{q}{m}\left(\frac{E}{v_2^2} + \frac{B}{v_2}\right)$$

$$\frac{1}{\rho_2} > \frac{1}{\rho_1} \Rightarrow \rho_2 < \rho_1$$



$\vec{v}_{\text{др}} \perp \vec{E}$

$\vec{v}_{\text{др.}} \perp \vec{B}$

$\vec{v} = \vec{v}_{\text{др.}} + \vec{v}_{\sim}$

$\frac{m\,d\vec{v}_{\text{др.}}}{dt} + \frac{m\,d\vec{v}_{\sim}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v}_{\text{др.}}, \vec{B}] + q[\vec{v}_{\sim}, \vec{B}]$

Пусть 1) $\vec{v}_{\text{др.}} = const$

2) $q\vec{E} + q[\vec{v}_{\text{др.}}, \vec{B}] = 0 \quad / : q$

$\vec{B}\times \Big| \ \vec{E} + [\vec{v}_{\text{др.}}, \vec{B}] = 0$

$[\vec{B}, \vec{E}] + \underbrace{[\vec{B}, [\vec{v}_{\text{др.}}, \vec{B}]]}_{\vec{v}_{\text{др.}} \cdot B^2 - \vec{B}\cdot\underbrace{(\vec{B}, \vec{v}_{\text{др.}})}_{=0} = \vec{v}_{\text{др.}} \cdot B^2} = 0$

$[\vec{B}, \vec{E}] + \vec{v}_{\text{др.}} \cdot B^2 = 0$

$\vec{v}_{\text{др.}} = -\frac{[\vec{B}, \vec{E}]}{B^2} = \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{B^2}$ ~ аплитуя предположение верно! $\vec{v}_{\text{др.}} = const$

$\frac{m\,d\vec{v}_{\sim}}{dt} = q[\vec{v}_{\sim}, \vec{B}]$

$\rightarrow \quad R_0 = \frac{m v_{\sim}}{qB}$

Что если $q < 0$ - ?

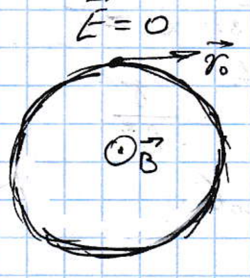
$\vec{v}_0 = \vec{v}_{\text{др.}} + \vec{v}_{\sim 0}$

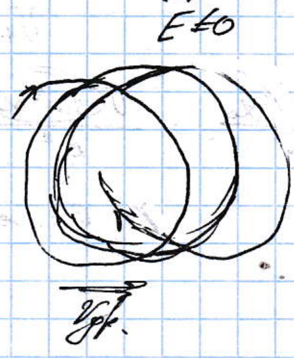
$A_{\text{л}} = 0 \Rightarrow |\vec{v}_{\sim 0}| = |\vec{v}_{\sim}|$

$\vec{v}_{\sim 0} = \vec{v}_0 - \vec{v}_{\text{др.}}$

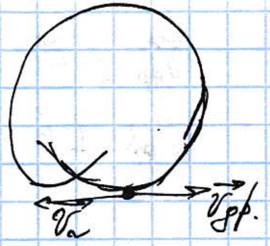
$|\vec{v}_{\sim}| = |\vec{v}_{\sim 0}| = |\vec{v}_0 - \vec{v}_{\text{др.}}|$

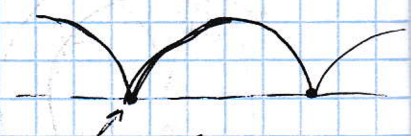
$\vec{v}_0 \parallel \vec{v}_{\text{др.}}$





Увеличиваем $\vec{E}$:





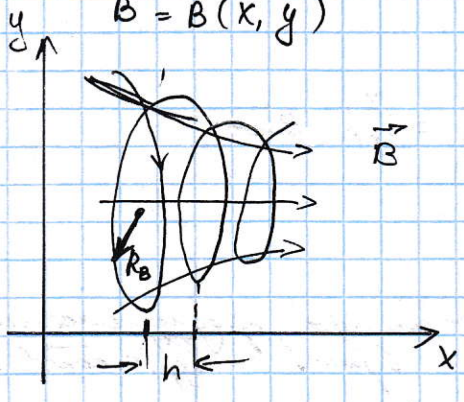
точки остановки.

$V_{гр}$. ещё больше.

Продольный дрейф заряженных частиц в слабонеоднородном магнитном поле. Магнитные ловушки.

(5) $\vec{E} = 0$, $\vec{B} \neq 0$

$\vec{B} = \vec{B}(x, y)$



Если $\left|\frac{\partial B}{\partial x}\right| \cdot h \ll B$, $\left|\frac{\partial B}{\partial y}\right| \cdot R_B \ll B$ } тогда поле называется слабонеоднородным.

$$\frac{V_\perp^2(x)}{B(x)} = const.$$

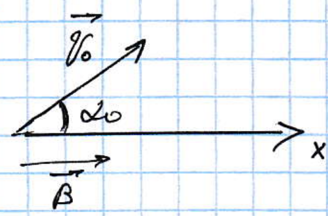
$V \perp$ - по отношению к магнитному полю.

$$W_к = \frac{mV^2}{2} = const = \frac{mV_\perp^2}{2} + \frac{mV_\parallel^2}{2}$$

Пусть $B(x)$ - возрастает $\Rightarrow$ $V_\perp$ возрастает

$\Downarrow$

$V_\parallel$ убывает



$$V_{\perp 0} = V_0 \sin\alpha_0$$

$$V_{\parallel 0} = V_0 \cos\alpha_0$$

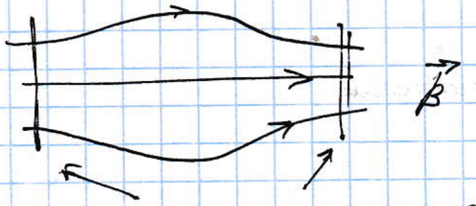
Остановка при $V_\parallel = 0$

$$V_\parallel = V\cos\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

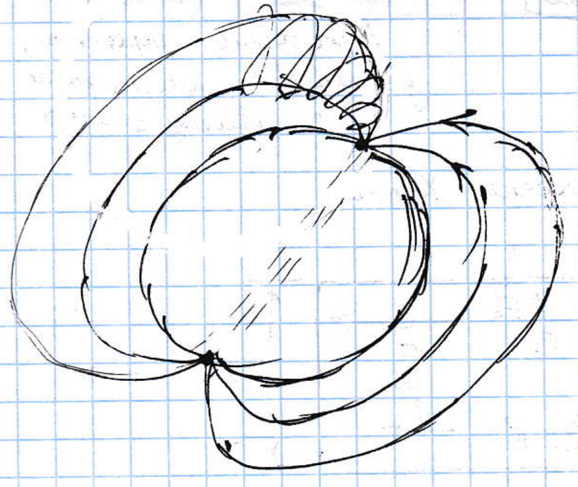
$$V_\perp = V\sin\alpha = V$$

$$\frac{V_0^2 \sin^2\alpha_0}{B_0} = \frac{V^2 \overbrace{\sin^2\alpha}^{=1}}{B^*} = \frac{V^2}{B^*}$$

$\uparrow$ в т. остановки.



возможные остановки.
(магнитные ловушки.)



Ускорители заряженных частиц.
Циклотрон.

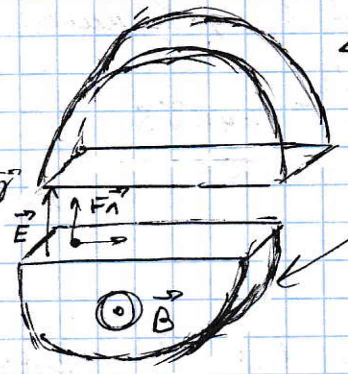
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

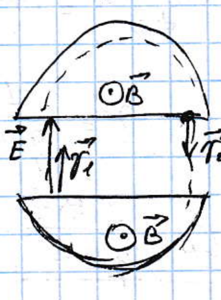
$|q| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

$U \sim 80$ кВ $\rightarrow A_{эл.} = 80$ кэВ

$\frac{mV^2}{2} - 0 = A_{эл.} = |q| \cdot U \quad \Rightarrow \quad V \sim \frac{c}{3}$

дуанты





поле переключается и снова разгоняет!

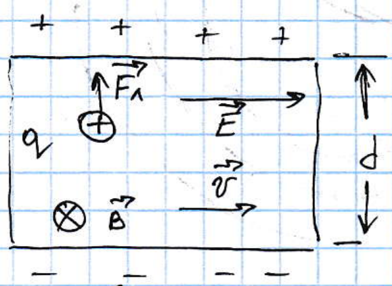
$T_E = T_B = \frac{2\pi m}{qB}$

циклотронное условие
(циклотронный резонанс)

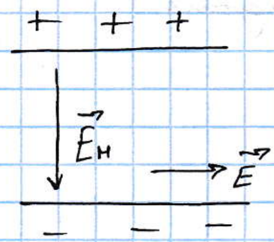
$R_B = \frac{mV}{qB}$

Некоторые эффекты, связанные с действием магнитного поля в системах с движущимися зарядами.

① Эффект Холла.



нехватка полож. зарядов.



$\vec{E}$ – первичное эл-ое поле.

$\vec{E}_H$ – эл-ое поле Холла.
$(\vec{E}_H \perp \vec{E})$

Равновесие зарядов при

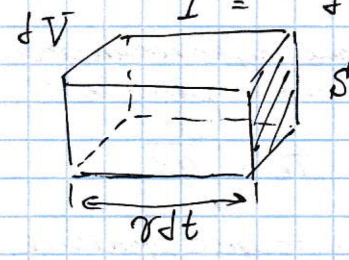
$$q\vec{E}_H + \vec{F}_Л = 0$$
$$\Downarrow$$
$$qE_H = qvB \quad \Rightarrow \quad E_H = vB$$

Разность потенциалов:

$$\Delta\varphi_H = U_H = E_H \cdot d = vBd$$

Но $v = ?$ Выразим через силу тока I в проводнике:

$$I \overset{\text{опр.}}{=} \frac{dQ_\Sigma}{dt} = \frac{q \cdot dN}{dt} = \frac{qn\,dV}{dt} = \frac{qnvS\,dt}{dt} = qnvS$$

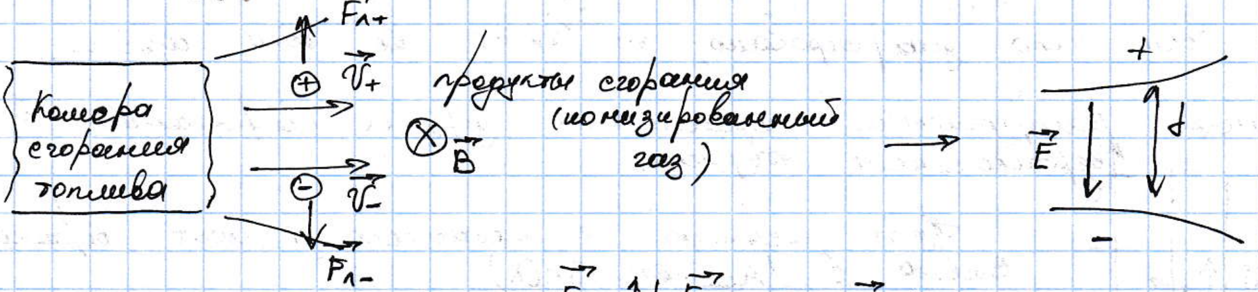


$$v = \frac{I}{qnS}$$

$$\Rightarrow \underline{U_H = \frac{IBd}{qnS}} \quad \Rightarrow \text{Измеряя } I, B, U_H \text{ найдём } n$$

Нарисовать для случая с отрицательными $\tilde{e}$:

② Магнитогазодинамический генератор (МГД-генератор)



$$\vec F_{л+} \uparrow\downarrow \vec F_{л-} \Rightarrow \vec E \neq 0$$

Работа $\vec F_л$: $A_л = F_{л+} \cdot d = q v_+ B d$

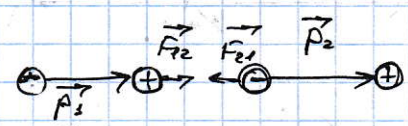
ЭДС: $\boxed{\mathcal{E} = \frac{A_л}{q} = v_+ B d}$

Пусть $d = 1$ м, $B = 1$ Тл, $v \simeq 300\ \frac{м}{с}$ (тепловая ск-ть) $\Big\} \Rightarrow \mathcal{E} \simeq 300$ В.

Деформации тел и упругие силы.

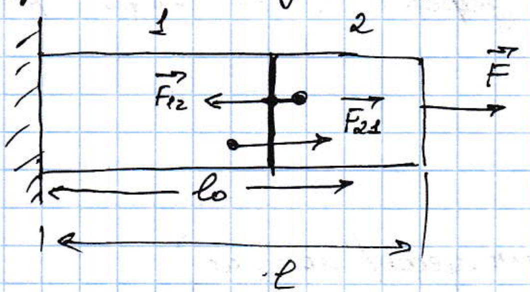
① Рассматриваем сейчас протяжённое тело а не м.т. Но нам нужен не способ описания деформированного сос-я, а св-ва самой силы.

② Упругие силы имеют электромагнитную природу: в их основе кулоновское взаимодействие диполей.



Но возникнут силы отталкивания, которые будут мешать → диполи.

③ Простейший вид деформ-и — сжатие / растяжение



Расс-м стержень с закрепл. торцом, к другому торцу приложена сила $\vec F$, к-рая $\perp$ торцевому сечению ($\Rightarrow$ нет изгиба). Появится растяжение, но нас

④ Принято говорить не об упр. силах, а об упр. напряжениях

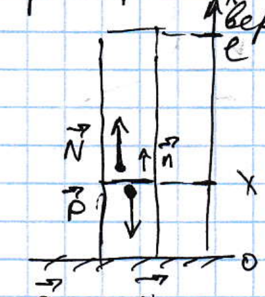
Опр. Пусть $\vec F_{упр.} \perp$ торцевой грани. Тогда введём нормальное упр-е напряжение

$$\sigma_n = \frac{F_{упр.n}}{S}$$

Принято вводить внешнюю нормаль $\vec n$ к телу (направл. наружу), тогда $\sigma_n > 0$ при растяжении, $\sigma_n < 0$ при сжатии (давление на тело).

Если тело деформировано, то $\sigma_n \neq 0$ во всём объёме.

Пример: распределение нормальных упругих напряжений в вертикальном стержне.



Пусть стержень с плотностью ρ стоит вертикально высота l. Найдём $\sigma_n(x)$

Расс-м произвольное сечение. Часть выше этого сечения давит на нижнюю часть силой $\vec{P}$ (вес), нижняя действует на верхнюю ($\vec{N}$)

$\underbrace{\vec{P} = -\vec{N}}_{\text{упр. силы!}}$

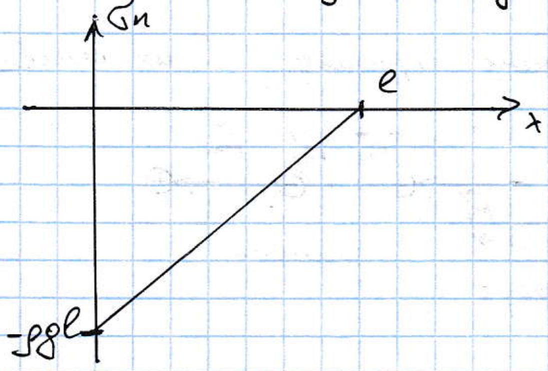
Для нижней части: $\vec{n}$ - внешняя нормаль.

$$\sigma_n = \frac{P_n}{S} = -\frac{P}{S} = \frac{-N}{S}$$

Для верхней части:

$$\left.\begin{aligned} m_{верх}\, g &= N \\ m_{верх} &= \rho S (l - x) \end{aligned}\right\} N = \rho S (l - x) g$$

$$\sigma_n = -\rho (l - x) g$$



1) $\sigma_n < 0$ - сжатие

2) σ_n зависит от x - деформации неоднородные

(Б.) Пусть нач. длина l_0 после деформ. - l. Тогда растяжение

$$\Delta l = l - l_0.$$

Но удобнее относит. величины:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \approx \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{(отн. деформация)}$$

Почему безразлично, что написать в знаменателе?

$$\frac{\Delta l}{l_0} - \frac{\Delta l}{l} = \frac{(l - l_0)\Delta l}{l_0 l} = \frac{(\Delta l)^2}{l l_0} \approx \varepsilon^2 << \varepsilon$$ - величина 2-ого порядка малости (пренебрежимо мала по ср-ю с ε при $\varepsilon << 1$)

(6.) Введём ещё $l_\perp$ - поперечный размер. Изм-е l_0 сопровождается изменением $l_\perp$. Из опытов ε и $\varepsilon_\perp$ - разных знаков, т.е.

Дем

со жгутом и риской

$$\varepsilon \cdot \varepsilon_\perp < 0$$

Но при малых ($\varepsilon << 1$) деформ-ях оказывается

$$\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon} = const \quad \text{(опытный факт)}$$

Принято обозначение: $\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon} = -\mu \quad (\mu > 0)$

μ - коэф-т. Пуассона, он зависит от в-ва

Св-ва μ:

$$0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}.$$

Почему $\mu_{max} = \frac{1}{2}$? Ответ геометрический!

Рассмотр. стержень длины l_0, в сечении пусть квадрат площади $l_{\perp 0}^2$; Интуитивно: при растяжении (при $\varepsilon > 0$) объём не уменьшится, при сжатии ($\varepsilon < 0$) объём не увеличивается

Нач. объём: $V_0 = l_0 \cdot l_{\perp 0}^2$ $\qquad \Delta V \leq 0$

После деформации: $l = l_0(1+\varepsilon)$, $l_\perp = l_{\perp 0}(1+\varepsilon_\perp)$

$$V = l \cdot l_\perp^2 = l_0 \cdot l_{\perp 0}^2 \cdot (1+\varepsilon) \cdot (1+\varepsilon_\perp)^2 = V_0(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_\perp^2 + 2\varepsilon_\perp)$$

Учтем, что з-н Пуассона справедлив при $\max\{\varepsilon, \varepsilon_\perp\} << 1$ => пренебрежём всеми квадратичными величинами =>

$$V = V_0(1 + 2\underset{-\mu\varepsilon}{\varepsilon_\perp} + \varepsilon) = V_0(1 + \varepsilon(1 - 2\mu))$$

Изм-е объёма:

$$\Delta V = V_0 \cdot \varepsilon(1 - 2\mu)$$

Знак ΔV совп со знаком ε => $1 - 2\mu \geq 0$

$$\mu \leq \frac{1}{2}$$

(7). Надо как-то связывать силы с величинами деформации. Ещё информативнее будет, если вместо сил рассмат. упр. напряжения. Такая связь $\exists$ и даётся законом Гука (эксп):

$$\sigma_n = E \cdot \varepsilon \quad \left(\text{где } \sigma_n = \frac{F_n}{S},\ \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}\right)$$

E - модуль Юнга.

Это важнейшая упругая х-ка материала (не завис. от размеров и формы образца). Видно, что E можно опред. как упр. напряжение, к-рое должно возникнуть в стержне, чтобы его длина удвоилась ($\varepsilon = 1$), если бы при этом з-н Гука остался справедлив.

Недостаток такого опр-я очевиден: з-н Гука остаётся справедлив только при $\varepsilon << 1$.

Размерность: $[E] = [\sigma_n] = \frac{Н}{м^2} = Па$, но обычно исп. внесистем. ед: $кгс/мм^2 = \frac{кГ}{мм^2}$ $1\,кГ = 10\,Н$.

Характерные значения E (модуль Юнга) и μ (коэф. Пуассона)

Материал	Сталь	Медь	Стекло	Резина
E, $\frac{кгс}{мм^2}$	$(2 \ldots 2{,}2)\cdot 10^4$	$1{,}2 \cdot 10^4$	$0{,}56 \cdot 10^4$	$0{,}05 \cdot 10^4$
μ	$0{,}24 \ldots 0{,}28$	$0{,}31 \ldots 0{,}34$	$0{,}2$	$0{,}47 \ldots 0{,}49$

(8) Связь со "школьным" з-ном Гука $F_{упр.} = k \cdot \Delta l$

Оч. важно, что E - х-ка материала. "Школьный закон" - это по сути интегр. форма закона Гука, к характеризует и материал и геометрию образца. Установим связь:

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow \sigma_n = E \cdot \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

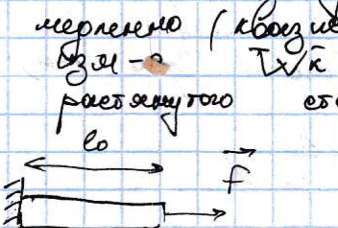
$$\frac{F_n}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}; \quad F_n = \underbrace{E\frac{S}{l_0}}\cdot \Delta l.$$

$$т.е. \quad k = E\frac{S}{l_0}$$

(9) <u>Об упругой энергии (энергии упругих деформаций)</u>

Чтобы деформир. тело, над ним надо совершить работу. А деформир. тело <u>само</u> может совершать работу (пружина закрывает дверь). Т.е., есть запас энергии. Это потенц. энергия упругой деформации. Очевидно, она = работе сил, деформирующих тело.

Важное условие: деформ-я должна происходить бесконечно медленно (квазистатич.), чтобы работа не расходовалась на изм-е $T°K$ или энергию упругих волн. Найдём $W_п$. растянутого стержня. Представим, что к нему прикладывается сила $F_n(x)$, к-рая беск. медл. непрерывно увелич. от $F_{n^1} = 0$ до $F_{n^2} = F$



Удлинение изменяется от $x = 0$ до $x = \Delta l$. По з-ну Гука: $F(x) = kx$ (стержень в равновесии! т.е.

$F_{упр.} = F \Rightarrow f = kx$) Тогда по опр. работы:

$$A_f = \int_0^{\Delta l} f_x\, dx = \int_0^{\Delta l} kx\, dx = \frac{k(\Delta l)^2}{2} = W_{упр.}$$

С учётом $F = k\Delta l$; $A_f = W_{упр.} = \frac{F\Delta l}{2}$

Заметим: если сразу приложить $f = F$, то при удлинении на Δl соверш. работа

$$A' = F \cdot \Delta l = 2A.$$

Т.е. часть A' (половина) пойдёт на приращение $W_п$, другая половина – на возбуждение упр. колебаний и волн в стержне.

И снова: более информативна не интегральная величина $W_п$, а объёмная пл-ть энергии, по опр. равная

$$w_п = \frac{W_п}{V}$$

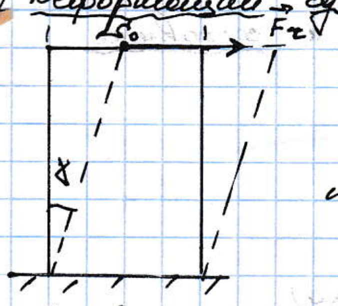
Подставим $V = l \cdot S$:

$$w_п = \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot \Delta l}{S \cdot l} = \frac{1}{2} \sigma_п \cdot \varepsilon$$

С учётом з-на Гука: $\sigma_п = E\varepsilon \Rightarrow \underbrace{w_п = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}}$

(10) Другие виды деформаций

а) Деформации сдвига



$\vec{F_\tau}$ – внеш. сила, прилож. к торцу по касательной и однородно распределённая по сечению

Можно ввести: $\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S_0}$ – опр.: тангенциальное (касат-ое) напряжение.

Очевидно, что здесь $S_0 = S = const$ и $V = const$ (при малых сдвигах).

Колич. мера для описания деформаций сдвига – γ (угол сдвига)

Из опыта при $\gamma \ll 1$ (рад.)

$\sigma_\tau \sim \gamma$, точная связь: $\boxed{\sigma_\tau = G \cdot \gamma}$, где

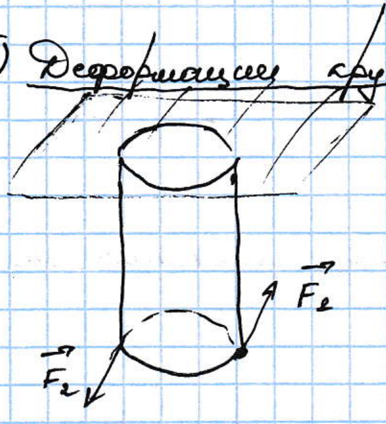
G – модуль сдвига

Размерность: $[G] = [E]$ $кгс/мм^2$

Можно док-ть: для всех материалов

$$\Rightarrow \frac{E}{3} \le G \le \frac{E}{2} \quad (\text{т.к. } 0 \le \mu \le \frac{1}{2}) \rightarrow \boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}}$$

б) Деформация кручения



К нижнему торцу приложен момент сил $\vec{M}$. Преобладает деформ-я сдвига, но осевые точки неподвижны, и

$\Rightarrow \gamma = \gamma(r)$ - угол сдвига есть ф-я радиального расстояния. Это неудобно, и в качестве меры деформации использ. угол кручения φ.

Снова при малых ($\varphi << 1$) деформациях - лин. связь

$$M = D\varphi$$

D - модуль кручения

Размерность: $[D] = [M] = [F \cdot L] = [m \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L] = \frac{кг \cdot м^2}{с^2}$

Важно, что D зависит не только от св-в материала, но и от геометрии образца. Действительно, для проволоки длиной l, радиуса r можно получить:

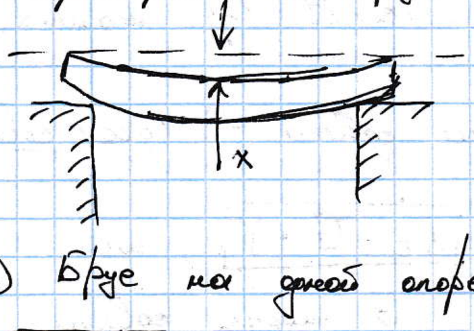
$$\boxed{D = \frac{\pi G}{2l} r^4}$$

в) Разделяют простые ("чистые") деформации и составные

Примеры: простые - сдвиг без растяжения
растяжение без сдвига.

Чаще бывают составные.

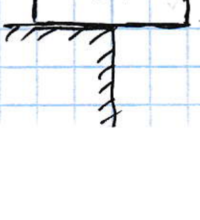
Примеры: ① Брус на двух опорах (балка)



преобладает растяжение

x - стрела прогиба (отклонение от равновесного положения)

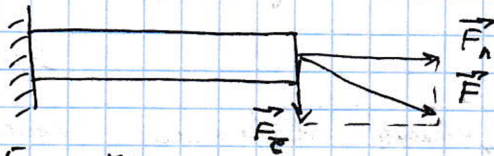
② Брус на одной опоре



преобладает сдвиг

(11) О недостаточности σ_n, σ_τ в общем случае (при $\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_\tau$)
~ необх. тензорное описание

(12) <u>О деформациях пружины</u>



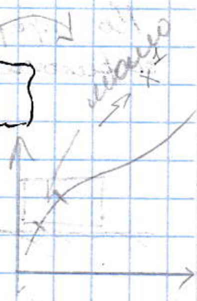
а) О знаке в з-не Гука: $F_x = -kx$

б) деформ-и в пружине: растяжение
кручение } т.к. навито
сдвиг } спирально

Интересный факт: для спирали з-н Гука справедлив и при больших ($\varepsilon \sim 2$) деформациях, т.е вплоть до $x \sim 2l$.

(13) О линейной и нелинейной связи F и x.

Для ∀ дост. гладкой ф-и $\boxed{F(x) = kx + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \dots}$

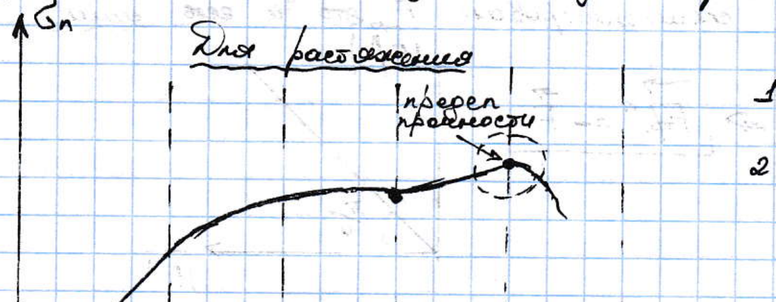


(постоянная $F_0 = 0$ — нет сил => нет деформаций)

∃ интервал x, когда можно ограничиться линейным

тогда $\boxed{W_{упр.} = \frac{kx^2}{2} + A_1 x^3 + A_2 x^4 + \dots}$ ($A_1, A_2, \dots$ связ. с $\alpha_1, \alpha_2 \dots$)

(14) Отклонение от з-на Гука при больших деформациях.



1 - линейная область (з-н Гука)

2 - нелинейная обл. упругости. Если силу убрать, то деформ-я исчезнет

3 - обл. пластичности (остаточных деформаций)

4 - обл. упрочнения

5 - обл. текучести

Силы трения

сухое трение — вязкое трение

Сухое трение

— между твёрдыми телами (в отсутствие смазки)

1) брусок на шипах

Если пытаться тянуть такой брусок то шипы врезаются в опору $\Rightarrow$ разрушают её и разрушаются сами.

Т.е. говорить о силе трения имеет смысл, когда форма поверхности достаточно гладкая (макроскопически)

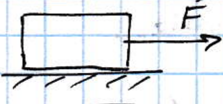
2) Размеры тел >> межмолекулярных расстояний $\Rightarrow$ это макросила!

Но: природа силы трения — электромагнитная (взаимодействие диполей соприкасающихся поверхностей).

Трение покоя

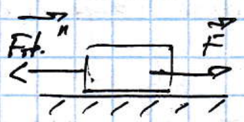
$\vec v = 0$ — здесь $\vec v$ - ск-ть тела относительно опоры (нет проскальзывания тела на опоре.)

Трение покоя исследовал Г. Амонтон (Франция, конец XVII в.)

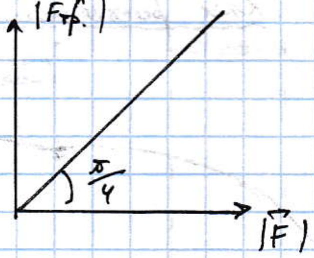


К телу приложена сила $\vec F \neq 0$, но $\vec v = 0, \vec a = 0$

Чтобы выполнялся I з-н Ньютона, необходима ещё сила, причём она должна скомпенсировать $\vec F$, это и есть сила трения покоя $\vec F_{тр.}^{п}$:



$\vec F + \vec F_{тр.}^{п} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec F_{тр.}^{п} = -\vec F}$



Из опыта: 1) есть $\vec F^*$, когда начнётся скольжение.

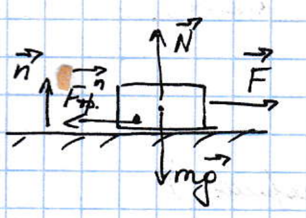
2) $F^* \sim P$ ($\vec P$ - вес тела)

Т.к. $\vec P = -\vec N$ ($\Rightarrow P = N$), то приняв $F^* \sim N$

$\Rightarrow (F_{тр.}^{п})_{max} \sim N$ или $\boxed{(F_{тр.}^{п})_{max} = kN}$

k — коэффициент трения, зависит от материалов соприкасающихся тел и состояния поверхностного слоя (чистоты, температуры, ...). Очень точные измерения "k" не имеют смысла, т.к. k изменится при любом загрязнении поверхности.

Обычно $k < 1$ (формально возможно $k > 1$, но это не трение в обычном смысле, а гвоздь на поверхности)

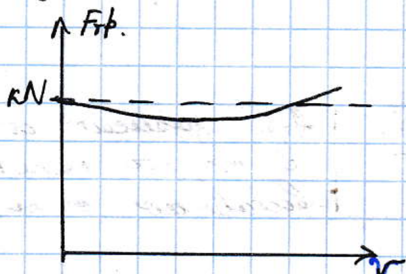


Важно: $\vec{F}_{тр.}^{п} \parallel \vec{\tau}$, $\vec{N} \perp \vec{\tau}$ ($\vec{N} \uparrow\uparrow \vec{n}$)

$$\Rightarrow \underline{(\vec{F}_{тр.}^{п})_{max} \neq k\vec{N}}$$ – векторно

Трение скольжения

Из опыта:



Зависимость есть, но очень слабая, поэтому обычно считают

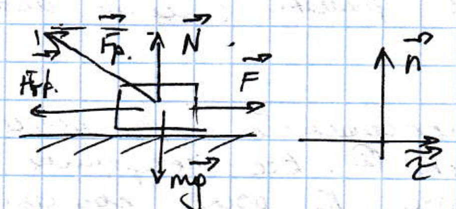
$$\underline{F_{тр.}^{ск} = const = kN}$$

(не зависит от v)

Важно: равенство только для модулей (не векторов!)

Из опыта: $F_{тр.}^{п}$, $F_{тр.}^{ск}$ не зависят от S - площади соприкасающихся поверхностей.

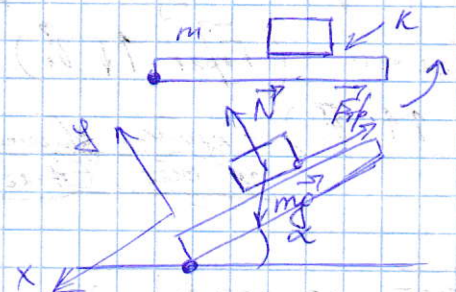
Итак: ① Полная сила реакции опоры $\vec{F}_р = \vec{N} + \vec{F}_{тр.}$,



но $\vec{N} \parallel \vec{n}$, $\vec{F}_{тр.} \parallel \vec{\tau}$ | З-н Кулона-Амонтона

② $\underline{F_{тр.} \le kN}$ всегда.

Пример



Кубик массой m лежит на доске, коэф-т трения k. Доску поднимают за один край. $F_{тр} = ?$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$$

1) До начала скольжения $\vec{a} = 0$, $\vec{F}_{тр} = \vec{F}_{тр}^{п}$

X: $0 = mg\sin\alpha - F_{тр}^{п} \Rightarrow \underline{F_{тр}^{п} = mg\sin\alpha}$

2) После скольжения $\vec{a} \neq 0$, $\vec{F}_{тр} = \vec{F}_{тр}^{ск}$,

$$F_{тр}^{ск} = kN$$

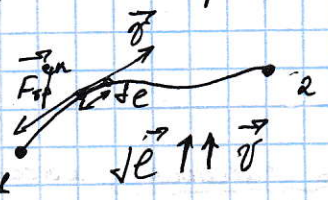
y: $0 = N - mg\cos\alpha \Rightarrow \underline{F_{тр}^{ск} = kmg\cos\alpha}$

11.11.2020. Работа силы сухого трения.

$A \neq 0$, когда $v \neq 0$ (ск-ть точки приложения силы).

Тогда: 1) для $F_{тр.}^{п} \Rightarrow \underline{A_{тр.}^{п} = 0}$

2) Для $\vec{F}_{тр.}^{ск}$: $\vec{F}_{тр.}^{ск} \uparrow\downarrow \vec{v}$ (для симметричной формы)



$$dA_{тр}^{ск} = F_{тр\,l}^{ск}\, dl = -F_{тр}^{ск}\, dl = -kN\,dl$$

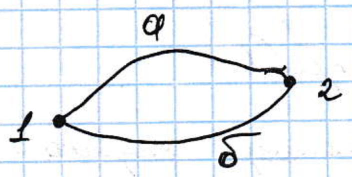
$d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{v}$

Если $k = const$, $N = const$ на всей траектории от т.1 до т.2:

$$\underline{A_{тр.}^{ск}} = -\int_{(1)}^{(2)} (kN)\,dl = -kN\,l_{12} = \underline{-kNS}$$

($l_{12} \equiv S$ – путь от т.1 до т.2)

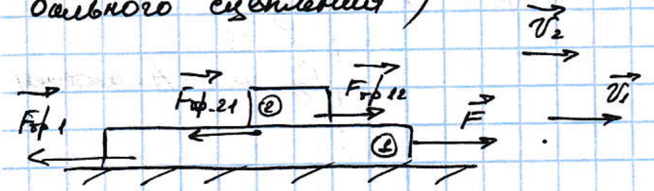
$A_{тр.}^{ск}$ зависит от $S \Rightarrow$ это неконсервативная сила.



На замкнутой траектории

$\underline{(A_{тр.}^{ск})_{1а2б1} \neq 0}$

Но всегда ли $A_{тр.} \leq 0$? Разберём на примере (модель автомобильного сцепления)



На неподвижной опоре доска ①, на ней кубик ②. Все поверхности шероховатые. К доске приложена сила $\vec{F}$, доска движется ($\vec{v}_1$).

1) $\vec{F}_{тр.1}$ – между опорой и доской, $A_{тр1} < 0$ ($\vec{F}_{тр.1} \uparrow\downarrow \vec{v}_1$)

2) $\vec{F}_{тр.1}' = -\vec{F}_{тр1}$ (III закон). $A_{тр1}' = 0$ (опора неподвижна).

3) $\vec{F}_{тр21}$ – между доской и кубиком, $A_{тр21} < 0$ ($\vec{F}_{тр21} \uparrow\downarrow \vec{v}_1$)

4) $\vec{F}_{тр12} = -\vec{F}_{тр21}$, $A_{тр12} > 0$ ($\vec{F}_{тр12} \uparrow\uparrow \vec{v}_2$) – кубик движется за счёт $F_{тр.12}$

Если $v_1 = v_2$ (кубик не проскальзывает по доске), то

$$A_{тр.12} + A_{тр.21} = 0$$

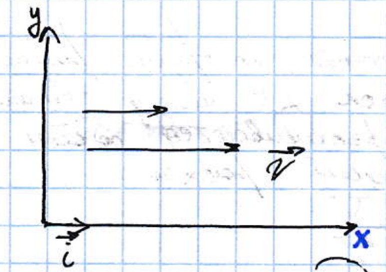
Полная работа сил трения:

$$A_\Sigma = A_{тр.1} + A_{тр1}' + A_{тр12} + A_{тр21} < 0$$

– в изолированной системе полная работа трения < 0.
По теореме об изменении W_k отсюда следует: если нет других сил, для которых $A > 0$, то W_k уменьшается)
(W мех переходит в W внутр. – внутреннюю энергию)

Вязкое трение

~ проявляется в жидкостях и газах если есть взаимодействие между слоями среды

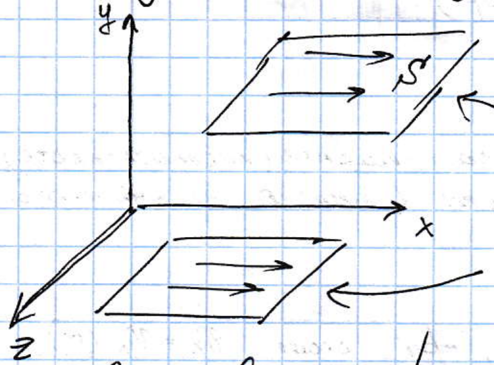


Слои движутся вдоль оси X, при этом
$\vec{V} = V(\underline{y}) \cdot \vec{i}$

Это плоскослоистое течение (ламинарное)

! Важно: $\underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial y} \neq 0}$

Выделим площадку в плоскости (XZ)



!Важно: $F_{тр.} \sim S$

Закон вязкого трения (з-н Ньютона):

$$\underbrace{F_{тр.} = \eta S \left| \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|}$$

η – коэффициент вязкости (вязкость), зависит от среды и T

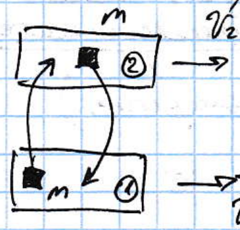
$$[\eta] = \left[\frac{F}{S \cdot \frac{\partial V_x}{\partial y}} \right] = \left[\frac{M \cdot L}{T^2 \cdot L^2 \cdot \frac{1}{T}} \right] = \left[\frac{M}{L \cdot T} \right] = \frac{кг}{м \cdot с} \quad (SI)$$

или $\frac{г}{см \cdot с} \equiv П$ (пуаз, в честь ж.Л.М. Пуазейля.)

Природа вязкого трения

~ связана с молекулярным строением в-ва. Объяснение (Перрен, Франция): 2 платформы с грузами (m) движутся рядом, $\vec{V_1} \parallel \vec{V_2}$, но $V_1 \neq V_2$

Вид сверху:

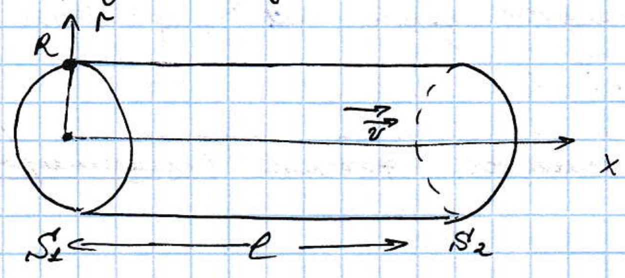


Пусть $v_1 > v_2$, а во время движения происходит обмен грузами. Груз из ① станет подгонять платформу ②, груз из ② — притормаживать платформу ①.

Грузы — модель молекул. Они переносят импульс из слоя в слой, так и возникает трение.

Течение вязкой жидкости по цилиндрической трубе.

(задача Пуазейля)



Жидкость течёт по трубе радиуса R, за промежуток Δt между сечениями S_1 и S_2 перекачивается объём ΔV. Объёмный расход

$$Q \equiv \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Для течения необходима разность давлений в сечениях:

$$\Delta p \equiv p_1 - p_2 > 0 \qquad (\Delta p \text{ — напор})$$

Постановка задачи:

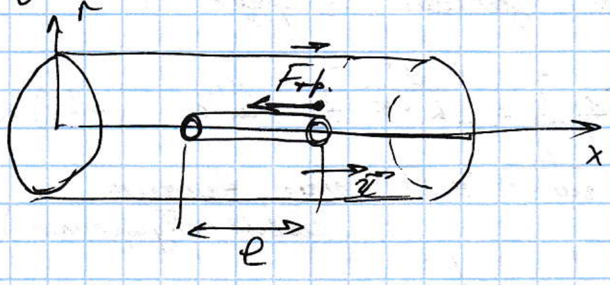
дано Δp, R, l, η, течение ламинарное (плоскослоистое), установившееся (ничего не зависит от t)

найти Q

1) Очевидно: в задаче осевая симметрия, при этом $v_x = v_x(r)$.

Прежде всего решаем вспомогательную задачу: $v_x(r) = ?$

Выделим в трубе узкий цилиндр жидкости, $r \ll R$. На него действует сила давления (подгоняет)



$$F_{давл.} = \Delta p \cdot S_{торц.}, \quad S_{торц.} = \pi r^2$$

и сила трения (тормозит):

$$F_{тр.} = \eta S_{бок} \cdot \left|\frac{\partial v_x}{\partial r}\right|,$$

$$S_{бок} = 2\pi r l$$

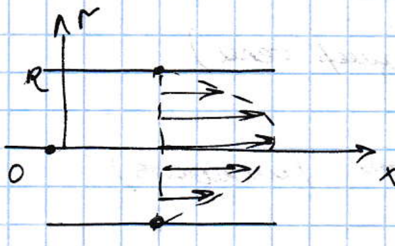
Установившееся течение: $\Rightarrow$ баланс сил $F_{давл} = F_{тр}$

С учётом $v_x(r)$ — убыв. ф-я ($\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial r} < 0$)

$$\left|\frac{\partial v_x}{\partial r}\right| = -\frac{\partial v_x}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \; -\eta \cdot 2\pi r l \frac{\partial v_x}{\partial r} = \Delta p \cdot \pi r^2$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{-\Delta p}{2\eta l} \cdot r$$



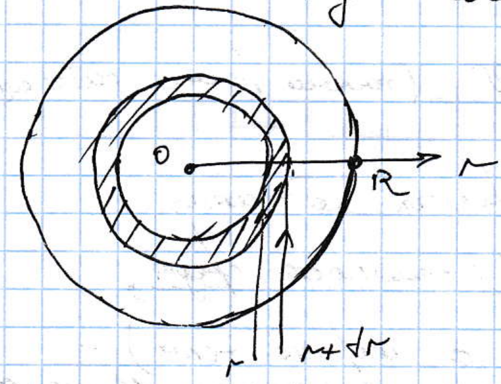
На стенке трубы ($r=R$) жидкость останавливается: $v_x(R)=0$

$$\int_{v_x(r)}^{0} dv_x = -\frac{\Delta p}{2\eta l}\int_{r}^{R} r'\,dr' \Rightarrow \boxed{v_x(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2-r^2)}$$

2) Считаем $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

а) т.к. $v_x = v_x(r)$, то сначала выделяем цилиндрич. слой (в сечении колечко радиуса r, ширина колечка dr — чтобы в пределах dr было $v_x(r) = \text{const}$) и считаем объём $d(\Delta V)$, проходящий через этот слой.

