

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского  
Радиофизический факультет

---

**Кафедра теории колебаний**

**Отчёт по лабораторной работе**  
**Вынужденная синхронизация**

**Выполнили (430 гр):**  
Горюнов О.А., Индисов А.И.

2023 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретическая часть</b>	<b>3</b>
1.1	Введение . . . . .	3
1.2	Структурная схема и обобщенная модель генератора . . . . .	3
1.3	Синхронизация мягкого режима . . . . .	4
1.3.1	Модели генератора в мягком режиме возбуждения . . . . .	4
1.3.2	Динамические режимы генератора и аттракторы моделей . . . . .	5
1.3.3	Динамика укороченной модели . . . . .	6
1.4	Синхронизация жёсткого режима . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Описание экспериментальной установки</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Практическая часть</b>	<b>14</b>
3.1	Изучение явления захватывания при мягком режиме возбуждения автогенератора . . . . .	14
3.2	Изучение явления захватывания при жёстком режиме возбуждения . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>17</b>

## Цель работы

Изучить явление вынужденной синхронизации на примере моделей лампового генератора в мягком и жёстком режиме возбуждения.

# 1 Теоретическая часть

## 1.1 Введение

**Синхронизация колебаний** - согласование частот, фаз или др. характеристик сигналов, генерируемых взаимодействующими колебательными системами. Различают взаимную синхронизацию колебаний и **внешнюю (вынужденную)** синхронизацию, когда характеристики колебаний системы изменяются под действием внешней силы. Вынужденную синхронизацию по частоте колебаний называют захватыванием частоты.

**Захватывание частоты** - явление, состоящее в том, что автоколебательная система (автогенератор) при воздействии на неё периодически изменяющейся во времени внешней силы совершает колебания не с частотой автоколебаний  $\omega_0$ , а с частотой  $\omega$  внешнего воздействия. Захват частоты осуществляется благодаря нелинейности и диссипативности и имеет место при условии, что частоты  $\omega_0$  и  $\omega$  не слишком отличаются друг от друга, то есть для некоторого ограниченного диапазона частотных расстройек.

## 1.2 Структурная схема и обобщенная модель генератора

Схема генератора и графики анодно-сеточной и сеточной характеристик лампы приведены на рис.1. Уравнение генератора, составленные без учета реакции анода и межэлектродных емкостей имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u = M \frac{di_a(u)}{dt} + E_0 + E \cos \omega t \quad (1)$$

$$i = C \frac{du}{dt} + i_c(u)$$

где  $i_a$  и  $i_c$  - анодный и сеточный токи лампы. Если напряжения на сетке положительны, но не велики, то сила тока в цепи сетки будет мала по сравнению с силой анодного тока  $i_c \ll i_a$ . На практике к условию отсутствия сеточного тока можно подойти достаточно близко, выбирая режим работы лампы так, чтобы напряжение на сетке не переходило в область положительных значений, тогда  $i_c(u) \approx 0$ .

Во многих случаях характеристики лампы могут быть аппроксимированы полиномами третьей или пятой степени, симметричными относительно рабочей точки, при этом

переменное напряжение на сетке лампы удобно рассматривать относительно постоянного сеточного смещения  $E_0$ , т.е.  $u = u + E_0$ . При аппроксимации характеристик лампы полиномом третьей степени возникающий автоколебательный режим всегда является **мягким**, а в случае полинома пятой степени он может быть **жестким**.

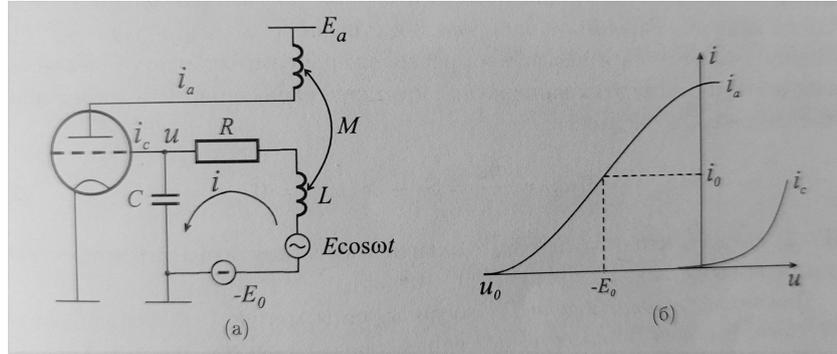


Рис. 1: Схема лампового генератора с гармоническим воздействием (а), графики анодно-сеточной и сеточной характеристик лампы (б).

### 1.3 Синхронизация мягкого режима

#### 1.3.1 Модели генератора в мягком режиме возбуждения

Рассмотрим случай, когда автономный генератор находится в режиме мягкого самовозбуждения. Для этого случая достаточно характеристику лампы аппроксимировать полиномом третьей степени  $i_a(u) = i_0 + S_0u - \gamma u^3$ , где напряжения отсечки и насыщения расположены симметрично относительно рабочей точки. Для этих напряжений крутизна характеристики лампы обращается в ноль, в частности:

$$S(u_0) = \frac{di_a}{du} = S_0 - 3\gamma(u_0)^2 = 0 \tag{2}$$

зависимость крутизны характеристики лампы приобретает вид  $S(u) = S_0(1 - u^2/u_0^2)$ .

Для исследования модели (1) используется метод Ван-дер-Поля, который справедлив для систем, близких к линейному осциллятору. Введем безразмерное время  $\tau = \omega t$  и перепишем систему (1):

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \frac{1}{LC\omega^2}u = \frac{MS_0 - RC}{LC\omega} \left[ 1 - \frac{MS_0}{MS_0 - RC} \frac{u^2}{u_0^2} \right] \frac{du}{d\tau} + \frac{E}{LC\omega^2} \cos\tau \tag{3}$$

Введем безразмерные параметры:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \mu = \frac{\omega_0^2(MS_0 - RC)}{\omega}, \quad \varepsilon_0 = \frac{E\omega_0^2}{u_0\omega^2} \sqrt{\frac{MS_0}{MS_0 - RC}}$$

и переменную

$$x = \frac{u}{u_0} \sqrt{\frac{MS_0}{MS_0 - RC}}$$

В итоге уравнение (3) примет вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}x = \mu(1 - x^2)\frac{dx}{d\tau} + \varepsilon_0 \cos\tau \quad (4)$$

где параметры  $\mu$  и  $\varepsilon_0$  должны быть малыми ( $\mu \ll 1$ ,  $\varepsilon_0 \ll 1$ ).

