

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Кафедра теории колебаний

**Отчёт по лабораторной работе
Многозвенные LC-фильтры**

**Выполнили студенты 430гр:
Белозеров Ю.А. Бутаков Г.И.**

Нижний Новгород 2022

Содержание

1 Теоретическая часть	3
1.1 Цель работы	3
1.2 Уравнения многозвенного электрического фильтра	3
1.3 Дисперсионное уравнение	5
1.4 Собственные колебания	7
1.5 Вынужденные колебания	8
2 Конкретные виды фильтров	11
2.1 Фильтр низкой частоты (ФНЧ)	11
2.2 Фильтр высокой частоты (ФВЧ)	13
2.3 Полосовой фильтр (ПФ)	15
3 Практическая часть	18
3.1 Фильтр низкой частоты (ФНЧ)	18
3.2 Фильтр высокой частоты (ФВЧ)	20
3.3 Полосовой фильтр (ПФ)	22
4 Вывод.	24

1 Теоретическая часть

1.1 Цель работы

Целью работы является изучение свойств линейных дискретных систем со многими степенями свободы на примере низкочастотного, высокочастотного фильтров, а также полосового фильтра.

1.2 Уравнения многозвенного электрического фильтра

Система, состоящая из цепочки идентичных звеньев, будучи системой с пространственной дисперсией, обладает селективными свойствами в определенной области частот. В зависимости от того, какова область частот, в которой колебания пропускаются практически без искажений, фильтры подразделяются на фильтры низких и высоких частот, полосовые и задерживающие фильтры.

Четырехполюсники, образующие звенья рассматриваемых в работе электрических фильтров, состоят из пассивных элементов: индуктивностей, ёмкостей и сопротивлений. Для большей методической простоты мы будем изучать только *консервативные* фильтры, состоящие из чисто реактивных элементов – индуктивностей и ёмкостей, так называемые LC - фильтры. Общая схема фильтра приведена на рис. 2.1, где введены следующие обозначения: $Z(p)$ – операторный импеданс, $G(p)$ – операторная проводимость, $Z(p)$ и $Z(p)$ – операторные импедансы на входе и выходе фильтра, соответственно, $p = i\omega$, где ω – частота колебаний. При расчетах фильтры могут быть разбиты на так называемые Γ -образные, T -образные и Π -образные звенья. Заметим, что такое деление чисто условное и не влияет на коэффициент передачи рассчитываемого фильтра.

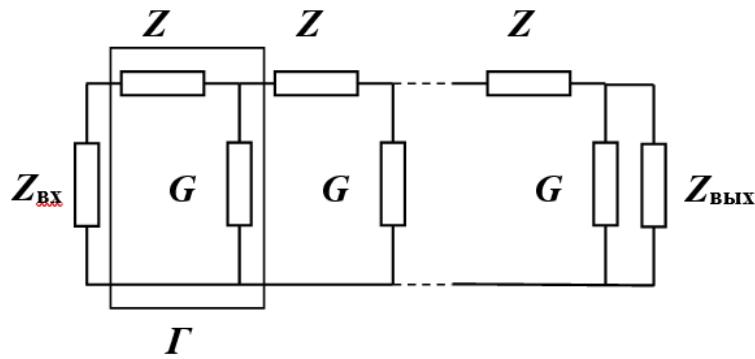


Рис. 2.1

Рассмотрим для примера фильтр, разбитый на Т-образные звенья (см. рис. 2.2), и запишем для него операторные уравнения казистатики.