Вид в сечении



Площадь такого колечка $dS_k = 2\pi r\,dr$

За Δt от сечения S_1 до S_2 пройдёт

$$d(\Delta V) = v_x(r)\cdot\Delta t\cdot dS_k = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2-r^2)\cdot\Delta t\cdot 2\pi r\,dr, \quad r\in[0,R]$$

б) поток через всю трубу:

$$\boxed{Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \int_0^R \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2-r^2)\cdot 2\pi r\,dr = \frac{\pi\Delta p\cdot R^4}{8\eta l}}$$

~ формула Пуазейля.

Обсуждение: ① $Q \sim \Delta p$ — чем больше напор, тем лучше течёт

② $Q \sim \frac{1}{\eta}$ — более вязкую жидкость труднее перекачивать

③ $Q \sim R^4$ — чем шире труба, тем больше поток

Силы, действующие на тела, движущиеся в вязких средах.

Пусть тело движется относительно среды. На него действует $F_{сопр.}$ (обычно называют „сила сопротивления", а не „сила трения"). Из опыта известно: $\vec F_{сопр.} = \vec F_{сопр.}(v)$, при этом:

1) $\vec F_{сопр}(v=0) = 0$ — в отличие от сухого трения нет "сопр-я покоя".

2) Пусть $v \neq 0$, но мало́ (в каком-то смысле). Тогда

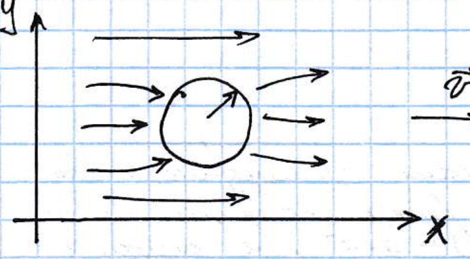
$$\underbrace{\vec F_{сопр} = -\alpha \vec v} \quad (\alpha = const,\ \alpha > 0)$$ —

универсальный закон (закон Стокса)

Из опыта: $\alpha \sim \eta$, $\alpha \sim l$ (l — лин. размер тела)

Оказывается, для шара $\alpha = 6\pi\eta r$ (можно рассчитать)

Качественное объяснение з-на Стокса:



Пусть шар радиуса r находится в потоке, набегающем со скор. v,

З-н Ньютона: $F_{сопр.} = \eta S \left|\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|$

Оценки: $S = \pi r^2$ — площадь сечения

$$\left|\frac{\partial v_x}{\partial y}\right| \sim \frac{v}{r}$$

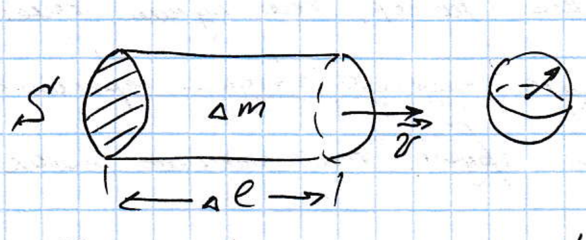
$$\Rightarrow F_{сопр.} \sim \eta \pi r^2 \frac{v}{r} = \underbrace{\pi \eta r}_{\alpha'} v$$ (точный расчёт даёт ещё 6)

3) Пусть v велико: при больших скоростях обтекания

$$\underbrace{F_{сопр.} = k \rho l^2 v^2}$$ (ρ — плотность среды, k — безразмерный коэфф., зависит от формы тела) — это результат экспериментов (закон Ньютона)

Важно: зависимость от η пропала, появилась зависимость ρ, т.е. от инерционных свойств среды.

Качественное объяснение закона Ньютона:



Модель та же: жидкость обтекает шар. В набегающем потоке выделим жидкий цилиндр

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S \Delta l = \rho S v \Delta t$$

На шаре этот цилиндр останавливается (неупруг. удар), изменение импульса цилиндра.

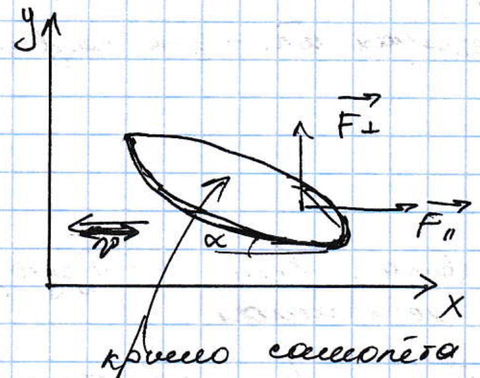
$$|\Delta \vec p| = |0 - v \cdot \Delta m| = v \cdot \Delta m = \rho S v^2 \Delta t$$

3-й з-н Ньютона: $\vec F_{ш-ж} = -\vec F_{ж-ш}$

2-й з-н Ньютона: $|\vec F| = \frac{|\Delta \vec p|}{\Delta t} = \rho S v^2 \sim \rho r^2 v^2$

Характер обтекания с ростом скорости меняется принципиально: ламинарное течение переходит в турбулентное.

Пример проявления $\vec{F}_{сопр}$ при больших скоростях.



$\vec{F}_{сопр} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$ (относит. $\vec{v}$)

$F_\parallel = k_\parallel \rho\, l_\parallel^2 v^2$

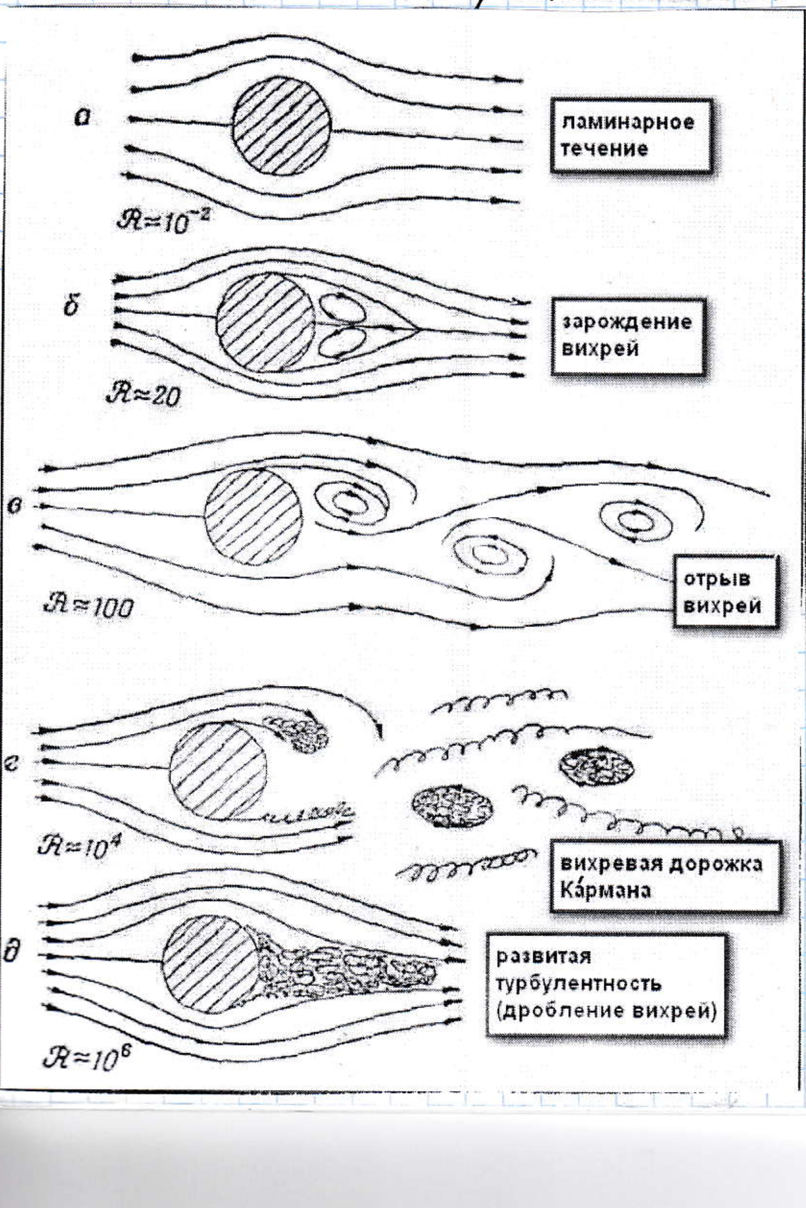
$F_\perp = k_\perp \rho\, l_\perp^2 v^2$, при этом $F_\perp$ зависит от угла α ("угол атаки") за счёт $k_\perp$. Составляющая $\vec{F}_\perp$ - подъёмная сила.

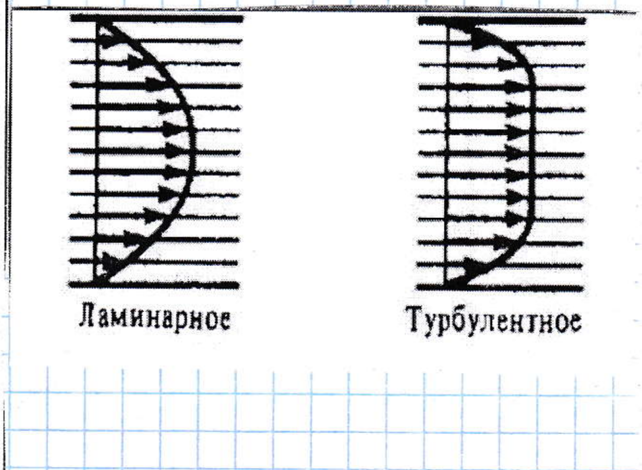
Выгодно: $k_\parallel$ — как можно $<$, $k_\perp$ - больше; отношение $\frac{k_\perp}{k_\parallel}$ характеризует аэродинамич. св-ва объекта.

Из справочника: ВАЗ-2105 — $k_\parallel \approx 0{,}5$

ВАЗ-2109 — $k_\parallel \simeq 0{,}3$;

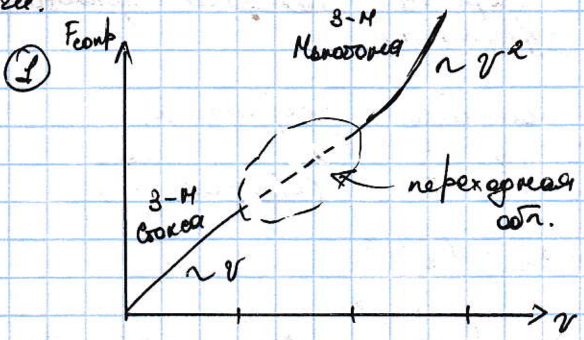
соврем. автомобиль — $k_\parallel \simeq 0{,}23$





Итоги:

①



„Малые" v: $F_{сопр} \sim v$ (Стокс)

„Большие" v: $F_{сопр} \sim v^2$ (Ньютон)

Переходная обл. – з-н неизвестен

② Всё это справедливо при $v < v_{звука}$. Если $v > v_{звука}$, то жидкость (газ) <u>нельзя</u> считать несжимаемой.

③ – При <u>ламинарном</u> обтекании $W_{мех}$ переходит в тепло

– При <u>турбулентном</u> течении энергия перекачивается от крупных вихрей к мелким.

– При $v > v_{звука}$, $W_{мех}$ переходит в энергию излучения звука.

④ <u>Нужен критерий</u>, по которому скорости считаются малыми или большими (соответственно, течение – ламинарное или турбулентное).

20. 11. 2020

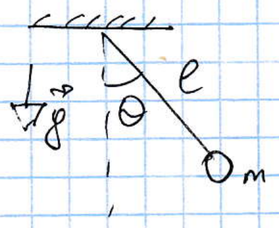
Теория размерностей и подобия.

① В основе теории размерностей 2 положения:

1) Сравниваются только величины одинаковой размерности

2) Зависимость $\forall$ величины от параметров д.б. степенной, умноженной на функцию от безразмерного параметра.

Пример: матем. маятник



Известно при $\Theta << 1$: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Как T зависит от параметров при произвольном Θ?

Можно предположить: $T = f(m, g, l, \Theta)$

Тогда по 2-му положению необх. $T = m^x g^y l^z \Theta^u$

По 1-му положению размерности слева и справа д.б. одинаковы

$$\Rightarrow T^1 = M^x \cdot \frac{L^y}{T^{2y}} \cdot L^z \cdot \Theta^u$$

$$\left.\begin{array}{l} T: \ 1 = -2y \\ M: \ 0 = x \\ L: \ 0 = y + z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

На u ограничений нет. т.к. Θ - безразм. $\Rightarrow$ вводим $\psi(\Theta)$ и окончательно

$$\underbrace{T = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \psi(\Theta)}$$

зависимость $\psi(\Theta)$ теория размерностей не дает.

② Теория подобия утверждает, что при одинак. условиях значения безразмерной ф-и ψ одинаковы.

Пример: есть 2 маятника с $l_1 \neq l_2$, $g_1 \neq g_2$ (на Земле и на Луне). Пусть нач. угол отклонения одинаково $\Rightarrow \psi_1(\Theta) = \psi_2(\Theta)$

тогда $\underbrace{\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1 \cdot g_2}{g_1 \cdot l_2}}}$ - ничего не зависит от Θ и $\psi(\Theta)$

Применим эту теорию к силам вязкого трения (сопротивления). Рассматриваем тело с характерным размером в потоке жидкости, считаем, что относит. ск-ть набегающего потока $v << v_{зв}$.

Параметры жидкости: η, ρ.

$\downarrow$

Тогда сила сопротивления д.б. функцией этих величин:

$$F_{сопр.} = \eta^x \rho^y v^z l^u$$

Размерности слева и справа: $MLT^{-2} = (M\cdot L^{-1}\cdot T^{-1})^x \cdot (M\cdot L^{-3})^y \cdot (L\cdot T^{-1})^z \cdot L^u$

M: $1 = x + y$

L: $1 = -x - 3y + z + u$

T: $-2 = -x - z$

Здесь 3 ур-я и 4 неизв, поэтому выразим всё через x:

$y = 1 - x$

$z = 2 - x$

$u = 1 + x - 2 + x + 3 - 3x = 2 - x$

Тогда $F_{сопр.} = \eta^x \cdot \rho^{1-x} v^{2-x} \cdot l^{2-x} = \rho v^2 l^2 \cdot \left(\frac{\eta}{\rho v l}\right)^x$

Можно проверить, что параметр в скобках – безразмерный.

Вводят безразмерный параметр – число Рейнольда: (Рейнольдса.)

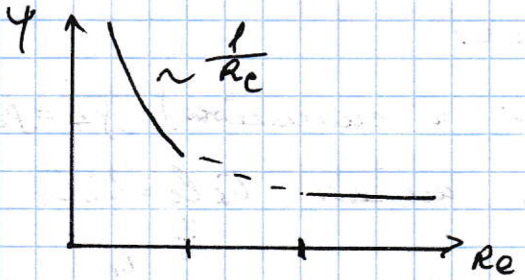
$$\underbrace{Re = \frac{\rho v l}{\eta}}$$

и окончательно $F_{сопр.} = \rho v^2 l^2 \psi(Re)$

Обсуждение:

1. Асимптотика ф-и $\psi(Re)$: а) при $Re \to \infty$ необх. $\psi(Re) \to const$, чтобы $F_{сопр.} \to k \rho v^2 l^2$ (з-н Ньютона), $k = const$.

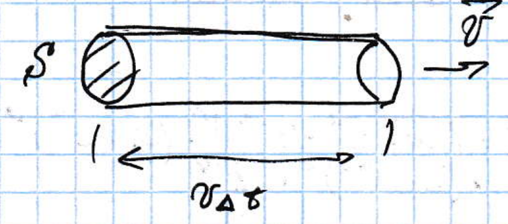
б) при $Re \ll 1$ необх. $\psi(Re) \sim \frac{1}{Re}$, чтобы $F_{сопр} \sim \eta v l$ (з-н Стокса)



В переходной обл. метод размерностей ничего не даёт, аналитич. методов ∄, решать приходится экспериментально.

2. Физ. смысл числа Рейнольдса: $Re = \frac{\rho v l}{\eta}$

Расс-м промежуток времени Δt. За это время кинетич. энергия набегающего потока (до остановки у тела)



$$\Delta W_k = \frac{\Delta m v^2}{2} = \frac{\rho \Delta V \cdot v^2}{2} = \frac{\rho S \cdot v \Delta t \cdot v^2}{2} = \frac{\rho S v^3 \Delta t}{2} \sim \frac{\rho l^2 v^3 \Delta t}{2}$$

За Δt работа сил сопротивления

$$|A| = F v \cdot \Delta t = \eta S \left|\frac{\partial v_x}{\partial y}\right| \cdot v \cdot \Delta t \sim \eta S \frac{v^2}{l} \Delta t \sim \eta l v^2 \Delta t$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\Delta W_k}{|A|}} = \frac{\rho l v}{2 \eta} \underbrace{\sim Re}$$

Теперь понятно, почему при малых Re течение ламинарное (т.е. $\nexists$ неустойчивость): флуктуации $\exists$ всегда, но вязкость среды даёт затухание (больше $\eta \Rightarrow$ меньше Re, т.е. $|A| \gg \Delta W_k$.)

---

3. Практическое применение выражения для F:

$$F = \rho v^2 l^2 \psi(Re)$$

Исходя из этого можно сформулировать критерий подобия в аэродинамич. трубе. Знаем, что $F = F(\eta, \rho, v, l)$

Пусть $\exists$ 2 тела в разных средах (т.е. отличаются η, ρ, v, l) $\Rightarrow$ различны будут Re.

Но движения подобны, если обеспечить: $Re_1 = Re_2$ (т.е. $\frac{\rho_1 v_1 l_1}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 l_2}{\eta_2}$)

При этом $\psi(Re_1) = \psi(Re_2) \Rightarrow \underbrace{\frac{F_{сопр.1}}{F_{сопр.2}} = \frac{\rho_1 v_1^2 l_1^2}{\rho_2 v_2^2 l_2^2}}$

Рав-во (*) называется условием подобия движений.

Пример: модель самолёта $\Rightarrow l_2 < l_1$

При обтекании модели (как и самолёта) $\rho_1 = \rho_2$, $\eta_1 = \eta_2 \Rightarrow$ при $Re_1 = Re_2$ имеем $v_1 l_1 = v_2 l_2$

$$\Downarrow$$

$v_2 = v_1 \frac{l_1}{l_2} \gg v_1$ – но при этом могут нарушиться наши приближения (возможно $v_2 > v_{зв.}$), т.е. возникнут другие эффекты, к-рые тоже надо учитывать. В реальных ситуациях ρ, η в аэродинамич. трубах увеличивают.

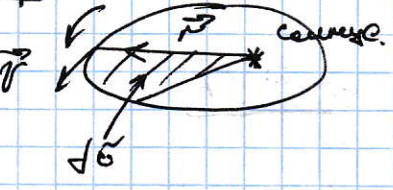
Сила гравитации. Закон всемирного тяготения.

И. Кеплер (1571 - 1630, Германия) на основании известных к тому времени астрономических наблюдений (Т. Браге, 1546 - 1601) в 1609 г. вывел 2 закона:

① Все планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам. Солнце находится в одном из фокусов эллипса.

② Секториальная ск-ть при движении планет постоянна.

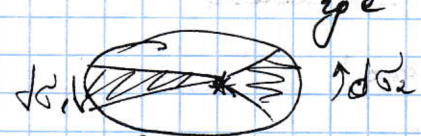
Опр.



Секториальная ск-ть

$$C = \frac{d\sigma}{dt},$$

где $d\sigma$ - площадка, которую радиус вектор $\vec r$ проходит за dt.



$d\sigma_1 = d\sigma_2$ по 2-му з-ну Кеплера.

③ $\frac{a^3}{T^2} = const$, где a - большая полуось эллипса, T - период обращения. (1619 г.)

Из этих законов можно получить динамическое описание движения планет, т.е. зная законы движения, найти силы. (это обратная задача динамики).

В частности Х. Гюйгенс предположил, что сила притяжения ~ центральная (напр к Солнцу) и зависит от r (совпадает)

Закон обратных квадратов ($F \sim \frac{1}{r^2}$) первым сформулировал Гюйгенс на основе измерений периода колебаний матем. маятника на разной высоте над Землей на о. Св. Елена.

Ньютон строго обосновал этот закон:

1) доказал, что из з-на обратных квадратов => з-ны Кеплера.

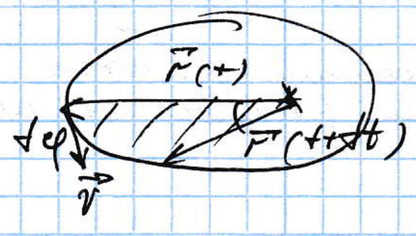
2) обратно: получил ЗВТ из з-нов Кеплера (1686 г.)

Получим F тяготения из з-нов Кеплера.

① Докажем, что $\vec F$ - центральная.

а) Из 1-го закона => орбита плоская (эллипс) => направление $\vec N$ постоянно ($\vec N = m[\vec r, \vec v]$ ⊥ пл-ти вект. $\vec r, \vec v$), $N = N_z$ (см. рис.)

б) Покажем, что $N = const$.



$\odot z$

Найдём секториальную ск-ть $c = \frac{d\sigma}{dt}$:

$$d\sigma = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \quad (dt \to 0 \Rightarrow d\varphi \to 0)$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega = const \text{ по 2-му з-ну.}$$

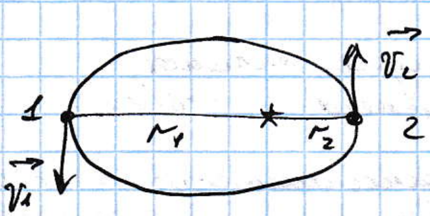
Тогда $N_z = m\left([\vec r, \vec v]\right)_z = m r v_\perp = m r \cdot \omega r = m r^2 \omega = 2mc = const$

[Учтено: $\vec v = \vec v_\parallel + \vec v_\perp$, $\vec v_\perp = [\vec \omega, \vec r]$]

Но $\frac{d\vec N}{dt} = \vec M \Rightarrow \vec M = [\vec r, \vec F] = 0 \Rightarrow \underline{\vec r \parallel \vec F}$

② Для приближённого вывода ЗВТ $\exists$ 2 способа:

<u>1 способ:</u> (только для двух крайних точек)



$$\left.\begin{matrix} r_1 - max \\ r_2 - min \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec v_1 \perp \vec r_1, \quad \vec v_2 \perp \vec r_2$$

Из симметрии $\rho_1 = \rho_2$ (радиусы кривизны)

$$\left.\begin{matrix} F(r_1) = m a_{1n} = m \frac{v_1^2}{\rho_1} \\ F(r_2) = m a_{2n} = m \frac{v_2^2}{\rho_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}, \text{ т.е. } \underline{F \sim 1/r^2}$$

[Из ЗСМИ $m v_1 r_1 = m v_2 r_2$]

<u>2 способ:</u> (для круговой орбиты)

$$\left.\begin{matrix} F(r) = m a_n = m \frac{v^2}{r} \\ \text{Учтём: } v = \frac{2\pi r}{T} \end{matrix}\right\} F = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} \times \frac{r^2}{r^2} = \frac{m \cdot 4\pi^2}{r^2} \times \frac{r^3}{T^2}$$

По 3-му з-ну Кеплера $\frac{r^3}{T^2} = const$

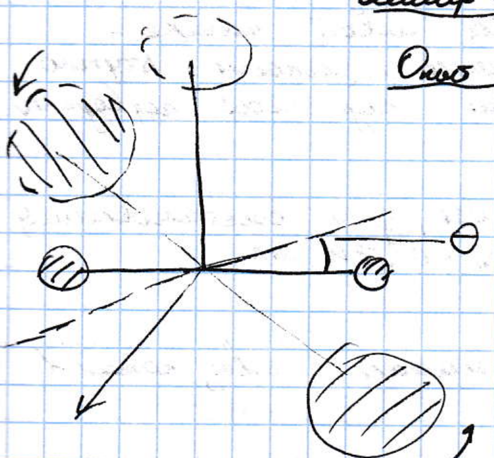
$$\Rightarrow \underline{F = \frac{const}{r^2}}$$

Далее Ньютон постулировал, что гравитационная сила действует между <u>всеми</u> телами (не только между Землёй и Солнцем).

! <u>Важно:</u> в ЗВТ входит гравитационная масса, а во 2-й з-н Н-на — инертная. У них разный смысл.

Экспериментальная проверка закона всемирного тяготения.

Опыт Кавендиша. (1798 г.)



Установка – деревянное коромысло длиной $\sim 1{,}8$ м, на концах небольшие свинцовые шары $d_0 = 5$ см, $m_0 = 775$ г. Коромысло подвешено на нити из посеребренной меди длиной 1 м.

К шарам с пом. поворотной фермы подводились 2 больших свинцовых шара $d = 20$ см, $m = 49{,}5$ кг, жестко закреп. на ферме. Вследствие гравитац. взаимодействия, а через неё вычислялось G (гравитац. постоянная)

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$$

Вся установка – в деревянном ящике (предотвр.-е влияния потоков воздуха), наблюдения через встроенные в бок. стенки телескопы со шкалами (точность 1/100 дюйма, 1 дюйм = 2,54 см.).

Для предотвращения асимметрии большие шары подводились по час. стрелке и против.

Упругость нити на кручение – из периода свободных колебаний коромысла ($T = 15$ мин.)

Но в действительности Кавендиш определил не G, а среднюю плотность Земли:

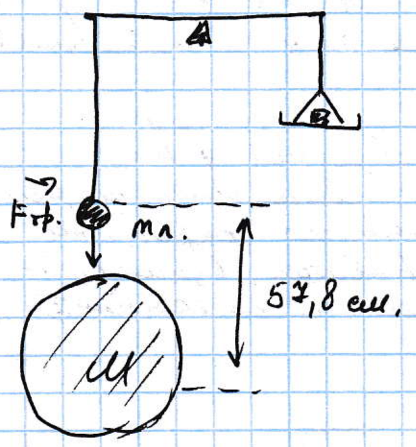
$$\rho = 5{,}48 \ г/см^3$$

Современное значение $\rho = 5{,}52$ г/см → отличие 0,7%.

[Кстати, $\rho_{поверхн.} \simeq 2$ г/см³ => внутри Земли тяжёлые в-ва]

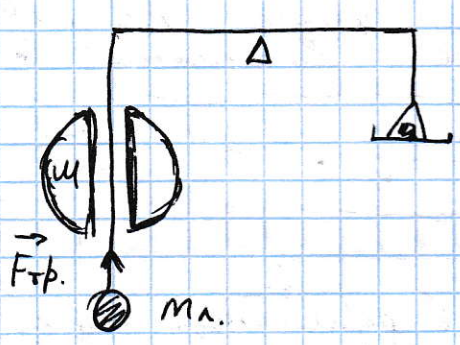
Опыт Жолли (1878г)

Исп. обыкновенные рычажные весы. На левой чашке - подвешенный на длинной нити полый шар, заполн. ртутью ($m_л. = 5кг.$). Весы в равновесии. Затем под шар подводили свинцовый шар $M = 5775$ кг.



Равновесие нарушалось, для восстановления необх. доп. груз $m_0 = 0{,}589$ мг.

Затем нить пропускалась через канал в шаре.



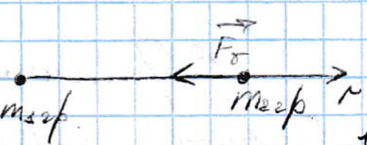
Гравитационная и инертная масса

Во 2-й закон Ньютона входит инертная масса.

$$\vec a = \frac{\vec F}{m_{ин.}} \quad (m_{ин.} - \text{мера инертности})$$

В закон всемирного тяготения входит гравитационная масса:

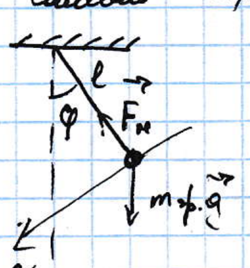
$$\vec F_г = -G\,\frac{m_{1гр}\cdot m_{2гр}}{r^2}\cdot\frac{\vec r}{r}$$



(здесь $m_{1гр}\cdot m_{2гр}$ - коэф. пропорциональности между $F_г$ и $\frac{1}{r^2}$)

Ниоткуда заранее не следует, что $m_{ин} = m_{гр}$! Это равенство установлено экспериментально с опр. степенью [illegible]ности.

Самый простой эксперимент - с математическим маятником:



$$m_{ин.}\vec a = \vec F_н + m_{гр}\vec g$$

$$\left.\begin{aligned} \tau:\ & m_{ин}\, a_\tau = m_{гр}\, g\sin\varphi \\ & a_\tau = -l\varepsilon = -l\ddot\varphi \end{aligned}\right\} \text{при } \varphi \ll 1.$$

$$m_{ин}\, l\ddot\varphi + m_{гр}\, g\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cdot\frac{m_{ин}}{m_{гр}}}} \quad (при\ m_{ин} \neq m_{гр})$$

Этот эксперимент ставился неоднократно:

Ньютон → погрешность 10^{-4}
Этвеш (1890) → погр. 10^{-8}
Дикке (1960) − погр. 10^{-10}

} погрешность р-ва $\boxed{m_{ин} = m_{гр}}$

На основании этих данных равенство считается выполненным. Оно положено в основу общей теории относительности и называется принципом эквивалентности.

25. 11. 2020)

Гравитационное поле, гравитационный потенциал.

Аналогия эл.-статич. и грав-ого полей

В эл./статике мы вводили понятия поля. Здесь это тоже имеет смысл. Установим тогда аналогии.

Эл. статика	Гравитация.
① $\frac{\vec{F}_{эл}}{q'} = \vec{E}(\vec{r})$ − напряжённость (силовая х-ка поля)	$\frac{\vec{F}_{тяг}}{m'} = \vec{g}(\vec{r})$ − ускорение свободного падения.

Замечание: q' − пробный заряд, ему аналогична m' − пробная масса. При этом мы воспользовались принципом эквивалентности: гравитац. масса $m_{гр} \simeq m_{ин}$ − инертной массе.

Т. о., хорошо нам известное ускорение свободного падения является напряжённостью гравитац. поля.

Далее, эл.-статич. поле потенциально, и мы ввели его потенциал. Но и гравитац. поле потенциально, и аналогично можно установить и здесь.

② $\frac{W_п(\vec{r})}{q'} = \varphi(\vec{r})$	$\frac{W_п(\vec{r})}{m'} = \varphi_g(\vec{r})$

Т.о. потенциал – это энергетич. х-ка: в эл-ст. поле это потенциальная энергия единичного заряда, в гравитац. поле – потенциальная энергия единичной массы.

Установим теперь связь напряжённости и потенциала:

(3) $\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r_0}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r_0}} E_l\,dl$ | $\varphi_g(\vec{r}) - \varphi_g(\vec{r_0}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r_0}} g_l\,dl$

– это интегральная связь

$\vec{E} = -\nabla\varphi$ | $\vec{g} = -\nabla\varphi_g$ – это дифференц. связь.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

"набла"

Теперь запишем для некоторых частных случаев:

(4) Эл. поле точечного заряда. | Гравитац. поле точечной массы

$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ | $\vec{g}(\vec{r}) = -G\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

Замечание! – стоит обратить внимание на знак "–" для гравитац. поля – он соотв. тому, что всегда массы только притягиваются, а $m > 0$ всегда.

(5) Потенциал точечного заряда | Потенциал точечной массы

$\varphi(r) = k\frac{q}{r}$ | $\varphi_g(r) = -G\frac{m}{r}$

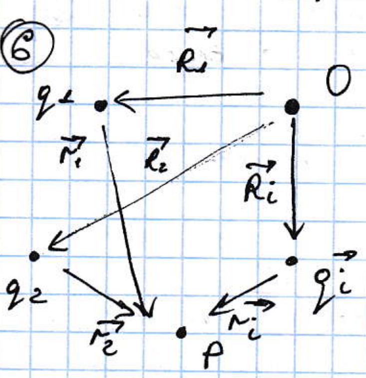
Замечание: в электростатич. поле знак $\varphi(r)$ совпадает со знаком q и м.б. ∀ знака. В гравитац. поле, если выбрать $r_0 \to \infty$ (т.е. $\varphi(\infty) = 0$) всегда $\varphi(r) < 0$

Заметим ещё, что все эти ф-лы справедливы не только для точечных зарядов (масс), но и для тел сферического (шарообр-ой) формы при $r \geq R$, т.е поле шара вне его – такое же, как поле точечного заряда (и эл./ст., и гравитационное поля)

[при сферически-симметричном распр-и q либо m]

Следующий частный случай – произвольное распределение точечных зарядов и точечных масс.
(принцип суперпозиции.)

(6)



$$\vec E = k\sum_i \frac{q_i}{r_i^3}\vec r_i \qquad \vec g = -G\sum_i \frac{m_i}{r_i^3}\vec r_i$$

$$\varphi = k\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad \varphi_g = -G\sum_i \frac{m_i}{r_i}$$

<u>Общее замечание</u>: установленные здесь аналогии не очень глубокие и полные!

Причины: 1) В эл./статике есть 2 знака зарядов, причём на „+" – зарядах силовые линии начинаются, на „–" – заканчиваются. А в гравитац. поле знак всегда „+". Это значит, что нет „антигравитации".

2) Гравитационное поле можно вообще исключить из уравнений, переходя в свободно падающую систему отсчёта.

3) Аналогия вообще исчезает при переходе к нестатическим полям. Вообще, гравитац. поле „устроено" сложнее электростатического, и полное описание гравитации возможно в только в рамках ОТО

Движение м.т. в поле тяготения

(1) Общее замечание: т.к. гравитац. поле – потенциальное, то удобно исп. $\varphi_g(\vec r)$ и записать З-н сохр-я механич. энергии в виде.

$$\frac{mv^2}{2} + m\varphi_g = W = const_1.$$

Важно, что на m можно сократить:

$$\frac{v^2}{2} + \varphi_g = const_2$$

Отсюда следует, что от m ничего не зависит: ни траектории, ни области доступности. Переход м.т. в область, где $\varphi_g(\vec r)$ меньше, приводит к увеличению скорости, причём одинаковому для всех масс!

② **Пример**: движение м. т. в поле точечной (сферической) массы. I, II, III космические ск-ти.

Частный пример, к-рый мы сейчас рассматриваем – это движение м. т. в поле тяжести шарообразной Земли. Это значит, что гравитац. потенциал записывается в виде

$$\varphi_g = -G\frac{M}{r} \quad (M \text{ - масса Земли})$$

Соответственно для тела массой m

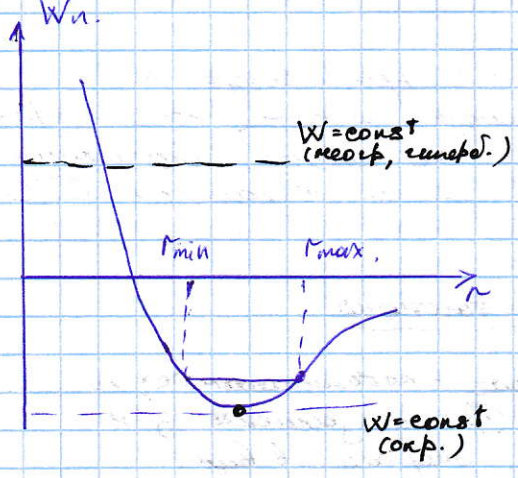
$$W_n(r) = m\cdot\varphi_g(r) = -G\frac{mM}{r} = \frac{k}{r} = -\frac{|k|}{r},$$

$$\text{где } k = -GMm$$

Очевидно, что задача об описании движения в этом случае сводится к Кеплеровой. Раньше при обсуждении этой задачи мы ввели эффективную потенциальную энергию

$$W_n^{ef}(r) = W(r) + \frac{N^2}{2mr^2}$$

где N – момент импульса ($N = const$ в центр. поля!)



Возможные траектории здесь – эллипс (в частн. – окружность), гипербола, парабола. Ур-е всех траекторий имеет вид

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

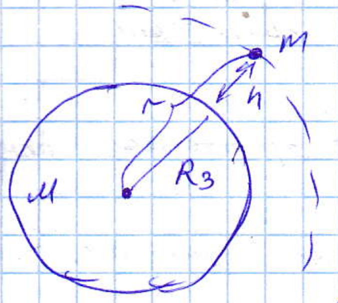
где p, e – параметры кривых, они зависят от полн. эн. W и N:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2WN^2}{mk^2}}$$ – эксцентриситет (отклонение от окружности)

$$p = \frac{N^2}{mk}.$$

а) Круговая траектория, т. е. $r_{min} = r_{max}$ будет при $e = 0$.
Отсюда можно найти ск-ть движе-я по круговой орбите. Но возможен и более простой ("школьный") подход:

По 2-му з-ну Ньютона



$$\frac{mV^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$

откуда $\underline{V(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}} \sim 1/\sqrt{r}$

При высоте над Землёй $h << R_З$ (т.е. в пределе $h \to 0$)

ск-ть $V_I = \sqrt{\frac{GM}{R_З}} = \sqrt{g_0 R_З} \simeq 7,9 \frac{км}{с}$

называется I космич. ск-ть. Здесь

$g_0 = \frac{GM}{R_З^2}$ – уск-е своб. падения на поверхн. Земли

Легко найти период обращения:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} \sim r^{3/2}$$

Это, кстати, проявление з-на Кеплера: $T^2 \sim r^3$

Нижний предел значения T будет при $r = R_З$:

$$T = \frac{2\pi R_З^{3/2}}{\sqrt{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g_0}}\sqrt{R_З} \simeq 88 \text{ мин.}$$

Для "глобальной" связи широко исп.-ся "стационарные" спутники – они неподвижны отн. Земли! т.е. их период $T_{сп.} = 24$ часа. Найдём высоту этого спутника над Землёй:

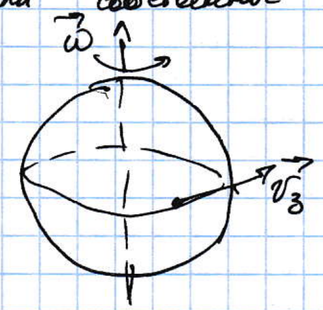
$$T_{сп}^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \to r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

При этом оказывается, что высота спутника над Землёй:

$h = r - R_З = 35\,870$ км. → спутник движется со ск-ю $V(r) = 3,07$ км/с

Заметим, что <u>стац. спутник может существ-ть только в экваториальной пл-ти!</u>

Ещё одно важное замечание: при всех этих расчётах мы не учли собственное вращение Земли. Если спутник запускать с экватора, там дополнит. ск-ть $\sim 0,4 \frac{км}{с}$ из-за вращения (это, очевидно, max. линейная ск-ть точек на поверхности). Её стоит исп.-ть, т.е.: выгоднее запускать спутник как можно ближе к экватору – это даёт экономично расход топлива.



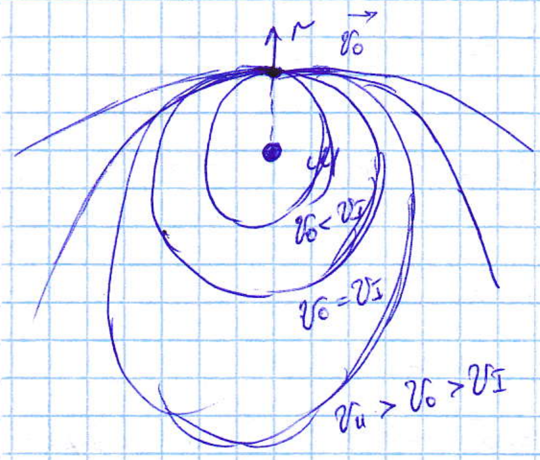
США, мыс Канаверал: 28° 23′ с.ш.

Казахстан, Байконур: 45° 49′ 58″ с.ш.

Россия, Плесецк: 62° 53′ с.ш.

Капустин Яр 48° 34′ 27″ с.ш.

б) Зададимся вопросом, какие траектории могут вообще реализоваться при разных нач. скоростях v_0? Всегда при этом $\vec{v}_0 \perp \vec{r}$



Пусть $W<0$ - тогда траектория замкнутая (финитное движение)

При $v_0 < v_I$ - траект. эллиптическая, в точке старта $r_0 = r_{max}$.

При $v_0 = v_I$ - круговая траектория

При $v_0 > v_I$ - эллиптич. траектория с $r_0 = r_{min}$

Увеличивая v_0, дойдём до $\underline{W=0}$. Очевидно, это минимальное значение энергии, когда движ-е становится инфинитным. В Кеплеровой задаче этому соответствует параболическая траектория, т.е. при $r \to \infty$ имеем $v_\infty \to 0$ (из ЗСЭ.)

Соотв-ая начальная ск-ть называется II космической. Её легче всего найти из ЗСЭ при $W<0$:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM}{r_0} = 0 \Rightarrow v_0 = v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \sqrt{2}\, v_I$$

Т.о. v_{II} - это ск-ть, при которой тело преодолеет гравитац. притяжение Земли и уйдёт в ∞ (если $\nexists$ других притягивающих центров)

В частности, при $h << R_З$ имеем $r_0 \to R_З$ и $v_{II} = \sqrt{2g_0R_З} \simeq 11{,}2\ \frac{км}{с}$

Можно заметить, что всегда при $h>0$ (в стартовой точке $r>R_З$) "параболич." ск-ть $= \sqrt{2}$ "круговой" ск-ти.

в)

б) Введем V_{III} – третью космическую ск-ть. Это min ск-ть, чтобы тело преодолело гравитационное притяжение Солнца.

Чтобы тело вышло из поля гравитац. притяжения Солнца, ему надо сообщить параболич. ск-ть (т.е II космич.) относит. Солнца (!)