Вводя дополнительно безразмерные параметры:  $\mu\xi = (\omega^2 - \omega_0^2)/\omega^2$  - относительная расстройка частот и  $\mu\varepsilon = \varepsilon_0$  - амплитуда внешнего воздействия, получим:

$$\ddot{x} + x = \mu[(1 - x^2)\dot{x} + \varepsilon \cos\tau + \xi x] \equiv \mu R(x, \dot{x}, \tau) \quad (5)$$

Нелинейная динамическая система (5) определена в неавтономном фазовом пространстве  $U = x, \dot{x}, \tau(\text{mod}2\pi)$  и трехмерном пространстве параметров  $\Lambda = 0 < \mu \ll 1, \varepsilon \geq 0, -\infty < \xi < +\infty$

Далее, по методу Ван-дер-Поля, от (5) переходим к автономной системе укороченных уравнений ( $\tau_1 = \mu\tau$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau_1} &= \rho(1 - \rho^2) + \varepsilon \sin\varphi \equiv P(\rho, \varphi, \xi, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\tau_1} &= -\xi + \frac{\varepsilon}{\rho} \cos\varphi \equiv Q(\rho, \varphi, \xi, \varepsilon) \end{aligned} \quad (6)$$

которая определена на фазовом полуцилиндре  $V^+ = \varphi(\text{mod}2\pi)$  и зависит от двух параметров  $\varepsilon$  и  $\xi$ .

### 1.3.2 Динамические режимы генератора и аттракторы моделей

При изучении динамики автогенератора, находящегося под внешним гармоническим воздействием, в поле зрения исследователя находятся два режима: *режим синхронизации* и *режим биений*. Эти режимы в фазовых пространствах динамических моделей имеют свои образы, которые для моделей (5) и (6) различны.

Режим синхронизации в неавтономном фазовом пространстве  $U$  модели (5) представляется устойчивой периодической траекторией с периодом  $T_\tau = 2\pi \frac{m}{n}$ , где отношение  $\frac{m}{n}$  - рациональное число. В автономном фазовом пространстве  $V^+$  модели (6) образом режима синхронизации являются устойчивое состояние равновесия. В модели (6) устойчивое состояние равновесия соответствует режиму синхронизации на основном тоне.

Образом режима биений в неавтономном фазовом пространстве модели (5) является устойчивый инвариантный тор (рис.2д). Проекция инвариантного тора модели (5) на плоскость  $(x, \dot{x})$  и соответствующая этому тору осциллограмма  $(x, \tau)$  приведены на рис.2е.

В автономном фазовом пространстве  $V^+$  модели (6) режиму биений соответствуют устойчивые предельные циклы. В силу цилиндричности фазового пространства модели (6)

предельные циклы в этом пространстве могут быть двух типов: вращательные (охватывающие фазовый цилиндр) и колебательные (не охватывающие фазовый цилиндр). Размер и период предельного цикла характеризуют закон модуляции - амплитуда предельного цикла определяет амплитуду модуляции, а величину  $\Omega_m = 1/T_c$  определяет частоту модуляции, где  $T_c$  - период предельного цикла.

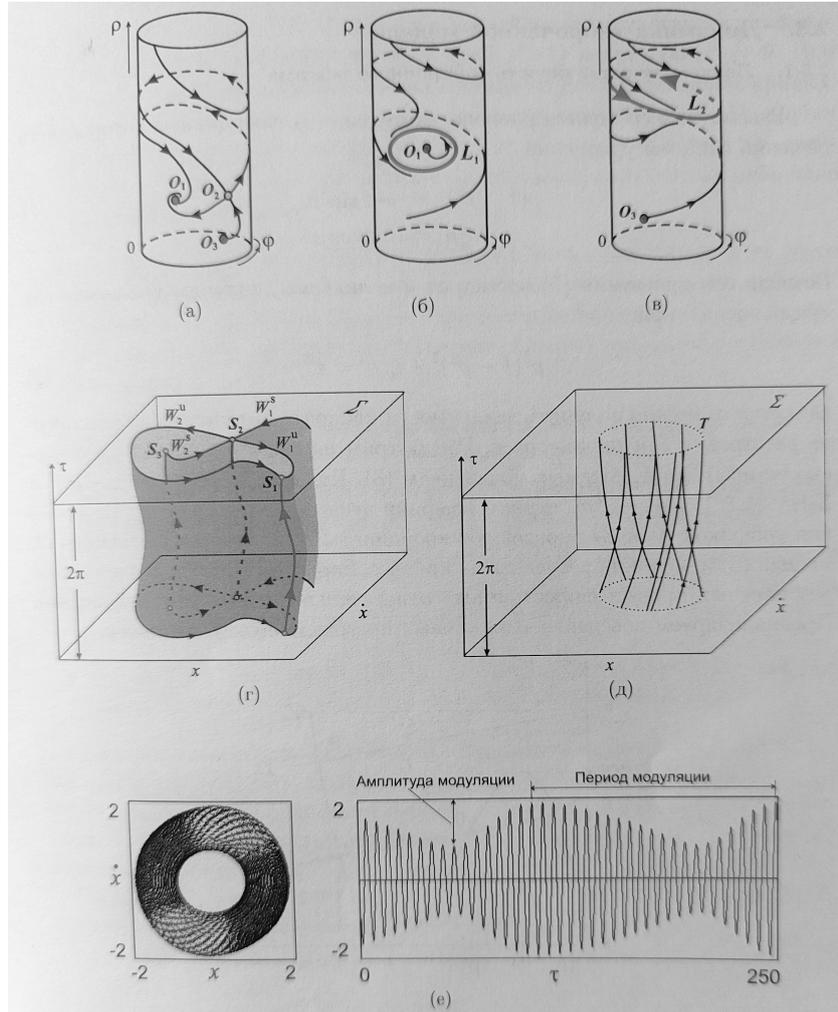


Рис. 2: Примеры фазовых портретов автономной модели (а-в); неавтономной модели (г); качественное изображение инвариантного тора в неавтономном фазовом пространстве (д); (x,y) - проекция инвариантного тора модели (5) и соответствующая ему осциллограмма (е).