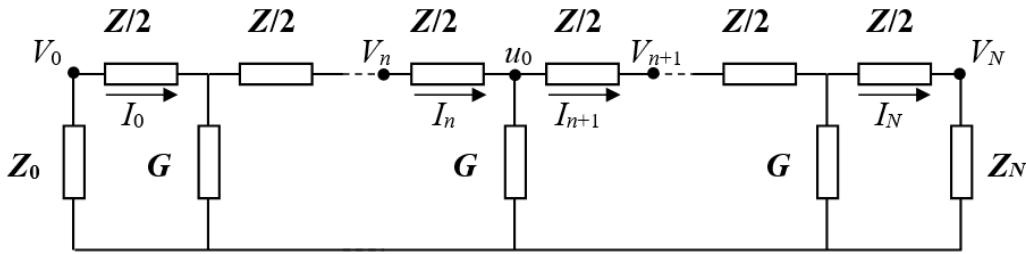


Рис. 2.2

При этом на основании законов Кирхгофа для комплексных амплитуд напряжений V_n и токов I_n , где n – номер звена, будем иметь:

$$\begin{aligned} V_n - u_0 &= \frac{Z}{2} I_n, \\ u_0 - V_{n+1} &= \frac{Z}{2} I_{n+1}, \\ G u_0 &= I_n - I_{n+1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Исключая из этих уравнений u_0 и разрешая их относительно переменных V_{n+1} и I_{n+1} , получим:

$$V_{n+1} = a_{11}(p)V_n - a_{12}(p)I_n, \quad (2.2)$$

$$I_{n+1} = -a_{21}V_n + a_{22}(p)I_n$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + \frac{1}{2}GZ, \quad a_{12} = Z\left(1 + \frac{1}{4}GZ\right), \\ a_{21} &= G, \quad a_{22} = 1 + \frac{1}{2}GZ. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим следующее важное свойство четырёхполюсников. Четырёхполюсники, для которых выполняются условия

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{11}^2 - a_{12} \cdot a_{21} = 1 \quad (2.4)$$

называются взаимными. Для них выполняется теорема взаимности, согласно которой свойства четырёхполюсника не изменяются, если его вход и выход поменять местами. Нетрудно видеть, что T -образное звено представляет собой взаимный четырёхполюсник. В случае Π -образного разбиения на звенья в уравнениях (2.2) следует положить

$$a_{11} = 1 + \frac{1}{2}GZ, \quad a_{12} = Z, \quad (2.5)$$

$$a_{21} = G\left(1 + \frac{1}{4}GZ\right), \quad a_{22} = 1 + \frac{1}{2}GZ.$$

Отсюда следует, что Π -образное звено также удовлетворяет теореме взаимности.

Система (2.2) должна быть дополнена граничными условиями

$$V_0 = -I_0 Z_0, V_N = Z_N I_N \quad (2.6)$$

Исследование явлений, описываемых уравнениями (2.2) при условии (2.6), включает в себя две задачи:

- а) описание собственных колебаний;
- б) описание вынужденных колебаний.

Прежде чем переходить к решению первой задачи, исследуем собственные колебания (2.2) в безграничной цепочке, положив $N \rightarrow \infty$

1.3 Дисперсионное уравнение

Важнейшей особенностью рассматриваемой цепочечной структуры является её периодичность, являющаяся следствием идентичности звеньев и проявляющаяся при $N \rightarrow \infty$ в виде свойства так называемой *трансляционной симметрии*. Это свойство равнозначно свойству инвариантности уравнений (2.1) относительно преобразования трансляции (сдвига) $n \Rightarrow n'$ вида $n' = n + m$, где m – любое целое число. Трансляционная симметрия (2.1) в сочетании с линейностью этих уравнений позволяет искать их решение в виде

$$V_n = A e^{-in\theta}, \quad I_n = B e^{-in\theta} \quad (3.1)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а θ – некоторая величина, подлежащая определению. Она находится из условия существования нетривиального решения алгебраической системы:

$$A(e^{-i\theta} - a_{11}) + B a_{12} = 0 \quad (3.2)$$

$$A a_{21} + B(e^{-i\theta} - a_{22}) = 0$$

получаемой подстановкой (3.2), что, с учетом (2.4), даёт

$$(e^{-i\theta} - a_{11})^2 - a_{11}^2 + 1 = 0 \quad (3.3)$$

или

$$\cos\theta = a_{11} \quad (3.4)$$

Величина θ , определяемая из (3.4), называется постоянной распространения и принимает в общем случае комплексные значения ($\theta = \theta' + i\theta''$). Мнимая часть θ представляет собой декремент (или инкремент) волны, а действительная часть – набег фазы волны на одно звено. При этом θ' связана с длиной волны λ очевидным соотношением