Тогда вне Земли, но вблизи её орбиты вокруг Солнца.

$$V_{абс} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r_{зс}}}$$

где $M_\odot$ – масса Солнца, $r_{зс}$ – расстояние от Земли до Солнца (оно составляет ~150 млн. км.). Эта ск-ть = 42,1 км/с

Но надо учесть, что Земля сама вращается относительно Солнца. Будем считать орбиту круговой с радиусом $r_{зс}$, тогда

$$V_з = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_{зс}}} \simeq 29,8 \frac{км}{с}$$

Выгоднее всего, конечно, эту ск-ть использовать, т.е запускать спутник в направлении „вперёд": так, что его ск-ть $\vec{V}_{отн} \uparrow\uparrow \vec{V}_з$. Тогда достаточно относит. Земли сообщить ему

$$V_{отн} = V_{абс} - V_з = (\sqrt{2}-1)V_з \simeq 12,3 \frac{км}{с}$$

На самом же деле эту ск-ть надо обеспечить вне поля тяготения Земли – мы его просто не учли в расчёте. В действительности ск-ть д.т. больше найденной, т.к. надо преодолеть земное притяжение. Т.о, III космич. ск-ть – это ск-ть, сообщённая телу относит. Земли, и вблизи неё, чтобы тело покинуло Солнечную систему. Ясно, что эта ск-ть зависит от того, в каком направлении спутник выходит из области земного притяжения (отн. $\vec{V}_з$)

Точный расчёт достаточно сложен, т.к. необходимо решать задачу трёх тел, учитывая их взаимное притяжение. Но можно решить задачу приближённо, если пренебрегать влиянием гравитац. поля Солнца на корабль, пока он ещё не вышел из поля тяготения Земли. Тогда можно исп-ть ЗСЭ:

$$\frac{mV_{III}^2}{2} - \frac{GMm}{R_з} = \frac{mV_{отн}^2}{2}$$

Заметим, что $\frac{GMm}{R_з} = \frac{mV_{II}^2}{2}$, тогда

$$V_{III}^2 - V_{II}^2 = V_{отн}^2 \implies \boxed{V_{III}^2 = V_{II}^2 + V_{отн}^2}$$

Тогда, в самом выгодном случае ($\vec{V}_{отн} \uparrow\uparrow \vec{V}_з$) найдём:

$$V_{III}^{min} = \sqrt{V_{II}^2 + (\sqrt{2}-1)^2 V_з^2} \simeq 16,7 \frac{км}{с}$$

[Для справок: в наихудшем случае $\vec{v}_{сп} \uparrow\downarrow \vec{v}_3 \to v_{IV}^{max} = 72,7 \frac{км}{с}$

Ясно, что все наши расчёты идеализированы: мы не учитывали, например, влияние трения в атмосфере, несферичность Земли. Есть и ещё более тонкие эффекты: вращение пл-ти орбиты спутника отн. „неподвижных" звёзд.

О роли тяготения в космических (космологических) масштабах.

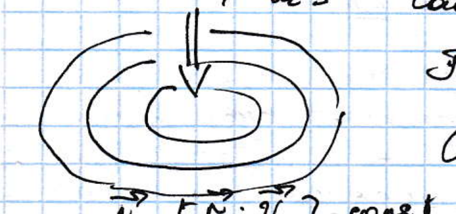
В микромире говорить о гравитации не приходится - другие силы много больше. А в больших масштабах именно гравитация выходит на 1-ый план.

Итак главное:

а) именно тяготение определяет взаимное притяжение массивных тел на больших расстояниях

б) то, что силы тяготения - центральные, определяет форму

$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}_{тяг}] = 0$ Галактики: почти все они плоские. Почему?



Потому что выполнен з-н сохр. момента импульса.

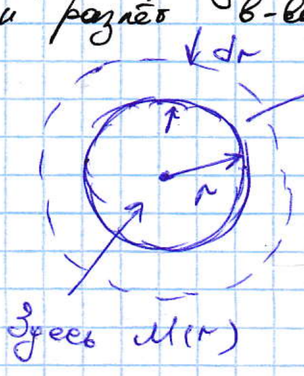
Ск-ть $\perp$ радиусу не даёт галактикам схлопываться (коллапсировать)

$\vec{N} = [\vec{r}; \vec{v}] = const$

→ т.е. сохр. напр.-е ⇒ необх. траектория д.б. плоской.

в) как влияют гравитац. силы на Вселенную в целом? Галактики взаимодействуют, главным образом, гравитационным полем.

Можно рассмотреть эволюцию Вселенной и в рамках космической механики Ньютона. Ясно, что это рассм-е справедливо только через большое время после взрыва (по современной теории рождения Вселенной вначале был гигантский взрыв и разлёт в-ва), когда плотность в-ва уже мала



сферический слой частиц, в нём сосредоточена масса dm

В такой, сферич.-симметричной, модели

$$\varphi_g(r) = -\frac{GM(r)}{r}$$, где $M(r)$ - масса внутри

При расширении энергии слоя

$$dW = \frac{dm \cdot v^2}{2} + dm \cdot \varphi_g(r) = \frac{dm \cdot v^2}{2} - \frac{GM(r) \cdot dm}{r}$$

От знака dW зависит, что будет — бесконечный разлёт или схлопывание.

При $\Delta W > 0$: φ_g уменьш. => будет неограниченный и необратимый разлёт.

При $\Delta W < 0$ наступит схлопывание (коллапс) Вселенной. Результат для знака ΔW зависит от средней плотности в-ва во Вселенной. Она пока известна не точно!

О весе и невесомости.

В принципе это "школьный" вопрос. Мы настолько привыкли к понятию "вес", что приходиться задумываться, почему и когда возможна "невесомость". На самом деле труднее объяснить (хотя это бы сделать в 1-ую очередь) почему все тела притягиваются! Ведь не объяснена природа тяготения.

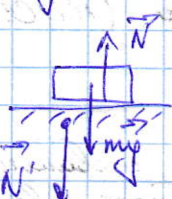
Иногда путают вес и силу тяжести. Дадим опр-е:

Опр. **Весом** тела называется сила, с которой тело действует на опору или подвес.

Т.о, тело "весит" означает "тело давит"

Расс-м частные случаи:

а) Случай равновесия в инерц. с.о. (ИСО)



При $\vec{a} = 0$ $\quad m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} = \vec{0}$ — это II з-н для тела

Т.о. $\vec{N} = -m\vec{g}$

По III з-ну **вес** $\vec{N'} = -\vec{N}$ $\Big\}$ $\vec{N'} = m\vec{g}$

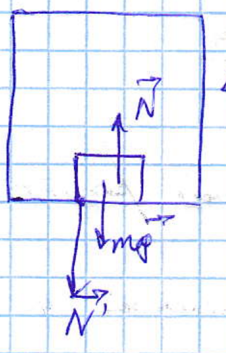
Итак, в этом случае действительно вес = силе тяготения

! Но природа этих сил разная: $m\vec{g}$ - гравитац., $\vec{N'}$ - электромагнитная природа)

б) Случай $\vec{a} \neq 0$ (тело в лифте)

Мы работаем в ИСО! (с.о связана с шахтой лифта)

По II з-ну:



$m\vec g + \vec N = m\vec a$ (но $\vec a \neq 0$!)

$\vec N = m(\vec a - \vec g)$

Т.о, при $\vec a \uparrow\downarrow \vec g$ (подъём с уск-м) получим

$-\vec a \uparrow\uparrow \vec g$ и $\underline{N' > mg}$

а при $\vec a \uparrow\uparrow \vec g$ (подъём с замедлением) − $\vec a \uparrow\downarrow \vec g$

$N' < mg$

В этом случае $N' = m(g - a) < mg$

При $a = g$ – <u>невесомость</u>!

Из этого примера ясно, что наличие тяготения для существования веса не является ни необходимым, ни достаточным условием!

$\boxed{27.11.2020}$

<u>Неинерциальные системы отсчёта</u>

В <u>инерциальной</u> с-ме отсчёта (ИСО)

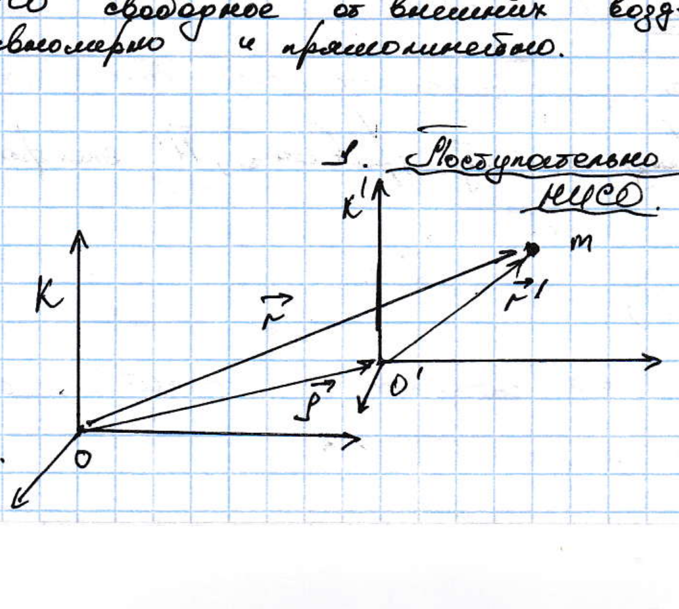
$$m\vec a = \sum \vec F_{re}$$

$\vec F_{re}$ – реально существующие в природе силы.

<u>Опр.</u>: Любая система, которая движется <u>с ускорением</u> относительно ИСО, называется <u>неинерциальной</u> системой отсчёта (НИСО).

2-й з-н Ньютона справедлив только в ИСО. Иными словами: в НИСО свободное от внешних воздействий тело не будет двигаться равномерно и прямолинейно.

1. <u>Поступательно движущаяся НИСО</u>.



K – система – ИСО

K' – система – НИСО

Движение K' поступательное => оси всегда остаются параллельными.

При $v << c$ $t = t'$ (время течёт одинаково во всех СО).

m - материальная точка, её движение описываем в ИСО и в НИСО.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{\rho}(t) \qquad (\text{где } \vec{\rho}(t) = OO')$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{u}(t)$$

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{\rho}}{dt} \text{ - переносная ск-ть}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{a}_0(t)$$

Опр: $\vec{a}_0(t) = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}$ ~ переносное ускорение

При поступательном движении $\vec{a}_0 \parallel \vec{\rho}$

Пусть $\vec{a}_0 = const.$

В классической механике реальные силы не меняются при переходе от одной СО к другой.

Подставим $\vec{a}$:

$$m\vec{a}' + m\vec{a}_0 = \sum \vec{F}_{re}$$

и перепишем:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_{re} - m\vec{a}_0$$

Слагаемое $-m\vec{a}_0$ интерпретируют как силу (на самом деле такой силы не существует в природе.)

↓ ↓ ↓

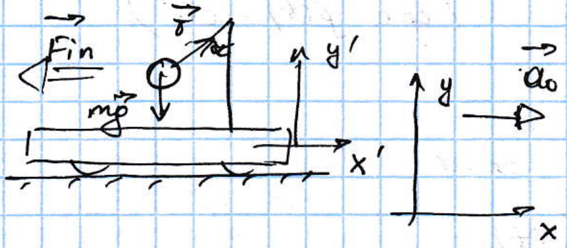
продолжение.

Опр.: Силой инерции при поступательном движении (поступательной силой инерции) называется слагаемое „$-m\vec{a}_0$":

$$\underline{\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0} \sim \text{поступательная сила инерции}$$

Примеры:

① Математический маятник на тележке (положение отвеса)



Пусть дано $\vec{a}_0$. Найти: угол отклонения отвеса α.

а) С точки зрения ИСО (связана с неподвижным столом): маятник жестко скреплён с тележкой и движется с тем же ускорением: $\vec{a} = \vec{a}_0$

2-й з-н Ньютона: $m\vec{a} = m\vec{a}_0 = m\vec{g} + \vec{T}$

$$\left.\begin{aligned} x&: ma_0 = T\sin\alpha \\ y&: 0 = -mg + T\cos\alpha \end{aligned}\right| \Rightarrow \underline{\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_0}{g}}$$

б) С точки зрения НИСО (связана с тележкой)

Маятник неподвижен отн. тележки: $a' = 0$

Аналог 2-го з-на Ньютона: $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{in}$,

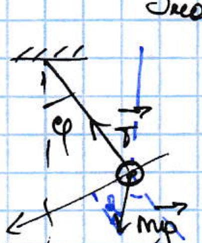
где $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0$

$$\left.\begin{aligned} x'&: 0 = T\sin\alpha - ma_0 \\ y'&: 0 = -mg + T\cos\alpha \end{aligned}\right| \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_0}{g}$$

② Маятник на тележке (колебания).

Пусть тот же маятник на тележке (тележка движется с $\vec{a}_0$) отклонили на малый угол от положения равновесия. Найти: частоту колебаний.

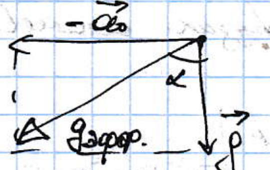
Знаем для мат. маятника, покор. в ИСО:



$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \Rightarrow \underbrace{\omega^2 = \frac{g}{l}}$ (l – длина подвеса)

возвращающая сила: $mg\sin\varphi$.

В НИСО: $m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a}_0$



Перегруппируем: $m\vec{a'} = m(\vec{g} - \vec{a_0}) + \vec{T}$

Введем $\vec{g}_{эфф} = \vec{g} - \vec{a_0} \Rightarrow m\vec{a'} = m\vec{g}_{эфф} + \vec{T}$

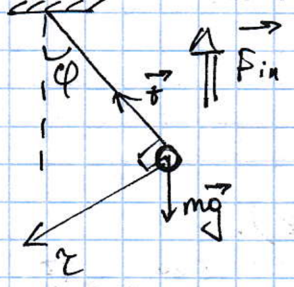
Развернем картинку на угол α:
(рисунок)

φ - малый угол отклонения от нового положения отвеса. Возвращающая сила:

$mg_{эфф} \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow$ по аналогии $\omega^2 = \frac{g_{эфф}}{l} = \frac{\sqrt{g^2 + a_0^2}}{l}$

③ Маятник в лифте.



Пусть дано $\vec{a_0}$, l. Найти частоту колебаний?

НИСО: $m\vec{a'} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{in} = m(\vec{g} - \vec{a_0}) + \vec{T}$

$\vec{g}_{эфф.} = \vec{g} - \vec{a_0}$; При $\vec{a_0} \uparrow\uparrow \vec{g} \rightarrow g_{эфф} = g - a_0$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g - a_0}{l}$

Вывод: формально $m\vec{g}$ и $m\vec{a_0}$ - одинаковы! Это проявление принципа эквивалентности! $m_{гр} = m_{ин}$.

Но: $m\vec{g}$ - реальная сила (существует в природе),

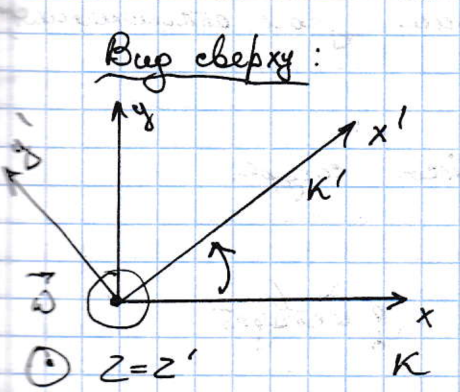
$\vec{F}_{in} = -m\vec{a_0}$ - "выдуманная" нами для простоты решения.

Для $\vec{F}_{in}$ не выполняется 3-й з-н Ньютона.

② Вращающаяся НИСО

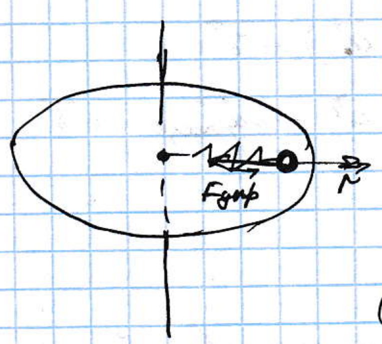
Пусть вращение происходит относительно ИСО и при этом центры систем отсчета совпадают (т.е. поступательного движения нет)

Вид сверху:



Вращение происходит относительно z,

ω - частота вращения K' относит. K.



На вращающемся диске грузик остановился, т.е. $v' = 0$

Относительно ИСО: $ma_n = F_{упр}$, $a_n = \omega^2 r$ $\Rightarrow m\omega^2 r = F_{упр}$ (1)

(смысл: ускорение a_n возникает из-за $F_{упр}$.)

Относит. НИСО: $v' = 0 \Rightarrow a_n' = 0$

$$0 = F_{упр} \; ???$$

Чтобы разрешить этот парадокс, в НИСО вводят дополнительно силу $F_{in}^{цб}$ (центробежную силу инерции). Чтобы согласовать ур-е в НИСО с (1), необходимо:

$$0 = \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{in}^{цб} \Rightarrow \vec{F}_{in}^{цб} = -\vec{F}_{упр}$$

С учётом $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}_\perp$ и (1) окончательно:

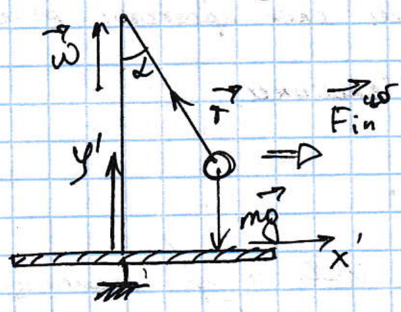
$$\underbrace{\vec{F}_{in}^{цб} = m\omega^2 \vec{r}_\perp}_{} \quad (2)$$

Опр.: выражение (2) и есть опр. $\vec{F}_{in}^{цб}$ (перпендикулярность отн. оси вращения).

Тогда в НИСО получим: $\vec{0} = \sum \vec{F}_{ec} + \vec{F}_{in}^{цб} = \sum \vec{F}_{ec} + m\omega^2 \vec{r}_\perp$

Примеры проявления $\vec{F}_{in}^{цб}$

① Лекцион. демонстрация 2 – отвес на вращающемся диске.



Относительно НИСО (связана с диском):

$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{in}^{цб}$, $\vec{F}_{in}^{цб} = m\omega^2 \vec{r}$

x': $0 = -T\sin\alpha + m\omega^2 r_\perp$

y': $0 = -mg + T\cos\alpha$

$\Rightarrow tg\,\alpha = \dfrac{\omega^2 r_\perp}{g}$

~ т.е. чем дальше от оси, тем больше угол отклонения; отвес прямо на оси не отклоняется.

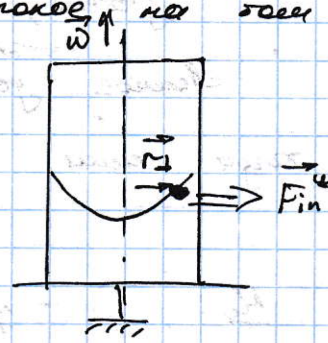
② Лекц. дем. 3 – жидкость во вращающемся сосуде.

Относительно НИСО:

На каждый "кусочек" жидкости dm действует

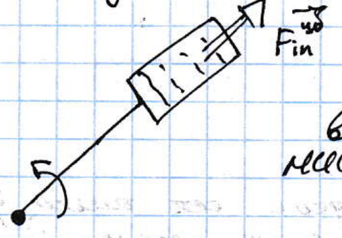
$d\vec{F}_{in}^{цб} = dm\,\omega^2 \vec{r}_\perp$

На оси $\vec{r}_\perp = 0 \Rightarrow d\vec{F}_{in}^{цб} = 0$, там жидкость в покое, на том же уровне, что при $\omega = 0$



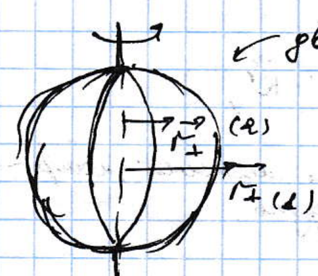
При $\vec{r}_\perp \neq 0$ жидкость поднимается, форма поверхности – параболоид.

③ Лекц. дем. 4 – вода в ведёрке на верёвке.



Вода не выливается из ведёрка даже в верхней точке. Объяснение с точки зрения НИСО (связана с ведёрком): воду удерживает $\vec{F}_{in}^{цб}$.

④ Лекц. дем. 5 – форма Земли.



Без вращения кольца круглые. При вращении кольца деформируются.

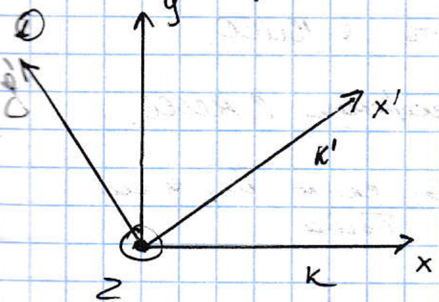
<u>Относительно НИСО</u>: действует $\vec{F}_{in}^{цб} = m\omega^2 \vec{r}_\perp$

Чем дальше от оси (больше $\vec{r}_\perp$), тем больше $\vec{F}_{in}^{цб}$. Кольца принимают форму эллипсов. Земля вытягивается у экватора (в результате имеет форму геоида).

04.12.2020

Рассмотрим ещё примеры, связанные с вращающейся НИСО.

①



Пусть м.т. покоится относительно K.

Тогда относительно K' $a_n' \neq 0$. <u>Но</u>:

в K' $\begin{cases} \vec{F}_{in}^{цб} = m\omega^2 \vec{r}' \\ \vec{a}_n' \uparrow\downarrow \vec{r}' \end{cases}$

Тогда какая же сила обеспечивает $\vec{a}_n'$?

② Пусть есть 2 неподвижные м.т. A и B. Состояние покоя м.т. B можно рассмотреть как результат двух вращений относит. A: с $+\vec{\omega}$ и $(-\vec{\omega})$. При этом ускорения будут:

$\vec a_{n+} = \omega^2\cdot(-\vec r)$, $\vec a_{n-} = (-\omega)^2\cdot(-\vec r) = \vec a_{n+}$

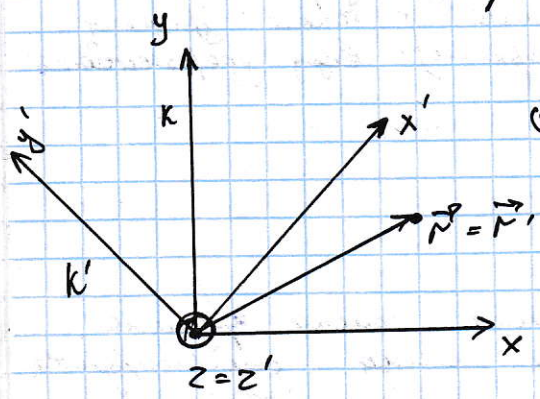
(учтено, что всегда $\vec a_n \uparrow\downarrow \vec r$).

Полное ускорение м.т. B: $\vec a_\Sigma = \vec a_{n+} + \vec a_{n-} = 2\vec a_{n+}$, тогда сила взаимодействия A с B:

$$\vec F = m_B \vec a_\Sigma = 2m_B \vec a_{n+} = -2m\omega^2\vec r$$

Но: ω – произвольная ск-ть $\Rightarrow$ $\vec F$ – произвольная ?!

Теорема Кориолиса (1840г.)



⊙ $\vec\omega$ В нашем случае есть только вращение K' относит. K с угл. ск-ю $\vec\omega$ (не обязательно $\omega = const$!), тогда

$$\vec k = \vec k'$$

$$\vec r(t) = x\vec i + y\cdot\vec j + z\cdot\vec k$$

$$\vec r'(t) = x'\cdot\vec i' + y'\cdot\vec j' + z'\cdot\vec k',$$

где $\vec i, \vec j, \vec k$ – неподвижны, $\vec i', \vec j'$ – вращаются, т.е. меняют напр-е, сохраняя модуль.

т.к. $O = O'$, то, очевидно, $\vec r(t) = \vec r'(t)$

В ИСО: $\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \dot x\cdot\vec i + \dot y\cdot\vec j + \dot z\vec k$

Перейдём в НИСО и будем наблюдать за движением м.т. из НИСО. Тогда орты осей K' для нас неподвижны, и

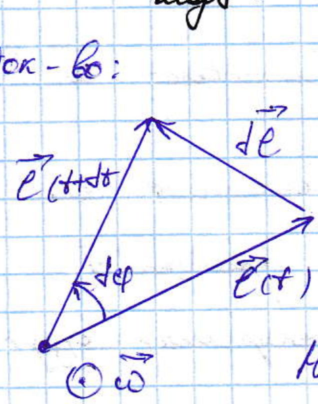
Опр $\vec v' \equiv \vec v_{отн} = \dot x'\vec i' + \dot y'\cdot\vec j' + \dot z'\vec k'$ ~ по опр. ск-ть в НИСО.

$\vec a' \equiv \vec a_{отн} = \ddot x'\vec i' + \ddot y'\vec j' + \ddot z'\vec k'$ ~ по опр. ускорение в НИСО.

Лемма. Пусть вектор $\vec e$ вращается с угловой ск-ю $\vec\omega$, а его модуль не меняется: $|\vec e| = const$. Тогда

$$\boxed{\frac{d\vec e}{dt} = [\vec\omega; \vec e]}$$

Док-во:



т.к. $|\vec e(t)| = |\vec e(t+dt)|$, то из рис.

$|d\vec e| = |\vec e|\, d\varphi = |\vec e|\,\omega\, dt$, тогда

$$\frac{|d\vec e|}{dt} = |\vec e|\cdot\omega$$

Но при $dt \to 0 \Rightarrow d\vec e \perp \vec e$, и $d\vec e \perp \vec\omega$

Тогда можно записать в вект. форме: $\frac{d\vec{e}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}]$, ч. и т.д.
Мы это используем, чтобы учесть поворот ортов системы K'
Дифференцируем:

$$\vec{r} = \vec{r}' \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'\right) =$$

$$= \left(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'\right) + \left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) =$$

$$= \vec{v}' + [\vec{\omega}, (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')] = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']$$

Итак, $\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']}$ $(*)$ ~ в НИСО – т.е. НИСО движ. отн. ИСО

Опр.: Слагаемое $[\vec{\omega}, \vec{r}'] = \vec{v}_{пер.}$ называется переносной скоростью

Дифференцируем ещё раз:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']\right)$$

1) Учтём, что может меняться как длина $|\vec{v}'|$, так и направление (есть вращение). Тогда с учётом леммы

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + [\vec{\omega}, \vec{v}']$$

2) Для 2-го слагаемого:

$$\frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}'] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}'\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}'}{dt}\right] \overset{(*)}{=} [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}'] +$$

$$+ [\vec{\omega}, \vec{v}'] + \underline{[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]}\ ?$$

Разложим по отношению к $\vec{\omega}$: $\vec{r}' = \vec{r}'_\perp + \vec{r}'_\parallel$, $[\vec{\omega}, \vec{r}'_\parallel] = 0$

Используем формулу: $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$

Тогда:

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}'_\perp]] = \vec{\omega}\cdot\underbrace{(\vec{\omega}, \vec{r}'_\perp)}_{=0} - \vec{r}'_\perp(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}'_\perp$$

Собираем:

$$\vec{a} = \vec{a}' + [\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}'] + [\vec{\omega}, \vec{v}'] - \omega^2 \vec{r}'_\perp =$$

$$= \vec{a}' + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}'] + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] - \omega^2 \vec{r}'_\perp$$

Теперь можно записать II з-н Ньютона:

$$\vec F = m\vec a = m\vec a' + m[\dot{\vec\omega}, \vec r'] + 2m[\vec\omega, \vec v'] - m\omega^2 \vec r'_\perp ,$$

или

$$m\vec a' = \vec F + m\omega^2 \vec r'_\perp - m[\dot{\vec\omega}, \vec r'] - 2m[\vec\omega, \vec v']$$

В общем случае, когда $O \neq O'$, можно учесть поступательное движение ($\vec F_{in} = -m\vec a_0$):

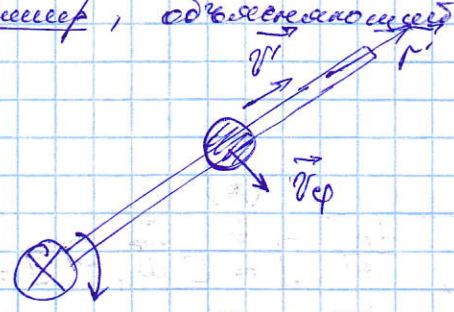
$$\boxed{m\vec a' = \vec F - m\vec a_0 + m\omega^2 \vec r'_\perp - m[\dot{\vec\omega}, \vec r'] - 2m[\vec\omega, \vec v']}$$

~ это и есть теорема о пересчёте ускорений

Смысл: 1-ое слаг. – "реальные" силы
2-ое –//– – поступательная сила инерции
3-е –//– – центробежная сила инерции
4-е –//– – связано только с неравномерностью вращения.
5-е –//– – сила Кориолиса.

О терминологии: $\vec a_{кор} = 2[\vec\omega, \vec v']$ – уск-е Кориолиса, $\boxed{\vec F_{кор} = -m\vec a_{кор} = 2m[\vec v', \vec\omega]}$

Пример, объясняющий "происхождение" $\vec F_{кор}$ (или $\vec a_{кор}$):

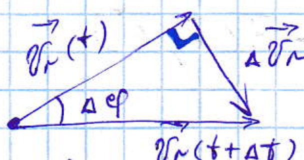


Муфта скользит вдоль гладкого стержня, вращающегося с угл. скор. $\vec\omega$ (пусть в пл-ти стола)

Полная ск-ть муфты
$$\vec v = \vec v' + \vec v_{перен} = \vec v_r + \vec v_\varphi$$

Очевидно, $\vec v_\varphi = [\vec\omega, \vec r']$

1) $\vec v_r$ меняется, т.к. вектор поворачивается (хотя по модулю $v_r = const$)

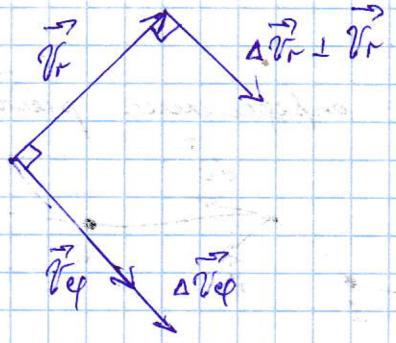


$$|\Delta \vec v_r| = v_r \cdot \Delta\varphi = v_r \cdot \omega \cdot \Delta t$$

2) $\vec v_\varphi$ тоже меняется, т.к. $\vec r'$ – меняется. Пусть $\omega = const$, тогда
$$|\Delta \vec v_\varphi| = \omega \cdot \Delta r' = \omega \cdot v_r \cdot \Delta t$$

Получили, что $|\Delta \vec v_r| = |\Delta \vec v_\varphi| = v_r \omega \cdot \Delta t$

Учтём: $\vec v_\varphi \perp \vec r'$, $\Delta\vec v_\varphi \uparrow\uparrow \vec v_\varphi \Rightarrow \Delta\vec v_\varphi \perp \vec r'$
$\vec v_r \uparrow\uparrow \vec r'$, $\Delta\vec v_r \perp \vec v_r \Rightarrow \Delta\vec v_r \perp \vec r'$
$\Big\} \ \Delta\vec v_\varphi \uparrow\uparrow \Delta\vec v_r$



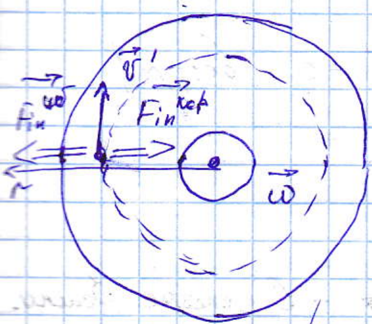
Итак, $|\Delta\vec v| = 2v_r\omega\Delta t$,

$$\left|\frac{\Delta\vec v}{\Delta t}\right| = 2v_r\omega$$

— лекц. дем. (спираль Архимеда)

Примеры проявления $\vec F_{in}^{кор.}$

① Теперь можно объяснить 1-й пример: м.т. неподвижна в ИСО. Тогда в НИСО траектория этой м.т. — окружность.



Вид сверху

Относит. НИСО $\vec v' \neq 0 \Rightarrow \vec F_{in}^{к} = 2m[\vec v', \vec\omega] \neq 0$

$$\sum \vec F_{in} = \vec F_{in}^{цб} + \vec F_{in}^{кор.} = m\omega^2\vec r_\perp + 2m[\vec v', \vec\omega]$$

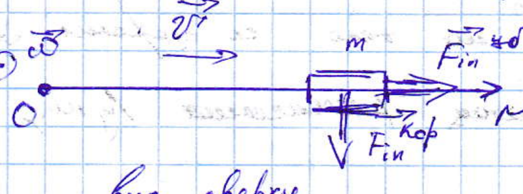
Учтём: 1) $\vec F_{in}^{цб} \uparrow\downarrow \vec F_{in}^{кор.}$

2) $\vec v' = [\vec\omega, \vec r]$

$$\Rightarrow \left|\sum \vec F_{in}\right| = \left|m\omega^2\vec r_\perp + 2m[[\vec\omega, \vec r], \vec\omega]\right| = m\omega^2 r_\perp$$

и $\sum \vec F_{in} \uparrow\downarrow \vec r$!

② Лекц. дем. (меловая муфта на стержне)



вид сверху

Пусть $\vec\omega$ - const ($\Rightarrow \dot{\vec\omega} = 0$) и $\vec F_{тр.} = 0$

НИСО K' связана со стержнем.

т.к. $\vec\omega \neq 0$, то появится $\vec F_{in}^{цб} \Rightarrow \vec v' \neq 0$

$\Rightarrow$ появится $\vec F_{in}^{кор.} \perp \vec r'$

Можно найти и $r'(t)$:

$$m\vec a' = m\vec g + \vec N + \vec F_{in}^{цб} + \vec F_{in}^{кор}$$

$$r':\ m\ddot r' = m\omega^2 r' \Rightarrow \ddot r' - \omega^2 r' = 0$$

Решение имеет вид: $r'(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$

Пусть нач. усл.: $r'(t=0) = r_0$, $v'(t=0) = 0$

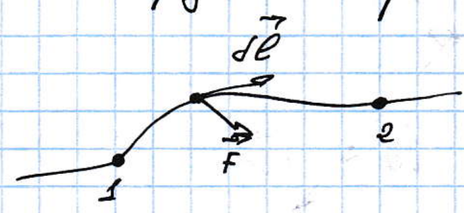
$$\Rightarrow \begin{cases} r_0 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 - C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{r_0}{2}$$

$$r'(t) = \frac{r_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)$$

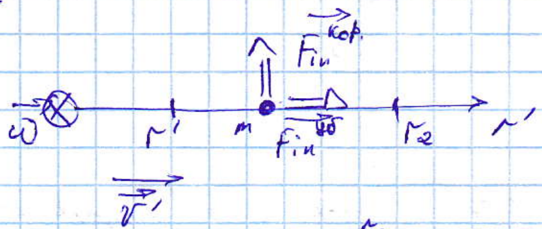
Работа сил инерции

Для сил инерции справедливо обычное определение работы (как для реальных сил):

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} F_l \, dl$$



Пример:



1) Для $\vec F_{in}^{цб}$: $A^{цб} = \int_{r_1}^{r_2} (F_{in}^{цб})_{r'} \, dr' = \int_{r_1}^{r_2} m\omega^2 r' \, dr' = \frac{m\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2)$

2) Для $\vec F_{in}^{кор}$: $\vec F_{in}^{кор} = 2m[\vec v', \vec\omega] \perp \vec v' \Rightarrow A^{кор} = 0$ всегда!

Земля как НИСО

Пусть с.о. связана с Землей, начало координат – в центре Земли. Известно, что Земля вращ. практически равномерно.

$\dot{\vec\omega} = 0$. Для тела массы m будет:

$$m\vec a' = \vec F_{т.з.} + \vec F_{л.с.} - m\vec a_з + \vec F_{in}^{цб} + \vec F_{in}^{кор.} + \vec F_{пр.} \qquad (*)$$

где $\vec F_{т.з.}$ – сила тяжести, действ. на тело со стороны Земли,

$\vec F_{л.с.}$ – равнодейств. сил гравитац. притяжения Луны, Солнца и т.д.

$\vec F_{пр.}$ – "прочие" силы (сила тяги ракеты, сопр-я атмосферы, ...)

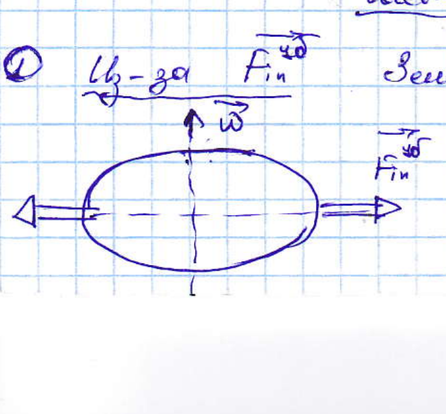
$-m\vec a_з$ – поступат. сила инерции: $\vec a_з$ – это ускорение центра Земли под действием Луны, Солнца и т.д.

$\vec F_{in}^{цб}$, $\vec F_{in}^{кор}$ – центр.-ая и Кориолисова силы инерции.

Важно: с точностью до неоднородности поля $\vec F_{л.с.}$, $-m\vec a_з \to \vec 0$ – они почти друг друга компенсируют. Однако компенсация не полная: $\frac{\Delta g}{g} \le 10^{-7}$ для приливов это важно!

Частные следствия соотношения (*)

① Из-за $\vec F_{in}^{цб}$ Земля вытянута у экватора.



$\vec F_{in}^{цб} = m\omega^2 \vec r_\perp$

$g = G\frac{M_з}{R^2}$

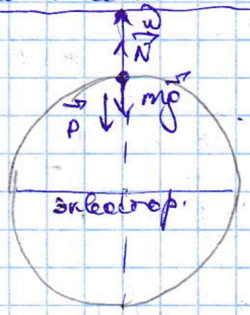
$g_{экв.} = 9,78 \frac{м}{с^2}$

$g_{пол.} = 9,832 \frac{м}{с^2}$

$$\frac{g_{пол} - g_{экв}}{g_{пол}} \simeq 0{,}53\%$$

② Изменение веса тела (пренебрегаем несферичностью Земли)

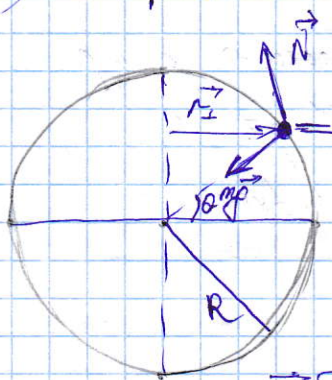
а)



На полюсе ($r_\perp = 0$) $\Rightarrow$ $\vec{F}_{in}^{цб} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \vec{0} &= m\vec{g} + \vec{N} \\ \vec{N} &= -\vec{P} \end{aligned}\right\} \quad P = N = mg$$

б) На произвольной широте θ ($\theta < \frac{\pi}{2}$)

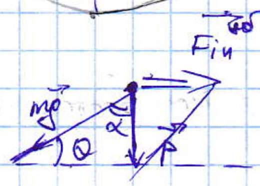


$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{in}^{цб} = \vec{N} = -(m\vec{g} + m\omega^2 \vec{r}_\perp)$$

$$\vec{P} = -\vec{N}$$

$\Rightarrow$ 1) $P \neq mg$

2) $\vec{P}$ – не к центру Земли (!)

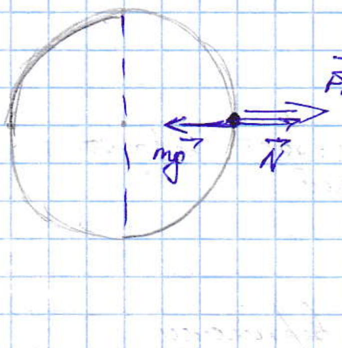


$$r_\perp = R\cos\theta$$

Из рис: $\frac{\sin\alpha}{m\omega^2 r_\perp} = \frac{\sin\theta}{P} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{m\omega^2 r_\perp}{P}\sin\theta = \frac{m\omega^2 R\sin 2\theta}{2P}$

(P можно найти по теореме косинусов)

в) на экваторе ($\theta = 0$) $\Rightarrow r_\perp = R$



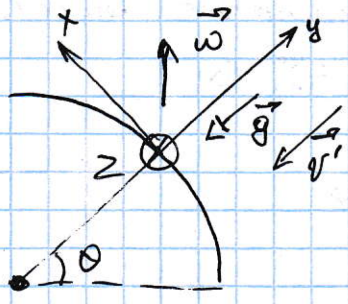
$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{in}^{цб} \Rightarrow P = N = mg - m\omega^2 R$$

$$\Delta N = m\omega^2 R = m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot R$$

$$\frac{\Delta N}{N_{пол}} \simeq 0{,}3\%$$

9.12.2020

Влияние $\vec{F}_{in}^{\,кор.}$: свободно падающие тела отклоняются на восток, пуля при выстреле из ружья строго вверх — на запад!



$$\vec{a}\,' = \vec{g} + \omega^2 \vec{r}_\perp + 2[\vec{v}\,', \vec{\omega}] \quad (\text{сокр. на } m)$$

Свободное падение $\vec{v}\,' = v_y' \cdot \vec{j}$, $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F}_{in}^{\,кор} = 2m v_y' \omega_x (-\vec{k}) \qquad (v_y' < 0!)$$

Расчёт отклонения:

1) $\omega^2 r_\perp << g \Rightarrow F_{in}^{цб}$ пренебрегаем по сравнению с mg

2) основной эффект — падение $\Rightarrow a' \simeq g \Rightarrow v' = gt$

$$\Rightarrow a_{кор} = 2v'\omega_x = 2gt\,\omega\cos\theta \quad \text{— интегрируем.}$$

$$\Rightarrow v_{кор.} = v_z = gt^2 \omega \cos\theta$$

$$\Rightarrow \underline{z = \frac{gt^3}{3}\omega\cos\theta}$$

(в момент падения $y = 0$, $t_п = \sqrt{\frac{2y_0'}{g}}$) — т.е. на восток (!)

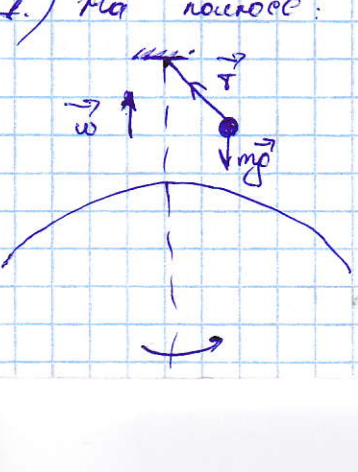
3) $v_{кор.} = v_z$ (на восток) $\Rightarrow$ можно учесть эффект следующего порядка малости — отклонение на юг.

④ Маятник Фуко как пример док-ва вращения Земли.

Леон Фуко — франц. физик, астроном.

$\vec{F}_{in}^{\,кор} = 2m[\vec{v}\,', \vec{\omega}] \Rightarrow \vec{F}_{in}^{\,кор} \perp \vec{v}\,'$, $\vec{F}_{in}^{\,кор} \perp \vec{\omega}$ $\Rightarrow$ обеспечивает поворот пл-ти качаний

1.) На полюсе:

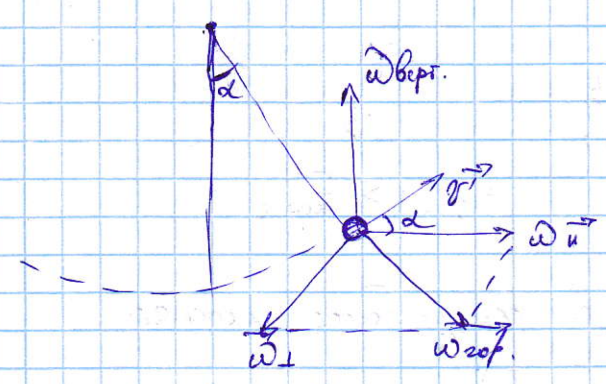


Для полюса: $\vec{\omega}$ — вдоль вертикали

В ИСО: есть только $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ $\Rightarrow$ маятник сохраняет пл-ть качаний постоянной. Но относит. него поворачивается Земля $(\vec{\omega} \neq 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ относит. Земли пл-ть качаний поворачивается с той же ω, но в противоположном направлении

В НИСО, связанной с Землёй

2) На произвольной широте Θ



Представим $\vec{\omega}$ в виде: (вертикаль и горизонталь на данной широте.)

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{верт} + \vec{\omega}_{гор} = \vec{\omega}_{верт} + \vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel}$$

где $\parallel$ и $\perp$ относятся к плоскости качаний.