### 1.3.3 Динамика укороченной модели

Рассмотрим состояния равновесия модели (6), координаты которых есть решения системы уравнений:

$$\rho(1 - \rho^2) = -\varepsilon \sin \varphi \tag{7}$$

$$\xi \rho = \varepsilon \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \rho^2(1 - \rho^2)^2 + \xi^2\rho^2 = \varepsilon^2 \tag{8}$$

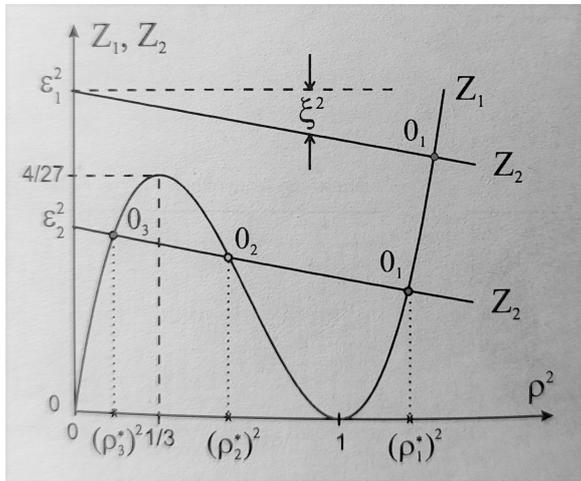


Рис. 3: Вид вспомогательных кривых  $Z_1$  и  $Z_2$  для построения резонансных кривых в случае мягкого автоколебательного режима.

из которого можно получить зависимости квадрата амплитуды колебаний  $\rho^2$  от расстройки  $\xi$  и параметра  $\varepsilon$ . Рассмотрим вид и устойчивость резонансных кривых, определяемых уравнением (8). Полагая  $Z_1(\rho^2) = \rho^2(1 - \rho^2)^2$  и  $Z_2(\rho^2, \varepsilon^2, \xi^2) = \varepsilon^2 - \xi^2\rho^2$ , графики этих функций изображены на рис.3. Пересечения графиков  $Z_1$  и  $Z_2$  определяют координаты  $\rho_i^*$  состояний равновесия  $O_i$  модели (6) и точки на резонансных кривых. Варьируя  $\xi$  и  $\varepsilon$ , получаем серию резонансных кривых симметричных относительно прямой  $\xi = 0$  (рис.4а).

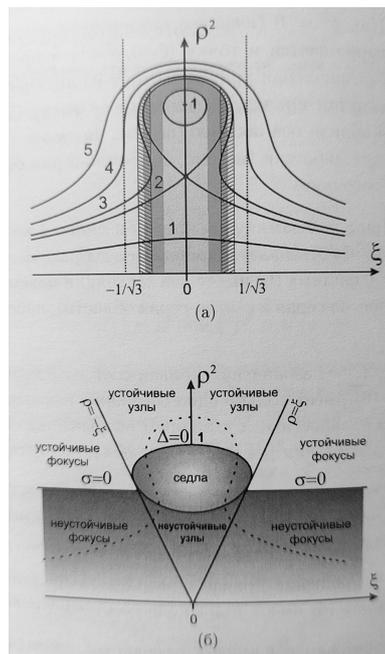


Рис. 4: Резонансные кривые (а) и области устойчивости резонансных кривых (б) в случае мягкого автоколебательного режима.

Более подробно анализ всех кривых можно посмотреть в *методическом пособии* к данной лабораторной работе.

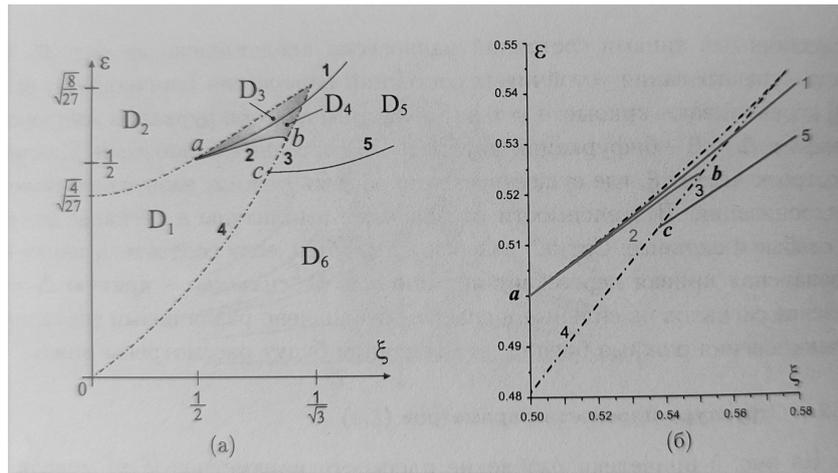


Рис. 5: Структура плоскости параметров  $(\xi, \epsilon)$  модели (6): (а) - качественное изображение, (б) - фрагмент реальной картины.

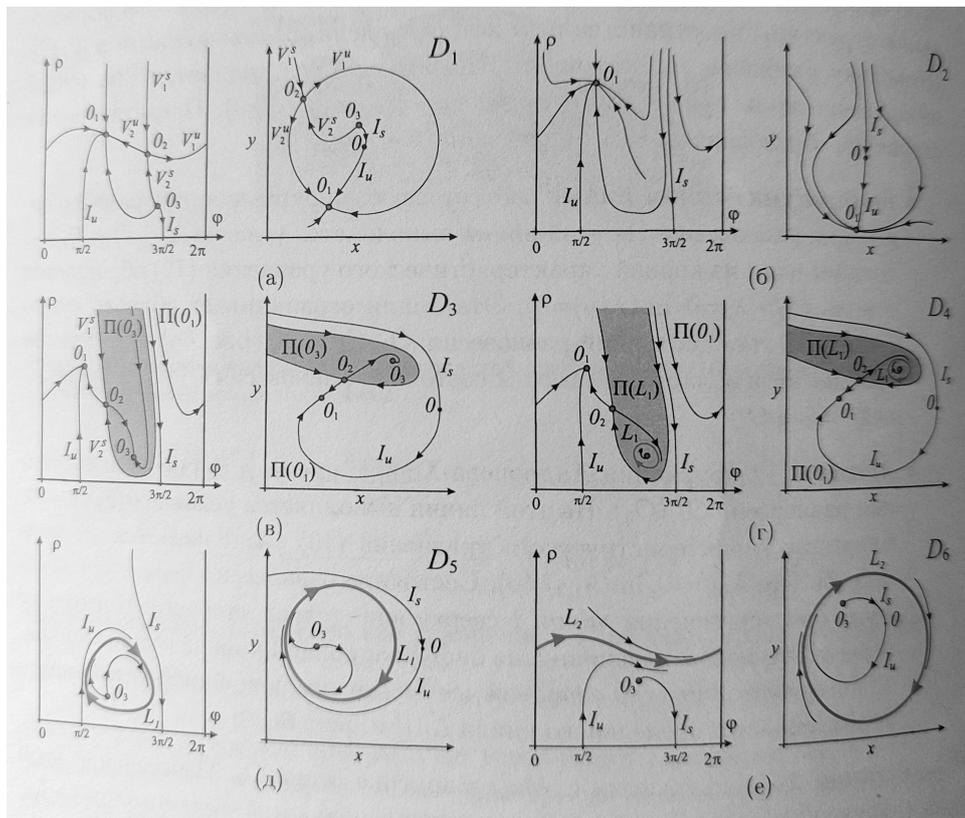


Рис. 6: Грубые фазовые портреты модели (6) и их аналоги в декартовой системе координат.