$$\lambda = 2\pi/\theta' \quad (3.5)$$

в котором

$$\lambda = \min |n_1 - n_2| \quad (3.6)$$

где n_1 и n_2 номера ячеек, отвечающих синфазным колебаниям. Поскольку параметр a_{11} является функцией частоты ω , уравнение (3.4) связывает постоянную распространения с частотой и называется *дисперсионным уравнением* системы. Дисперсионное уравнение исчерпывающе характеризует безграничную систему. В случае, когда отсутствует временное и пространственное затухание ($Im\omega = Im\theta = 0$), оно позволяет определить фазовую (V_Φ) и групповую ($V_{\text{гр}}$) скорости волн:

$$V_\Phi = \frac{\omega}{\theta}, \quad V_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\theta} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \quad (3.7)$$

Дисперсионное уравнение (3.4) описывает два типа волн - прямую ($\theta = \theta^+$) и обратную ($\theta = \theta^-$) волну. При этом для фиксированного ω значения θ^+ и θ^- будут отличаться знаком:

$$\theta^- = \theta^+ \quad (3.8)$$

Подставляя θ^+ и θ^- в одно из уравнений системы (3.2), можно найти связь между амплитудами напряжения и тока для прямой и обратной волн:

$$B^+ = G_X A^+, \quad B^- = -G_X A^- \quad (3.9)$$

где

$$G_X = \left(\frac{a_{21}}{a_{12}} \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

- *характеристическая проводимость* фильтра. Наряду с G_X , вводят также обратную ей величину

$$Z_X = \left(\frac{a_{12}}{a_{21}} \right)^{1/2} \quad (3.11)$$

Как отмечалось в начале раздела 1.1, пространственная дисперсия фильтра (описываемая (3.4)) обуславливает его селективные свойства. Для характеристики этих свойств вводят понятие *полосы прозрачности*, а именно полосы частот, в которой $\theta'' = 0$ (отсутствует затухание по переменной n).

Найдём связь ширины полосы прозрачности с параметрами фильтра. С этой целью заметим, что поскольку

$$\sin\theta = ch\theta'' \sin\theta' + ish\theta'' \cos\theta' \quad (3.12)$$

то в полосе прозрачности

$$\sin\theta = \sin\theta' \quad (3.13)$$

Отсюда, в силу (3.3), заключаем, что

$$1 - a_{11}^2 \geq 0 \quad (3.14)$$

или, с учётом (2.3), -

$$GZ\left(1 + \frac{1}{4}GZ\right) \leq 0 \quad (3.15)$$

Из этого условия и находится полоса прозрачности фильтра. Из него, в частности следует, что в полосе прозрачности фильтра характеристический импеданс (3.11) будет действительной величиной.

Вне полосы прозрачности $\sin\theta' = 0$ и, следовательно, $\sin\theta = i\operatorname{sh}\theta''$. С учётом (3.4), будем иметь

$$\operatorname{sh}\theta'' = \pm\sqrt{a_{11}^2 - 1} \quad (3.16)$$

1.4 Собственные колебания

Найдём собственные колебания в цепочке, состоящей из N одинаковых T -образных звеньев, описываемой системой уравнений (2.2) при граничных условиях (2.6). Общее решение такой системы будет представлять собой суперпозицию прямой и обратной волн вида

$$\begin{aligned} V_n &= A_1 e^{-in\theta} + A_2 e^{in\theta} \\ I_n &= B_1 e^{-in\theta} + B_2 e^{in\theta} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для внутренних звеньев прямая и обратная волны распространяются независимо и для них, в силу (3.9), общее решение запишется в виде

$$\begin{aligned} V_n &= A_1 e^{-in\theta} + A_2 e^{in\theta} \\ I_n &= G_X(A_1 e^{-in\theta} + A_2 e^{in\theta}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подставляя это решение в граничные условия (2.6), получим следующую однородную систему уравнений для нахождения амплитуд A_1 и A_2 :

$$(1 + Z_0 G_X) A_1 + (1 - Z_0 G_X) A_2 = 0 \quad (4.3)$$

$$(1 - Z_N G_X) e^{-iN\theta} A_1 + (1 + Z_N G_X) e^{iN\theta} A_2 = 0$$

Отсюда, расписав условие существования ненулевых решений для A_1 и A_2 , найдём *характеристическое уравнение* рассматриваемой системы:

$$1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2iN\theta} = 0 \quad (4.4)$$