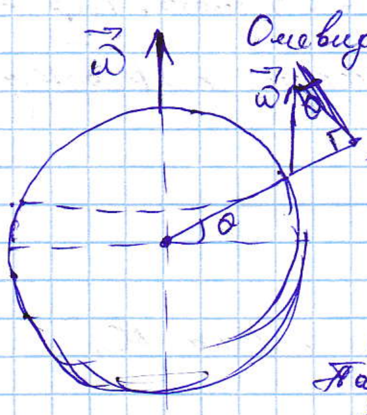
Тогда:

$$\vec{F}_{кор.} = -2m\left([\vec{\omega}_{верт.}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}_{\perp}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}_{\parallel}, \vec{v}']\right)$$

а) $[\vec{\omega}_{\perp}, \vec{v}']$ напр. вдоль нити (т.к. $\vec{v}' \perp$ нити) => только меняет силу натяжения.

б) $[\vec{\omega}_{\parallel}, \vec{v}'] \perp$ плоскости качаний, но, во-первых, мала при $\alpha \ll 1$, во-вторых, меняет напр-е при изм-ии напр-я $\vec{v}'$ (в модуль $|[\vec{\omega}_{\parallel}, \vec{v}']|$ входит то $\sin\alpha$, то $\sin(\pi+\alpha)$) => "качает" пл-ть качаний.

в) $[\vec{\omega}_{верт}, \vec{v}'] \perp$ пл-ти качаний и всегда сохр. одно направление, т.е. она и вращает пл-ть качаний.



Очевидно, $\omega_{верт.} = \omega \sin\Theta$

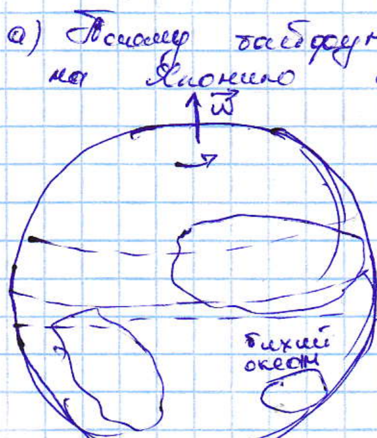
Плоскость качаний делает оборот за время $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega_{верт}} = \dfrac{2\pi}{\omega \sin\Theta} = \dfrac{T}{\sin\Theta}$.

T - период вращения Земли относит. ИСО

Реальный опыт впервые осуществил Фуко в Парижской обсерватории (1850г.) повторил в 1851г. в Пантеоне, $\ell = 67$ м, $m = 28$ кг.

⑤ Роль $\vec{F}_{in}^{кор.}$ в глобальных масштабах (в геофизике.)

а) Почему тайфуны всегда движутся только с Тихого океана на Японию и Курилы? (а не наоборот?)



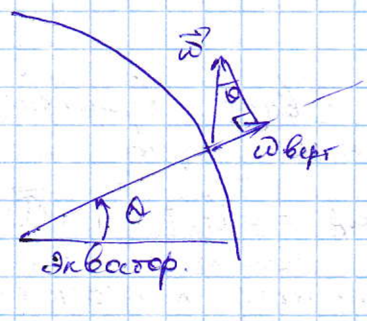
поле низкого давления
поле высокого давления при $\Theta = 30°$ с.ш.

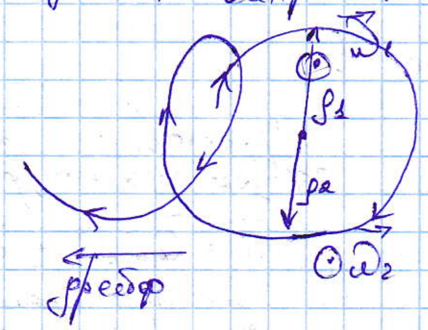
Вид с полюса

$$\odot \vec{\omega} \Longrightarrow \vec{F}_{in}^{кор.} \qquad \vec{F}_{in}^{кор} - 2m[\vec{v}', \vec{\omega}]$$

$\uparrow \vec{v}'$

– рождается вихрь → – реальная ск-ть





$\omega_{верт} = \omega \sin\theta$

$\omega_{1верт} > \omega_{2верт}$

$\Downarrow$

$F_{кор.1} > F_{кор.2}$

$$F_{кор.} = \frac{mV^2}{\rho} \Rightarrow \rho_1 < \rho_2 \text{ (внизу более плоская.)}$$

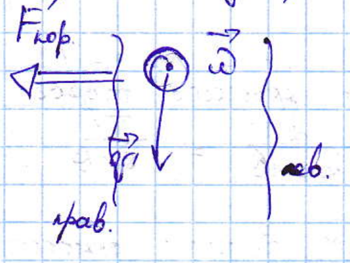
$\Rightarrow$ $\exists$ дрейф, это похоже на дрейф в неоднородном магн. поле.

б) Пассаты – от 30° с.ш. к экв. ↙ | от 30° ю.ш ↘

в) Гольфстрим – климатоформирующее течение. Он рождается у берегов Кубы и идёт до Баренцева моря.

г) Почему у рек в сев. полушарии подмыт правый берег?

Они текут, как правило, с С на Ю. Действ. $\vec{F}_{кор.}$ – „прижимает" течение к пр. берегу



д) Кстати, по той же причине поезд, идущий с С на Ю, сильнее давит на правый рельс.

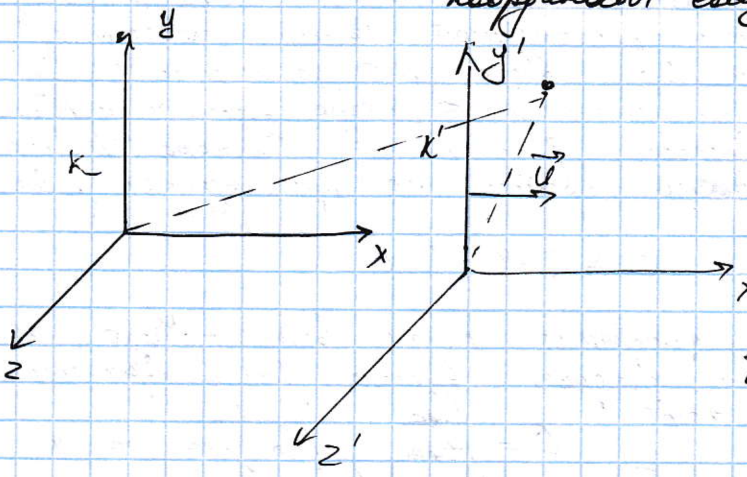
Вопрос: Почему закр. воронка в раковине? (по часовой или против?) ~д/з

Специальная теория относительности.

Основной з-н механики Ньютона выражается уравнением

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Пусть есть 2 системы отсчёта K и K', K' движ. отн. K равномерно прямолинейно со скор. $\vec{u}$. В механике Ньютона координаты связаны преобразованием Галилея.



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\rho} = \vec{r}' + \vec{u}t$$

При этом считается, что $t = t'$, тогда

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \quad \vec{a} = \vec{a}'$$

Т.о. $\vec{r} \neq \vec{r}'$ и $\vec{v} \neq \vec{v}'$

Но если взять 2 положения м.т. $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, и ск-ти в этих полож-ях $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, то очевидно,

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2' - \vec{r}_1', \quad \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2' - \vec{v}_1'$$

Из опр. $\vec{a}$ => что сила связана именно с разностью $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$, поэтому силы (=> з-н Ньютона) не меняется при преобразовании Галилея.

Т.о,

Принцип относительности Галилея [Законы движения м.т. не зависят от того, к какой из инерциальных с.о., движущихся равномерно прямолинейно относит. друг друга, они относятся.

Этот принцип не утверждает, что одно и то же явление выглядит одинаково в разных с.о., т.к. ур-я движ-я — это дифф. ур-я, и необх. задать ещё начальные условия. Эти условия разные в разных с.о. (например $\dot{x}(0) \neq \dot{x}'(0)$ - разные нач. скорости). Поэтому мы говорим не об одинаковости явлений, а об одинаковости ~~зак~~ законов для их описания.

Пример - движ-е з.ч. (сила зависит от $\vec{E}$, $\vec{B}$)

? Но явления природы невозможно разделить на „механические" и „немеханические". Поэтому принцип относит-ти распространяется на все законы природы. Это положение Эйнштейн положил в основу СТО (ЧТО)

Но уже первые попытки измерения скорости света вызвали противоречия с принципом Галилея.

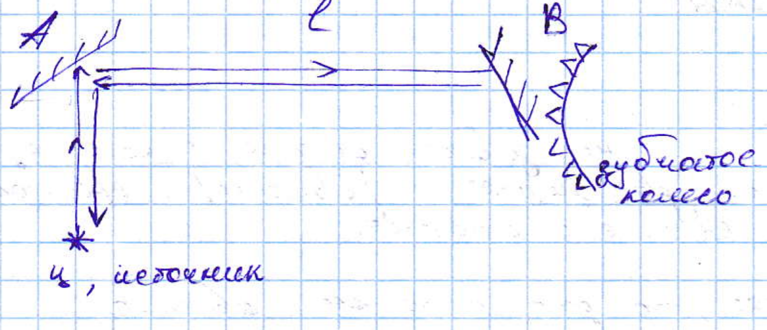
1-е измерение света - датский астроном Олаф Ремер (1676г.) До этого ск-ть света считалась бесконечной. Ремер наблюдал затмения Юпитера спутником Ио (всего 40 затмений). Он заметил, что время между затмениями <, когда Земля и Юпитер сближались, и > при удалении Земли от Юпитера. Ремер сделал вывод, что свету нужно время на прохождение диаметра орбиты Земли. Его оценка

$$c \simeq 2{,}14 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$$

В земных условиях 1-е измерение ск-ти света - Физо (1851г.) Идея состояла в том, чтобы измерить время распространения света между т. А и т. В, тогда $C = \frac{l_{AB}}{t_{AB}}$. Но для таких измерений часы в А и В необх. синхронизировать, что практически невозможно сделать с требуемой точностью. В эксперименте Физо использовано зеркало => свет проходит

$A \to B \to A$, время измеряется по одним часам в т. А.

$$\Rightarrow Рез-т: \quad c \simeq 3{,}15 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$$



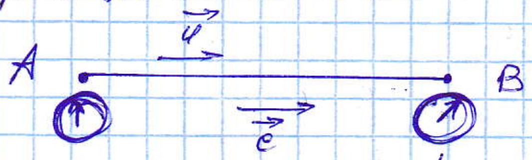
Вскоре Максвелл записал основные ур-я электродинамики и получил, что их решение - эл/м волна, которая распространяется как раз со ск-ю $3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$. Отсюда Максвелл сделал вывод, что свет - частный случай эл/м. волны.

Но вид ур-й Максвелла меняется при преобр Галилея (неинвариантны относит. этих преобразований). Причина очевидна: есть противоречие с законом сложения ск-тей (из ур-й => $c = const$ в $\forall$ инерц. с.о).

Неинвариантность в конце XIX в. объясняли легко: $\exists$ мировой эфир, и ур-я справедливы в с.о, в которой эфир покоится. Во всех остальных с.о. $\exists$ эфирный ветер, обнаружение которого считалось в конце XIX - начале XX вв. одной из главных проблем

} физики.

Если принять гипотезу эфира, то связанная с ним ИСО будет преимущественной. Как движется Земля относит. этой ИСО? Пусть движение со ск-ю $\vec{u}$, тогда из преобр-й Галилея ск-ть света в напр-и $\uparrow\uparrow \vec{u}$ будет $c' = (c-u)$ (относит. Земли!), при напр-ии $\uparrow\downarrow \vec{u}$ — $c' = (c+u)$, где c – ск-ть света относит. преимущественной ИСО.



Это можно проверить экспериментально, что и сделал Майкельсон (опыт Майкельсона и Морли, 1887 г.)

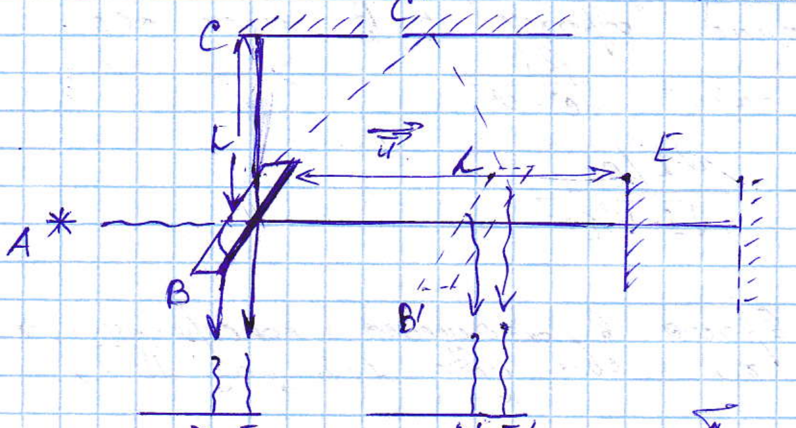


Схема: A – источник

B – полупрозрачная посеребренная пластина.

C, E – зеркала;

$BC = BE = L$

Вся конструкция – на бетонной плите в ртути.

Пластина B расщепляет пучок на 2 перпендикулярных друг другу, после отражения от C и E они снова приходят в B и накладываются (пучки D и F)

Если $t_{BCB} = t_{BEB}$, то пучки D, F в фазе => усиливают друг друга.

При $t_{BCB} \neq t_{BEB}$ $\exists\, \Delta\varphi \neq 0$ => интерференционные полосы

Если конструкция в эфире покоится, то должно быть $t_{BCB} = t_{BEB}$.

Разница времён будет в случае движе-я со скор. $\vec{u}$ (конструкция на Земле => движется с Землёй относит. эфира.) Покажем это:

Пусть $t_{BE} = t_1$, $t_{EB} = t_2$

Но пока свет идёт от B до E, т. E ушла на ut_1 => пройденный светом путь $ct_1 = L + ut_1$ => $t_1 = \dfrac{L}{c-u}$ (то же по-другому: ск-ть света c' по отнош. к Земле $c' = c - u$)

Аналогично для t_2: относит. ск-ть $c' = c+u$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{L}{c+u}$$

Тогда $t_{BEB} = t_1 + t_2 = \frac{L}{c-u} + \frac{L}{c+u} = \frac{2Lc}{c^2-u^2} = \frac{2L/c}{1-u^2/c^2}$

Найдём $t_3 = t_{BC}$: свет идёт по гипотенузе BC', и $BC' = ct_3$, тогда по т. Пифагора

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2$$

$$\Rightarrow t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2-u^2}}$$

Из симметрии расстояние "обратно" к B такое же

$$\Rightarrow t_{BCB} = 2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-u^2}}$$

$$= \frac{2L/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Т.о., в числителях — время в покоящейся конструкции, а знаменатели отличаются, т.к. свет идёт 1-й раз $\parallel \vec{u}$, 2-й — $\perp \vec{u}$.

Т.о., можно измерить это различие. Чтобы не влияло возможное различие путей BC и BE, можно ещё повернуть конструкцию на $\pi/2$ — тогда они поменяются местами.

11.12.2020

В реальном эксперименте $BE \parallel$ движ-ю Земли по орбите. Орбитальная ск-ть Земли известна ($\simeq 30$ км/с) $\Rightarrow$ снос эфира д.б. примерно таким же. Однако по рез-там опыта времена оказались одинаковыми. Для объяснения Лоренц допустил не отсутствие эфира, а сокр-е длины в направлении движения (при сохранении поперечных масштабов).

$$L_\parallel = L\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Тогда всё сходится: времена будут одинаковы. Но это только подгонка!

Другая идея у Пуанкаре: никаким способом нельзя обнаружить эфирный ветер $\Leftrightarrow$ нельзя обнаружить абсолютную ск-ть. Это означает, что какой-то выделенной ИСО $\nexists$. По сути это означает, что эфир $\nexists$.

Постулаты СТО

Строгое обоснование дал Эйнштейн (1905 г.). В основе — 2 постулата:

Постулаты СТО:

1. Принцип относит-ти выполняется для всех явл-й (в т.ч. немеханич.)

2. Ск-ть света $c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с} = const$ — не зависит от движ-я источника или приёмника (знач-е c — в вакууме!)

Кажется, что эти 2 постулата противоречат друг другу. Но противоречие снимается, если отказаться от преобр-ий Галилея. Теперь $\forall$ событие характеризуем точкой в пространстве и времени.

Т.о., <u>система отсчёта = с-ма координат + набор часов в каждой точке!</u>

Часы должны быть <u>синхронизированы</u> (синхронизация на основе $c = const$ световыми сигналами). В K событие характер-ся точкой $\{x, y, z, ct\}$,

в K' — $\{x', y', z', ct'\}$ $\Rightarrow$ необх. связь между координатами и временами.

Для построения связей — доп. положения (постулаты 3, 4):

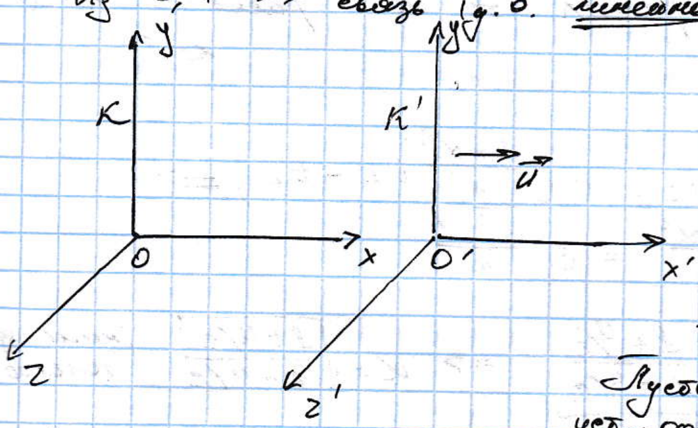
Экспер-ные факты:

3. Время однородно: события (одинаковые) одинаково происх. сегодня, и вчера, и завтра.

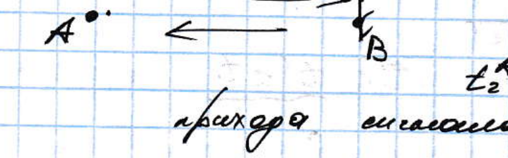
4. Пространство изотропно: $\nexists$ выделенных напр-ий; однородно: одинаковые события одинаково происх. во всех точках пространства.

Преобразования Лоренца.

Из 3, 4 $\Rightarrow$ связь д.б. <u>линейной</u>)



Пусть O и O' в нек-рый момент совмещаются. Примем этот момент за $t = t' = 0$. Для дальнейшего (нам придётся связывать t и t' при движ-и K'!) используем <u>правило Эйнштейна синхронизации часов</u>.



Пусть в неподвижных точках A, B уст-ы одинаковые часы. Из т. A в момент t_1^A (по часам A) пошлём световой сигнал к зеркалу, уст-ому в т. B. Отраж. сигнал вернётся в т.A в момент t_2^A (по часам A). Тогда в момент прихода сигнала в т. B необх. на часах B выставить $t_B = \frac{1}{2}(t_1^A + t_2^A)$

~ также часы синхронизованы по опр-ю

① Пусть из т. O в момент $t_1 > 0$ послан световой сигнал в положит. напр-и x. В т. O' он прибыл в t'. В силу линейности связи д.б. выполнено:

$$t' = \alpha t_1 \quad (\alpha - \text{коэф-т}) \qquad (1)$$

т.к. простр-во изотропно, α может зависеть от модуля u, но не от напр-я. Выразим α через u.

Пусть в т. O' световой сигнал отражается и приходит в т. O в момент t_2. Но <u>все ИСО эквивалентны</u> (!) =>

=> д.б. выполнено

$$t_2 = \alpha t' \quad (\alpha - \text{тот же коэф.!}) \qquad (2)$$

Из (1), (2)

$$t_2 = \alpha^2 t_1$$

По правилу синхр-и часов отраж-е было в момент $t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1+\alpha^2}{2} t$, За время t т. O' прошла из т. O расстояние $x = ut$.

Свет за время $(t - t_1)$ прошёл то же расст-е: $x = c(t - t_1)$

$$\Rightarrow ut = c(t - t_1)$$

Подставим t: $u\frac{1+\alpha^2}{2}t_1 = c\left(\frac{1+\alpha^2}{2}t_1 - t_1\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow u\frac{1+\alpha^2}{2} = c\frac{\alpha^2 - 1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{c} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \quad \text{и} \quad \underbrace{\alpha^2 = \frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \quad \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$ (нам подх. только +)

Заметим сразу, что => из полученной формулы:

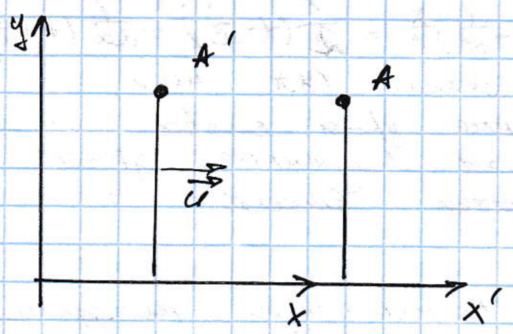
$$\frac{t'}{t} = \frac{\alpha t_1}{(1+\alpha^2)\frac{t_1}{2}} = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \underline{t' < t}$$

Здесь t — это время движ-я т. O' из неподвижной т. O до точки, где в O' попадает световой сигнал. Это время измерено по часам K. Время t' — то же время, измеренное по часам K'. Смысл в том, что движущиеся идут медленнее неподвижных.

② Поперечные координаты не преобразуются:

$$y = y', \quad z = z'$$

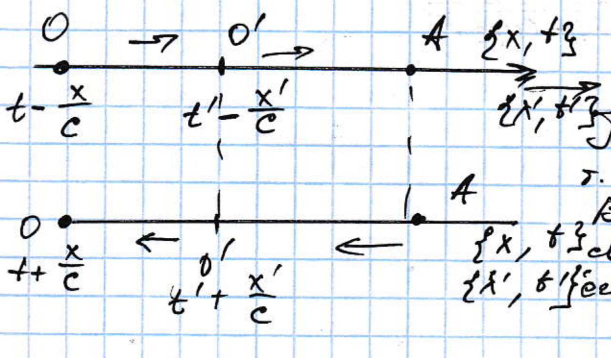
Док-во: пусть есть 2 одинаковых твёрдых стержня, каждый неподвижен в своей с.о. Пусть они установлены на оси X ∥ осям Y и Y'. Длины стержней, измер. в K и в K', одинаковы. Но это ещё не доказывает рав-ва координат! Надо ещё док-ть, что это коорд-ты одного и того же события.



Пусть на концах есть маленькие шарики A, A'; пусть сначала A' ниже A. A' движется к A и обязательно столкнётся с ним, т.к. если бы он прошёл выше (ниже) A, то K и K' не были бы эквивалентны.

Но если шарики столкнулись, то Y, Y' — коорд-ты одного и того же события (столкновения.) => равенство доказано (для Z аналогично.)

③ Пусть на оси X произошло событие A (столкновение шариков.)



В K системе это событие в (x, t), в K' координаты события — (x', t')

Пусть из O идёт световой сигнал L т. A.

В K сигнал идёт за время x/c. Чтобы свет пришёл в т. A в момент t, из т. O его надо послать в $t_1 = t - x/c$

Используем 2-й постулат: $c = const$, тогда

Из т. O' тот же сигнал дошёл за $\frac{x'}{c}$ => он проходил т. O' в момент $t_2' = t' - \frac{x'}{c}$

Снова используем связь времён:

$$t_1' = \alpha t_1 \Rightarrow t' - \frac{x'}{c} = \alpha\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Теперь световой сигнал из т. A отразим обратно.

Через т. O' он пройдёт в момент $t_2' = t' + \frac{x'}{c}$, через т. O – в момент $t_2 = t + \frac{x}{c}$. Теперь роли K' и K поменялись, т.е. д.б. выполнено $\longrightarrow t_2 = \alpha t_2' \Leftrightarrow t + \frac{x}{c} = \alpha\left(t' + \frac{x'}{c}\right)$

т.о. получим с-му

$$\begin{cases} t' - \frac{x'}{c} = \alpha\left(t - \frac{x}{c}\right) & (*) \\ t + \frac{x}{c} = \alpha\left(t' + \frac{x'}{c}\right) & (**) \end{cases}$$

Заметим, что это универсальные соотношения (справедливые при ∀ взаимном расп-и т. A, O, O' – см. [Сивухин. Оптика. Стр. 638].

Решаем систему:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x - \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)ct = \frac{-c\alpha}{2}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{c}{2\alpha}\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ t' = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)t - \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{x}{c} = \frac{\alpha}{2}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{2\alpha}\left(t + \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

[Для решения можно, например, домножить (**) на α, сложить ур-я и вычесть. Полученные ур-я снова сложить – это даст $\left(t - \frac{x}{c}\right)$, затем вычесть. Полученные ур-я снова сложить – это даст $t-(x/c)$, затем вычесть – это даст $\left(t + \frac{x}{c}\right)$]

Подставляя α $\left(\alpha = \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}}\right)$ окончательно находим

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

– это преобр-е Лоренца (1904 г.)

Поскольку все ИСО эквивалентны, то простой заменой $u \to -u$ получаем обратное преобразование

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

Итак, получаем: (преобразования Лоренца, 1904 г.)

Прямые преобразования: $K \to K'$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

Обратные преобр-я: $K' \to K$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

Следствия:

1) При $u << c$ из преобр-ий Лоренца следуют преобразования Галилея.

2) При $u > c$ формулы теряют смысл => невозможна ск-ть тел (материальных объектов, имеющих массу) больше, чем ск-ть света c (т.к. с каждым телом можно связать систему отсчёта.)

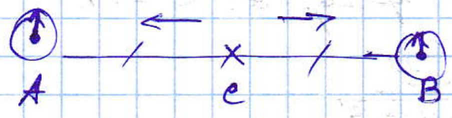
3) Относительность одновременности двух событий (следствие того, что координата входит в преобразование времени):

В обычной жизни, при движении со ск-ями, много меньшими c, нам хватает интуитивного представления об одновременности. Если 2 события происходят в одной точке пространства, то нет проблемы в указании того, одновременны события или нет. Трудность возникает, когда события разнесены в пространстве, т.к. на самом деле априорной одновременности пространственно разделённых событий нет!

В самом деле, СО мы определили как с-му координат + часы в каждой точке. Всякое событие хар-ся точкой в простр-ве и показаниями часов в этой точке. Но измерять расстояния между точками в пространстве мы можем независимо (была бы соотв. линейка.)

А вот с измерением времени всё сложнее! Если часы запущены в разных точках произвольно (не согласованно!), то такая СО совершенно непригодна для описания явлений природы. Нужна СО с единым временем, т.е. с-ма с синхронизованными часами. Например (хотя и не обязательно так!) можно использовать для синхронизации правило Эйнштейна.

Эквивалентный способ состоит в том, что световая вспышка производится в (·) C на середине отрезка AB.



Т.к. $c = const$, то до т. A, B свет придёт одновременно – можно одинаково установить стрелки часов в A и в B.

Опр. Два пространственно разделённых события в какой-либо СО называются одновременными, если синхр. часы, наход-ся в точках, где происходят события, показывают одно и то же время.

Одновременность – относит-ое понятие. Покажем, что это вытекает формально из преобр.-й Лоренца.

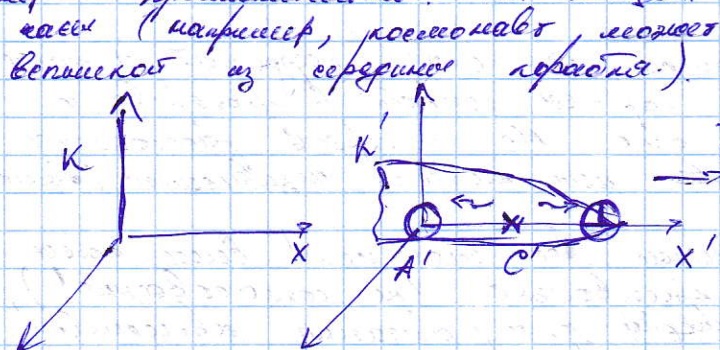
Пусть в K системе 2 события происходят одновременно в момент t_0 в точках x_1 и x_2. Найдём промежуток времени между этими событиями в K'.

$$t_2' - t_1' = \frac{\left(t_0 - \frac{ux_2}{c^2}\right) - \left(t_0 - \frac{ux_1}{c^2}\right)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{(x_1 - x_2)\frac{u}{c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

! $t_2' - t_1' = 0$ при $x_1 = x_2$ (2 одноместн. одновр. события остаются таковыми в $\forall$ с.о.)

Т.о., с точки зрения K' события неодновременны, более того: $(t_2' - t_1') \gtrless 0$ в зависимости от знака разности $(x_1 - x_2)$. Попробуем качественно понять, почему это так. Используем для рассуждений пример Эйнштейна (он рассуждал для поезда, но ещё лучше рассматривать космический корабль с закреплёнными иллюминаторами).

Пусть K' связана с космическим кораблём, движущимся равномерно прямолинейно. На концах корабля синхронизованные в K' часы (например, космонавт может синхронизовать их световой вспышкой из середины корабля).



Итак, события в K', состоящие в приходе вспышки в т. A', B', одновременны.

Но наблюдатель из K видит, что часы на носу удаляются от светового сигнала, т.е. вспышка должна пройти > половины длины корабля до часов; часы на корме приближается к вспышке – путь сокращается.

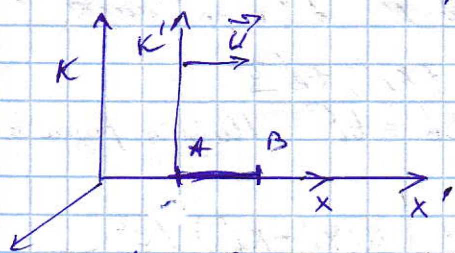
Из этого => свет сначала дошёл до часов на корме, затем – на носу. Т.о, события неодновременные с т. зр. K, часы в хвостовой части должны опережать часы в носовой.

4) Сокращение длины движущегося тела.

Если тело (твёрдый стержень) покоится в какой-то СО, то его длина l_0 находится сравнением с линейкой, покоящейся в той же СО. Величину l_0 назовем собственной длиной стержня.

Проблема возникает, когда стержень движется, а знать его длину надо в неподвижной СО (K.). Прежде всего договоримся: все измерения расстояний и промежутков времени в ∀ СО должны производиться с помощью линеек и часов, неподвижных в этой СО.

Опр. Длиной l движущегося стержня в покоящейся СО (в K-системе) называется расстояние между двумя точками в этой СО, мимо которых концы стержня проходят одновременно.



Пусть стержень движется с $\vec{u}$. Свяжем с ним K', там $x_2' - x_1' = l_0$

Найдём: l – длину в K.

Расс-м 2 события: попадание концов стержня A, B в т. $\{x_1, t\}$ и $\{x_2, t\}$ (из опр. => t должно быть одно и то же!)

Из преобр. Лоренца получаем:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ x_2' &= \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Слева $x_2' - x_1' = l_0$, справа $x_2 - x_1 = l$.

$$\Rightarrow \boxed{l = l_0\sqrt{1-u^2/c^2}} < l_0$$

Вывод: длина движущегося стержня меньше, чем покоящегося.

Это явление называется лоренцевым сокращением длины. Лоренц записал эту формулу для объяснения результатов опыта Майкельсона.

[Замечание. Существует 2-й способ измерения длины: неподвижный наблюдатель засекает время прохождения концов стержня мимо него:

$$l = u(t_2 - t_1)$$

Если x – координата наблюдателя, то

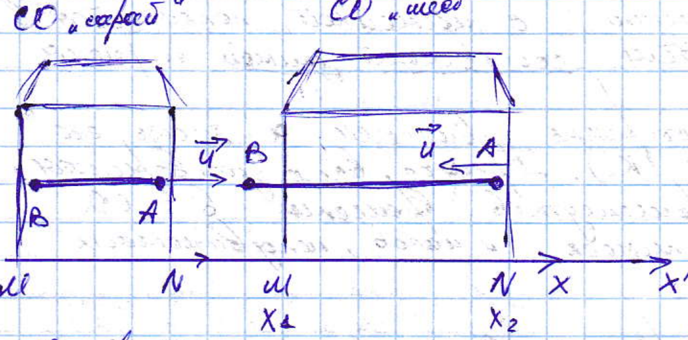
$$x'_{пр.} = \frac{x - ut_1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \quad x'_л = \frac{x - ut_2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$\Rightarrow l_0 = x'_{пр.} - x'_л = \frac{u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-(u/c)^2}} > l \;]$$

Пример. Парадокс шеста и сарая.

Есть шест, собственная длина которого l_0, и сарай с собств. длиной $h_0 < l_0$. Представим, что шест движется вдоль оси X так, что его длина с учётом Лоренцева сокр.-я стала $l < l_0$, $l = h_0$. Тогда в некоторый момент шест целиком поместится в сарай.

Теперь перейдём в K' – с.о. спортсмена с шестом. Для него сократившимся будет сарай: $h < h_0$ => шест заведомо в сарай не поместится



Разрешение этого парадокса в том, что часы в K и K' показывают разное время, и события, состоящие в совмещении концов шеста и передней и задней стенок сарая, имеют разные временные координаты. Шест помещается в сарай, если его т. A, B находятся там одновременно. В СО спортсмена т. A шеста выйдет из сарая раньше, чем т. B попадёт в сарай. Покажем это, пусть для простоты $l = h_0$,

пусть событие A: т. A достигает стенки N, с "т. зр." шеста. коорд. события будут $\{x_2', t_A'\}$

Событие B: т. B достигает M, коорд. $\{x_1', t_B'\}$

Пусть события одновременны: $t_2' = t_A' = t_B' \equiv t_1'$. Найдём разность показаний часов в M и N:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' + ux_2'/c^2 - t_1' - ux_1'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{u(x_2'-x_1')/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} > 0, \text{ т.к.}$$

N правее M.

Иными словами: засекать надо оба конца шеста в один и тот же момент времени и обе стенки сарая – тоже в один и тот же момент времени! Сокращение длин – второстепенный эффект СТО

!! Относит-ть одновременности важнее!

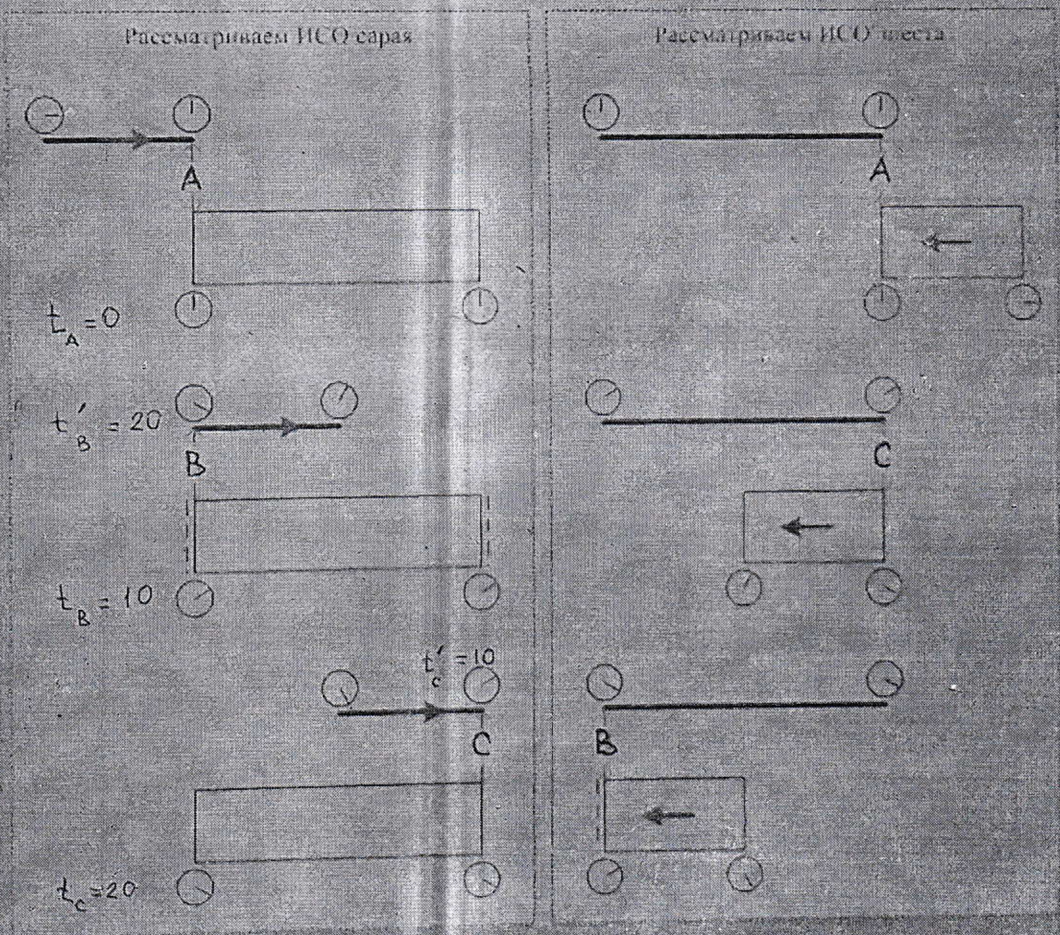
$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

Для наглядности считаем, что собственные длины шеста и сарая равны. Первый рисунок представляет ситуацию в ИСО сарая (для круглого счета принято Г=2). Шест движется слева направо. Второй - в ИСО шеста (сарай движется справа налево).

Событие А: $t_A=0$, $t'_A=0$: шест поравнялся со входом в сарай.
Событие В $t_B=10$, $t'_B=20$: хвост шеста внутри сарая, захлопнулись двери.
Событие С $t_C=20$, $t'_C=10$: нос шеста подошел к выходным дверям, все двери открылись.

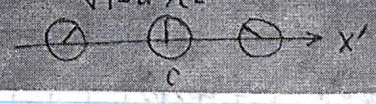
Смотрим на левый рисунок. В ИСО сарая событие В случилось раньше С.
Смотрим на правый рисунок (ИСО шеста). Еще когда происходит А, задние двери давно закрыты (они закрылись в 10, а на часах выхода сарая уже 15!)
Потом случается событие С! Шест поравнялся с выходом, задние двери открылись, а передние еще и не закрывались.
Дальше происходит В: хвост шеста ушел в сарай, передние двери захлопнулись... Откроются они позже, в 20, а пока что 10.

Видна относительность одновременности, релятивистское замедление движущихся часов и т.д.



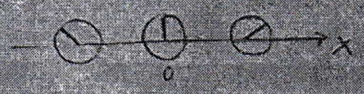
Если $t=0$ на всех K-часах, то

$$t' = \frac{0 - ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -\frac{ux'}{c^2} \quad \left(\text{т.к. } t = \frac{t'+ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 0\right)$$



Если $t'=0$ на всех K'-часах, то

$$t = \frac{0 + ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = +\frac{ux}{c^2} \quad \left(\text{т.к. } t' = \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 0\right)$$



5) Релятивистское замедление времени (замедление хода движущихся часов.)

Пусть в какой-то точке x' движущейся системы K' часы показывают промежуток времени $\Delta t' = t_2' - t_1'$ между какими-то событиями. Найдём $\Delta t = t_2 - t_1$ в СО K:

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \; ; \quad t_1 = \frac{t_1' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \text{ или}$$

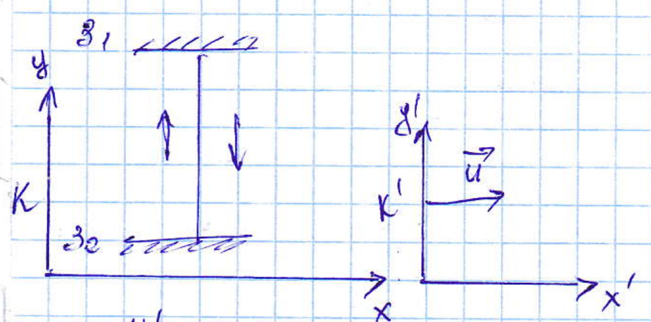
$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Но $\Delta t'$ — это „собственное" время (засекается неподвижными с точки зрения событий в K' часами). Примем

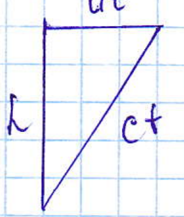
$$\boxed{\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

, т.е. $\Delta t_0 < \Delta t$ — движущиеся часы отстают!

В принципе, это соотношение мы получили ещё при выводе преобр-й Лоренца. Попробуем его объяснить. Для этого рассмотрим „световые часы": метровый стержень с зеркалами на концах. Световой сигнал бегает между зеркалами; часы тикают когда свет достигает нижнего конца. Двое таких часов установим $\perp \vec{u}$ в системах K и K' $\Rightarrow$ длина стержня не меняется. Наблюдатель в K' неподвижен относит. часов.



Наблюдатель из K видит, что свет движется по гипотенузе (как в вертик. плече в опыте Майкельсона) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ проходит больший путь $\Rightarrow$ свету надо больше времени для движения между зеркалами, чем в неподвижном зеркале.



Промежуток между тиканьями станет больше во столько раз, во сколько гипотенуза длиннее катета:

$$\frac{ct}{h} = \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2-(ut)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Пример. Элементарные частицы μ-мезоны (мюоны) самопроизвольно распадаются за $\tau \approx 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с. Они приходят на Землю с космическими лучами или создаются искусственно в лаборат. условиях. Даже если мюон движется с $u \le c$, то может пройти $c\tau \approx 6 \cdot 10^2$ м за время жизни. Но: реально мюоны обр. на верхней границе атмосферы, а обнаруж-ся на Земле, т.е. проходят ~ 10 км.

Объяснение: с нашей точки зрения (неподв. набл.) время жизни мюона $\frac{\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} >> \tau$

Релятивистский закон сложения скоростей.

При $v << c$ было $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ (где $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$)

Аналогично классич. физике вверху

Опр. $v_x = \frac{dx}{dt}$ $\qquad v_x' = \frac{dx'}{dt'}$

$v_y = \frac{dy}{dt}$ $\qquad v_y' = \frac{dy'}{dt'}$

Вычислим связь ск-тей v_x, v_x' и v_y, v_y' с учётом преобр. Лоренца.

1) $$\begin{cases} dx = \dfrac{dx' + u\,dt'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ dt = \dfrac{dt' + u\frac{dx'}{c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases} \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + u\,dt'}{dt' + \frac{u\,dx'}{c^2}} = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{u v_x'}{c^2}}$$

– слож-я как такового нет (назв. по аналогии)

2) $$\begin{cases} dy = dy' \\ dt = \dfrac{dt' + \frac{u\,dx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \Rightarrow v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-u^2/c^2}}{dt' + u\,dx'/c^2} = \frac{v_y'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \frac{u v_x'}{c^2}}$$ –

– для z то же самое.

Обратные соотношения получаем просто заменой $u \to -u$:

$$\left\{ v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \qquad v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \right\}$$

Частные случаи:

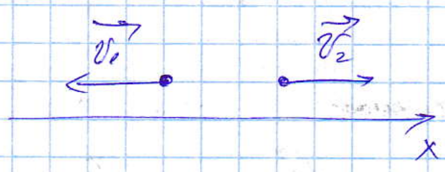
1) $\begin{cases} v_x' = c \\ v_y' = 0 \end{cases}$ (движется световая вспышка)

$$\Rightarrow v_x = \frac{c + u}{1 + u/c} = c \text{ — т. е.}$$

! В $\forall$ с.о. свет движется с одинаковой ск-ю! Фактически мы тут просто себя проверили (что заложили в преобразования, то из них и получили.

Но если это не свет (фотон), а нейтрино, то рез-т имеет смысл: $v = c$ в $\forall$ с.о.

2) Есть 2 частицы в с-ме K, к-рые разлетаются. Пусть $v_{1x} = -0{,}9c$, $v_{2x} = +0{,}9c$.



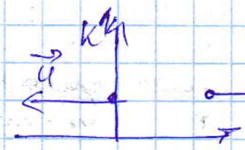
Ск-ть разбегания

$$v_{разб.} = \frac{x_2 - x_1}{t} = \frac{v_{2x}t - v_{1x}t}{t} = 1{,}8c > c!$$

! Но это не противоречит СТО! – не передаётся никакая информ-я (не движется никакой материальный объект.) И это **не** относит. скорость!