Синхронный режим при увеличении  $\xi$  всегда сменяется режимом биений. В режиме биений колебания являются модулированными и характеризуются амплитудой и частотой модуляции. Сценарии возникновения модулированных колебаний зависят от амплитуды внешнего сигнала  $\epsilon$ . Как правило, выделяют два механизма нарушения синхронизации

и возникновения модулированных колебаний, различаемые по амплитуде внешнего сигнала. Если  $\varepsilon^2 < 1/4$  входной сигнал считают *слабым*, а при  $\varepsilon > 8/27$  - *сильным*. Эти случаи характеризуются отсутствием гистерезисных явлений при вариациях параметра  $\xi$ , но различаются сценариями озникновения модуляции. Существует небольшой интервал  $1/4 < \varepsilon^2 < 8/27$ , где поведение генератора при вариациях  $\xi$  не однозначно.

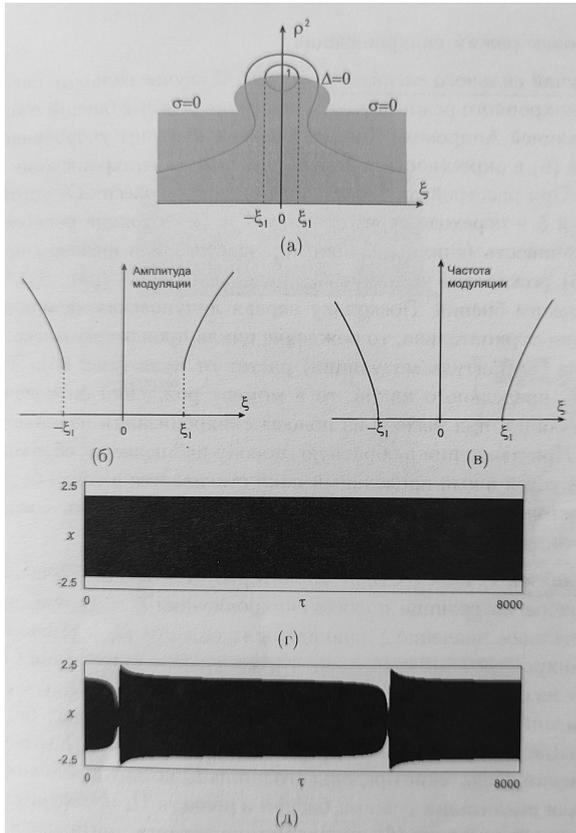


Рис. 7: Резонансная кривая (а), зависимости амплитуды (б) и частоты (в) модуляции от расстройки  $\xi$ , вид осциллограмм на границе полосы синхронизации: синхронный режим (г) и режим биений (д) в случае слабого сигнала.

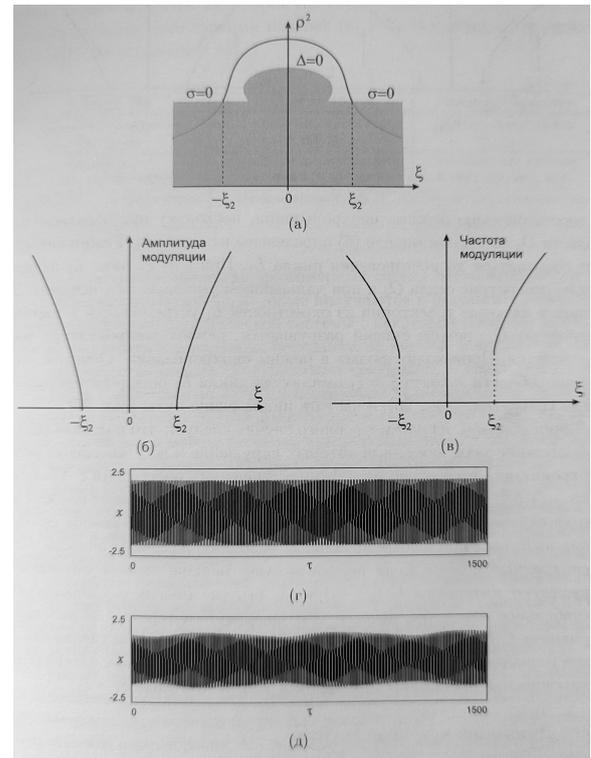


Рис. 8: Резонансная кривая (а), зависимости амплитуды (б) и частоты (в) модуляции от расстройки  $\xi$ , вид осциллограмм на границе полосы синхронизации: синхронный режим (г) и режим биений (д) в случае сильного сигнала.

При малых  $\mu$  между особыми отраекториями моделей (6) и (5) существует определённая связь, которая отражена в таблице ниже:

Модель (6)	Модель (5)	Сечение Пуанкаре
состояния равновесия $O_1, O_2, O_3$	периодические траектории $S_1, S_2, S_3$	неподвижные точки $S_1, S_2, S_3$
сепаратрисы $V_1^u, V_2^u, V_1^s, V_2^s$	двумерные многообразия $W_1^u, W_2^u, W_1^s, W_2^s$	одномерные кривые $W_1^u, W_2^u, W_1^s, W_2^s$
периодические траектории $L_1 (L_2)$	инвариантный тор $T$	замкнутая инвариантная кривая $T$

### 1.4 Синхронизация жёсткого режима

Рассмотрим случай, когда автономный генератор находится в режиме *жёсткого* самовозбуждения. Фазовый портрет, характеризующий этот режим, представлен на рис.9а. На портрете устойчивое состояние равновесия  $O$  и устойчивый предельный цикл  $L$  разделены неустойчивым циклом  $S$ . Траектории, начинающиеся внутри неустойчивого предельного цикла, будут идти к состоянию равновесия, а траектории, начинающиеся вне цикла  $S$ , будут наматываться на устойчивый предельный цикл  $L$ . В генераторе в зависимости от начальных условий будет устанавливаться или состояние равновесия или автоколебания. Для возникновения автоколебаний в автогенераторе системе необходимо дать некоторый "толчок", выводящий начальные условия из области притяжения состояния  $O$ . Существование жесткого режима возможно в генераторе, если характеристики лампы аппроксимируются полиномом пятой степени:

$$i_a(u) = i_0 + S_0u + \gamma u^3 - \beta u^5 \tag{8}$$

В жёстком режиме поведение неавтономной системы, также как и автономной, зависит от начальных условий. Если генератор находится в автоколебательном режиме, то, при наличии внешнего периодического воздействия, возможно захватывание частоты и реализация синхронного режима. Если же генератор не возбужден, то система ведет себя как нелинейный колебательный контур, в котором при изменении частоты внешней силы можно наблюдать явление нелинейного резонанса.