где $\Gamma_0 = \frac{A_1}{A_2} = -\frac{1 - Z_0 G_X}{1 + Z_0 G_X}$ - коэффициент отражения от левой границы фильтра, а $\Gamma_N = \frac{A_2 e^{iN\theta}}{A_1 e^{-iN\theta}} = -\frac{1 - Z_N G_X}{1 + Z_N G_X}$ - коэффициент отражения от правой границы фильтра.

Решая совместно дисперсионное уравнение (3.4) и характеристическое уравнение (4.4), найдём спектр *собственных (нормальных) частот* фильтра и соответствующий ему спектр значений постоянной распространения θ . Очевидно, что этот спектр будет зависеть не только от параметров звена фильтра, но и от условий на его концах. Отметим также, что число нормальных частот всегда совпадает с числом степеней свободы системы.

1.5 Вынужденные колебания

Рассмотрим вынужденные колебания в фильтре, составленном из T -образных звеньев, при условии, что на входе фильтра действует источник синусоидальной ЭДС $E = E_0 \cos \omega t$ с внутренним сопротивлением r_0 (см. рис. 2.4). Решение в такой системе можно искать в виде синусоидальных колебаний на частоте внешней силы ω . При этом остаются справедливыми уравнения (2.2), а граничные условия принимают вид:

$$V_0 = E_0 - r_0 Z_0, \quad V_N = Z_N I_N \quad (5.1)$$

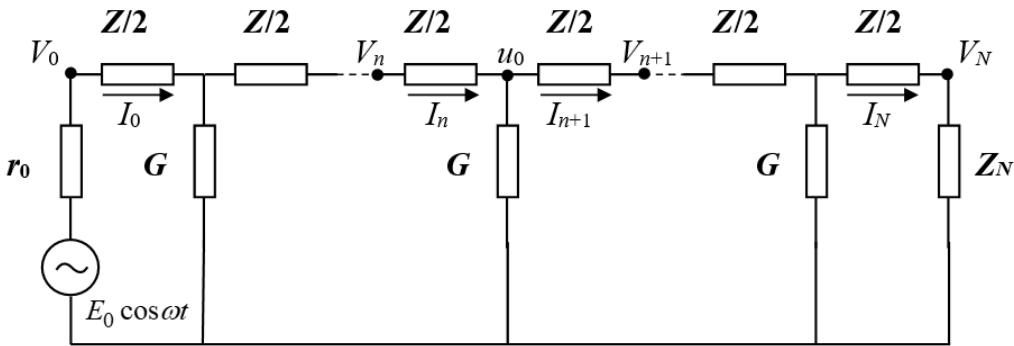


Рис. 2.4

Подставляя (4.2) в (5.1), получим

$$(1 + r_0 G_X) A_1 + (1 - r_0 G_X) A_2 = E_0 \quad (5.2)$$

$$(1 - Z_N G_X) e^{-iN\theta} A_1 + (1 + Z_N G_X) e^{iN\theta} A_2 = 0$$

Отсюда для A_1 и A_2 будем иметь

$$A_1 = \frac{1 - \Gamma_0}{2} \cdot \frac{E_0}{1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2iN\theta}} \quad (5.3)$$

$$A_2 = \frac{1 - \Gamma_0}{2} \cdot \frac{E_0 \Gamma_N e^{-2iN\theta}}{1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2iN\theta}}$$