Ищем $v_{отн.}$, для этого свяжем K' с 1-й частицей:

$u = v_{1x} = -0{,}9c$, автоматически $v'_{1x} = 0$



Найдём v'_{2x}:

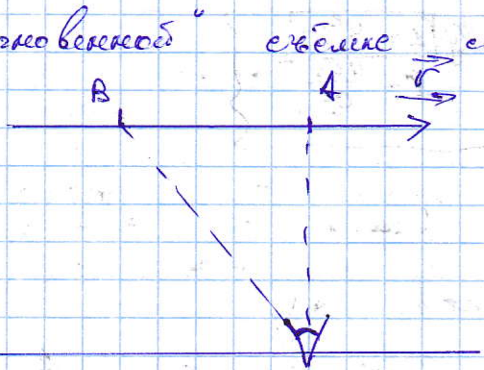
$$v'_{2x} = \frac{v_{2x} - u}{1 - \frac{uv_{2x}}{c^2}} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{1 - \frac{v_{1x}v_{2x}}{c^2}} = \frac{1{,}8c}{1 + 0{,}81\frac{c^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{1{,}8c}{1{,}81} < c \quad (!)$$

Очевидно, $v'_{2x} \equiv v_{отн} \Rightarrow v_{отн} < c$

Можно ли увидеть лоренцево сокращение длин?

Нет! Видение (получение изображения) всегда занимает какое-то время. Быстро движущиеся объекты просто не видны (при наблюдении глазом). Экспозиция должна быть очень короткой. Специальная аппаратура позволила бы это реализовать, но при „мгновенной" съёмке свет от т. A придёт, а от т. B – не успеет (из-за запаздывания).



В результате отрезок AB просто не будет виден полностью.

Понятие о пространстве-времени. Интервал.

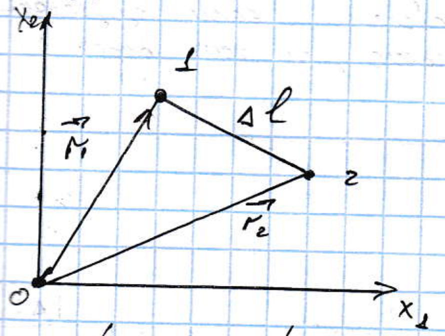
① Из преобразований Лоренца видно: $x = f_1(x', t')$ – т.е. координата зависит от времени. Но и в механике Ньютона такая зависимость есть, главное отличие теперь в том, что

$t = f_2(x', t')$ – время зависит от координаты!

Идея Г. Минковского (Герман Минковский, 1864–1909, немецкий математик) состоит в том, что все события происходят в 4-мерном пространстве – времени

$$\{x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4 = ct\}$$

В привычной нам геометрии Евклида есть понятие расстояния между точками Δl. При произвольном выборе т. O меняются $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, но $\Delta l = const$ – это инвариант.



В 4-мерной геометрии Минковского инвариантом будет интервал.

Опр. Интервалом в СТО называется величина

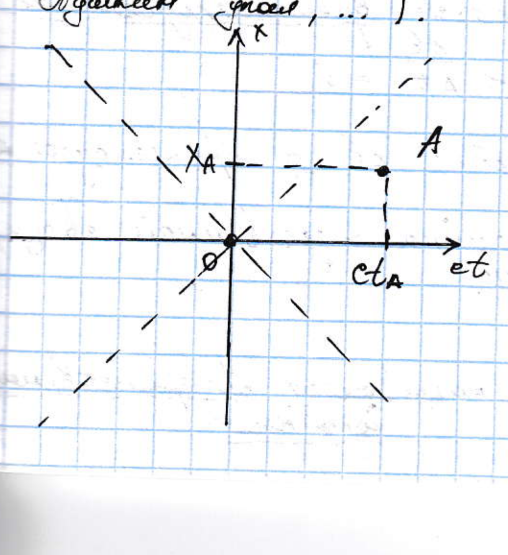
$$S = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2} \equiv \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta l)^2}$$

· Можно проверить с помощью преобразований Лоренца:

$$S^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta l')^2$$

т.е. S^2 – инвариант

② Интервал в СТО разделяет 2 пространственно-временных события (щелчок выключателя → зажигается свет, выстрел Дантеса → Пушкин упал, ...).



Расс-м 2-мерный срез 4-мерного пространства. Любая точка в нём соотв. событию, имеющему координату и время: $A\{x_A, ct_A\}$.

Кривая на пл-ти $\{x, ct\}$ называется мировой линией. Мировая линия более информативна, чем траектория. (т.к. появилась ещё информация о времени)

Штриховая линия — мировая линия света, она идёт под углом $\frac{\pi}{4}$ к осям. Круче мировая линия идти не может (т.к. $v \le c$)

③ Из преобразований Лоренца следует: $\Delta x \neq \Delta x'$, $\Delta t \neq \Delta t'$, причём возможно $\Delta x \cdot \Delta x' < 0$ и $\Delta t \cdot \Delta t' < 0$.

а) $\Delta x \gtrless 0$ — это понятия "ближе - дальше". В разных СО возможно $\Delta x \gtrless 0$ и в преобразованиях Галилея.

б) В СТО при $\Delta x \neq 0$ или $\Delta x' \neq 0$ возможно $\Delta t \cdot \Delta t' < 0$ (!) — т.е. понятия "раньше - позже" относительны! Но может ли внук родиться раньше деда?

Разберём парадокс с помощью интервала. Оказывается не все события переставочны во времени: если существует какая-то СО, в к-рой дед родился раньше, то так будет и в любой другой СО.

Докажем это:

1) Пусть $S^2 > 0$ $\Rightarrow (c\Delta t)^2 > (\Delta l)^2$

Из инвариантности $\Rightarrow (c \cdot \Delta t')^2 > (\Delta l')^2 \Rightarrow |\Delta t'| > \dfrac{|\Delta l'|}{c}$

Чтобы установить знак $\Delta t'$, выберем К-систему так, чтобы события стали одноместными ($\Delta x = 0$). Это будет при

$$u_x = -\frac{\Delta x'}{\Delta t'} \Rightarrow \text{при } |u| < c \text{ такая К-система } \exists.$$

Тогда

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} > 0 \quad \text{при } \Delta t > 0$$

|| Такие события причинно связаны $\Rightarrow$ неперестановочны во времени, для них понятие "раньше - позже" абсолютно.

Опр. Интервал, для которого $S^2 > 0$, называется временеподобным

2) $S^2 < 0$ $\Rightarrow (c\Delta t)^2 < (\Delta l)^2 \Rightarrow c < \dfrac{\Delta l}{\Delta t} = v$

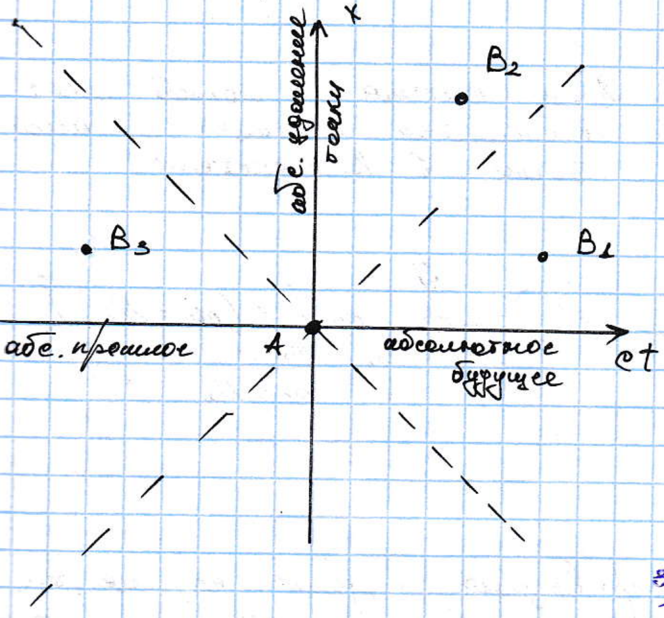
— т.е. даже свет не успеет пройти Δl за промежуток Δt.

|| Такие события не имеют причинно-следственной связи, поэтому перестановочны во времени.

Опр. Интервал, для которого $S^2 < 0$, называется пространственно-подобным

Опр. Интервал, для которого $S=0$, называется светоподобным.

Точки, соотв. таким событиям — на биссектрисах.



Пример.

1-е событие произошло в т. A. ($x=0$, $ct=0$)

1) Чтобы из A попасть в B_1, можно двигаться с $v<c$. B_1 произ. позднее A, лежит в области абсолютного будущего

2) Чтобы попасть в B_2, надо двигаться с $v>c$. B_2 — абсолютно удалённая точка для A.

3) Событие B_3 — в обл. абсолютного прошлого.

Релятивистская динамика.

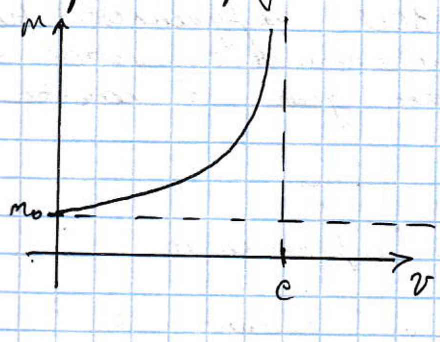
Тела, имеющие массу, могут двигаться только с $v<c$. Но сила может действовать непрерывно, почему же она не может разогнать частицу?

Пример. В ускорителе $\vec{F} = q\vec{E}$ => в класс. динамике

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{q\vec{E}}{m} t \to \infty \text{ при } \left\{ \begin{matrix} t \to \infty \\ m = const \end{matrix} \right\}$$

Гипотеза: q уменьшается с ростом v. Но: в проводнике движутся электроны, а ионы решётки неподвижны. Если $q = q(v)$, то нарушится нейтральность проводника в целом. Этого не наблюдается => гипотеза несостоятельная.

Лоренц предположил $m = m(v)$ и получил



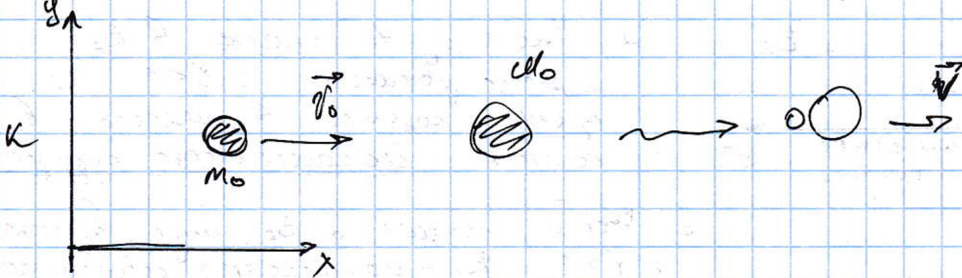
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ ($\beta = \frac{v}{c}$, v — ск-ть частицы, m_0 — масса покоя.)

Но как теперь записывать 2-й закон Ньютона? Чтобы разобраться, сделаем отступление.

Об аддитивности масс в СТО

В классич. динамике при слипании тел с массами m_1 и m_2 суммарная масса $m_\Sigma = m_1 + m_2$.

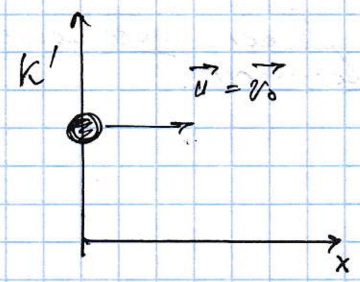
Расс-м слияние в СТО. Пусть частица с массой покоя m_0 движется с $\vec{v}_0$ и слипается с покоящейся частицей с массой M_0. Должен выполняться ЗСИ. Тогда в K-системе:



$$m_0 \vec{v}_0 = (m_0 + M_0)\vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{m_0 v_0}{m_0 + M_0} \quad (1)$$

Теперь то же с т. зр. K':



Пусть K' привязана к движ. частице, т.е. $\vec{u} = \vec{v}_0$. Тогда $v'_{01} = 0$, $\vec{v}'_{02} = -\vec{u} \equiv -\vec{v}_0$

Импульс до слипания: $\vec{p}_0' = 0 - M_0 \vec{v}_0 = -M_0 \vec{v}_0$

— " — после — " — $p_x' = (m_0 + M_0) V'_x$

Пересчитаем V' с пом (1) по ф-ле преобр. ск-тей:

$$\left(v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \right) \text{ — всегда.}$$

$$V_x' = \frac{V - u}{1 - \frac{Vu}{c^2}} = \frac{V - v_0}{1 - \frac{V v_0}{c^2}}$$

Тогда $$p'_x = (m_0 + M_0)\frac{V - v_0}{1 - \frac{V v_0}{c^2}} \overset{(1)}{=} (m_0 + M_0)\frac{\frac{m_0 v_0}{m + M_0} - v_0}{1 - \frac{m_0 v_0^2}{(m_0 + M_0)c^2}} =$$

$$= \frac{m_0 v_0 - (m_0 + M_0) v_0}{1 - \frac{m_0}{m_0 + M_0} \cdot \frac{v_0^2}{c^2}} = -\frac{M_0 v_0}{1 - \frac{m_0}{m_0 + M_0} \cdot \frac{v_0^2}{c^2}} \neq -M_0 v_0$$

за счёт дроби в знаменателе. Т.о., ЗСИ нарушился! Но ведь так быть не должно. Выход из положения: допустить, что масса покоя неаддитивна. На самом же деле в кач-ве p надо расс-ть $m(v) \cdot v$

Итак, $\underbrace{\vec{p}(v) = m(v) \cdot \vec{v}}$ — импульс по определению

В СТО 2-й з-н Ньютона справедлив именно в импульсной формулировке:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

[Сила есть $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, $m\vec{a}$ не надо!]

Замечание о продольной и поперечной массе.

Из 2-го закона Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \vec{p} = m(v)\cdot\vec{v}$$

верно, что в общем случае $\frac{m\,d\vec{v}}{dt} \neq \vec{F} \Longleftrightarrow \underline{\vec{a} \nparallel \vec{F}}$

Но есть 2 случая, когда $\vec{a} \parallel \vec{F}$ ($\vec{a} \sim \vec{F}$), хотя коэф-ы пропорциональности разные.

1) Если $\vec{F} \perp \vec{v}$ (магнитная составляющая силы Лоренца), то $\vec{a_\tau} = 0$, $|\vec{v}| = const$. Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m(v)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \underline{m_\perp \vec{a} = \vec{F}}, \text{ где}$$

$$\boxed{m_\perp = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} \text{ — поперечная масса,}$$

2) Вычислим продольную массу:

$$\vec{a_\tau} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt} \quad (\vec{v} = v\vec{\tau},\ \vec{\tau} = const)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{m\,d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{dv}{dt}\vec{\tau} +$$

$$+ v\vec{\tau}\cdot\frac{\frac{m_0 2v}{c^2}\cdot\frac{dv}{dt}}{2(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{dv}{dt}\vec{\tau}\left(1 + \frac{v^2}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})}\right) =$$

$$= \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{a_\tau} \Rightarrow \underline{m_\parallel \cdot \vec{a_\tau} = \vec{F}}, \text{ где}$$

$$\boxed{m_\parallel = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}} \text{ — продольная масса.}$$

Теорема об энергии в СТО.
Связь массы и энергии (формула Эйнштейна)

2-й закон: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Big| \cdot d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

Справа: $dA = \vec{F}d\vec{r}$ в классике. Но A от v не зависит $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ опр-е работы из классики перенесём в СТО.

Слева:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\vec{v}\,dt = \vec{v}\,d\vec{p} = v^2 dm + m\vec{v}\,d\vec{v}$$

Используем очевидное преобразование: $v^2 = (\vec{v})^2$

дифференциалы: $2v\,dv = 2\vec{v}\,d\vec{v}$

Тогда $dA = dm\left(v^2 + mv\frac{dv}{dm}\right)$, где $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Считаем: $\frac{dm}{dv} = \frac{m_0\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m_0 v}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{mv}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$

Тогда: $dA = dm\left(v^2 + \frac{mv c^2 (1 - v^2/c^2)}{mv}\right) = dm\cdot c^2$

По смыслу: совершенная работа тратится на изменение энергии $dA = dW$, т.е.

$$dm\cdot c^2 = dW$$

// Интегрируем: $W = mc^2 + const$, принято $const = 0 \Rightarrow W = mc^2$

Важно, что при $v = 0$ $W \neq 0$ (в классике было $W_к = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow W_к|_{v=0} = 0$)

// Энергия $W_0 = m_0 c^2$ – энергия покоя

Очевидно, что теперь надо дать новое опр-е $W_к$:

Опр. $\boxed{W_к = W - W_0}$ – это просто очевидная интерпретация, не треб. док-ва.

$$= m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

Предельный переход: $v \ll c \Rightarrow \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow W_к = \frac{m_0 v^2}{2}$

Примеры: ① для воды $C_{уд} = 4{,}2\cdot10^3\ \frac{Дж}{кг\cdot K}$, пусть $m_0 = 1кг$, $\Delta t^\circ = 10$

$Q = m_0 C_{уд}\cdot\Delta t^\circ = 4{,}2\cdot10^5$ Дж.

$$\Delta m = \frac{Q}{c^2} = \frac{4{,}2\cdot10^5}{(3\cdot10^8)^2} \simeq 0{,}5\cdot10^{-11}\ (кг.)$$

② Звездолёт: пусть $m_0 = 10^3$ кг, $v = 0{,}8c \Rightarrow \sqrt{1 - v^2/c^2} = 0{,}6$

$\Rightarrow W_к = \frac{2}{3}m_0 c^2$; $Q_{топл.} = m_{топл}\cdot q$, $q = 4{,}3\cdot10^7\ \frac{Дж}{кг.}$ – – бензин $\Rightarrow m_{топл.} = \frac{W_к}{q} \simeq 10^{12}$ кг. !

Релятивистская связь p, W, v

В рабочем математическом аппарате СТО принято исключать v.

Проделаем выкладки:

$$\left.\begin{array}{l} p = mv \\ W = mc^2 \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{W}{c^2} v \Rightarrow p^2c^4 = W^2 v^2 \qquad (1)$$

Учтём: $W = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v^2 = c^2\left(1 - \dfrac{m_0^2 c^4}{W^2}\right) \qquad (2)$

Из (1), (2) $\quad p^2c^4 = W^2c^2 - m_0^2c^6 \quad \Big| \cdot \frac{1}{c^2}$

$$\underbrace{W^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4}$$

Пример динамической релятивистской задачи.

(разгон заряженной частицы пост. эл. полем.)

Пусть з.ч. (m_0, q дана) с начальным импульсом $\vec{p}_0$ попадает в поле $\vec{E} = \text{const}$ (однородное)

Найти $v(t)$ и $W_к(t)$.

---

1) $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}_0 + q\vec{E}t$

$p^2 = p_0^2 + (qEt)^2 + 2qt(\vec{p}_0, \vec{E})$ – это неявное реш-е для $v(t)$

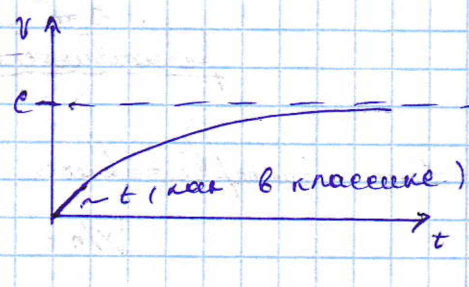
$p = m(v)\cdot v \Rightarrow \dfrac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = p_0^2 + (qEt)^2 + 2qt(\vec{p}_0, \vec{E}) \equiv f(t)$

Решение сильно упрощается при $p_0 = 0$:

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (qEt)^2$$

$\Rightarrow m_0^2 v^2 = (qEt)^2 - v^2\left(\dfrac{qEt}{c}\right)^2$

$$v = \frac{qEt}{\sqrt{m_0^2 + \left(\frac{qEt}{c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{qEt}\right)^2}}$$



2) $W_к \overset{опр}{=} W - W_0$

Используем связь W и p: $W^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4 \equiv c^2p^2 + W_0^2$

$\Rightarrow W^2 = c^2(qEt)^2 + m_0^2c^4$

$$\underline{W_к = \sqrt{(qEct)^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2 = m_0c^2\left[\sqrt{\left(\frac{qEt}{m_0c}\right)^2 + 1} - 1\right]}$$

Фотон – частица с нулевой массой

① Из формулы

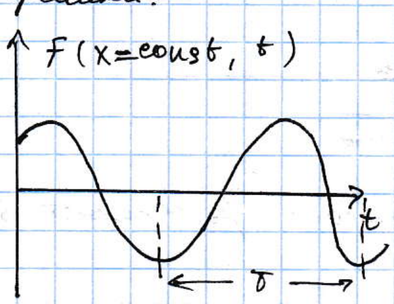
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

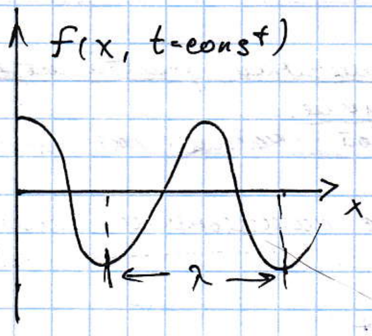
видно, что формально возможно $v = c$, но при $m_0 = 0$. Такая частица действительно существует – это фотон. Для фотона

$$\left.\begin{aligned} p &= mc \\ W &= mc^2 \end{aligned}\right\| \Rightarrow \quad W = pc, \text{ т.е. } \underline{W \sim p}!$$

[В классич. механике $W = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$]

② Но у фотона есть не только корпускулярные, но и волновые св-ва. Главное св-во волн – периодичность в пространстве и времени.





τ – временной период

λ – простр. период (длина волны)

Вводят: $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ – частота.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – „пространственная частота" (волновое число)

Для фотона справедливы соотношения Планка:

$$W = \hbar\omega$$
$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

($\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка, $\vec{k}$ – волновой вектор, $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$, направление совпадает с напр. распр. волны).

З-н сохранения энергии для релятивистской частицы в потенциальном силовом поле.

Для консервативных сил:

$$W_{п1} - W_{п2} = A_{12}^{конс} \quad \text{– справедливо всегда}$$

В случае релятивистской частицы

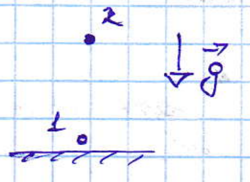
$$\Delta W = m_2c^2 - m_1c^2 = \Delta m c^2$$

Для частицы в внешнем потенциальном поле

$$\Delta W_п + \Delta W = 0 \iff \underline{W_п + mc^2 = const}$$

Поведение фотонов в поле тяготения

(эксперимент Паунда и Ребки, 1960 г.)



Пусть у фотона $\vec p \parallel \vec g$ => при движении меняется $W_п$. Но по ЗСЭ

$$W_п + W = const \Rightarrow \text{меняется } W$$

т.к. $p = \frac{W}{c}$, то p изменяется.

С другой стороны, у фотона $W = \hbar\omega$ => <u>меняется ω</u>.

Получим ЗСЭ для фотона:

$$W = mc^2 = \hbar\omega \Rightarrow m = \frac{\hbar\omega}{c^2}$$

Гравитационный потенциал $\varphi_g \overset{опр}{=} \frac{W_п}{m}$ =>

$$\Rightarrow W_п = \varphi_g \cdot m = \varphi_g \cdot \frac{\hbar\omega}{c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_п + W = \varphi_g \cdot \frac{\hbar\omega}{c^2} + \hbar\omega = const} \quad (1)$$

Если известно φ_g, то можно найти ω.

Частный случай: падение фотона у поверхности Земли, высота падения $H \ll R_З$ => $\varphi_g = gH = const$.

Из (1) при падении на Землю:

$$W_п = mgH = \frac{\hbar\omega}{c^2} gH, \quad W = \hbar\omega$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar\omega_1}{c^2} gH_1 + \hbar\omega_1 = \frac{\hbar\omega_2}{c^2} gH_2 + \hbar\omega_2.$$

При $H_1 = 0$: $\underline{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = -\frac{\omega_2 g H_2}{c^2}}$

$$\underline{\frac{\Delta\omega}{\omega_2} = -\frac{gH_2}{c^2}}$$

При $H_2 = 20$ м: $\frac{\Delta\omega}{\omega_2} \sim 10^{-15}$.

Смысл: разность частот в т. 1 и 2 указывает на разность хода времени в этих точках.

02.02.2021.

Динамика системы материальных точек (СМТ)
Основные теоремы и законы сохранения для СМТ.

Рассматривая систему из N м.т. "Лобовой" путь опис-я движ-я – 2-й з-н Ньютона для каждой м.т.

Но: 1) это громоздко (возможно $N >> 1$)

2) это не всегда нужно (если интересует движение системы как целого)

Теорема об изменении импульса СМТ. Закон сохранения импульса.

Опр Импульсом СМТ называется векторная сумма:

$$\vec{p_c} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p_i} \quad \text{где} \quad \vec{p_i} = m_i \vec{v_i}$$

Для i-й м.т. справедлив 2-й з-н Ньютона:

$$\frac{d\vec{p_i}}{dt} = \vec{F_i}$$

($\vec{F_i}$ – равнодейств. всех сил, действ. на i-ю м.т.)

Таких уравнений N, сложим их:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}$$

Слева: $$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p_i}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{p_i} = \frac{d\vec{p_c}}{dt}$$

Справа: в сумму входят все силы (внешние – действуют со стороны м.т., не входящих в СМТ; внутренние – между м.т. самой системы), т.е.

$$\vec{F_i} = \vec{F_i}^{внутр} + \vec{F_i}^{внеш.}$$

Например, для 1-й м.т.: $\vec{F_1}^{внутр} = \vec{F_{21}} + \vec{F_{31}} + \ldots + \vec{F_{i1}} + \vec{F_{N1}}$,

для i-й м.т.: $\vec{F_i}^{внутр} = \vec{F_{1i}} + \vec{F_{2i}} + \ldots + \vec{F_{i-1\,i}} + \vec{F_{i+1\,i}} + \ldots + \vec{F_{Ni}}$

Тогда в $\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}^{внутр}$ входят $\vec{F_{ij}}$ и $\vec{F_{ji}}$ $\Rightarrow$ всю эту сумму можно разбить на такие пары.

Учтём 3-й з-н Ньютона: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{внутр} = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{внеш}$ (внутр. силы исчезнут!)

Окончательно: $\dfrac{d\vec{p}_c}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{внеш} \equiv \vec{F}_c^{внеш}$

Смысл: только внешние силы могут изменить импульс сист. (внутр. – не могут, какими бы большими не были)

Условия сохр-я импульса сист.

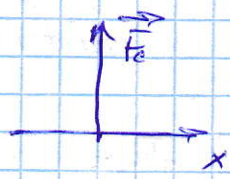
1) $\vec{F}_i^{внеш} = 0 \quad (\forall i) \Rightarrow \dfrac{d\vec{p}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_c = const$

(Система, в которой выполнено такое усл., называется изолированной.)

2) $\vec{F}_i^{внеш} \neq 0$, но $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{внеш} = 0 \Rightarrow \vec{p}_c = const$

3) $\vec{F}_c^{внеш} \neq 0$, но существует ось, для которой $F_{cx}^{внеш} = 0$

(очевидно, необх., чтобы напр-е $\vec{F}_c^{внеш}$ не изменялось, тогда $\vec{Ox} \perp \vec{F}_c^{внеш}$) $\Rightarrow p_{cx} = const$



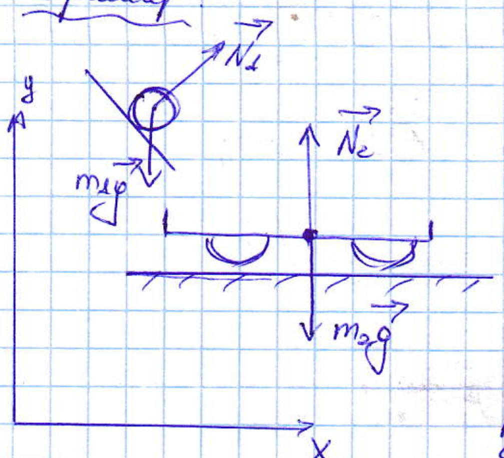
4) Проинтегрируем: $\int\limits_{\vec{p}_c(t_0)}^{\vec{p}_c(t)} d\vec{p}_c = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{F}_c^{внеш}\, dt'$

$\vec{p}_c(t) - \vec{p}_c(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{F}_c^{внеш}\, dt'$ ← импульс силы

При $\int\limits_{t_0}^{t} \vec{F}_c^{внеш} = 0 \Rightarrow \vec{p}_c = const$

Это возможно, если $|\vec{F}_c^{внеш}| < \infty$ и $t \to t_0$

Пример:



Шарик разгоняется на наклонной пл-ти и падает в тележку. Трения нигде нет.

СМТ: "m_1, m_2"

Внеш. силы: $m_1\vec g, \vec N_1$; $m_2\vec g, \vec N_2$

1-й этап: тележка покоится, шарик разгоняется

$\vec P_2 = 0$, $\vec P_1$ увелич. за счёт внеш. сил ($m_1\vec g + \vec N_1 \neq 0$)

$\Rightarrow \vec P_c$ увелич.

2 этап: шарик свободно падает $\Rightarrow F_{cx}^{внеш} = 0 \Rightarrow P_{cx} = const$

3 этап: шарик попал в тележку $\Rightarrow P_{cx} = const$ (трения на столе нет).

Но: $P_{cy} \neq const$, т.к. в момент удара резко растёт $\vec N$!

Теорема о движении центра масс СМТ

1) Пусть есть 2 м.т. и $m_1 = m_2$.

m_1, m_2; 0, x_1, x_2, X

Естественно считать $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

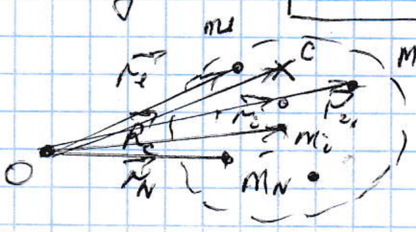
2) Пусть $m_1 \neq m_2$. Интуитивно напрашивается

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Обобщим:

Опр.: $x_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m_c}$, y_c, z_c – аналогично

Тогда $\boxed{\vec R_c = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{m_i \vec r_i}{m_c}}$ (точка с координатой $\vec R_c$ и есть ц.м. СМТ)

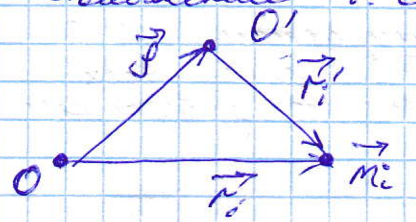


Важно! т. С может не совпадать ни с одной из точек СМТ!

Проверка для $N=2$: $x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1+m_2}$

При $m_1 = m_2$: $x_c = \frac{x_1+x_2}{2}$ } как и должно быть.

Положение т. С не зависит от выбора т. О. Док-во



$$\vec r_i = \vec r_i\,' + \vec\rho$$

$$\vec R_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec r_i}{m_c} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i(\vec r_i\,' + \vec\rho)}{m_c} = \frac{\sum m_i \vec r_i\,'}{m_c} + \vec\rho = \vec R_c\,' + \vec\rho$$

Опр. Скоростью СМТ называется $\boxed{\vec V_c = \frac{d\vec R_c}{dt}}$

— т.е. скорость ц.м. СМТ.

Пусть знаем m_i, $\vec v_i$ $(i=1,\dots N)$, пусть $v_i \ll c$

=> $m_i = const$ (нерел.-ое движ-е.) => $m_c = const$.

Найдём $\vec V_c$:

из опр. ц.м. => $m_c \vec R_c = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec r_i \;\Big|\frac{d}{dt}$

=> $m_c \vec V_c = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec r_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec v_i = \vec P_c$ — импульс

=> $\boxed{\vec P_c = m_c \vec V_c}$

Смысл: весь "размазанный по пространству" импульс СМТ можно приписать одной м.т. с массой m_c, движущейся со скоростью $\vec V_c$.

Опр. Ускорением СМТ называется $\boxed{\vec a_c = \frac{d\vec V_c}{dt}}$

При $v_i \ll c$ (=> $m_c = const$):

$m_c \vec V_c = \vec P_c \;\Big|\frac{d}{dt}$

=> $m_c \vec a_c = \frac{d\vec P_c}{dt}$

Справа по теор. об измен. импульса СМТ:

$\frac{d\vec P_c}{dt} = \vec F_c^{\,внеш}$

Окончательно:

$$\boxed{m_c \vec{a}_c = \vec{F}_c^{\,внеш}}$$

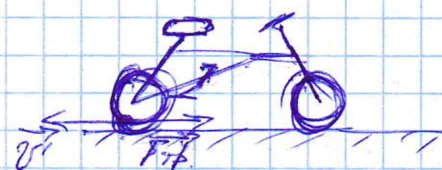
Смысл: ц.м. СМТ движется так же, как одна м.т. с массой m_c под действием $\vec{F}_c^{\,внеш}$ (т.е. всю систему мы описали как одну м.т.)

Пример: при разрыве снаряда в однородном поле тяжести ($\vec{g}$ всюду одинаково) ц.м. всех осколков движется по параболе под действием единственной силы $m_c\vec{g}$

Когда $\vec{a}_c = 0$ (т.е. $\vec{v}_c = const$)? Очевидно, при $\vec{F}_c^{\,внеш} = 0$

Внутр. силы не могут создать $\vec{a}_c$ (т.е. изменить $\vec{v}_c$)

Пример ("проблема самодвижущегося экипажа"):



Сила тяги заставляет крутиться ведущее колесо, это внутр. сила, она не создаёт $\vec{a}_c$.

Но есть $\vec{v}' \Rightarrow \vec{F}_{тр} \uparrow\downarrow \vec{v}'$ - только за счёт $F_{тр}$ и возможно движение!

Динамика тел переменной массы. Уравнение Мещерского (1897 г.)

Рассмотрим случай, когда $m \neq const$, а зависит от времени, но не по релятивистским причинам (!)

Введем обозначения:

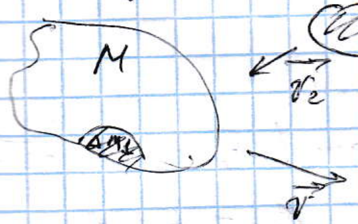
M – масса "основного" тела, оно движется со ск-ю $\vec{v}$

Δm_1 – то, что отделится (это часть M!), считаем $\Delta m_1 > 0$

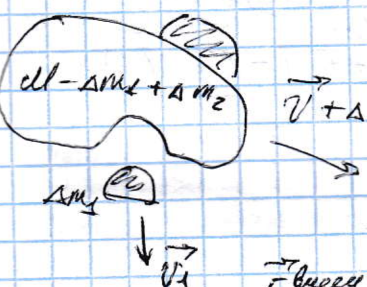
Δm_2 – то, что присоединится, оно движется с $\vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{u}_2$,

где $\vec{u}_2$ – относит. ск-ть.

У нас в запасе – только теорема об импульсе. Найдем нач. импульс $\vec{p}_0$ и конечный $\vec{p}$:



$$\vec{p}_0 = M\vec{v} + \Delta m_2 \vec{v}_2 = (M + \Delta m_2)\vec{v} + \Delta m_2 \vec{u}_2$$



$$\vec{p} = (M - \Delta m_1 + \Delta m_2)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m_1 \vec{v}_1 =$$
$$= (M - \Delta m_1 + \Delta m_2)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m_1(\vec{v} + \Delta\vec{v} + \vec{u}_1)$$

Запишем теорему об импульсе:

$$\vec{F}^{внеш} \cdot \Delta t = \vec{p} - \vec{p}_0 = (M - \Delta m_1 + \Delta m_2)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m_1 \cdot$$
$$\cdot (\vec{v} + \Delta\vec{v} + \vec{u}_1) - \left[(M + \Delta m_2)\vec{v} + \Delta m_2 \vec{u}_2\right] = \cancel{M\vec{v}} + M\Delta\vec{v} - \cancel{\Delta m_1 \vec{v}} - \Delta m_1 \Delta\vec{v} +$$
$$+ \cancel{\Delta m_2 \vec{v}} + \Delta m_2 \Delta\vec{v} + \cancel{\Delta m_1 \vec{v}} + \cancel{\Delta m_1 \Delta\vec{v}} + \Delta m_1 \vec{u}_1 - \cancel{M\vec{v}} - \cancel{\Delta m_2 \vec{v}} - \Delta m_2 \vec{u}_2 =$$
$$= M\Delta\vec{v} + \Delta m_1 \vec{u}_1 - \Delta m_2 \vec{u}_2$$

Перепишем в виде: (т.е. перейдем к lim, $\Delta t \to 0$)

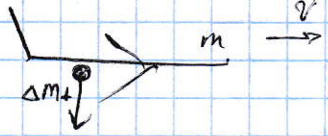
$$\boxed{M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{внеш} - \frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2}$$ – это и есть ур-е Мещерского

Можно ввести реактивную силу: $\vec{F}^{реакт} \overset{опр}{=} -\frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2$

относительные ск-ти (отн. ск-ти $\vec{v}$)

Обсуждение ур-я Мещерского

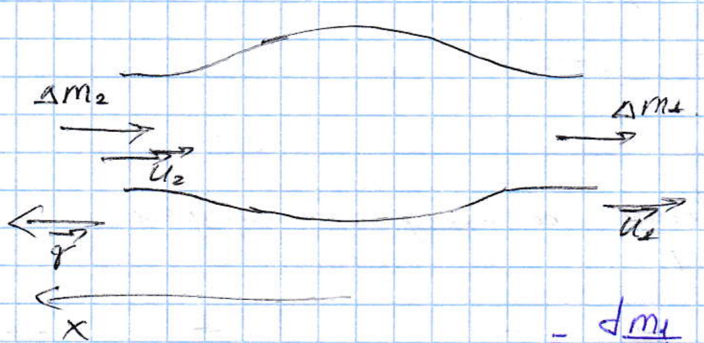
① Самолёт - бомбардировщик.



$\vec F^{реакт} = 0$, т.к. $\frac{dm_2}{dt} = 0$ (ничего не присоед.)

и $\vec u_1 = \vec 0$ — относит. самолёта

② ВРД (воздушно-реактивный и водно-реактивный двиг.)
Исп. в водомётном катере (например)



Сколько захватывается, столько и выбрасывается,

т.е. $\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}$

$\vec F^{реак} = -\frac{dm_1}{dt}\vec u_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec u_2 =$

$= \frac{dm_1}{dt}(-\vec u_1 + \vec u_2)$

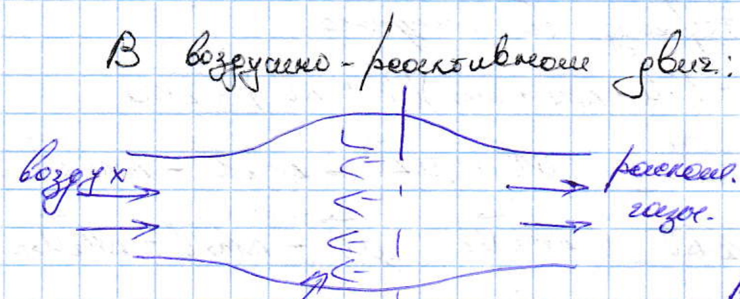
$|\vec u_1| >> |\vec u_2|$, $\vec F^{реак}$ и есть сила тяги! $F_{реакт\,x} = \frac{dm_1}{dt}(u_1 - \ldots$

Если катер забирает воду из стоячего водоёма, то

$\vec v_2 = 0 \Rightarrow \vec u_2 = -\vec v \Rightarrow \vec F_{реакт} \simeq \frac{dm_1}{dt}(-\vec u_1 - \vec v) =$

$= -\frac{dm_1}{dt}\vec v_1$

В воздушно-реактивном двиг.:



Энергия сгорания топлива

$Q = m_т q$

Кинетич. энергия газов $W_к = \frac{m_1 u_1^2}{2}$

т.к. $W_к \leq Q$, то

$u_1 \leq \sqrt{\frac{2 m_т q}{m_1}}$

③ Ракета в поле тяжести

Ничего не захватывается, т.е. $\frac{dm_2}{dt} = 0$

$\frac{dm_1}{dt}$ характеризует к-во сгорания топлива: $m_1 \equiv m_т$.

Оценка расхода топлива:

необх. $F_{реак} \gtrsim mg$

$$\Rightarrow \frac{dm_1}{dt} \gtrsim \frac{mg}{u_1}, \quad \text{при } m_1 = m_т \quad u_1 \le \sqrt{2q}$$

Технический предел $u_1 \le 4$ км/с

Ракета "Энергия": $m = 2400$ т.

$$\Rightarrow \frac{dm_1}{dt} \gtrsim \frac{2,4\cdot 10^6 \cdot 10}{4\cdot 10^3} = 6\cdot 10^3 \left(\frac{кг}{с}\right)$$

Проксима Центавра – звезда, ближайшая к Солнечной системе

До неё $\sim 4,2$ свет. года.

Свет за год проходит ~ 10 трлн. км $= 10^{12}$ км

Максимальная ск-ть космических аппаратов (Saturn V)

$$V \approx 64,5 \cdot 10^3 \ \frac{км}{час}$$

$\Rightarrow$ минимальное время полета $t^* \gtrsim 2,3 \cdot 10^{11}$ с $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ необх. запас топлива $m_т \gtrsim 4,5 \cdot 10^{11}$ кг.

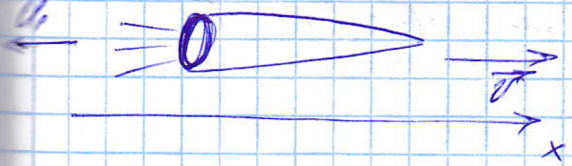
Задача Циолковского (разгон ракеты в отсутствие внешних сил)

Пусть известны $\frac{dm_1}{dt}$, $\vec{u}_1$, $\vec{F}^{внеш} = 0$ по усл.

Найдём связь ск-ти ракеты и массы: $V(m)$

Ур-е Мещерского: $m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}^{реакт} = -\frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1$

Очевидно: $dm_1 = -dm$ (топливо сгорает), $\vec{u}_1 = const$



$$m\,d\vec{V} = -dm_1\,\vec{u}_1$$

$$X: \ m\,dV = +dm_1 u_1 = -dm\,u_1$$

$$u_1 \int_{m_0}^{m} \frac{dm'}{m'} = -\int_{V_0}^{V(m)} dV \Rightarrow u_1 \cdot \ln\frac{m}{m_0} = -V(m) + V_0$$

$$V(m) = V_0 + u_1 \ln\frac{m_0}{m}$$

Если $\frac{dm}{dt}$ известно, то знаем $m(t) \Rightarrow$ найдём $V(m) \Rightarrow V(t)$

Пусть $V_0 = 0 \Rightarrow$ $\left\{ V(t) = u_1 \cdot \ln\frac{m_0}{m(t)} \right\}$ - ф-ла Циолковского ание

$$\boxed{m = m_0 \cdot e^{-\frac{v}{u_1}}}$$

m_0 – стартовая масса, $m_0 = m_{корп} + m_т$.

$\Rightarrow (m(t))_{min} = m_{корп}$ (если сжечь всё топливо)

$\Rightarrow V_{max} = u_1 \ln \frac{m_{корп} + m_т}{m_{корп}} = u_1 \cdot \ln\left(1 + \frac{m_т}{m_{корп}}\right)$

Чтобы V_{max} увеличить, отбрасывают ступени ракеты.