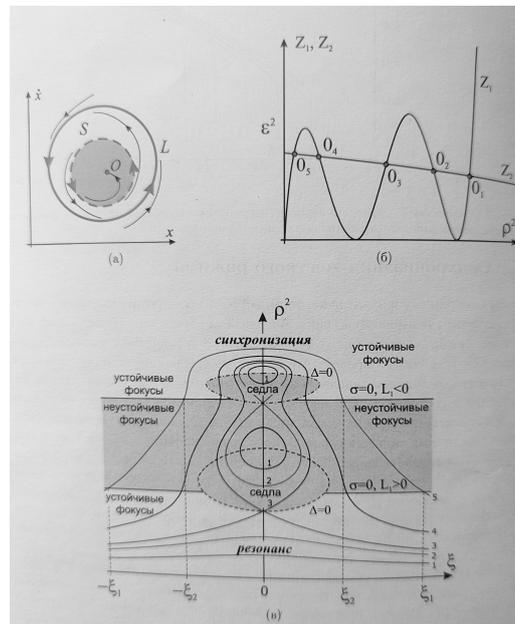


Рис. 9: Фазовый портрет (а), вид вспомогательной кривой для построения резонансных кривых (б), резонансные кривые и области их устойчивости (в) в случае жесткого автоколебательного режима..

Методика исследования явления синхронизации в случае жесткого режима аналогична случаю мягкого режима и подробно разбирается в *методическом пособии*. Поэтому далее приводятся лишь основные соображения и картинки.

Особенности синхронизации жесткого режима связаны с наличием у автономного генератора двух устойчивых режимов: автоколебательного и невозбужденного генератора. Если генератор изначально находится в автоколебательном режиме, то сценарии синхронизации внешним сигналом не отличаются от сценариев синхронизации мягкого режима. Если подействовать внешней силой на невозбужденный генератор, то динамика неавтономного генератора становится более разнообразной. Сценарии динамического поведения определяются начальными значениями амплитуды и частоты внешнего воздействия, а так же путями их дальнейшего изменения. Все сценарии для рассматриваемого генератора могут быть выявлены из совокупного рассмотрения резонансных кривых (рис.9в), пространства параметров и фазовых портретов (рис.10 и рис.11).

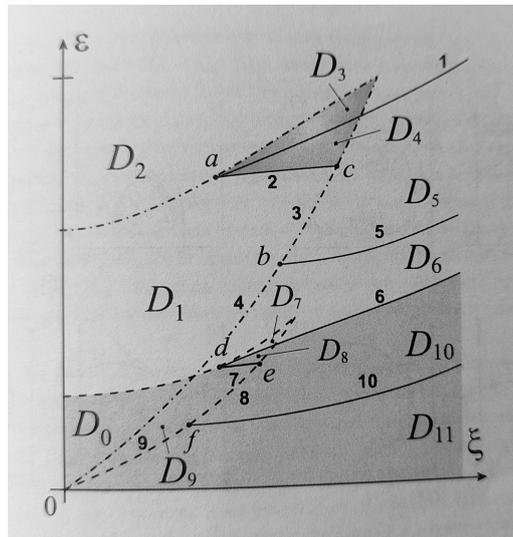


Рис. 10: Структура плоскости параметров  $(\xi, \epsilon)$  модели (6) в случае жесткого автоколебательного режима.

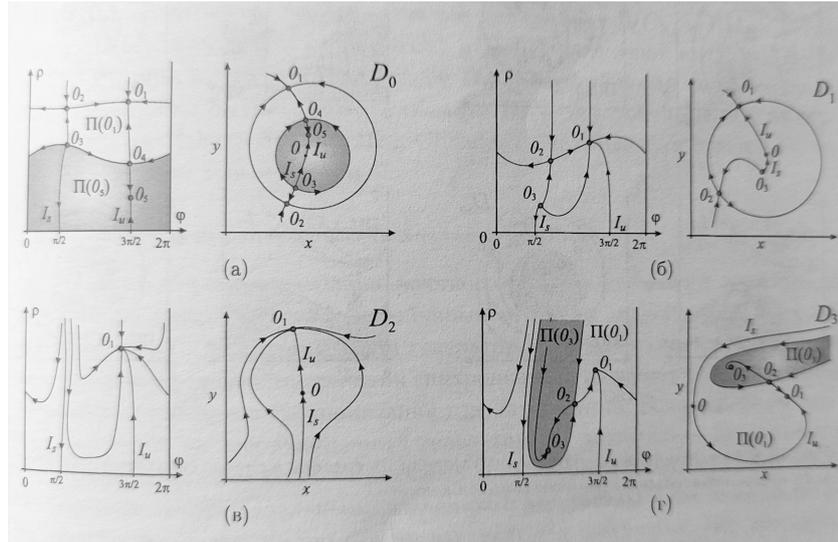


Рис. 11: Фазовые портреты укороченной модели генератора в случае синхронизации жесткого автоколебательного режима.