V/u_1	1	3	5	10
m_0/m	$e = 2,72$	20,1	148	22000

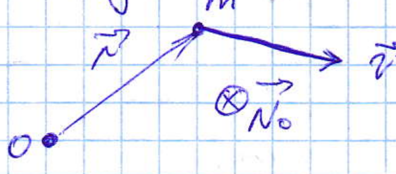
Если $u_1 = 4\,\frac{км}{с}$, то для $V_I = 8\,\frac{км}{с}$ необх $\frac{m_0}{m} \approx 7,4$

Самост. (к коллок.) Можно ли получить выигрыш в ск-ти, если всё топливо сгорит сразу ("одним куском")?

[Подсказка: найти v, сравнить с u_1 (исп. ЗСИ)]

Теорема о моменте импульса СМТ

Для одной м.т. было определение:



$$\vec N_0 = [\vec r, \vec p] = [\vec r, m\vec v]$$

Обобщаем для СМТ (по аналогии с обобщением для $\vec p_i$ и $\vec p_0$):

Опр. $\underline{\vec N_{c0} = \sum_{i=1}^{N} \vec N_{i0}} = \sum_{i=1}^{N} [\vec r_i, m_i \vec v_i]$ – момент импульса смт

Для одной м.т. $\frac{d\vec N_i}{dt} = \vec M_i$ (где $\vec M_i = [\vec r_i, \vec F_i]$ – момент силы)

Просуммируем для всех м.т.:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec N_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec M_i$$

Слева: $\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec N_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec N_i = \frac{d\vec N_c}{dt}$

Справа: $\vec F_i = \vec F_i^{внутр} + \vec F_i^{внеш} = \vec F_{1i} + \vec F_{2i} + \ldots + \vec F_{i-1\,i} + \vec F_{i+1\,i} + \ldots + \vec F_{Ni} +$
$+ \vec F_i^{внеш}$.

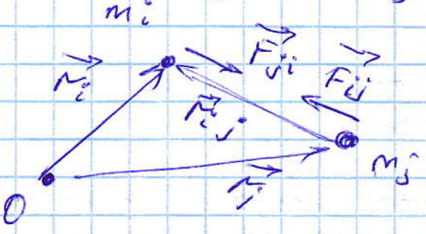
Пример при $N=2$: $\vec{F}_1^{внутр} = \vec{F}_{21}$, $\vec{F}_2^{внутр} = \vec{F}_{12}$

Тогда в $\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i$ войдут пары слагаемых:

$$[\vec{r}_i; \vec{F}_{ji}] + [\vec{r}_j; \vec{F}_{ij}]$$

$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (3-й з-н Ньютона)

$$\Rightarrow [\vec{r}_i, \vec{F}_{ji}] + [\vec{r}_j, \vec{F}_{ij}] = [(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \vec{F}_{ji}]$$



$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, $\vec{r}_{ij} \parallel \vec{F}_{ij} \parallel \vec{F}_{ji}$

$$\Rightarrow [(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \vec{F}_{ji}] = 0 \quad (\forall i,j)$$

[Замечание: такие силы — центральные. На фундаментальном уровне все реальные силы обладают такими св-вами, т.к. сводятся к гравитационным или кулоновским взаимодействиям.]

Тогда справа остаётся только момент внешних сил:

$$\sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{внеш}] = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{внеш} = \vec{M}_c^{внеш}.$$

Окончательно: $\boxed{\frac{d\vec{N}_c}{dt} = \vec{M}_c^{внеш}}$ — теорема о моменте импульса СМТ.

Смысл: момент импульса СМТ изменяется только под действием моментов внешних сил (внутренние моменты не могут изменить момент импульса СМТ).

Обсуждение теоремы о моменте импульса СМТ.

1. Условия сохранения момента импульса СМТ

$\vec{N}_c = const$ ($\Leftrightarrow \frac{d\vec{N}_c}{dt} = 0$) если:

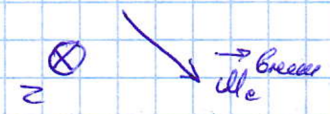
① $\vec{F}^{внеш} = 0 \Rightarrow \vec{M}^{внеш} = 0$ (изолированная СМТ)

② $\vec{F}^{внеш} \neq 0$, но $\vec{r}_i \parallel \vec{F}^{внеш}$ (центральные силы)

$\Rightarrow \vec{M}_i^{внеш} = 0 \Rightarrow \vec{M}_c^{внеш} = 0$

③ $\vec{M}_i^{внеш} \neq 0$, но $\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{внеш} = 0$

④ $\vec{M}_c^{внеш} \neq 0$, но направление $\vec{M}_c^{внеш}$ сохраняется.



$M_{cz}^{внеш} = 0 \Rightarrow N_{cz} = const.$

⑤ $d\vec{N}_c = \vec{M}_c^{внеш}\, dt \Rightarrow \vec{N}_c - \vec{N}_{c0} = \int_{t_0}^{t} \vec{M}_c^{внеш}\, dt'$

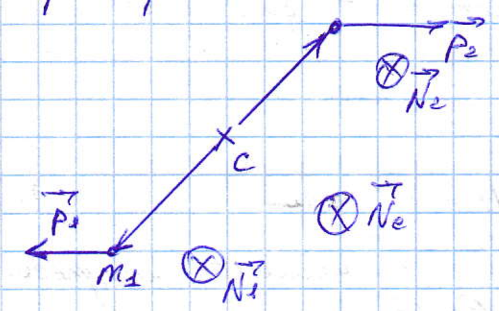
Если $|\vec{M}_c^{внеш}| < \infty$, $t \to t_0 \Rightarrow \vec{N}_c = \vec{N}_{c0} = const.$

2. Физический смысл $\vec{N}_c$.

$\vec{p}_c = m_c \vec{V}_c$ характеризует поступательное движ-е ц.м. смт.
Всегда можно найти СО, в которой $\vec{V}_c = 0 \Rightarrow \vec{p}_c = 0$.

А момент импульса $\vec{N}_c$ характеризует вращение.

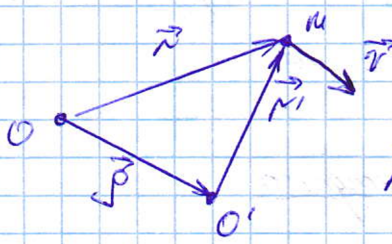
Пример:



Пусть есть 2 м.т., $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_c = 0$

Но: $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{N}_c \neq 0$ — обе м.т. вращаются вокруг ц.м. C.

3. Зависимость $\vec{N}_c$ от выбора начала отсчета



Найдем $\vec{N}_0$ и $\vec{N}'_{0'}$ (отн. т. O и O')

$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{r}'$, $\vec{\rho} = const$ (!)

$\vec{N}_0 = [\vec{r}; \vec{p}] = [\vec{\rho} + \vec{r}'; \vec{p}] = [\vec{\rho}, \vec{p}] + [\vec{r}'; \vec{p}] =$
$= [\vec{\rho}, \vec{p}] + \vec{N}'_{0'}$ — связь для одной м.т.

Обобщаем для смт:
для i-й м.т: $\vec{N}_i = \vec{N}_i' + [\vec{\rho}; \vec{p}_i]$

Суммируем: $\sum_{i=1}^{N} \vec{N}_i = \sum_{i=1}^{N} N_i' + \sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho}; \vec{p}_i]$

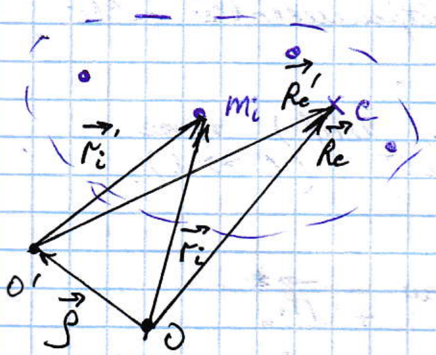
$\Rightarrow \vec{N}_c = \vec{N}_c' + [\vec{\rho}; \vec{p}_c]$

Опр: Система отсчёта, в которой ц.м покоится называется центромассовой

Для такой СО: $\vec{V}_c = 0 \Rightarrow \vec{P}_c = 0 \Rightarrow \vec{N}_c = \vec{N}_c'$ - в центромассовой СО от выбора н.о. ничего не зависит.

9.02.2021.

Связь моментов импульса в лабораторной и центромассовой СО.



Обозначения: всё, что относится к центромассовой СО (в ней $\vec{V}_c' = 0$) обозначаем * (верхн. индекс)

т. O - начало отсчёта в ЛСО

т. O' - начало отсчёта в центромассовой СО.

т.е. $\vec{r}_i{}' \equiv \vec{r}_i^{\,*}$, $\vec{v}_i{}' \equiv \vec{v}_i^{\,*}$

$\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,*} + \vec{\rho}$

$\vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,*} + \vec{v}_c$ (где $\vec{v}_c = \dot{\vec{\rho}}$ - ск-ть центромассовой СО отн. ЛСО)

$$\vec{N}_c = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i^{\,*} + \vec{\rho}, m_i(\vec{v}_i^{\,*} + \vec{v}_c)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i^{\,*}, m_i\vec{v}_i^{\,*}] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho}, m_i\vec{v}_i^{\,*}] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i^{\,*}, m_i\vec{v}_c] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho}, m_i\vec{v}_c]$$

Считаем каждое слагаемое отдельно:

1) $\sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i^{\,*}, m_i\vec{v}_i^{\,*}] \equiv \vec{N}_c^{\,*}$ (по опр. $\vec{N}$)

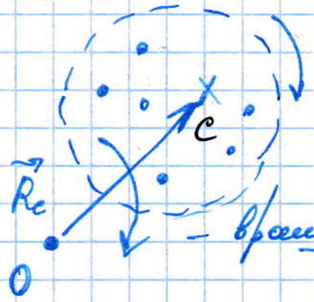
2) $\sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho}, m_i\vec{v}_i^{\,*}] = [\vec{\rho}, \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i^{\,*}] = [\vec{\rho}, \vec{P}_c^{\,*}] = 0$ (т.к. $\vec{V}_c^{\,*} = 0$ в центромассовой СО)

3) $\sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i^{\,*}, m_i\vec{v}_c] = [\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i^{\,*}, \vec{v}_c] = [m_c\vec{R}_c^{\,*}, \vec{v}_c]$ (т.к. по опр-ю $\vec{R}_c^{\,*} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i^{\,*}}{m_c}$)

4) $\sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho}, m_i\vec{v}_c] = [\vec{\rho}, \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_c] = [\vec{\rho}, m_c\vec{v}_c]$

Собираем: $\vec{N}_c = \vec{N}_c^{\,*} + [m_c\vec{R}_c^{\,*}, \vec{v}_c] + [\vec{\rho}, m_c\vec{v}_c] =$

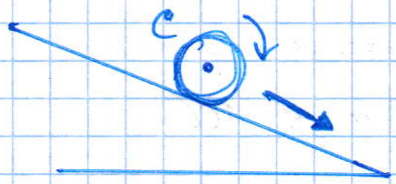
$$= \vec{N}_c^* + [\vec{R}_c^* + \vec{\rho}, m_c \vec{V}_c] = \underline{\vec{N}_c^* + [\vec{R}_c, \vec{p}_c]}$$



– вращение отн. C

– вращение отн. O

Пример: очевидно, теорема о моменте импульса справедлива и в НИСО, если учесть момент сил инерции. В частности, в центромассовой СО:



Колесо (диск, обруч, шар) тоже можно считать СМТ ($N >> 1$).

Тогда
$$\frac{d\vec{N}_c^*}{dt} = \vec{M}^{*\,внеш} + \vec{M}_{in}^*$$

При скатывании с накл. плоскости в центромассовой СО $\vec{F}_{in} \neq 0$, но при это возможно $\vec{M}_{in}^* = 0$ (!) Очевидно, это будет при $O' = C$. Док-во:

$$\vec{M}_{in}^* = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i^*, \vec{F}_{in_i}] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i^*, (-m_i)\vec{a}_0] =$$

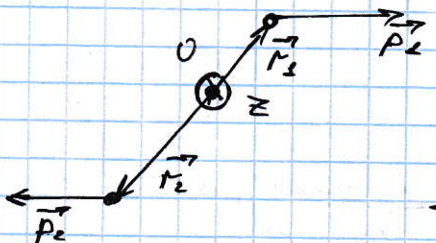
$$= -[\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^*, \vec{a}_0] = -[m_c \vec{R}_c^*, \vec{a}_0] = 0 \quad (\text{т.к. } \vec{R}_c^* = 0 \text{ при } O' = C)$$

[Замечание! Здесь $\vec{a}_0$ – ускорение самой СО, т.е. точки C.]

Окончательно получим: $\frac{d\vec{N}_c^*}{dt} = \vec{M}^{*\,внеш}$

Уравнение моментов относительно оси.

$$\vec N_i = [\vec r_i, m_i \vec v_i] = [\vec r_i, \vec p_i]$$

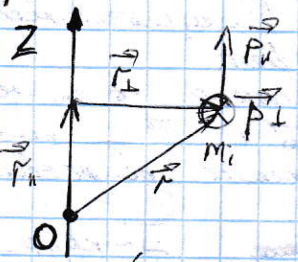


Можно так выбрать ось z, что

$\exists N_{i\parallel} \parallel z$ и $\exists N_{i\perp} \perp z$

Тогда

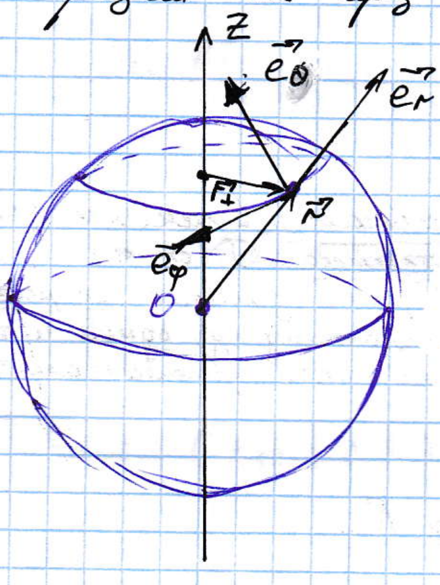
$$\frac{d\vec N_i}{dt} = \vec M_i \quad (\forall i)$$



можно записать в проекции на z:

$$\frac{dN_z}{dt} = M_z.$$

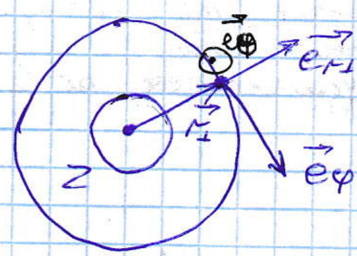
Выразим N_z через хар-ки вращательного движения.



работаем в сферической системе коорд. $\{\vec e_r, \vec e_\theta, \vec e_\varphi\}$

$\Rightarrow \vec v = \vec v_r + \vec v_\theta + \vec v_\varphi$

Вид сверху:



$$\vec N = [\vec r, \vec p] = m\left(\underbrace{[\vec r, \vec v_r]}_{=0} + \underbrace{[\vec r, \vec v_\theta]}_{\parallel \vec e_\varphi \perp O\vec z} + [\vec r; \vec v_\varphi]\right)$$

$$N_z = m\left([\vec r, \vec v_\varphi]\right)_z = ?$$

Свяжем линейную и угловую ск-ть: отн-о оси z

$\vec v_\varphi = [\vec\omega, \vec r_\perp]$, $\vec\omega \parallel Oz$

$$[\vec r, \vec v_\varphi] = [\vec r, [\vec\omega, \vec r_\perp]] = \vec\omega(\vec r, \vec r_\perp) - \underbrace{\vec r_\perp}_{\vec r_\perp \perp O\vec z}(\vec r, \vec\omega)$$

$$\boxed{N_z = m\omega_z(\vec r, \vec r_\perp) = m\omega_z r_\perp^2}$$

Тогда для i-й м.т.: $N_{iz} = m_i \omega_{iz} r_{\perp i}^2 \quad (\forall i)$

Частный случай: $\omega_{zi} = \omega_z$ для всех м.т. в СМТ

$$\Rightarrow (N_c)_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \omega_{iz} r_{\perp i}^2 = \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp i}^2 \equiv \omega_z \cdot J$$

Опр. Величина
$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp i}^2$$
– называется моментом инерции СМТ.

Физ-ий смысл J – мера инертности при вращательном движении. Это видно из аналогии:
$\vec{p}$ описывает поступ-ое движ-е со ск-ю $\vec{v}$, m – коэф. пропорц. между $\vec{p}$ и $\vec{v}$ – мера инертности при поступательном движении.

Аналогично $\vec{N}$ описывает вращение, J – коэф. пропорциональности между $\vec{N}$ и $\vec{\omega}$.

Пусть $N = 1$, тогда для одной м.т.
$$J_1 = m r_\perp^2$$

Из опр-я видно, что J – аддитивная величина (как и масса). Но есть принципиальное отличие J от m: $m \neq f(r)$, это const, а $J = f(r)$, т.е. зависит от распределения m_i ($i = 1, \ldots, N$) относительно оси. Поэтому у одной и той же СМТ могут быть разные J (если м.т. приближаются/удаляются от z)

Закон сохранения для N_z.

Из $\dfrac{dN_z}{dt} = M_z$

следует: $N_z = \text{const}$ при $M_z = 0$ (даже если $\vec{M} \neq 0$)

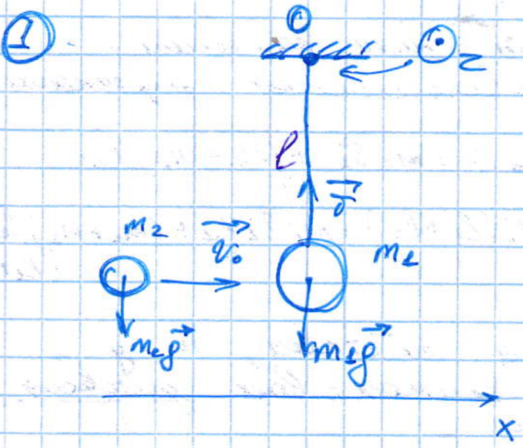
Если $v_r \neq 0$ (т.е. мт приближаются/удаляются от z), то $J = J(t) \Rightarrow$ необх. $\omega = \omega(t)$:

$$N_z = J\omega_z = \text{const} \iff \underline{J_1 \omega_{1z} = J_2 \omega_{2z}}$$

Пример хорошо известен акробатам, фигуристам, танцорам: если сгруппироваться, то J – уменьшается $\Rightarrow \omega$ – увелич.

Примеры совместного использования ЗСИ и ЗСМИ для СМТ

①



Шарик m_1 висит на идеальной нити неподвижно, шарик m_2 подлетает со ск-ю $\vec{V_0}$, происходит абсолютно неупругий удар (АНУ). Ищем ск-ть после слипания.

а) Очевидно: сист „m_1, m_2", $F_{cx}^{внеш} = 0$

$$\Rightarrow \underline{p_{cx} = const}$$

$$m_2 V_0 + m_1 \cdot 0 = (m_1 + m_2) V$$

$$\Rightarrow \underbrace{V = \frac{m_2}{m_1+m_2} V_0}$$

б) С другой стороны: относит. т. O

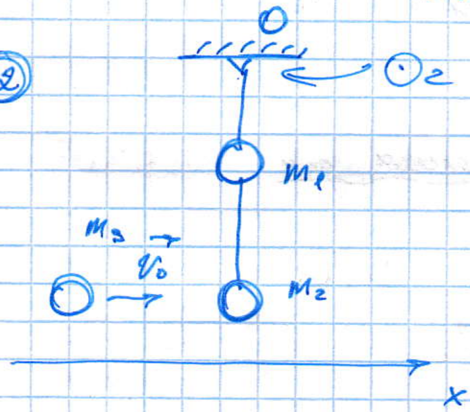
$$\vec{M}_c^{внеш} = \vec{M}_{m_1 g} + \vec{M}_T + \vec{M}_{m_2 g} = 0 \Rightarrow$$ выполняем ЗСММ

z: $N_{1z} + 0 = N_{cz} \Rightarrow m_2 V_0 l = (m_1 + m_2) V l$

$$\underbrace{V = \frac{m_2}{m_1+m_2} V_0}$$ – т.е. здесь ЗСМИ.

Новой информации не даёт.

②



Шарики m_1, m_2 закреплены на идеальных нитях и неподвижны, шарик m_3 подлетает со ск-ю V_0, происходит АНУ. Ищем ск-ти после слипания.

ЗСИ: на X: $m_3 V_0 = m_1 V_1 + (m_2 + m_3) V_{23}$ (1)

ЗСММ: на z: $m_3 V_0 (l_1 + l_2) = m_1 V_1 l_1 +$

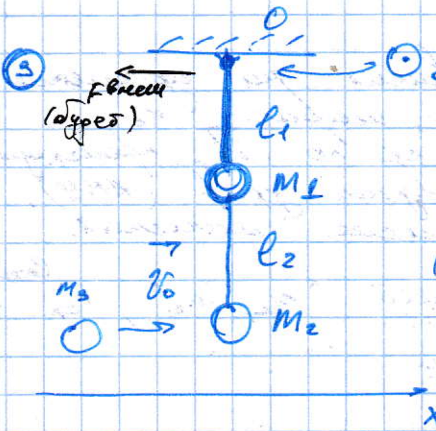
$$+ (m_2 + m_3) V_{23} (l_1 + l_2) \quad (2)$$

~ система из 2-ух ур-ий; 2 неизвестных: V_1, V_{23}

Если (1) домножить на $(l_1 + l_2)$ и вычесть (2), то $\underline{V_1 = 0}$

$$\Rightarrow \underline{V_{23} = \frac{m_3}{m_2 + m_3} V_0}$$

__Самост.__ обосновать возможность применения для этого случая.



③ Всё то же, но нити заменим жёсткими невесомыми стержнями.

(1) ЗСИ: на x: $m_3 v_0 = m_1 v_1 + (m_2+m_3) v_{23}$

(2) ЗСМИ: на z: $m_3 v_0 (l_1+l_2) = m_1 v_1 l_1 + (m_2+m_3) v_{23} (l_1+l_2)$

Т.к. конструкция жёсткая, то у всех шариков одинаковая угловая ск-ть ω, тогда

$$v_1 = \omega l_1, \quad v_{23} = \omega (l_1+l_2)$$

Подставим в (2):
$$m_3 v_0 (l_1+l_2) = \omega[m_1 l_1^2 + (m_2+m_3)(l_1+l_2)^2] \quad (3)$$

в (1):
$$m_3 v_0 = \omega[m_1 l_1 + (m_2+m_3)(l_1+l_2)] \quad (4)$$

Но (3) и (4) противоречат друг другу! Где ошибка?

Здесь НЕ выполняется ЗСИ: в момент удара резко меняется сила реакции подвеса ($F_{px} \to \infty$) =>

=> $F_{px} \cdot \Delta t \neq 0$!

А ЗСМИ справедлив, т.к. $\vec M^{внеш} = 0$

Энергетические соотношения для СМТ.

Для одной м.т теорема об изменении W_k:

$$\Delta W_k \equiv W_{k2} - W_{k1} = A_{12}$$

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec F \, d\vec l = \int_{(1)}^{(2)} F_l \, dl$$

То же можно написать для любой i-й

$$\Delta W_{ki} = \int_{(1)}^{(2)} \vec F_i \, d\vec l_i$$

Просуммируем по всем м.т, входящим в СМТ, и введём опр-е:

Опр.: $\boxed{W_{kc} = \sum_{i=1}^{N} W_{ki}}$ — кин. энергия СМТ.

Тогда
$$\Delta W_{кс} = \sum_{i=1}^{N} A_i$$

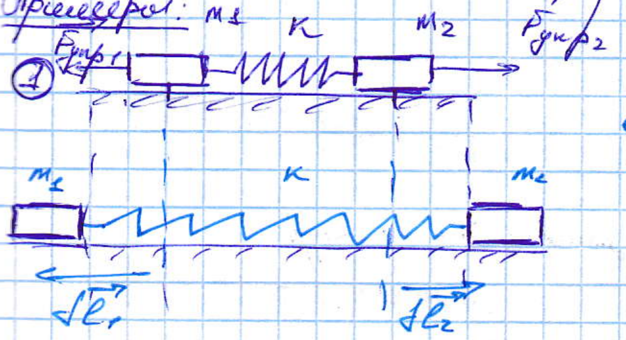
Справа – работа всех сил (внеш и внутр.). Можно ли избавиться от внутр. сил? Воспользуемся опред. работы

$d A_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{l}_j$ – работа силы, действующей со стороны i-й мт на j-ю.

$d A_{ji} = \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{l}_i = -\vec{F}_{ij}\, d\vec{l}_i$ – работа силы со стор. j-й мт. на i-ю с учетом 3-го закона Ньютона.

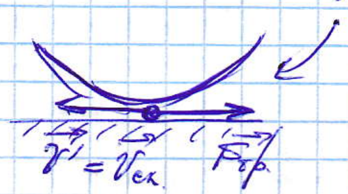
Сложим:
$$d A_{ij} + d A_{ji} = \vec{F}_{ij}(d\vec{l}_j - d\vec{l}_i) \neq 0 \text{ в общем случае,}$$
т.к. в общем случае $d\vec{l}_j \neq d\vec{l}_i$

Примеры:

① 

Пружину сжимали сжатой, потом её отпустили. $F_{упр.1}$, $F_{упр.2}$ – внутр. силы, при этом
$$dA_1^{внутр} = \vec{F}_{упр.1}\, d\vec{l}_1 > 0$$
$$dA_2^{внутр} = \vec{F}_{упр.2}\, d\vec{l}_2 > 0$$
$$\Rightarrow \quad dA^{внутр.} > 0$$

② Проблема самодвижущегося экипажа.



Ускорение создаётся за счёт $\vec{F}_{тр} (= \vec{F}^{внеш})$

а) Нет проскальзывания (чистое качение)

$\Rightarrow A_{тр.} = 0$ (т.к. это трение покоя)

$\Rightarrow \Delta W_{к.} = A^{внутр.}$ (работа сил. $F_{тяги}$ двиг.)

б) Есть проскальзывание, $\vec{v}_{ск} \uparrow\downarrow \vec{F}_{тр.} \Rightarrow A_{тр.} < 0$

$$\Delta W_к = A^{внутр} + A_{тр.}$$

16.02.2020.

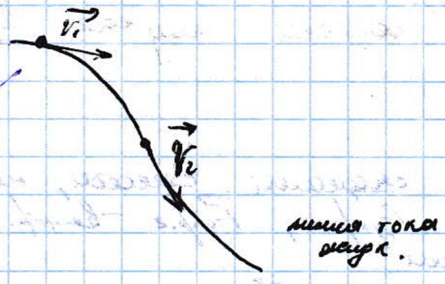
② Уравнение Бернулли (описывает течение жидкости)

1) Опр. Жидкость называется идеальной, если в ней отсутствует вязкое трение. ($\eta = 0$)

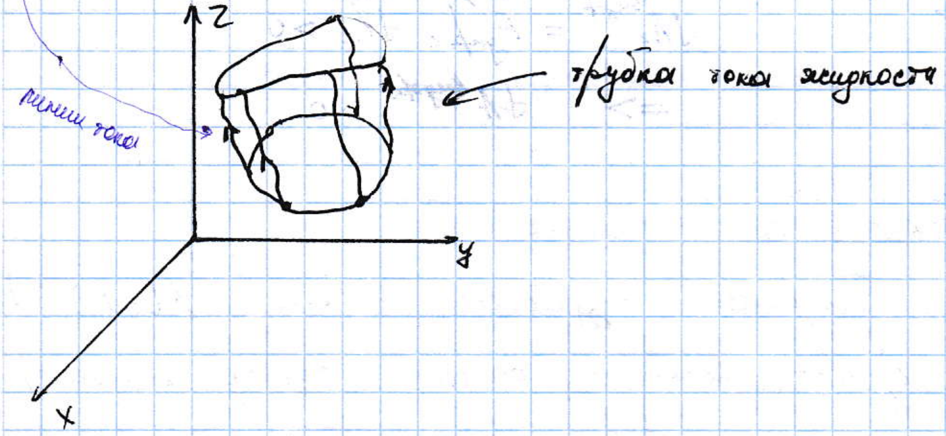
2) Опр. Жидкость называется несжимаемой, если её плотность не изменяется. ($\rho = const$)

3) Опр. Частица среды - это малый элемент объёма, в пределах которого хар-ки течения (P, v, ρ) можно считать постоянными

Линия тока жидкости - это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора ск-ти.



4) Опр. Трубка тока (выделим в жидкости замкнутый контур.)

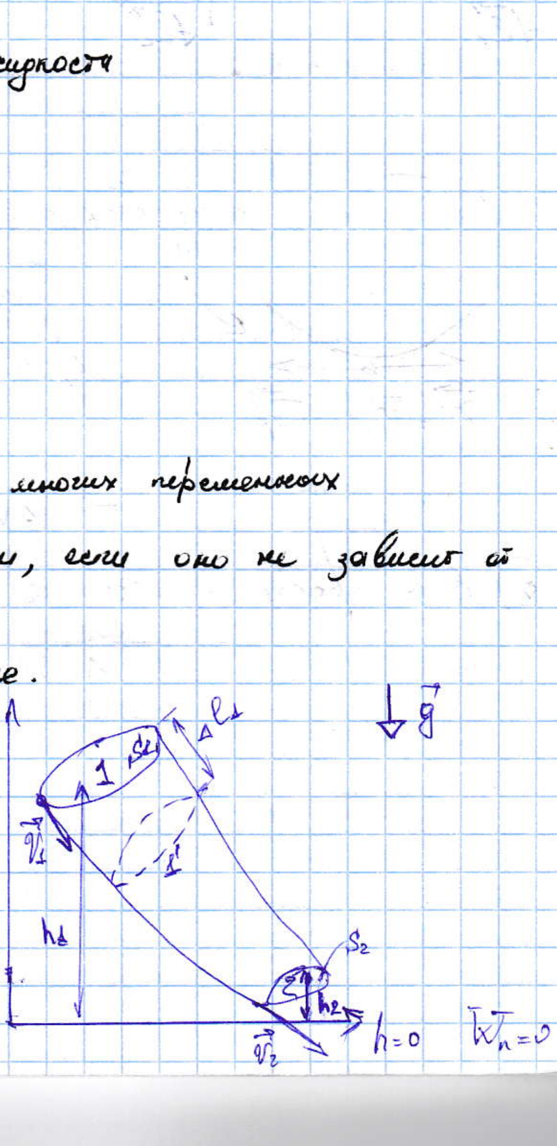


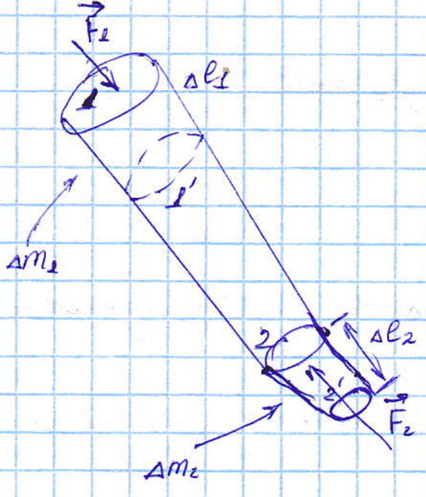
5) Поле скоростей: $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ~ ф-я многих переменных

6) Опр. Поле называется стационарным, если оно не зависит от времени

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}) \text{ - стац. поле.}$$

Расс-м трубку тока жидкости:





$\Delta l_1 = V_1 \cdot \Delta t$

$\Delta l_2 = V_2 \cdot \Delta t$

Применение к куску жидкости теорему об измен. ~~мех.~~. энергии

$$\Delta W_{мех} = \sum A^{проч.}$$

$$\sum A^{проч} = A_{F_1} + A_{F_2} = F_1 \cdot \Delta l_1 - F_2 \cdot \Delta l_2$$

$$\vec{F}_1 \uparrow\uparrow \vec{V}_1 , \quad \vec{F}_2 \uparrow\downarrow \vec{V}_2$$

$F = pS$ (силы давления.)

$$\sum A^{проч} = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2$$

$$W_{мех}^{нач} = W_{мех}^{11'} + W_{мех}^{1'2}$$

$$W_{мех}^{кон} = W_{мех}^{1'2} + W_{мех}^{22'}$$

$$\Delta W_{мех} = W_{мех}^{22'} - W_{мех}^{11'} = \left(\frac{\Delta m_2 \cdot V_2^2}{2} + \Delta m_2 g h_2\right) - \left(\frac{\Delta m_1 V_1^2}{2} + \Delta m_1 g h_1\right)$$

$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$ (в силу стационарности, независимости от времени)

$$\frac{\Delta m V_2^2}{2} + \Delta m g h_2 + p_2 S_2 \Delta l_2 = \frac{\Delta m V_1^2}{2} + \Delta m g h_1 + p_1 S_1 \Delta l_1 .$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta m_1 &= \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 S_1 \Delta l_1 \\ \Delta m_2 &= \rho_2 S_2 \Delta l_2 \end{aligned}\right\}$$ т.к. жидкость несжимаема: $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$ и $S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2$

$$\frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 .$$

$$\boxed{\frac{\rho V^2}{2} + \rho g h + p = const}$$ ~ вдоль одной и той же линии тока.

~ это и есть ур-е Бернулли.

$S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2$, если Δt – мало

$S_1 V_1 \Delta t = S_2 V_2 \Delta t$

$\Rightarrow \boxed{S_1 V_1 = S_2 V_2}$ ~ только при таких условиях ($\rho = const$)

p – внеш. давление

$\rho g h$ – гидростатическое давление

$\frac{\rho V^2}{2}$ – динамическое давление (напор.)

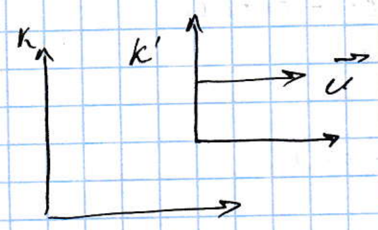
через лекцию

12.02.2021.

Связь между кинетическими энергиями в разных системах отсчёта. Теорема Кёнига.

а) Рассмотрим сначала 1 м.т.

Пусть есть 2 с.о: K и K', K' движется поступательно со ск-ю $\vec{u}$ отн. K.



По принципу относительности Галилея

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

$$\Rightarrow W_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\vec{v}' + \vec{u})^2 = \frac{mv'^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + m(\vec{v}', \vec{u})$$

$$\Rightarrow W_K = W_K' + \frac{mu^2}{2} + m(\vec{v}', \vec{u})$$

б) Перейдём к сит: запишем для i-й суммируем по всем i ($i = 1, \dots, N$).

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i'^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i u^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i', \vec{u})$$

Каждое слагаемое отдельно: $\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} = W_{KC}$ (по опр.)

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i'^2}{2} = W_{KC}' \quad \text{(по опр.)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i u^2}{2} = \frac{m_c u^2}{2}, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i', \vec{u}) = (\vec{p}_c', \vec{u}) \quad \text{по опр.}$$

$$\Rightarrow W_{KC} = W_{K_C}' + \frac{m_c u^2}{2} + (\vec{p}_c', \vec{u})$$

Пусть K' – центромассовая СО (т.е. $K' \equiv K^*$, $\vec{p}_c' = \vec{p}_c^* = 0$)

тогда

$$\underbrace{W_{KC} = W_{K_C}^* + \frac{m_c u^2}{2} = W_{K_C}^* + \frac{m_c v_c^2}{2}}$$ – теор. Кёнига.

Смысл: Кинетич. энергия сист отн. ЛСО равна сумме кинетич. энергии сист отн. ЦМСО и кинетич. энергии всей массы системы, сосредоточенной в т. С и движ. со ск-ю v_c.

Следствие: W_{KC} минимальна в центромассовой СО.

Потенциальная энергия СМТ.

① Для одной мт в случае потенциальных (консервативных сил)

$$W_п(\vec{r}_1) - W_п(\vec{r}_2) = -\Delta W_п(\vec{r}) = A_{12}^{конс.}$$

Естественное обобщение для СМТ:

Опр.: $-\Delta W_{п_c}(\vec{r}) = \sum A_{12}^{конс}$ (суммир. по всем силам.)

Важно! координаты у каждой мт. — свои!

② Для данной мт $W_{мех} = W_к + W_п.$

~ Естественное обобщение для СМТ:

Опр.

$$W_{мех\,c} = W_{кс} + W_{пс}.$$

$$\left(\text{подробно}: \sum_{i=1}^{N} W_{мех\,i} = \sum_{i=1}^{N} W_{кi} + \sum_{i=1}^{N} W_{пi}\right)$$

а) Пусть все силы (и внутр-ие в СМТ, и внеш.) — консервативные!

Тогда → $\sum A_{12} = \sum A_{12}^{конс} = -\Delta W_{пс}$ (1)

По теореме об изменении $W_{кс}$:

$$\Delta W_{кс} = \sum A_{12} \qquad (2)$$

Из (1) и (2)

$$\Delta W_{кс} = -\Delta W_{пс} \Rightarrow \underbrace{\Delta W_{мех.с} = 0}$$

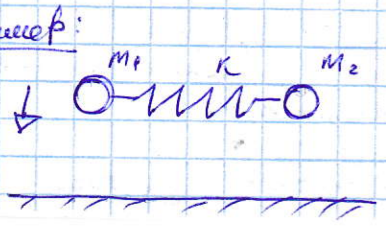
б) Пусть есть и консервативные, и какие-то ещё силы ("прочие").

Тогда $\sum A_{12} = \sum A_{12}^{конс} + \sum A_{12}^{проч} = -\Delta W_{пс} + \sum A_{12}^{проч}.$

$$\Rightarrow \Delta W_{кс} = -\Delta W_{пс} + \sum A_{12}^{проч}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta W_{мех.с} = \sum A_{12}^{проч}}.$$

Пример:



СМТ "m1, m2, пружина"

$A_{внутр}^{конс} = A_{упр}$, $A_{внеш}^{конс} = A_{тяж}$

$-\Delta W_п^{внутр} = A_{упр}$ — внутр. потенц. энергия сист

$-\Delta W_п^{внеш} = A_{пр}$ — потенц. энергия во внешнем пол

Понятие внутренней энергии

Пусть сист изолирована ($\vec{F}^{внеш} = 0$) $\Rightarrow \vec{p}_c = const$,

$\vec{N}_c = const.$

Будет ли $W_{мех.с.} = const$?

Если внутри сист $\exists F_{тр.}^{внутр} \neq 0$, то $W_{мех.с} \neq const.$

Изолированность — необходимое, но недостаточное условие!

Только если внутри сист действуют консервативные силы, то $W_{мех.с} = const.$

Что же происходит с энергией, если есть неконсервативные силы?

Гипотеза: энергия не исчезает, но переходит из механической в другие виды, т.е.

$$\boxed{W_c^{полн} = W_{мех.с} + U}$$

U — внутр. энергия (не механическая!)

Точного опр-я U дать нельзя, но можно сказать, из чего она состоит: это кинетическая энергия теплового движения молекул и энергия взаимодействия молекул. Во внутр. энергию и переходит макроэнергия за счёт трения. Обратный переход тоже возможен (ДВС приводит в движение автомобиль, человек двигается и т.д.)

Примеры применения законов сохранения для сист

1) Явление удара.

Опр Ударом называется кратковременный процесс, при котором состояние участвующих в нём тел сильно меняется по сравнению с начальным состоянием.

Есть 2 предельных вида ударов: абсолютно упругий (АУУ), абсолютно неупругий (АНУ)

а) случай АНУ (тела слипаются и движутся вместе)

Обозначения: $\vec{V}_{10}$, $\vec{V}_{20}$ – ск-ти до удара (в сист. только 2т.)

$\vec{V}$ – ск-ть после.

✓ Выполнен ЗСИ

Выполнен ЗСИ:

$$m_1\vec{V}_{10}+m_2\vec{V}_{20}=(m_1+m_2)\vec{V} \Rightarrow \vec{V}=\frac{m_1\vec{V}_{10}+m_2\vec{V}_{20}}{m_1+m_2}$$

Изм. $W_{кс}$:

$$\Delta W_{кс}=W_{кс}-W_{кс0}=\frac{(m_1+m_2)V^2}{2}-\frac{m_1V_{10}^2}{2}-\frac{m_2V_{20}^2}{2}=$$

$$=\frac{(m_1+m_2)(m_1\vec{V}_{10}+m_2\vec{V}_{20})^2}{2(m_1+m_2)^2}-\frac{m_1V_{10}^2}{2}-\frac{m_2(V_{20}^2)}{2}=$$

$$=\frac{m_1^2V_{10}^2+m_2^2V_{20}^2+2m_1m_2(\vec{V}_{10},\vec{V}_{20})}{2(m_1+m_2)}-\frac{m_1V_{10}^2}{2}-\frac{m_2V_{20}^2}{2}=$$

$$=\frac{-m_1m_2(V_{10}^2+V_{20}^2-2(\vec{V}_{10},\vec{V}_{20}))}{2(m_1+m_2)}=-\frac{m_1m_2(\vec{V}_{10}-\vec{V}_{20})^2}{2(m_1+m_2)}<0$$

Можно ввести:

$m_{приведённая}=m_{прив}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ – приведён. масса

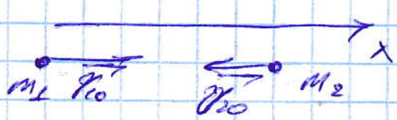
$\vec{V}_{отн}=\vec{V}_{10}-\vec{V}_{20}$ – отн-ая ск-ть.

$$\Rightarrow \Delta W_{кс}=-\frac{m_{прив.}V_{отн}^2}{2}$$

б) случай АУУ для центрального (лобового) соударения.

1 способ: рассматриваем движение в ЛСО

ЗСИ: $m_1\vec{V}_{10}+m_2\vec{V}_{20}=m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2$



$$\Rightarrow m_1V_{10x}+m_2V_{20x}=m_1V_{1x}+m_2V_{2x}$$

ЗСЭ: $\frac{m_1V_{10}^2}{2}+\frac{m_2V_{20}^2}{2}=\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}$

$$\begin{cases} m_1(V_{10x}-V_{1x})=m_2(V_{2x}-V_{20x}) \\ m_1(V_{10}^2-V_1^2)=m_2(V_2^2-V_{20}^2) \end{cases} \quad (1)$$

$$V_{10x}+V_{1x}=V_{20x}+V_{2x} \quad (2)$$

$(2) * m_1 + (1) \quad \Rightarrow \quad 2m_1 V_{10x} = m_2 (V_{2x} - V_{20x}) + m_1 (V_{2x} + V_{20x})$

$$V_{2x} = \frac{2m_1 V_{10x} + (m_2 - m_1) V_{20x}}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{V_2} = \frac{2m_1 \vec{V_{10}} + (m_2 - m_1)\vec{V_{20}}}{m_1 + m_2}$$

$(2) * m_2 - (1)$

$$\Rightarrow 2m_2 V_{20x} = m_2 (V_{10x} + V_{1x}) - m_1 (V_{10x} - V_{1x})$$

$$\vec{V_1} = \frac{2m_2 \vec{V_{20}} + (m_1 - m_2) \vec{V_{10}}}{(m_1 + m_2)}$$

2 способ: рассматриваем движение в центромассовой СО

Известно: $\vec{V_c} = \dfrac{m_1 \vec{V_1} + m_2 \vec{V_2}}{m_1 + m_2}$ – ск-ть ЦМ относительно ЛСО

В ЦМСО $\vec{V_c}^* = 0$ (по опр) $\Rightarrow \vec{P_c}^* = 0$

ЗСИ: $m_1 \vec{V_{10}}^* + m_2 \vec{V_{20}}^* = m_1 \vec{V_1}^* + m_2 \vec{V_2}^* = 0$

ЗСЭ: $\dfrac{m_1 {V_{10}^*}^2}{2} + \dfrac{m_2 {V_{20}^*}^2}{2} = \dfrac{m_1 {V_1^*}^2}{2} + \dfrac{m_2 {V_2^*}^2}{2}$

Из 1-го уравнения решения видны сразу:

$\vec{V_1}^* = \vec{V_{10}}^* \qquad \vec{V_2}^* = \vec{V_{20}}^* \qquad (1)$

$\vec{V_1}^* = -\vec{V_{10}}^*, \quad \vec{V_2}^* = -\vec{V_{20}}^* \qquad (2)$

Но (1) противоречит опр-ю удара, т.е. подходит только (2)

Остается перейти в ЛСО. По принципу Галилея

$\vec{V_{10}} = \vec{V_{10}}^* + \vec{V_c}, \qquad \vec{V_1} = \vec{V_1}^* + \vec{V_c}$

$\vec{V_{20}} = \vec{V_{20}}^* + \vec{V_c}, \qquad \vec{V_2} = \vec{V_2}^* + \vec{V_c}$

$$\Rightarrow \vec{V_1} = \vec{V_1}^* + \vec{V_c} = -\vec{V_{10}}^* + \vec{V_c} = -\vec{V_{10}} + 2\vec{V_c} = \frac{2m_2 \vec{V_{20}} + (m_1 - m_2)\vec{V_{10}}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V_2} = \vec{V_2}^* + \vec{V_c} = -\vec{V_{20}}^* + \vec{V_c} = -\vec{V_{20}} + 2\vec{V_c} = \frac{2m_1 \vec{V_{10}} + (m_2 - m_1)\vec{V_{20}}}{m_1 + m_2}$$

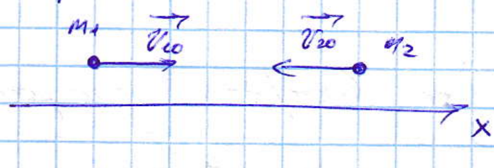
Частные случаи:

1) $m_1 = m_2 \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{V}_{20}$, $\vec{V}_2 = \vec{V}_{10}$ (полный "обмен ск-ями")

2) $m_2 >> m_1 \Rightarrow \vec{V}_1 \simeq \frac{2m_2\vec{V}_{20} - m_2\vec{V}_{10}}{m_2} = 2\vec{V}_{20} - \vec{V}_{10}$

$$\vec{V}_2 \simeq \frac{2m_1\vec{V}_{10} + m_2\vec{V}_{20}}{m_2} = \frac{2m_1}{m_2}\vec{V}_{10} + \vec{V}_{20} \simeq \vec{V}_{20}$$

Пусть при этом $\vec{V}_{10} \uparrow\downarrow \vec{V}_{20} \Rightarrow |\vec{V}_1| > |\vec{V}_{10}|$



$V_{1x} = -2V_{20} - V_{10}$

$V_1 = 2V_{20} + V_{10} > V_{10}$

Поэтому: мяч отскочит от локомотива с большей ск-ю, при накачивании шины насос греется из-за увеличения энергии налетающих на поршень молекул (а не из-за трения!)

3) Пусть $\vec{V}_{20} = 0$. Найдем коэф-т передачи энергии.

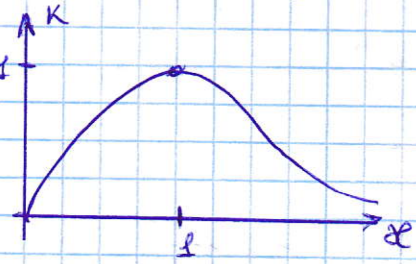
Опр. Величина $$k = \frac{W_{k10} - W_{k1}}{W_{k10}}$$

— называется коэф-ом передачи энергии

$$k = \frac{\frac{m_1V_{10}^2}{2} - m_1V_1^2/2}{\frac{m_1V_{10}^2}{2}} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_{10}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{4m_1m_2}{m_2^2\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2} = \frac{4(m_1/m_2)}{(1 + m_1/m_2)^2} = \frac{4\varkappa}{(1+\varkappa)^2},$$

где $\varkappa = \frac{m_1}{m_2}$



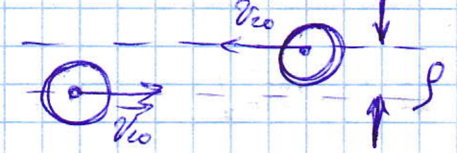
Это используется для замедления нейтронов в ядерных реакторах

$m_1 = m_n \simeq 1$ а.е.м.

Идеальный случай — $k = 1$, реализуется при столкновении с ядром H, но H захватывает нейтрон. Не использовать дорого. Реально используют графит (C) или Be. Для C $k \simeq 0{,}28$ (для увеличения реализуется 55-60 ударов.)

Нелобовое столкновение упругих шаров. (косой удар)
Диаграмма импульсов.

Косой удар — удар, при котором центры шаров движутся по разным прямым (прицельный параметр $\rho \neq 0$). Очевидно, шары нельзя при этом считать м.т.



Удобный способ анализа — метод векторных диаграмм. Для построения перейдём в ЦМСО.

Пусть $\vec{V}_{10} \neq 0$, $\vec{V}_{20} = 0 \Rightarrow \vec{V}_c = \frac{m_1 \vec{V}_{10}}{m_1 + m_2}$

По принципу Галилея:

$$\vec{V}_{10}^* = \vec{V}_{10} - \vec{V}_c = \frac{m_2 \vec{V}_{10}}{m_1 + m_2}, \quad \vec{V}_{20}^* = 0 - \vec{V}_c = -\frac{m_1 \vec{V}_{10}}{m_1 + m_2} \Rightarrow |\vec{p}_{10}^*| = |\vec{p}_{20}^*| = |m_2 \vec{V}_c|$$

Итак: $|\vec{p}_{10}^*| = |\vec{p}_{20}^*|$ (1)

$\vec{p}_c^* = \vec{p}_{10}^* + \vec{p}_{20}^* = 0 = const =$ (опр. ЦМСО и ЗСИ)
$= \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* \Rightarrow \vec{p}_2^* = -\vec{p}_1^*$ после удара
$\Rightarrow |\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*|$ (2)

Представим это графически:

До удара: После удара:

Если шары идеально гладкие, то при косом ударе (как и при лобовом) выполнен ЗСЭ:

$$\frac{p_{10}^{*2}}{2m_1} + \frac{p_{20}^{*2}}{2m_2} = \frac{p_1^{*2}}{2m_1} + \frac{p_2^{*2}}{2m_2} \Rightarrow |\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_{10}^*|$$

(с учётом (1) и (2))

— т.е. векторы на диаграмме только повернутся (длина сохраняется)

Возвращаемся в ЛСО:

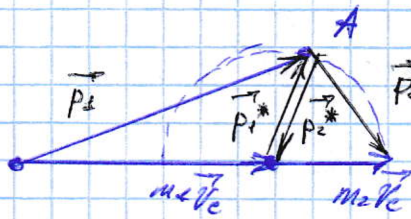
$$\vec p_1 = \vec p_1^{\,*} + m_1 \vec V_c \qquad (3)$$
$$\vec p_2 = \vec p_2^{\,*} + m_2 \vec V_c \qquad (4)$$

Построим для $m_1 > m_2$:

1) строим $m_1 \vec V_c$, $m_2 \vec V_c$ и окр. радиусом $m_2 V_c$ (т.к. это $|\vec p_{10}^{\,*}| = |\vec p_{20}^{\,*}|$)

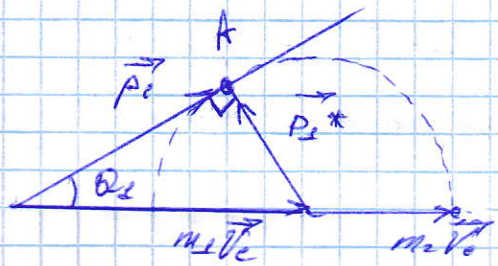
2) строим $\vec p_1^{\,*} \uparrow\downarrow \vec p_2^{\,*}$

3) строим $\vec p_1, \vec p_2$ в соответ. с (3), (4).

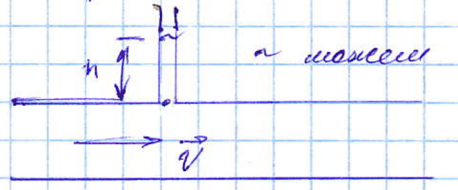


Очевидно, т. А может оказаться где угодно на окружности. Когда она расположена так, что $\vec p_1$ касается окружности, угол отклонения 1-го шара будет максимальным:

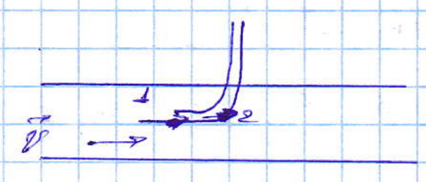
$$\sin \Theta_{max} = \frac{p_1^*}{m_1 V_c} = \frac{m_2 V_c}{m_1 V_c} = \frac{m_2}{m_1}$$



Примеры применения:

1. 

— можем узнать гидростатическое давление.

2. 

$v_1 \ne 0$

$v_2 = 0$

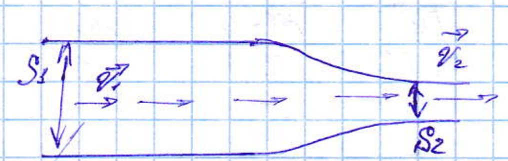
$h_1 = h_2$

Справедливо уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \cancel{\rho g h_1} + p_1 = 0 + \cancel{\rho g h_2} + p_2$$

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho v_1^2}{2}$$

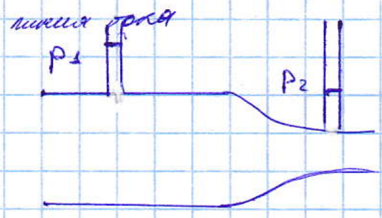
Трубка Пито (трубка позвол. мерить динамический поток)

3. 

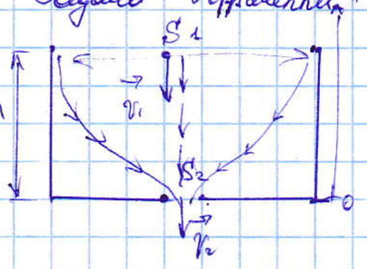
$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$S_1 > S_2 \Rightarrow v_1 < v_2 \Rightarrow p_1 > p_2$$

$h_1 = h_2$ (точки на одной высоте.)



4. Задача Торричелли



$\vec{v}_2 = ?$

$S_1 >> S_2 \Rightarrow v_1 << v_2$; $v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}$; $v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1} << 1.$

$v_1 \to 0$

Используем соотношение Бернулли:

$p_1 = p_2 = p_{атм}.$

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + 0 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h$$

$v_2 \simeq \sqrt{2gh}$ — ф-ла Торричелли (1641 г.)

5. Водяные часы (клепсидры)

$v_1 = -\frac{dh}{dt}$; $h_2 = 0$

$$\frac{\rho V_1^2}{2}\cdot\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h$$

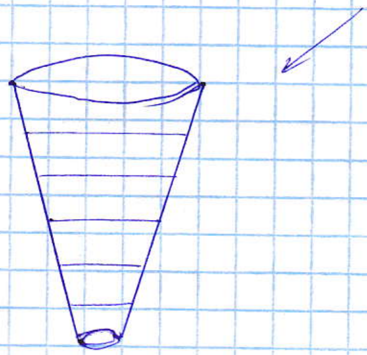
$$\frac{V_1^2}{2}\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right) = gh$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}} = -\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{\frac{2g}{(S_1/S_2)^2 - 1}}\, dt$$

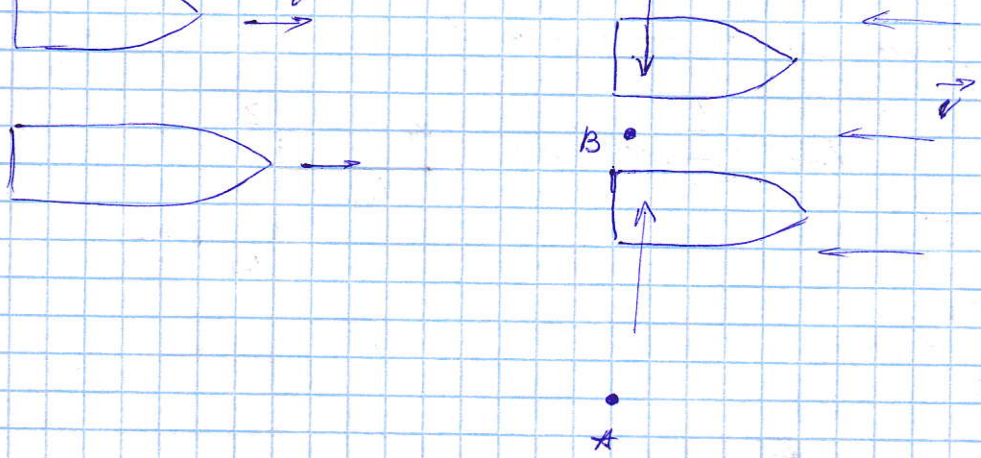
$$t = -\sqrt{\frac{(S_1/S_2)^2 - 1}{2g}}\cdot 2\sqrt{h}\,\Bigg|_{h(t=0)}^{h(t)}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\left((S_1/S_2)^2 - 1\right)}{g}}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right)$$



6) Связь ск-ти и давления. (V и p)

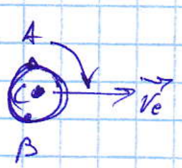
В СО, связ. с кораблями:



$V_B > V_A$

$p_B < p_A$

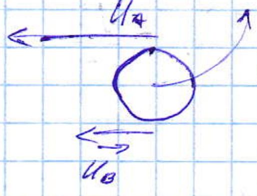
7) Эффект Магнуса („сухой лист", топспин)



теннисный стол

$$\vec{V}_{A,B} = \vec{V}_c + \vec{V}'_{A,B}$$

Перейдём в центромассовую С.О.:



$$\vec{U}_{A,B} = -\vec{V}_{A,B}$$

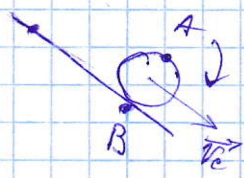
$$P_A < P_B$$

18.02.2021.

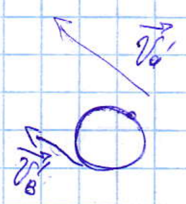
$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

$$V_1 S_1 = V_2 S_2$$

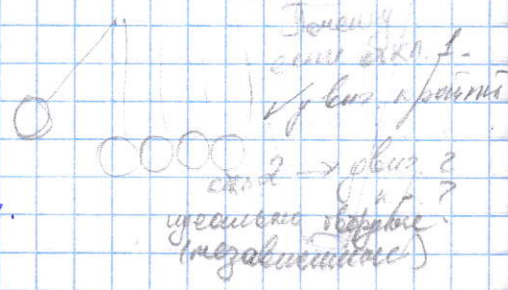
(1)



(2)



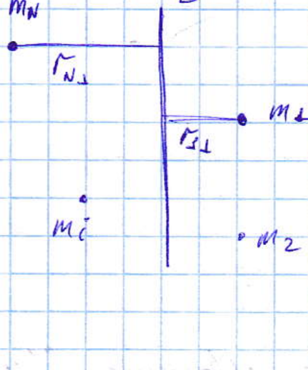
– эффект Магнуса.



Про момент импульса:

$$\frac{dN_{zc}}{dt} = M_z \quad , \text{если } M_z = 0 \to N_{zc} = const.$$

$$N_{zc} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2 \omega_i$$

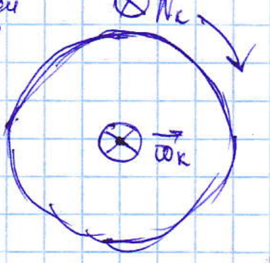


Если $\omega_i = \omega \ \forall i$

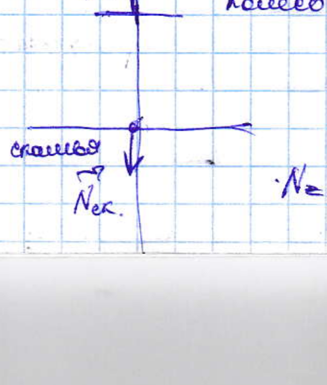
$$\to J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2$$

$$J\omega_z = const.$$

Вид спереди на колесо



Вид сверху.



$N_{zc} = 0$

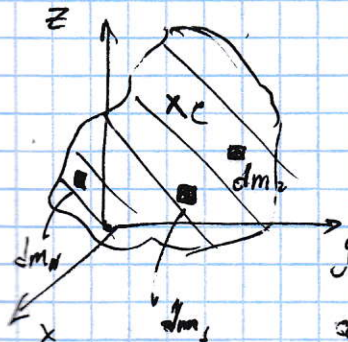
Механика твердого тела.

$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = \vec{F}^{внеш}$ — 3 ур-я

$\frac{d\vec{N}_c}{dt} = \vec{M}^{внеш}$ — 3 ур-я

$\Delta W_k = \sum A^{всех\ сил}$

7 ур-й для описания СМТ как целого



$\vec{R}_c = \{x_c, y_c, z_c\}$ — поступательно

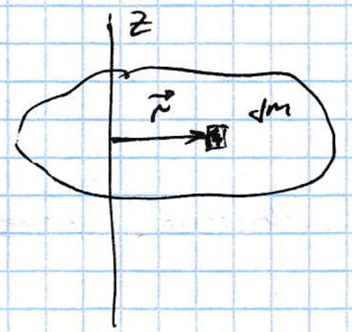
3 поступат. дв.

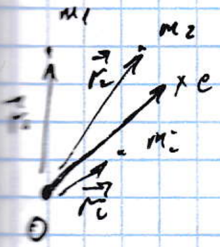
3 вращат. дв.

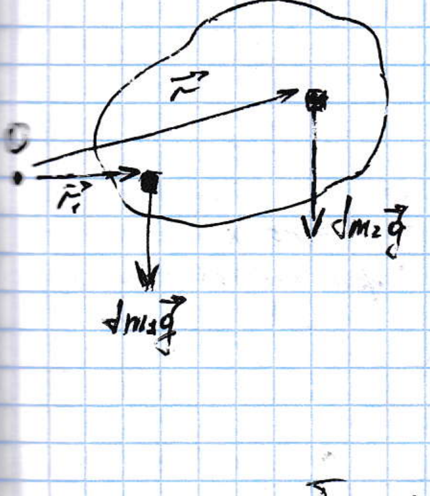
$dm_1 = dm_2 = \ldots = dm_N \equiv (\forall N,\ N \to \infty)$

Опр.

СМТ	ТТ (твердое тело)
1) $\vec{p}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$	$\vec{p} = \int d\vec{p} = \int_{(m)} dm\,\vec{v} = \int_{(V)} \rho\,\vec{v}\,dV$
2) $\vec{N}_c = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i]$	$\vec{N} = \int_{(m)} [\vec{r}, dm\,\vec{v}] = \int_{(V)} [\vec{r}, \rho\,\vec{v}\,dV]$
3) $\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$	$\vec{R}_c = \frac{\int_{(m)} dm\,\vec{r}}{m_T} = \frac{\int_{(V)} \rho\,\vec{r}\,dV}{m_T}$







$dV_1 = dV_2 = \ldots \equiv dV$

Если $\rho = \rho(\vec{r})$, то $dm_1 \neq dm_2$

$(m\vec{g})_{общее} = \int_{(m)} dm\,\vec{g} = \int_{(V)} \rho(\vec{r})\,\vec{g}(\vec{r})\,dV$

Если поле гравитационное однородно ($\vec{g}$ — однор., $\vec{g} = const.$)

ТТ — однор. ($\rho = const$)

Тогда: $\to (m\vec{g})_{полн} = \rho g \int_{(V)} dV = \rho V \vec{g} = m\vec{g}$

Условие равновесия твёрдого тела.

Мы хотим, чтобы ТТ было в покое $\to \vec{v}=0$ (нет пост. движ.) и нет вращения $\vec{\omega}=0$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \qquad \text{если } \vec{F}=\vec{0} \Rightarrow \vec{p}=const$$

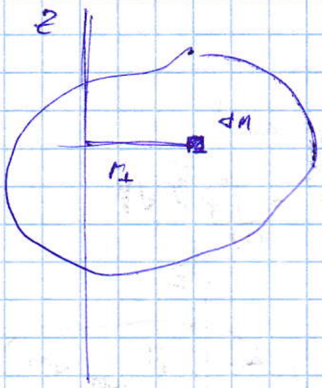
$$\frac{d\vec{N}}{dt}=\vec{M} \qquad \text{если } \vec{M}=0 \Rightarrow \vec{N}=const.$$

– необх. условия (но недостаточные)

$$\vec{v}(t=0)=0$$
$$\vec{\omega}(t=0)=0$$

– необх. и дост. условия.

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



$$\frac{dN_z}{dt}=M_z$$

$$\vec{N}=\int_{(m)}[\vec{r}, dm\vec{v}]=\int_{(V)}[\vec{r}, \rho\vec{v}dV]$$

Для сист.:

$$N_z=\sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2 \omega_{zi}$$

$$N_z=\omega_z\int_{(m)}dm\, r_\perp^2 \longleftarrow N_z=\int_{(m)}dm\, r_\perp^2\,\omega_z^{const}$$

Момент инерции твёрдого тела:

$$\boxed{J=\int_{(m)}dm\, r_\perp^2}$$ – момент инерции твёрдого тела

$$\Downarrow$$

$$N_z=\omega_z\int_{(m)}dm\, r_\perp^2=J\omega_z$$

тогда: $\frac{d(J\omega_z)}{dt}=M_z$; $J=const$ для ТТ.

$$J\underbrace{\frac{d\omega_z}{dt}}_{=\gamma_z}=M_z$$

$$\boxed{J\gamma_z=M_z}$$

аналогия

$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \to$ на x:

при $m=const$ ($v \ll c$)

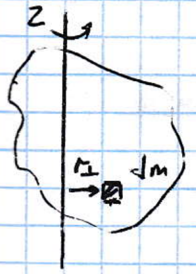
$$ma_x=F_x$$

	Кинематика			Динамика			Энергетика
Поступ.	$x(t)$	$v_x = \frac{dx}{dt}$	$a_x = \frac{dv_x}{dt}$	m	$p_x = mv_x$	$F_x \ \left(a_x = \frac{F_x}{m}\right)$	$dA = (\vec{F}, d\vec{l}) = F_l\, dl \quad (F_x\, dx)$
Вращ.	$\varphi(t)$	$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$	$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}$	J	$N_z = J\omega_z$	$M_z \ \left(\varepsilon_z = \frac{M_z}{J}\right)$	$dA \overset{?}{=} M_z\, d\varphi$

$W_k = \frac{mv^2}{2}$

$W_k \overset{?}{=} \frac{J\omega^2}{2}$

25.02.2021.



$\frac{dN_z}{dt} = M_z \longrightarrow$

$N_z = J\omega_z \longrightarrow J\varepsilon_z = M_z$

$ma_x = F_x$

Вычисление момента инерции.

$J = \int\limits_{(m)} r_\perp^2\, dm$

Если плотность разная в разных частях тела:

$J = \int\limits_{(m)} r_\perp^2\, dm = \int\limits_{(V)} \rho(r_\perp) r_\perp^2\, dV$

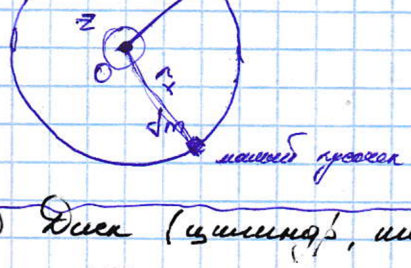
$dm = \rho\, dV$

Момент инерции для одной м.т.:

$J_1 = mr^2$

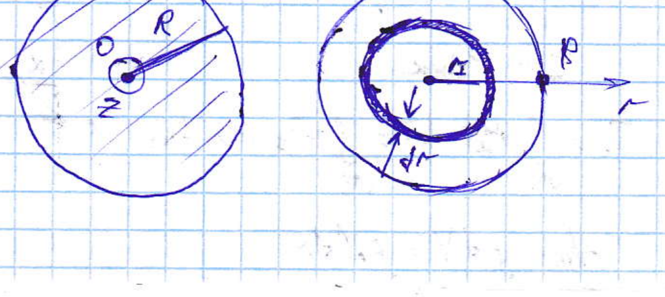
① Бесконечно тонкое кольцо:

Дано: m, R



$J_0 = \int\limits_{(m)} r_\perp^2\, dm = \int\limits_{(m)} R^2\, dm = mR^2$

$r_\perp = R$

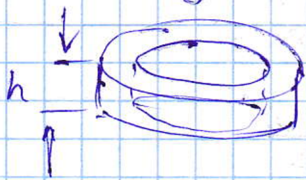


② Диск (цилиндр, шайба)

$dJ_0 = dm \cdot r_\perp^2$

$$J_0 = \int\limits_{(m)} dm \cdot r_\perp^2 = \int\limits_0^R \rho h 2\pi r^3 dr = \rho h \pi \frac{R^4}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

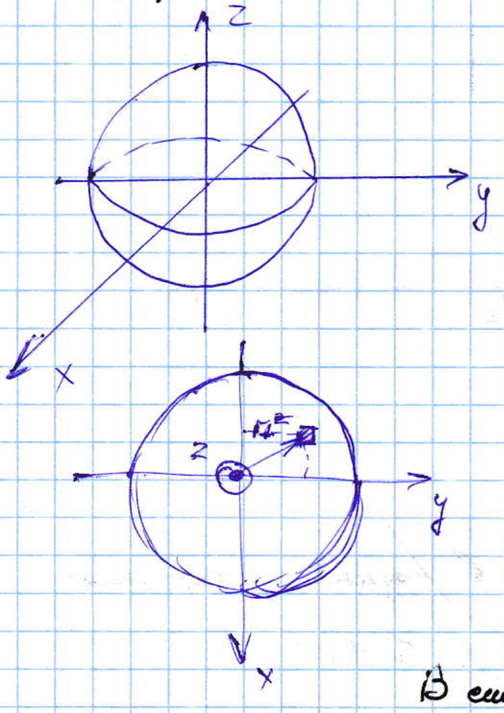
$dm = \rho dV = \rho h \pi d(r^2) = \rho h 2\pi r dr$



$r_\perp = r$

$V = h \cdot \pi R^2$

③ Сфера



Дано: m, R

Можно разбить на кольца.

Разобьем на м.т.

$$J_z = \int\limits_{(m)} dm \cdot r_\perp^{2(z)} = \int\limits_{(m)} dm (x^2+y^2)$$

$$r_\perp^{2(z)} = x^2 + y^2$$

$$J_x = \int\limits_{(m)} dm \cdot r_\perp^{2(x)} = \int\limits_{(m)} dm (y^2+z^2)$$

$$J_y = \int\limits_{(m)} dm \cdot r_\perp^{2(y)} = \int\limits_{(m)} dm (x^2+z^2)$$

В силу симметрии: $J_z = J_x = J_y \equiv J_0$

Сложим все 3 равенства: $J_x + J_y + J_z = \int\limits_{(m)} dm \; 2(x^2+y^2+z^2) =$

$$= 2\int dm R^2$$

$$\Rightarrow 3J_0 = 2mR^2$$

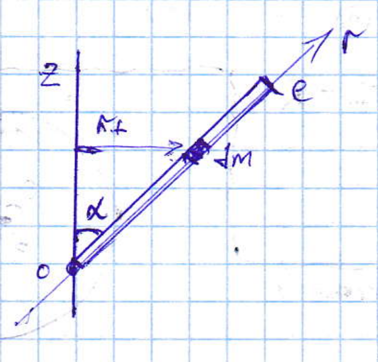
$$J_0 = \frac{2}{3} m R^2$$

④ Стержень

Дано: m, ℓ, α

$r_\perp = r \sin\alpha$

$$J_0 = \int\limits_{(m)} r_\perp^2 \, dm = \int\limits_{(m)} r^2 \sin^2\alpha \, dm$$



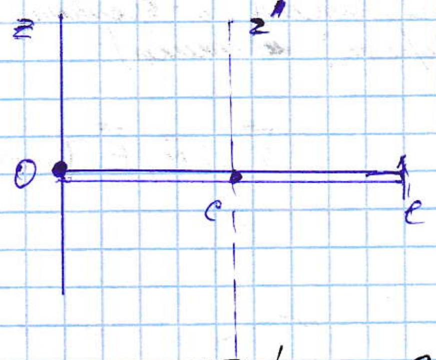
$dm = \rho dV = \rho S dr$

$$J_0 = \int_0^{\ell} \rho S \sin^2\alpha \, r^2 dr =$$

$$= \rho S \sin^2\alpha \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\ell} = \frac{\rho S \sin^2\alpha \, \ell^3}{3} = \frac{m\ell^2}{3}\sin^2\alpha$$

1) $\sin\alpha = 0 \rightarrow J_0 = 0$

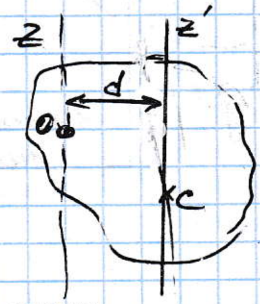
2) $\sin\alpha = 1;\ \alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow J_0 = \frac{m\ell^2}{3}$



$J_c = ?$

$$J_c = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \rho S r^2 dr = \frac{\rho S r^3}{3}\Big|_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} = \frac{m\ell^2}{12}$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера.



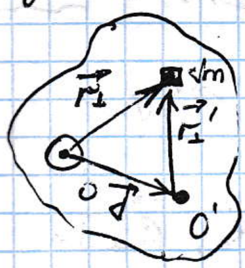
~ Если есть две параллельные оси, то выполнено соотношение:

$$J_0 = J_c + md^2$$

d - расстояние между осями.

J_c - момент инерции относительно центра масс.

Вид сверху:



$$\vec{r}_\perp = \vec{r}_\perp' + \vec{d}$$

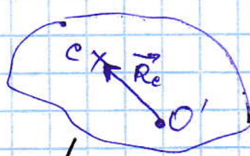
$$J_0 = \int dm \cdot r_\perp^2 = \int dm(\vec{r}_\perp' + \vec{d})^2 =$$

$$= \int_{(m)} dm\, r_\perp'^2 + \int_{(m)} dm\, d^2 + 2\int_{(m)} dm(\vec{r}_\perp', \vec{d}) =$$

$$= J_{0'}' + md^2 + 2m(\vec{R}_c^{(0')}, \vec{d})$$

$$\int_{(m)} dm(\vec{r}_\perp', \vec{d}) = \Big(\int_{(m)} dm\,\vec{r}', \vec{d}\Big) = (m\vec{R}_{c\ \text{отн } 0'}, \vec{d})$$

$$\vec{R}_c = \frac{\int_{(m)} dm\,\vec{r}_\perp}{m} \nearrow$$



Пусть O' проходит через центр. масс $\rightarrow O' \equiv C$

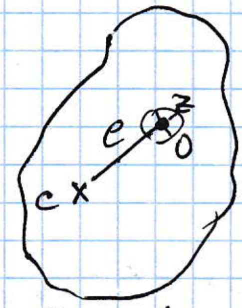
$$\Rightarrow \vec{R}_c^{(0')} = 0$$

$$\underline{J_0 = J_c + md^2}, \text{ а } 2m(\vec{R}_c, \vec{d}) = 0$$

J_c — min из всех J

Физический маятник.

~ назыв. твёрдое тело, закреплённое на оси, не проходящ. через центр масс и способное колебаться относительно этой оси.



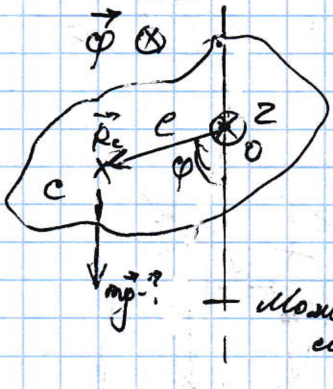
$J_0,\ m,\ OC = l$ — дано

Найти, как будет зависеть от времени $\varphi(t) = ?$ (угол поворота)

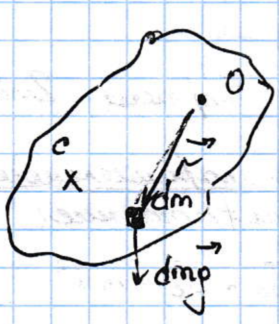
$$\frac{dN_z}{dt} = M_z \qquad \vec{M} = [\vec{r}; \vec{F}] \to M_Q = 0$$

$$J_0 \gamma = M_z$$

$\vec{\varphi} \otimes$



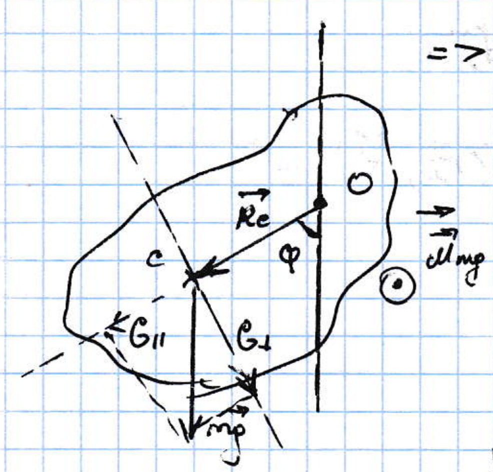
Можно ли приложить силу сюда?



$$\vec{M}_{mg} = \int_{(m)} [\vec{r}, dm\vec{g}] = \int_{(m)} [dm\vec{r}, \vec{g}] =$$

$$= [\int_{(m)} dm\vec{r}, \vec{g}] = [m\vec{R}_c, \vec{g}] = [\vec{R}_c, m\vec{g}]$$

=> Можно $m\vec{g}$ собрать в одну точку — в центр масс.



$$\vec{M}_{mg} = [\vec{R}_c, m\vec{g}] = [\vec{R}_c, \vec{G}_\parallel] + [\vec{R}_c, \vec{G}_\perp] = [\vec{R}_c, \vec{G}_\perp]$$

$$G_\perp = mg\sin\varphi$$

$$\gamma_z = \gamma = \ddot{\varphi}$$

$$z:\ J_0\ddot{\varphi} = -lmg\sin\varphi$$

! { При $\varphi \ll 1$ $\sin\varphi \simeq \varphi$

=> $J_0\ddot{\varphi} + lmg\varphi = 0$ $|: J_0$

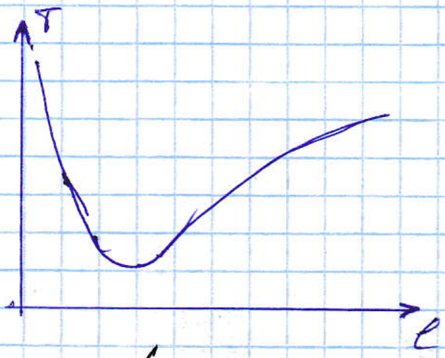
$$\left\{ \ddot{\varphi} + \frac{lmg}{J_0}\varphi = 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{mgl}{J_0}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{mgl}}$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера, тогда: $J_0 = J_c + ml^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_c}{mgl} + \frac{l}{g}}$$



$l \to 0 \Rightarrow T \to \infty$

$l \to \infty \Rightarrow T \to 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ как у матем. маятника

Опр. Приведённой длиной называется длина матем. маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физ-ого маятника.

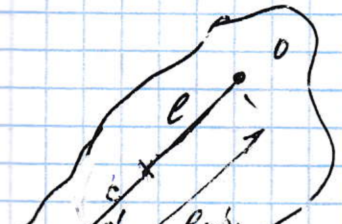
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр.}}}{g}}$$

$$\Rightarrow \frac{J_c}{mgl} + \frac{l}{g} = \frac{l_{\text{пр.}}}{g} \Rightarrow l_{\text{пр.}} = l + \frac{J_c}{ml}$$

Переобозначим: $\frac{J_c}{ml} \equiv l' \Rightarrow \underline{l_{\text{пр.}} = l + l'}$

Всегда $l_{\text{пр.}} > l$

$J_c = m l l'$



$CO' = l_{\text{пр.}}$

Если

$T_{(O)} \overset{?}{=} T_{(O')}$ ~ теорема Гюйгенса.

$l_{\text{пр.}} \overset{?}{=} l_{\text{пр.}}'$

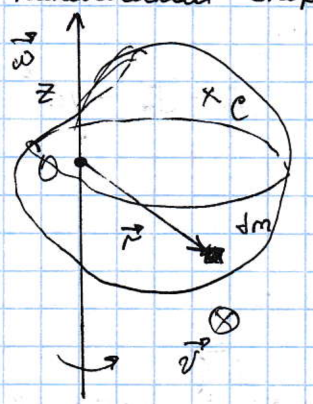
$$l_{\text{пр}}' = l' + \frac{J_c'}{ml'} = l' + \frac{J_c}{ml'} = l' + l = l_{\text{пр}},$$

что и треб. док-ть

02.03.2021.

Энергетические соотношения для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

① Кинетическая энергия ($W_к$ = ?)



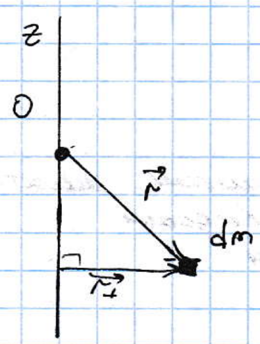
1 м.т. $W_{к(1)} = \frac{mv^2}{2}$

Разбиваем на м.т., тогда для твёрдого тела:

$$W_к = \int_{(m)} dm \frac{v^2}{2}$$

$$\vec v = [\vec\omega, \vec r] = [\vec\omega, \vec r_\perp] \Rightarrow v = \omega r_\perp$$

$\vec r = \vec r_\parallel + \vec r_\perp$ (относит. $\vec\omega$)



$$\Rightarrow W_к = \int_{(m)} dm \frac{\omega^2 r_\perp^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\underbrace{\int_{(m)} r_\perp^2 \, dm}_{I_0} = \frac{J_0\omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия вращающегося тт: $\boxed{W_к = \frac{J_0\omega^2}{2}}$
отн. т. O.

$$J_0 = J_c + md^2$$

$$W_к = \frac{J_c\omega^2}{2} + \frac{m(\omega d)^2}{2} = \frac{J_c\omega^2}{2} + \frac{mv_c^2}{2}$$

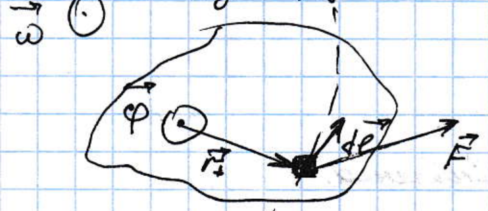
$$\omega d = v_c$$

② A = ? (Работа, которую нужно совершать, чтобы тело вращалось)

1 способ

по опр. A

Вид сверху:



$$dA = (\vec F, d\vec l)$$

$$\vec v = [\vec\omega, \vec r_\perp] \quad \Big| \; dt$$

$$d\vec l = [d\vec\varphi, \vec r_\perp]$$

$$\rightarrow dA = (\vec F, d\vec l) = (\vec F, [d\vec\varphi, \vec r_\perp]) =$$

$$= (\underbrace{[d\vec\varphi, \vec r_\perp], \vec F}_{\text{цикл. перестановка}}) = ([\vec r_\perp, \vec F], d\vec\varphi) = (\vec M, d\vec\varphi) =$$

$$\boxed{dA = (\vec M, d\vec\varphi)} \qquad = M_z \, d\varphi$$

2 способ

По теореме об изменении кин. энергии.

$$dW_k = dA \Rightarrow dA = \frac{2 J_0 \omega d\omega}{2}$$

$$\frac{dN_z}{dt} = M_z \quad ; \quad N_z = J_0 \omega \Rightarrow \frac{J_0 d\omega}{dt} = M_z$$

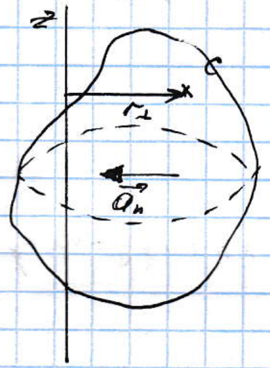
$$dA = \frac{d\varphi \cdot \cancel{d\omega} \cdot \cancel{dt}\, M_z}{\cancel{dt} \cdot \cancel{d\omega}} = M_z d\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi}$$

Свободные оси.

~ Оси, при вращении вокруг которых не возникает сил реакции называются свободными.

Как найти такие оси?

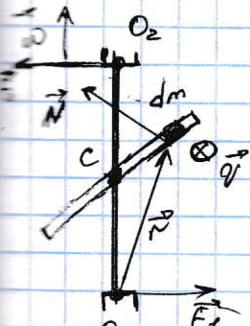


$$\vec F = m\vec a_c$$

Т.к. ось свободная $\Rightarrow \vec F = 0 \Rightarrow \vec a_c = 0$

$\vec a_c = \vec a_n = -\omega^2 \vec r_\perp$ $\Rightarrow \vec r_\perp = 0$

$\Rightarrow$ Ось будет свободной, если она проходит через центр масс (необходимое условие) но недостаточное.



Будут ли в O_1 и в O_2 силы реакции?

$$\frac{d\vec N}{dt} = \vec M = [\vec r; \vec F]$$

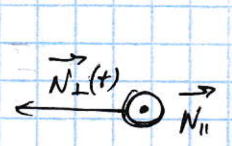
$$\vec N = [\vec r; dm \vec v]$$

$\vec F$ в O_2 − ? (т.е. расс-м отн. O_1)

$\vec N = \vec N_\parallel + \vec N_\perp$ (относит. $\vec\omega$)

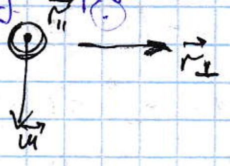
$d\vec N_\perp = \vec M dt$

t:

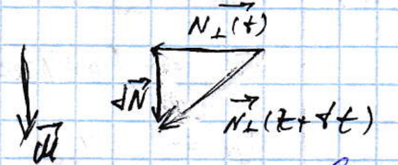


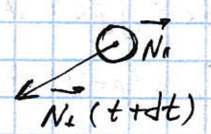
t + dt:

Вид сверху:



<=





Закрепить в т. O_2 и тогда сила получ. в другую сторону.

Ось - не свободная

$\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{M}=0$ относительно любой точки.

$\Rightarrow d\vec{N}=0 \quad \to \vec{N}=\text{const} = \underbrace{\vec{N}_{\parallel}}_{\text{const}} + \vec{N}_{\perp}$

Пусть $\vec{N}_{\perp}=0$

Необх. $\vec{N} \parallel \vec{\omega}$ - тогда ось будет свободной.

$\vec{N}=J\vec{\omega}$

<u>Связь между векторами</u>
<u>$\vec{N}$ и $\vec{\omega}$.</u>

$$\vec{N}=\int\limits_{(m)}[\vec{r}, dm\vec{v}] = \int\limits_{(V)}[\vec{r}, \rho dV\vec{v}]$$

$$\vec{v}=[\vec{\omega},\vec{r}]$$

$$\Rightarrow \vec{N}=\int \rho\, dV\, [\vec{r},[\vec{\omega},\vec{r}]] = \int \rho\, dV(\vec{\omega}r_{\perp}^2 - \vec{r}(\vec{\omega},\vec{r})) =$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}$$

$$= \int \rho dV\left((\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k})(x^2+y^2+z^2) - (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)\right)$$

Спроецируем на оси:

$$N_x=\int\limits_{(V)}\rho dV\left(\omega_x(x^2+y^2+z^2) - x(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)\right) =$$

$$=\int\limits_{(V)}\rho dV\left(\omega_x(y^2+z^2) - xy\omega_y - xz\omega_z\right)$$

$$N_y=\int\limits_{(V)}\rho dV\left(\omega_y(x^2+z^2) - yx\omega_x - yz\omega_z\right)$$

$$N_z=\int\limits_{(V)}\rho dV\left(\omega_z(x^2+y^2) - zx\omega_x - zy\omega_y\right)$$

$\vec{N}=J\vec{\omega}$

$$J=\int\limits_{(m)}dm\, r_{\perp}^2 = \int\limits_{(V)}\rho dV r_{\perp}^2$$

$J_{xx}=\int\rho dV(y^2+z^2)$	$J_{xy}=-\int\rho dV\, xy$	$J_{zx}=-\int\rho dV\, zx$
$J_{yy}=\int\rho dV(x^2+z^2)$	$J_{xz}=-\int\rho dV\, xz$	$J_{zy}=-\int\rho dV\, zy$
$J_{zz}=\int\rho dV(x^2+y^2)$	$J_{yx}=-\int\rho dV\, yx$	$J_{yz}=-\int\rho dV\, yz$

$\vec{N} = J\vec{\omega}$, где.