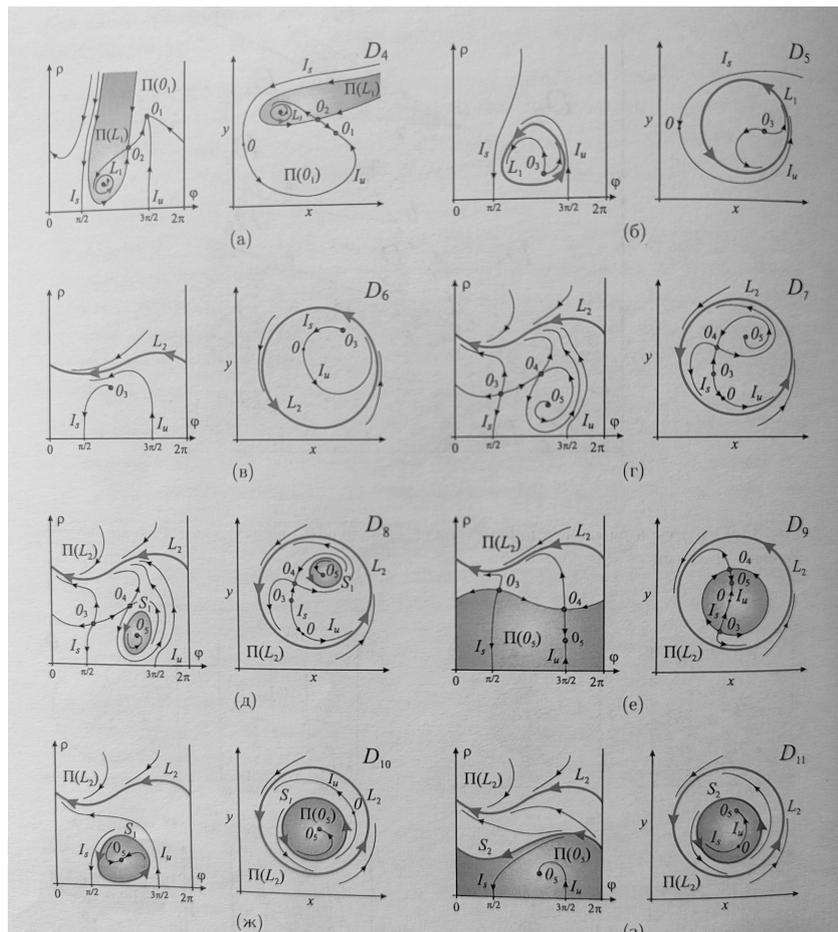


Рис. 12: Фазовые портреты укороченной модели генератора в случае синхронизации жесткого автоколебательного режима.

## 2 Описание экспериментальной установки

На рис.13 приведены общий вид и схема лабораторной установки для изучения явления вынужденной синхронизации. Установка состоит из: синхронизируемого автогенератора с изменяемым коэффициентом возбуждения (1), генератора внешней силы регулируемой частоты и амплитуды (2), осциллографа (3).

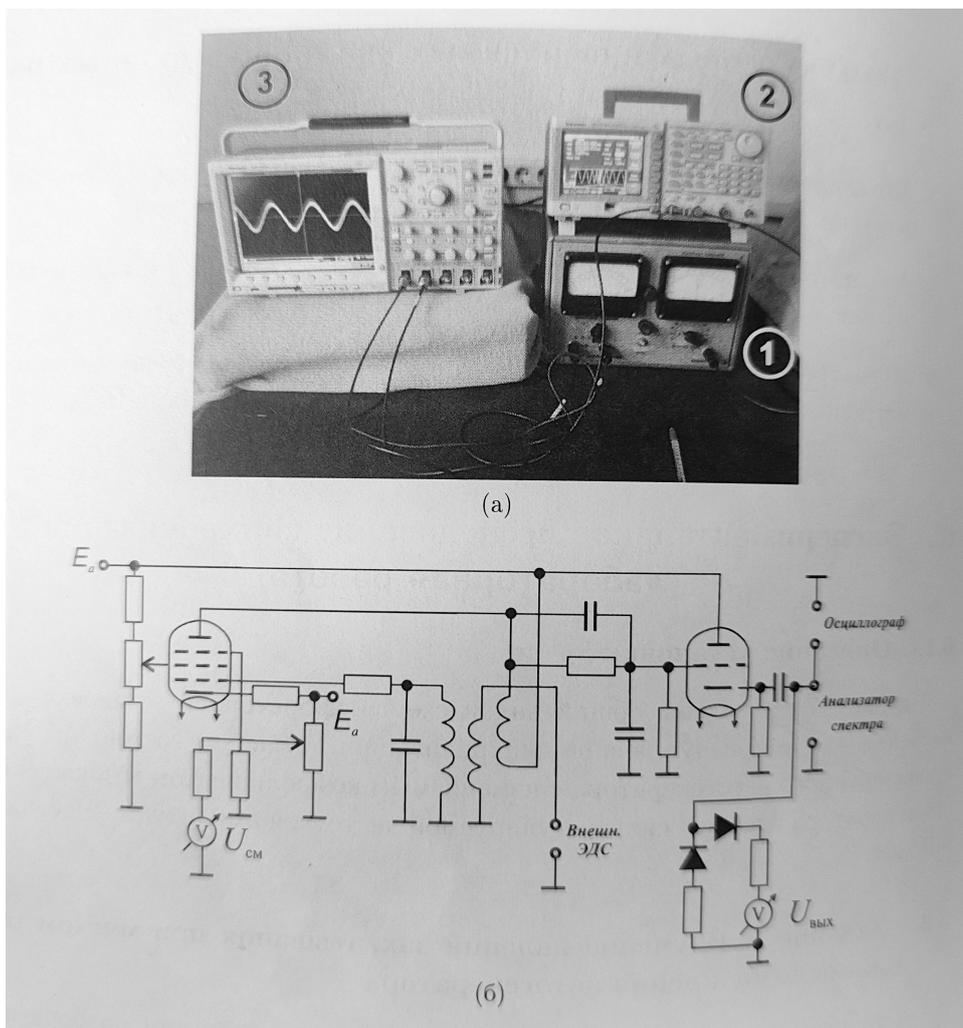


Рис. 13: Общий вид (а) и схема (б) лабораторной установки для исследования явления вынужденной синхронизации.

### 3 Практическая часть

#### 3.1 Изучение явления захватывания при мягком режиме возбуждения автогенератора

1) Перед началом работы, выбрали ток смещения таким образом, чтобы автогенератор был в мягком режиме. Для определения режима изменяли коэффициент обратной связи, если фазовый портрет на осциллографе изменялся плавно и без наличия гистерезиса, то это и был мягкий режим.

Измерили при заданном токе смещения амплитуду автоколебаний и их частоту:

$$U_{\text{авт}} = 25 \pm 1 \text{ мВ}, \quad f_{\text{авт}} = 544 \text{ кГц}$$

2) Сняли зависимость амплитуды колебаний от внешнего сигнала для различных амплитуд внешнего воздействия. Соответствующий график представлен на рис.14.