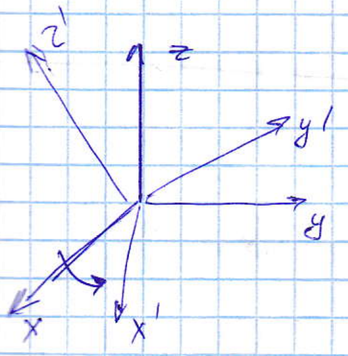
Матрица:

$$J = \begin{vmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{vmatrix} \sim \text{тензор инерции}$$

$$N_x = J_{xx} \cdot \omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$$

$J_{ij} = J_{ji}$ — симметричный тензор.

$$J = \begin{vmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{vmatrix}$$ — диагональный вид. (главные оси)



Пусть $\omega_z \neq 0$, $\omega_x = \omega_y = 0$

$\Rightarrow N_x = J_{xz} \cdot \omega_z$

$N_y = J_{yz}\omega_z$ (в произвольных осях)

$N_z = J_{zz}\omega_z$

Если приведём матрицу к диагональному виду:

$N_x = N_y = 0$

$N_z = J_z \omega_z \neq 0$ в главных осях.

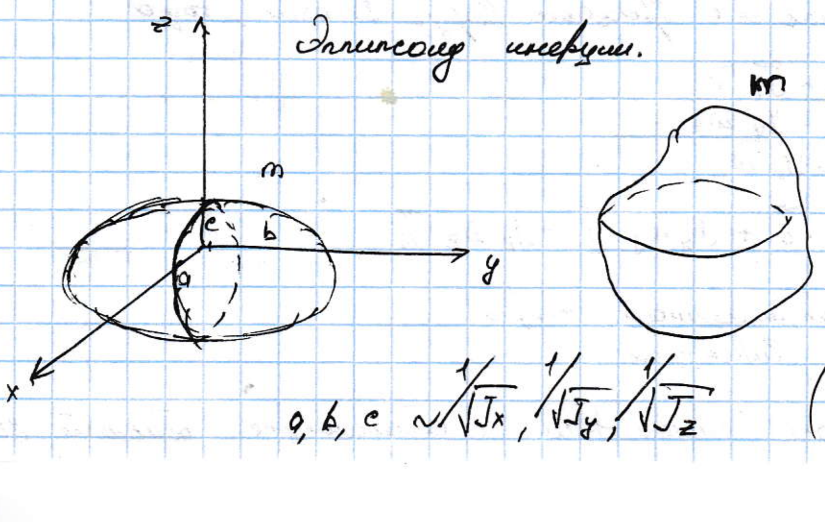
Главные оси и являются свободными.

Опр. — Оси, для которых недиагональные элементы тензора инерции равны 0, называются главными осями.

Относительно главных осей $\vec{N} \parallel \vec{\omega}$!

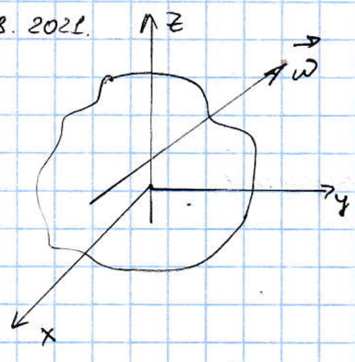
Главные оси явл. свободными осями.

Эллипсоид инерции.



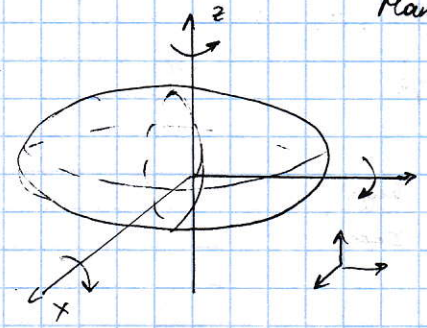
$a, b, c \sim 1/\sqrt{J_x}, 1/\sqrt{J_y}, 1/\sqrt{J_z}$ (т.е. $\frac{1}{\sqrt{J}}$)

4.03.2021.



$$\begin{array}{c} I_x \\ I_y \\ I_z \end{array} \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}$$ – для симметричного тела.

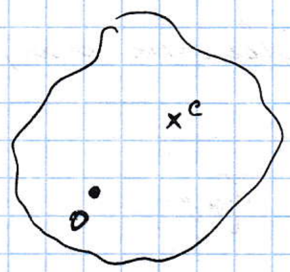
Например для эллипсоида.



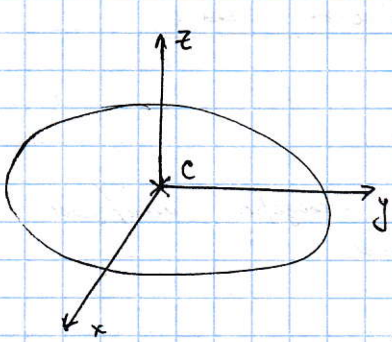
6 степеней свободы.

23

Движение твёрдого тела с одной закреплённой точкой. (Гироскоп.)



Закреп. в т. O → 3 ст. свободы



~ Уравновешенное тело, если центр масс в т. пер. осей (момент сил = 0)

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \Sigma\vec{M}$$

Если тело уравновешено $\Rightarrow \Sigma\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{N} = const$ (ЗСМИ)

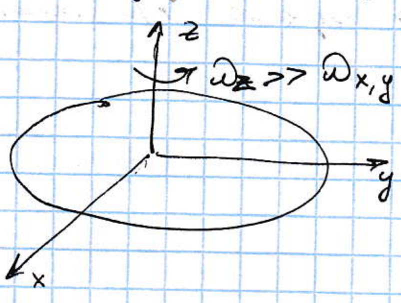
В общем случае у нас есть вращение вокруг 3х осей, тогда:

$N_x = J_x \omega_x$
$N_y = J_y \omega_y$
$N_z = J_z \omega_z$

$$\Rightarrow \vec{N} = J_x \omega_x \cdot \vec{i} + J_y \omega_y \cdot \vec{j} + J_z \omega_z \cdot \vec{k}$$

Приближённая теория гироскопа.

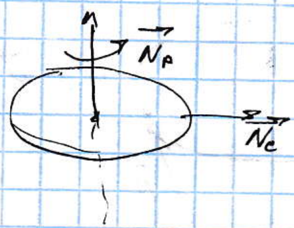
Опр. Тело, имеющее ось симметрии и обладающее большой угловой ск-тью вращения вокруг этой оси, будем называть гироскопом.



Тогда можно пренебречь МИ по x и y.

$$\vec N = \vec i J_x \omega_x + \vec j J_y \omega_y + \vec k J_z \omega_z$$

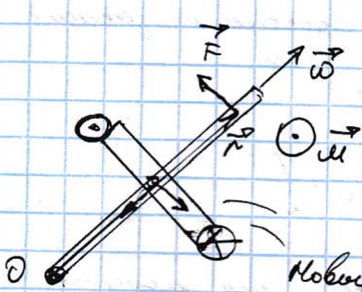
Пример: Земля



$$\frac{d\vec N}{dt} = \sum \vec M$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta \vec N = \int \vec M dt$$



Новые компоненты скорости.

$$\vec N = J \vec \omega$$

$$\vec M = [\vec r; \vec F]$$

но $d\vec N = \vec M dt$

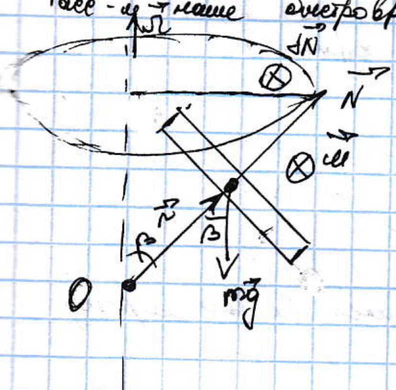
=> Следовательно ось будет вращаться, туда же куда направлен момент силы.

24

Прецессия.

Сделаем момент силы непрерывнодействующим.

Расс-м наше быстровращ. тело;



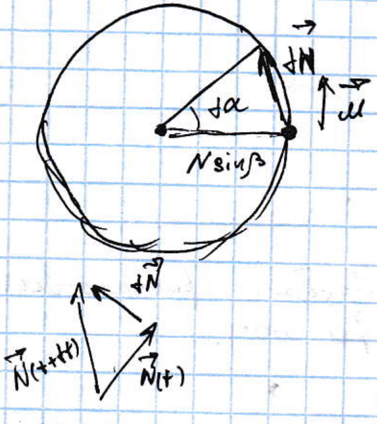
Уравнение моментов:

$$\vec M = [\vec r, \vec F]$$

$$M = rmg\sin\beta$$

$$d\vec N = \vec M dt$$

Вид сверху:



В результате и $\vec N$ начинает смещаться по окружности

За dt повернулось на $d\alpha$

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\to dN = rmg\sin\beta\, dt$$

$$\parallel$$

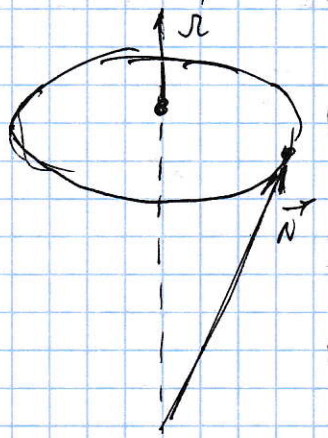
$$N\sin\beta \cdot d\alpha$$

$$N\sin\beta \frac{d\alpha}{dt} = rmg\sin\beta$$

$$\left\{\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{mgr}{N}\right\}$$ — угловая скорость прецессии

$$N = J\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{mgr}{N} = \frac{mgr}{J\omega}}$$



$$[\vec\Omega\,\vec N] = \vec M$$ — основное ур-е приближенного гироскопа.

Замечание 1. Угловая ск-ть прецессии не зависит от угла наклона оси.
$(\Omega \neq f(\beta))$

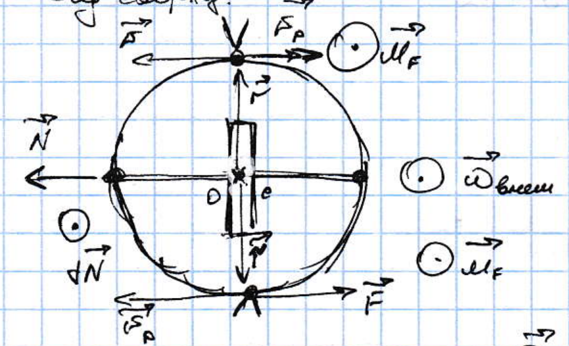
Замечание 2. $\Omega \sim \frac{1}{J}$; $\Omega \sim \frac{1}{\omega}$

Чем больше угловая ск-ть или момент инерции, тем меньше прецессия.

26

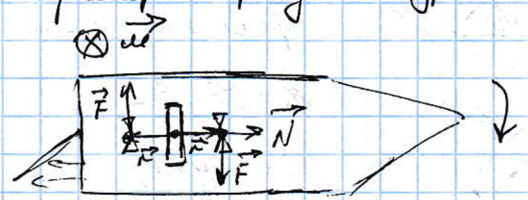
Гироскопические силы.

Вид сверху:



По III з-ну Ньютона: $\vec F = -\vec F_p$.

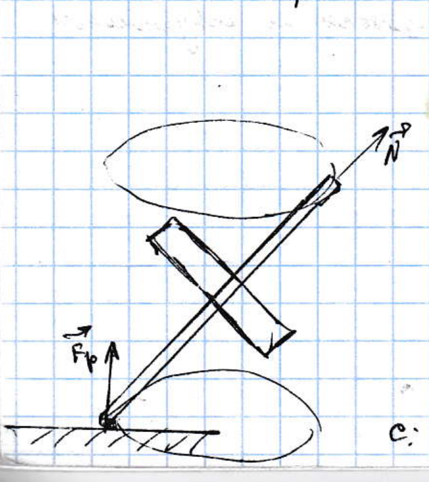
Пример: пароход с турбиной.



$\vec F$ — пытается повернуть гироскоп (когда пароход поворачивает.

$\vec F_p$ — это и есть гироскопические силы. (т.е. силы, возник в гироскопе для противодействия внешним приложенным силам)

Гироскоп без закрепленной точки.



т. О теперь не закреплена. Удобнее расписывать ур-е моментов отн. центра масс.

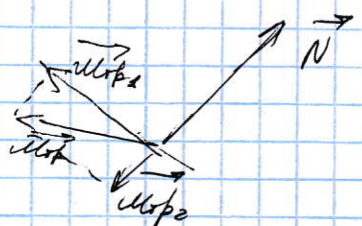
с: $\frac{d\vec N_c}{dt} = \vec M_{F_p} = [\vec r, \vec F_p]$ => Момент импульса

Если есть трение

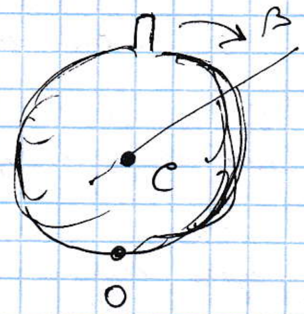
будет меняться за счёт сил реакции.

1 – ось волчка будет устанавливаться вертикально.

2 – уменьшает ск-ть вращ-я и волчок замедляется



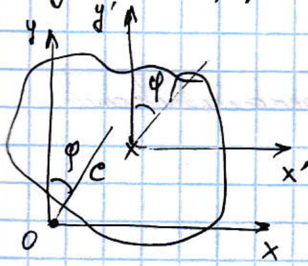
Китайский волчок:



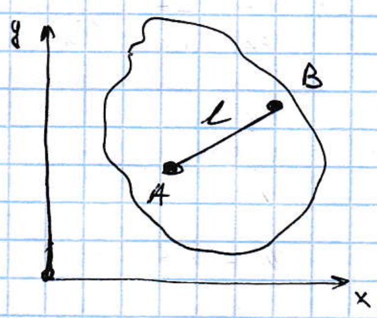
9.03.2021. 27

Плоское движение.

– движение, при котором любая точка тела описывает плоскую траекторию



(x, y, φ)



(x_A, y_A)

(x_B, y_B)

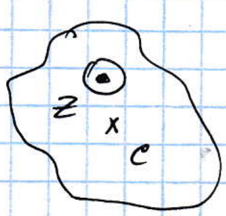
AB = const (не изменяется в пр-ве)

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2 = const$$

Динамика плоского движения твёрдого тела.

1) $m\vec{a}_c = \sum \vec{F}^{внеш}$ (по сути II з-н Ньютона) ~ разобьётся по напр. осей.

2) Ур-е моментов, относительно оси, проходящей через центр масс.



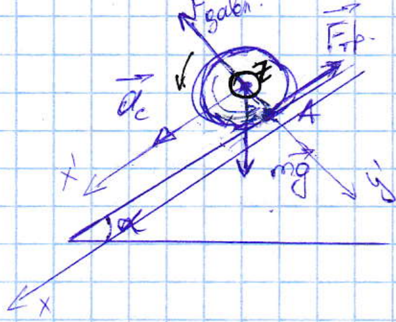
Ось берётся перпенд. тем плоскостям, в которой лежит траектория тела.

Так удобно описывать вращение движ. тела.

Момент инерции отн. центра масс:

$$I_c \frac{d\omega_z}{dt} = \sum M_z$$ (сумма моментов внешних сил.)

Пример: Скатывание сплошного диска.

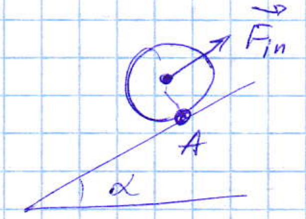


m, α, нет проскальзывания, R – не нужен

$a_c = ?$ $F_{тр} = ?$

Ox: $ma_{cx} = mg\sin\alpha - F_{тр.}$ (1)

Относительно сист. отсч. x' и y' тело просто вращ. Сила инерции приложена к центру масс диска.



Момент силы инерции = 0, т.к. проходит через центр масс.

$$\frac{mR^2}{2}\frac{d\omega_z}{dt} = R\cdot F_{тр.}$$ (2)

$\vec M_{тр.} = [\vec r, \vec F_{тр}]$

__Кинематическая связь.__

Ск-ть нижней точки отн. неподвижной с.о.

$$\underset{\text{отн. не подв. с.о.}}{\vec V_A} = \vec V_c + \underset{\text{= отн. подв. с.о.}}{\vec V_A'} = 0!$$ (т.к. нет проскальзывания)

$V_A' = \omega R$

$V_c - \omega R = 0$

Если в проекции: $V_{cx} - \omega_z R = 0$ (3) $\Big|\cdot \frac{d}{dt}$

$$a_{cx} = \frac{d\omega_z}{dt}\cdot R$$ (3')

Решаем систему: $a_{cx} = \dfrac{2g\sin\alpha}{3}$

$F_{тр.} = \dfrac{mg\sin\alpha}{3}$

Сохраняется ли энергия?

---

31 Кинетическая энергия при плоском движении.

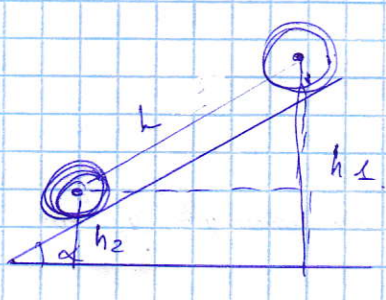
Wк. при плоском движении.

Теорема Кёнига: $W_k = W_k^* + \frac{MV_c^2}{2}$ – смт.

W_k^* – кин. эн. м. точек в той с.о, где центр масс неподвижен

Для диска: $W_k = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$

Сохраняется ли мех. энергия $W_{мех.}$ при скатывании диска с наклонной плоскости?



$a_c = \frac{2g\sin\alpha}{3}$

$\omega = \frac{V_c}{R}$, $I_c = \frac{mR^2}{2}$

$\frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} + mgh = const$

$V_c^2 = 2aL$; $\omega^2 = \frac{V_c^2}{R^2}$

$h_1 - h_2 = L\sin\alpha$

Если всё подставить в положение 1 и 2, то всё равно

$\underline{W_{мех} = const.}$

$A_{тр.} = 0$ (почему?)

28

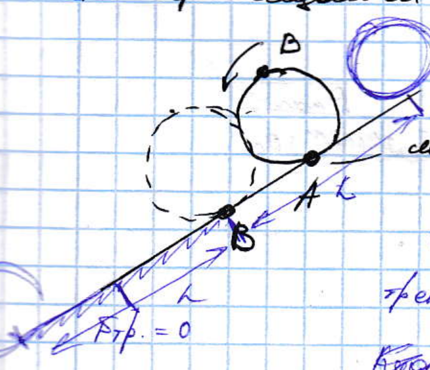
Мгновенная ось вращения.

– при плоском движении т.т., его движение за беск. малый пром. времени всегда можно представить как беск. малый поворот вокруг неподвижной оси.

↓

такая ось называется мгновенной осью вращения.

В каждый момент времени эта ось неподвижна отн. лабораторной системы координат. В разные моменты времени она перемещается так же как и т.б.

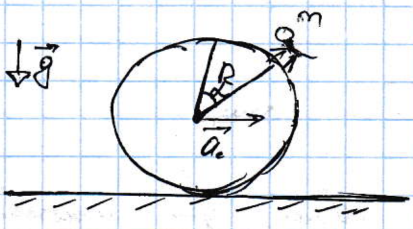


мгновенная ось

Что будет если влетит цилиндр, где нет трения (?) (изменится a_c, $F_{тр.} = 0$)

~~Куда~~ Где будет мгновенная ось после прохождения пути L?

Задача из Яковлева (§46, задача №7)
(Сивухин.)

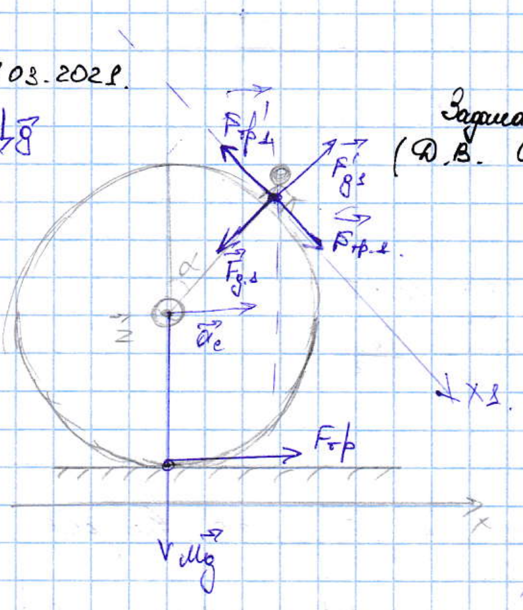


Полый цилиндр.
M — масса цил. $\Rightarrow I = MR^2$

m — масса собаки.
Собака находится всё время на одной и той же высоте.
Нет проскальзывания.

a_c — ?

11.03.2021.



Задача на плоское движение.
(Д.В. Сивухин §48, №7.)

Дано: M, m, α, полый цилиндр, g, P_{max}.

$a_c = ?$ $t = ?$

Решение: $\vec{a}_c = \vec{a}$;

$$M\vec{a}_c + m\vec{a} = M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{F}_g + \vec{F}_{тр}$$

① $Ox \parallel (M+m)a_c = F_{тр}$;

② Ox_1: $ma_c\cos\alpha = -F_{тр1} + mg$;

$(F_{тр.1} = F'_{тр.1})$

Уравнение моментов: $I = MR^2$ (цилиндр полый)

③ $I\dfrac{d\omega_z}{dt} = RF_{тр.1} - RF_{тр}$; $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}_{тр}]$, $r = R$.

Кинематическая связь: $= V_{cx} - \omega_z R$ $\Big| \dfrac{d}{dt}$;

$$a_{cx} = R\frac{d\omega_z}{dt}$$

$a = a_{cx} = \dfrac{mg\sin\alpha}{2M + m(1+\cos\alpha)}$ — из ур-ий 1-4. $W_k = \dfrac{MV_c^2}{2} + \dfrac{MR^2\omega^2}{2} + \dfrac{mV_c^2}{2} = \left(M + \dfrac{m}{2}\right)V_c^2$

$\omega R = V_c$

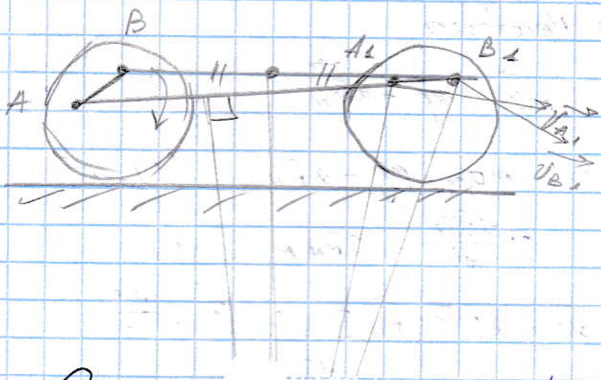
$\dfrac{dW_c}{dt} = P$, $2\left(M + \dfrac{m}{2}\right)V_c \cdot \underbrace{\dfrac{dV_c}{dt}}_{a_c} = P$; $\Rightarrow V_{c\,max} = \dfrac{P_{max}}{2\left(M + \frac{m}{2}\right)a_c}$

$$V_c = a_c \cdot t$$

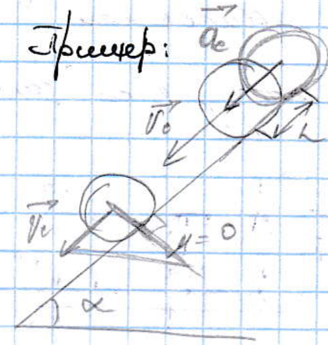
$$t^* = \frac{V_{c\,max}}{a_c} = \frac{P_{max}}{2\left(M + \frac{m}{2}\right)a_c^2}$$

Замечания по поводу мгновенной оси вращения.

Катящийся цилиндр.



Пример:



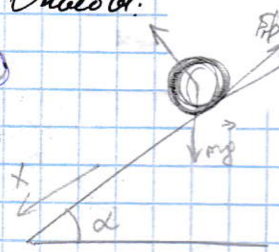
$I=\frac{mR^2}{2}$; $a_c=\frac{2g\sin\alpha}{3}$

$h=R$;

$V_c^2=2a_c h$; $\omega=\frac{V_c}{R}=const$

Опыты.

(1)



Цилиндры, скатывающиеся с наклонной пл-ти (полый и неполый)

$I_1=\frac{mR^2}{2}$; $I_2=mR^2$

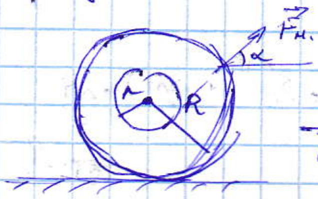
$a_{c1}>a_{c2}$; $ma_{cx}=mg\sin\alpha-F_{тр}$ (1)

$\frac{I}{R\cdot R}\cdot R\frac{d\omega_z}{dt}=F_{тр}$;

$R\frac{d\omega_z}{dt}=a_{cx}$; $\left(m+\frac{I}{R^2}\right)\cdot a_{cx}=mg\sin\alpha$

$a_{cx}=\frac{mg\sin\alpha}{\left(m+\frac{I}{R^2}\right)}$

(2) Катушка с ниткой. Вид сбоку



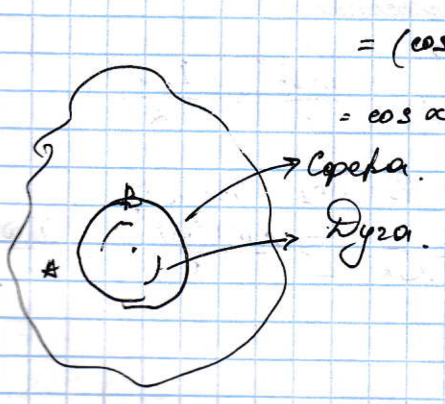
$\overrightarrow{a_{cx}}$ („послушная") или $\overleftarrow{a_{cx}}$ („непослушная")

Теорема Леонардо-Эйлера.

$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$; $e^{i(\alpha+\beta)}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}=$

$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=$

$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta+i(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)$

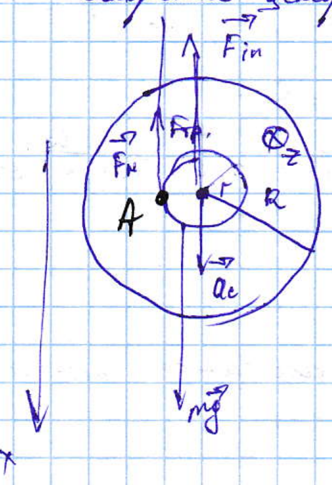


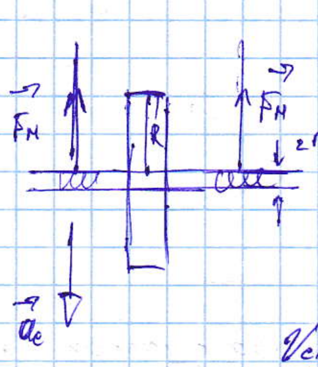
16.03.2021 г. 27

Маятник (диск) Максвелла.

Уравнение динамики плоского движения твёрдого тела.
Пример – маятник Максвелла.

Ускорение центра масс, 2-ой закон Ньютона.





$$m\vec{a}_c = m\vec{g} + 2\vec{F}_н$$

$$ox: \; ma_{cx} = mg - 2F_н \qquad (1)$$

$$J\frac{d\omega_z}{dt} = 2F_н r \qquad (2)$$

$$\vec{M} = 2[\vec{r};\vec{F}_н]; \quad I = \frac{mR^2}{2}$$

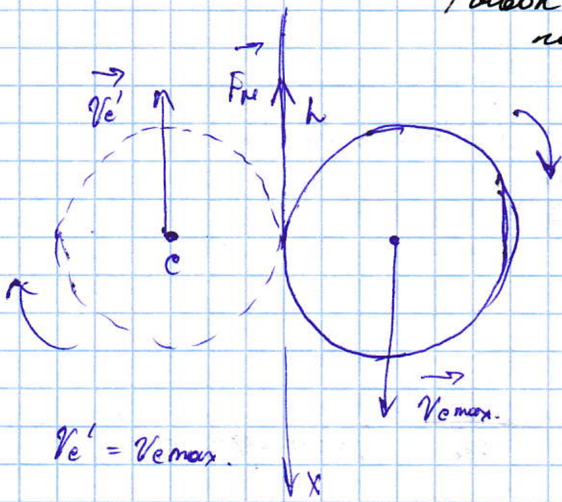
$$V_{cx} - \omega_z r = 0; \quad a_{cx} = \frac{d\omega_z}{dt}\cdot r$$

$$a_{cx} = \frac{2gr^2}{R^2+2r^2}, \quad R >> r, \quad a_{cx} << g.$$

$$2F_н = mg\cdot\frac{R^2}{R^2+2r^2} \approx mg.$$

$$S_x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_x}$$

Рывок нити в нижнем положении.



$V_c' = V_{cmax}$.

$$a = const;$$

$$v^2 - v_0^2 = 2aS; \quad V_{cmax} = \sqrt{2ah}$$

$v_0 = 0$

Δt – промежуток времени, за который меняется V_{cx}.

$$-mV_{cmax} - (mV_{cmax}) = -(2F_н^{max} + mg)\cdot\Delta t;$$

$$\Delta t = \frac{\pi r}{V_{cmax}} \qquad \pi r - ?$$

$$F_{нmax} = \frac{mg}{2} + \frac{m\sqrt{2a_{cx}h}}{\pi r} = \Delta F_н.$$

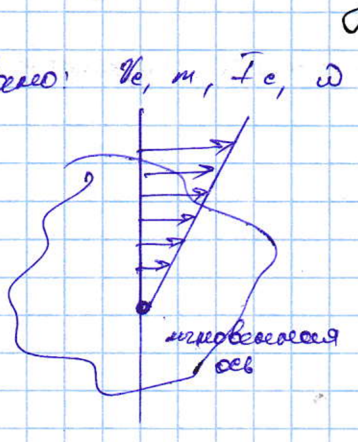
---

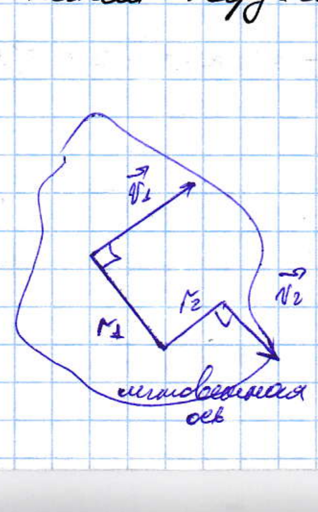
31 21 вопрос.:

Кинетическая энергия при плоском движении твёрдого тела.

Дано: V_c, m, I_c, ω

$$W_к = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$



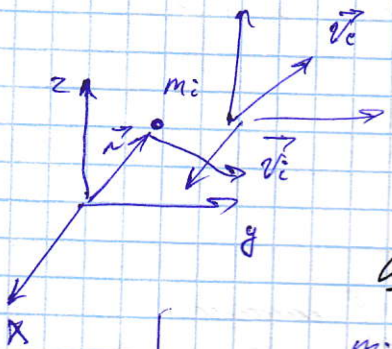


$$V_1 = \omega r_1; \quad V_2 = \omega r_2.$$

$$W_к = \sum\frac{\Delta m_i(\omega r_i)^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Теорема Кёнига справедлива для любого набора материальных частиц!

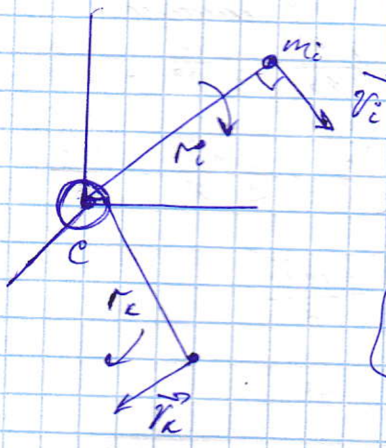
Теорема Кёнига:

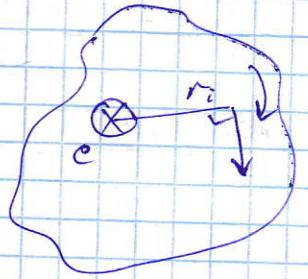


$$W_k = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}$$

$$W_k = \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{\sum m_i (V_i^*)^2}{2} \to W_k^*$$

Центр масс: $\vec r_c = \frac{\sum m_i \vec r_i}{\sum m_i} \to \vec V_c = \frac{\sum m_i \vec V_i}{\sum m_i}$





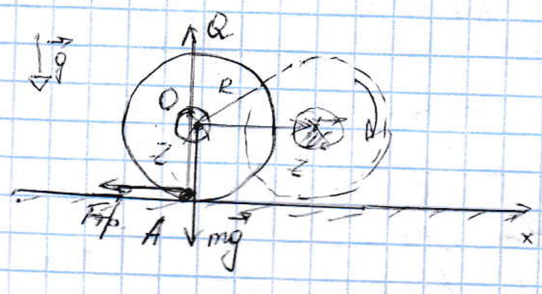
$V_i = \omega r_i$

$$\sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\sum \Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum(\Delta m_i r_i^2) \to I_c$$

29

Качение симметричного тела по горизонтальной плоскости.

(1)



Дано: m, R, V_0, μ | Найти: $\omega(t) = ?$

В начальный момент толкнули сообщив ск-ть V_0 ($F_{тр.}$ скольжения)

II з-н Ньютона:

OX: $m a_{cx} = -F_{тр} = -\mu Q$ $\Rightarrow \boxed{a_{cx} = -\mu g}$ (1)

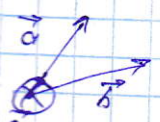
Oy: $Q = mg$

Ур-е моментов через центр масс: $I = \frac{mR^2}{2}$

$$\frac{mR^2}{2} \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = \mu m g R \quad ; \quad \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{2\mu g}{R} \quad (2)$$

$V_{cx} = V_0 - \mu g t$

$\vec c = [\vec a \times \vec b]$



из (2) $\to$ $\omega_z(t) = \frac{2\mu g}{R} t$

Рано или поздно ск-ть нижней точки обратится в ноль.

$$V_0 - \mu g t_0 = \omega_z(t_0) R$$

$\Rightarrow v_0 = 3\mu g t_0 \quad \rightarrow t_0 = \frac{v_0}{3\mu g}$

А дальше, если пренебречь эффектом трения качения, тогда при $t \geq t_0$ цилиндр будет катиться почти равномерно ($F_{тр.} = F_{тр. кач.}$)

При $t \geq t_0 \rightarrow v_{cx} = \frac{2}{3} v_0 = v_c$

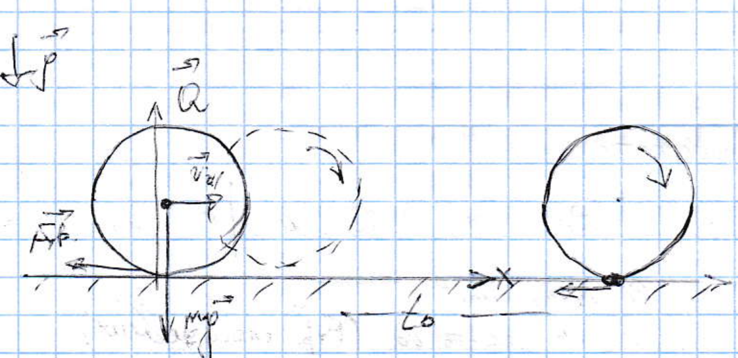
$\omega_z = \omega = \frac{2}{3}\frac{v_0}{R}$

Рассчитаем кин. энергию: $W_{k0} = \frac{mv_0^2}{2}$ - в начале

$W_k = \frac{4}{9}\left(\frac{mv_0^2}{2}\right) + \frac{mR^2}{2\cdot 2}\cdot\frac{4}{9}\frac{v_0^2}{R^2} = \frac{\cancel{4}^{2}}{9}\frac{mv_0^2}{\cancel{2}_{1}} + \frac{mv_0^2}{9} = \frac{3}{9}\frac{mv_0^2}{\cancel{2}} = \frac{mv_0^2}{3}$ - в конце $t \geq t_0$

$\Delta W_k = W_k - W_{k0} = \frac{mv_0^2}{3} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_0^2}{6}$

$\Delta W_k = A_{тр.}$



L_+ - перемещение центра масс в положит. сторону по оси.

$L_+ = \bar{v}_c \cdot t_0 = \frac{5}{6} v_0 \cdot \frac{v_0}{3\mu g} = \frac{5 v_0^2}{18 \mu g}$

средняя

$\langle v_c \rangle = \frac{v_0 + \frac{2v_0}{3}}{2} = \frac{5}{6} v_0$

$t_0 = \frac{v_0}{3\mu g}$

L_- - перемещение нижней точки (напр. против оси.)

Ск-ть точек на окружности отн. центра масс $= \omega R$

$L_- = \frac{0 + \frac{2v_0}{3}}{2} \cdot t_0 = \frac{v_0}{3} \cdot \frac{v_0}{3\mu g} = \frac{v_0^2}{9\mu g} = \frac{2}{18}\frac{v_0^2}{\mu g}$

$\langle \vec{v}_A \rangle$

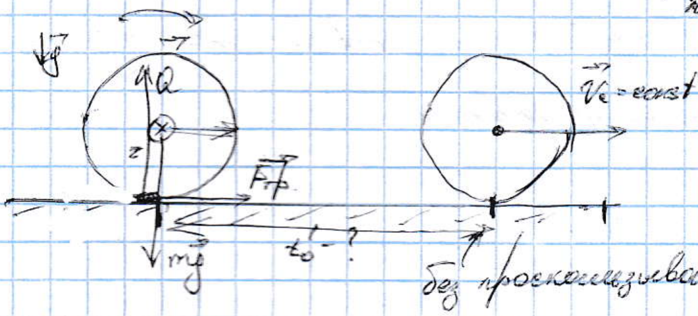
$A_{тр.}$ - действует "назад"

$\Rightarrow A_{тр} = -\mu m g (L_+ - L_-) = -\mu m g\left(\frac{5}{18}\frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{2}{18}\frac{v_0^2}{\mu g}\right) =$

$= -\frac{1}{6}\frac{\mu m g}{\mu g} v_0^2 = -\frac{m v_0^2}{6}$

2 вариант:

Раскрученный до ω_0 цилиндр, поставили на шероховатый стол.



$$\omega_0 = \frac{V_0}{R} \quad ; \; V_{0c} = 0 \,!$$

$$ma_{cx} = \mu Q = \mu mg \quad (1)$$

$$a_{cx} = \mu g.$$

$$V_{cx} = \mu g t \quad (2)$$

Уравнение моментов относительно Oz:

$$\frac{mR^2}{2} \frac{d\omega_z}{dt} = -\mu mg R \quad \rightarrow \quad \frac{d\omega_z}{dt} = -\frac{2\mu g}{R} \quad (2)$$

$$\omega_z = \omega_0 - \frac{2\mu g t}{R} \quad (3)$$

Делать как в прошлой задаче!

$t = t_0'$ – нет проскальзывания.

Из (1) и (3):
$$\mu g t_0' = \omega_z(t_0') \cdot R$$

$$\mu g t_0' = \left(\omega_0 - \frac{2\mu g t_0'}{R}\right) R$$

$$\omega_0 = \frac{3\mu g t_0'}{R} \Rightarrow t_0' = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$$

$\Rightarrow$ Время, чтобы покатился без проскальзывания то же самое.

Если $\omega_0 = \frac{V_0}{R} \Rightarrow t_0' = \frac{V_0}{3\mu g}$.

$$W_{k0} = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{\omega_0^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 R^2}{4} \text{ – в нач. момент.}$$

$$W_k(t_0') = \frac{m\omega_0^2 R^2}{2 \cdot 9} + \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{\omega_0^2}{2 \cdot 9} = \frac{\cancel{3} mR^2\omega_0^2}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{9}_{3}} = \frac{mR^2\omega_0^2}{12}$$

$$V_{ex}(t_0') = \mu g t_0' = \frac{\omega_0 R}{3}$$ ск-ть центра масс.

$$\omega = \frac{\omega_0}{3}$$

Пусть дальше катится равномерно.

$$W_k - W_{k0} = \frac{m\omega_0^2 R^2}{12} - \frac{m\omega_0^2 R^2}{4} = -\frac{m\omega_0^2 R^2}{6}$$

Если посчитать $A_{тр.} = -\mu mg(L_- - L_+)$

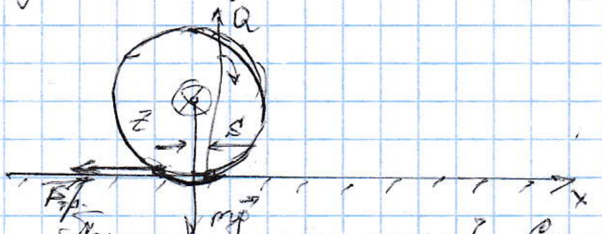
момент $t > t_0$

ну по $\frac{5V_0^2}{18\mu g}$

Трение качения.

~ не определяется просто так. (зависит от формы объекта)

Пусть цилиндр катится без проскальзывания.



$a_{cx} < 0$

Почему замедляется? Считается, что дорога проминается, к тому же деформируется цилиндр.

Если тело просто катится и никто его не тянет → сила трения качения.

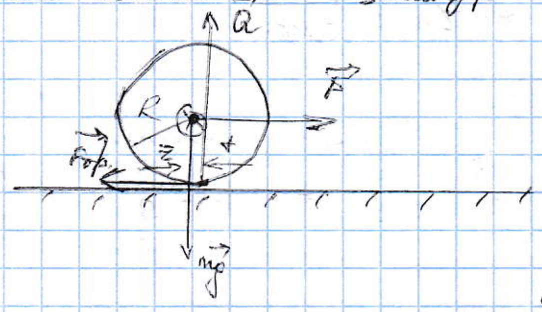
$M_{тр\,z} > 0$

Сила Q смещается вправо на расстояние δ (Но численно $Q = mg$.)

Некоторые данные для цилиндра (δ - и есть коэф. трения качения)

Материал тела (цил.)	Поверхность	δ - коэф. трен. кач. (мм.)
Тв. дерево	Тв. дерево	0,8
Резина	Бетон	15 - 35
Зак. сталь	Зак. сталь	0,01

Если потянем этот цилиндр с некоторой силой F (цилиндр неподвижен)



$a_c = 0$

$F_{тр.} = F$

$Q = mg$

$M_{тр.} = F_{тр.} \cdot R = mgd = M_Q$, где $d \le \delta$

$d = \delta$ начинается качение,

тогда $F_{тр}^* \cdot R = mg\delta$

$F_{тр}^* = \frac{\delta}{R} mg.$

коэф. сопротивления качения.

Для колеса (резинового)

Дорога	$\frac{f}{k}$
Асфальтобетон	0,015 – 0,02
Грунт. дорога (сухая.)	0,03 – 0,035