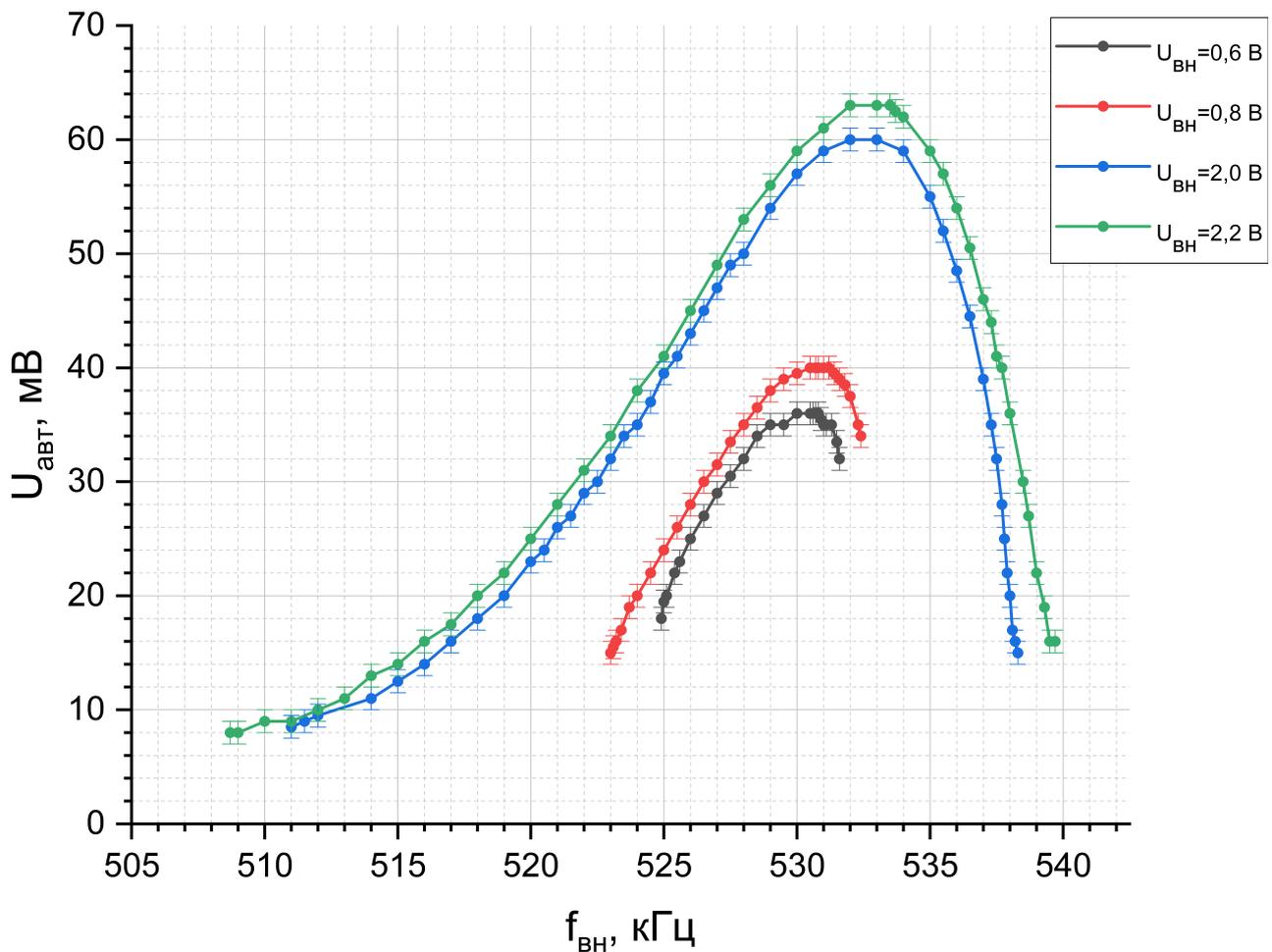


Рис. 14: АЧХ при мягком режиме возбуждения.

**3-6)** В зависимости от амплитуды внешнего воздействия определили полосу удержания (осуществляется при переходе из синхронного режима в режим биений) и полосу захвата (осуществляется при переходе из режима биений в режим синхронизации). А также соответствующие амплитуды автоколебаний на границах. Полученные результаты представлены в таблице ниже.

$U_{вн}, мВ$	Полоса удержания		Полоса захвата		Амплитуда на границах	
	Левая граница	Правая граница	Левая граница	Правая граница	Левая граница	Правая граница
	$f_{min}, кГц$	$f_{max}, кГц$	$f_{min}, кГц$	$f_{max}, кГц$	$U_l, мВ$	$U_r, мВ$
600	524,8	531,4	524,8	531,4	18	32
800	522,9	532,4	522,9	532,3	14	32
1000	520,5	533,1	520,6	533,1	10	34
1200	518,5	533,9	518,6	533,9	10	35
1400	516,4	534,8	516,7	534,8	10	32,5
1600	514,7	535,6	514,7	535,6	9	34
1800	512,8	536,6	512,9	536,5	9	30
2000	510,6	538,2	511	538,2	8	15
2200	508,9	539,6	509,1	539,6	8	15

По таблице видно, что с увеличением амплитуды внешней силы и полоса удержания, и полоса захвата увеличиваются. При этом видно, что при некоторых значениях границы полос не совпадают. Амплитуда на границах соответствует АЧХ.

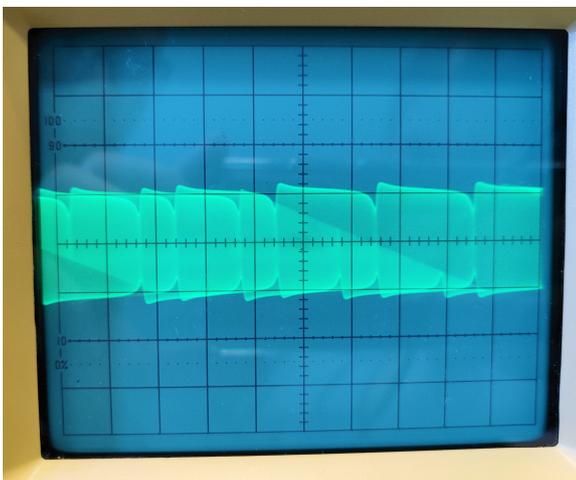


Рис. 15: Осциллограмма на границе при слабом сигнале.

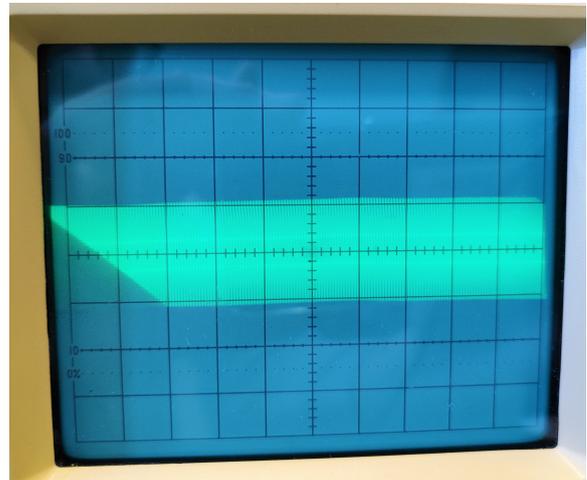


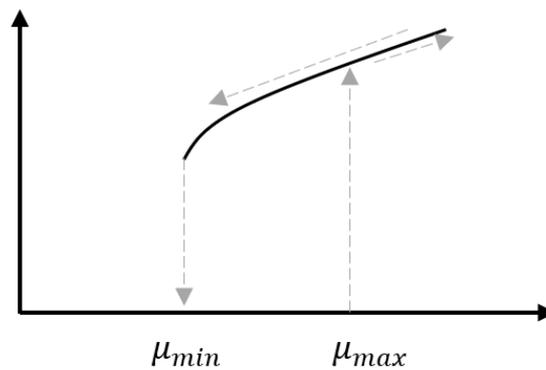
Рис. 16: Осциллограмма на границе при сильном сигнале.

### 3.2 Изучение явления захватывания при жёстком режиме возбуждения

На изначальной установке снять АЧХ не получилось, даже при малых амплитудах внешней силы были частоты, при которых возникали биения. То есть не получалось снять резонансные кривые. Поэтому эксперимент переделали на другой установке со следующими параметрами:

$$U_{см} = 27 \text{ В}, \quad f_{авт} = 423,6 \text{ кГц}$$

Жёстким режим определяли по характерному гистерезису. Сначала при увеличении обратной связи колебания возникали скачком, а при снижении коэффициента их амплитуда уменьшалась и на определенном значении срывалась.



$$\mu_{max} = 90; \quad \mu_{min} = 45.$$

Измерения проводили при значении обратной связи:  $\mu = 55$ .

Графики АЧХ при жёстком режиме возбуждения представлены на рис.17. Чёрная кривая соответствует резонансному случаю. Остальные кривые снимались следующим образом. Перевели автоколебательную систему в невозбужденное состояние, затем с левой границы постепенно увеличивали частоту, доходя до биений и далее, пока биения не начались снова. Затем с правого края уменьшали частоту до биений.

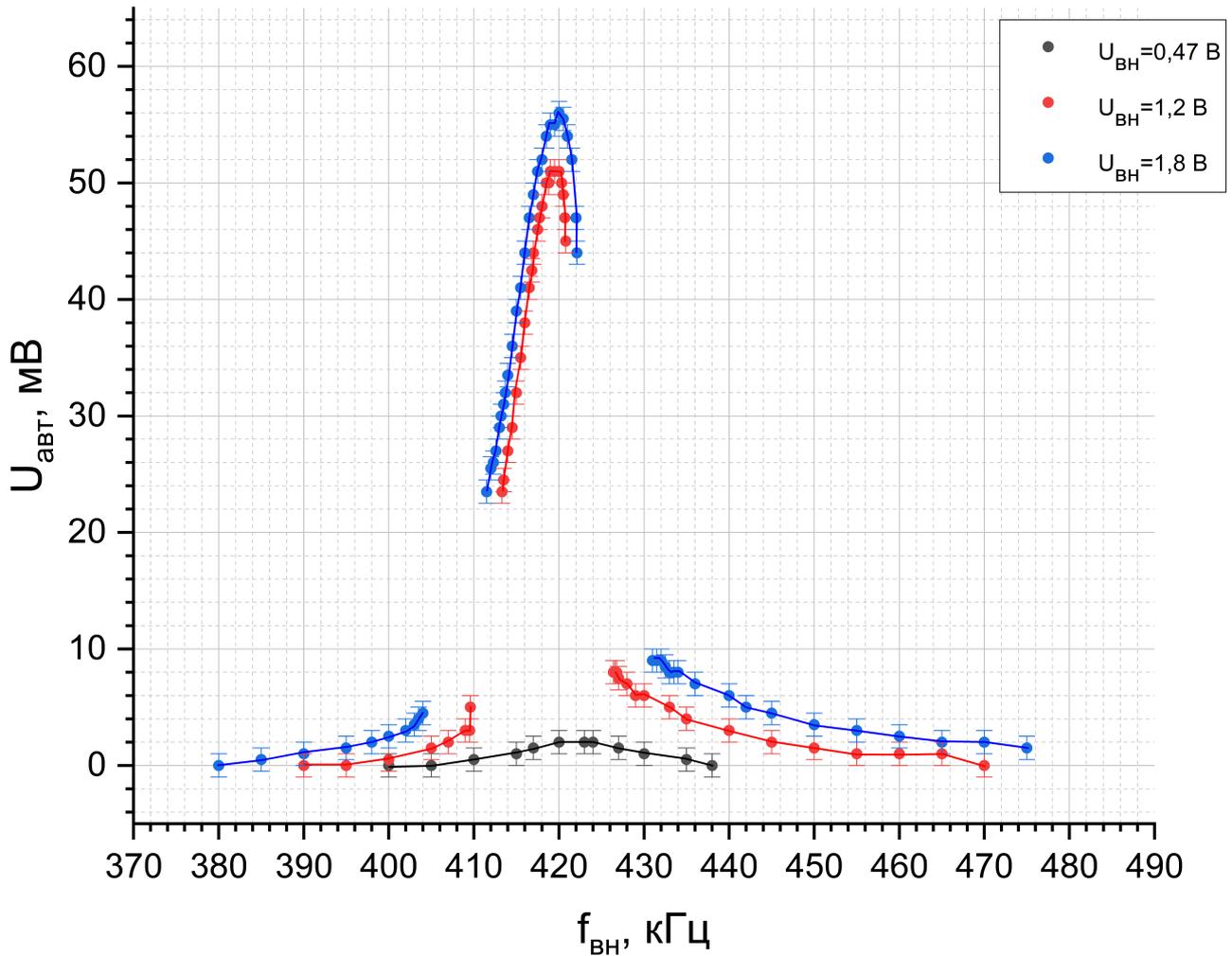


Рис. 17: АЧХ при жёстком режиме возбуждения.

## 4 Вывод

*Выполнив лабораторную работу, мы:*

1) Сняли АЧХ при мягком режиме возбуждения автогенератора. Причём видно, что при увеличении амплитуды внешней силы увеличивается как полоса захвата, так и полоса удержания. В случае сильного сигнала модуляция видна плохо (рис.16), но осциллограмма соответствует рис.8. В случае слабого сигнала видна явно как амплитудная, так и частотная модуляция (можно сравнить с рис.7).

2) При жёстком режиме возбуждения сняли АЧХ в случае резонанса, так и в случае синхронизации. При этом разбиение АЧХ на области с биениями и синхронизацией соответствуют рис.9.