Подставляя (5.3) в (4.2) получим следующие выражения для комплексных амплитуд напряжения V_n и тока I_n в n -ой ячейке:

$$V_n = \frac{1 - \Gamma_0}{2} \cdot \frac{E_0 \Gamma_N e^{-in\theta}}{1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2iN\theta}} \left[1 + \Gamma_N e^{-2i(N-n)\theta} \right] \quad (5.4)$$

$$V_n = \frac{1 - \Gamma_0}{2} \cdot \frac{E_0 \Gamma_N e^{-in\theta}}{1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2iN\theta}} G_X \left[1 - \Gamma_N e^{-2i(N-n)\theta} \right]$$

Из (5.4) следует, что если частота внешней ЭДС совпадает с одной из собственных частот фильтра, то амплитуды напряжений и токов во всех звеньях фильтра принимают бесконечно большие значения (явление резонанса). Очевидно, что это возможно лишь в

отсутствии затухания, т.е. при условии $Im\omega_m = 0$. В реальных системах всегда существуют потери ($\omega_m = \omega'_m + i\omega''_m$) и знаменатель в (5.4) не обращается в ноль. При этом в случае произвольных потерь картина резонанса достаточно сложна и далека от той, какую мы имеем в одиночном резонансном контуре. Однако, при $\omega''_m/\omega'_m \ll 1$ эта картина существенно упрощается, и влияние потерь можно описать на привычном языке добротности, вводя её для каждой моды отношением

$$Q_m = \omega'_m/\omega''_m \quad (5.5)$$

Таким образом, для системы со многими степенями свободы не имеет смысла говорить о добротности системы вообще, необходимо оговаривать, о добротности какой моды идёт речь.

При изучении вынужденных колебаний важную роль играют два семейства статических характеристик: семейство амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) и семейство фазо-частотных характеристик (ФЧХ). Эти семейства находятся из выражения для коэффициента передачи, представляющего собой отношение комплексной амплитуды напряжения на выходе фильтра к амплитуде ЭДС на входе, т.е.

$$W(\omega) = \frac{V_N(\omega)}{E_0(\omega)} = \frac{(1 - \Gamma_0)(1 + \Gamma_N)e^{-iN\theta}}{2(1 - \Gamma_0\Gamma_N e^{-2iN\theta})} \quad (5.6)$$

По определению АЧХ - это функция

$$A(\omega) = |W(\omega)| \quad (5.7)$$

а ФЧХ - функция

$$\Phi(\omega) = -argW(\omega) \quad (5.8)$$

Очевидно, что вид того и другого семейства характеристик зависит от условий на концах фильтра.

Рассмотрим влияние этих условий на $A(\omega)$ и $\Phi(\omega)$ в полосе прозрачности фильтра, полагая для простоты, что нагрузка фильтра чисто активная (т.е. Γ_0 и Γ_N - действительные функции). При этом

$$A(\omega) = \frac{1 - \Gamma_0}{2} \cdot \frac{1 + \Gamma_N}{\sqrt{1 - \Gamma_0\Gamma_N \cos 2N\theta + \Gamma_0^2\Gamma_N^2}} \quad (5.9)$$

Из полученного выражения следует, что если фильтр согласован на обоих концах ($\Gamma_0 = \Gamma_N = 0$), то $A(\omega) = 1/2$, т.е. напряжение источника ЭДС делится поровну между фильтром и внутренним сопротивлением источника. Если фильтр согласован только на входе ($\Gamma_0 = 0$), или только на выходе ($\Gamma_N = 0$), то $A(\omega) = (1 + \Gamma_N)/2$ и $A(\omega) = (1 - \Gamma_0)/2$, соответственно. Во всех трёх случаях АЧХ не зависит от числа звеньев фильтра.

Если фильтр согласован хотя бы на одном из своих концов, а нагрузка на другом конце - чисто активная, то существенно упрощается и $\Phi(\omega)$:

$$\Phi(\omega) = N\theta(\omega) \quad (5.10)$$

Т.е. Φ ЧХ с точностью до множителя N сводится к дисперсионной характеристики фильтра.

Многозвенныe фильтры представляют собой разновидность длинных линий и используются в радиотехнических устройствах в качестве *линий задержки*. Время запаздывания сигнала при прохождении его через фильтр легко оценить для случая узкополосного сигнала при условии, что спектр его лежит в полосе прозрачности фильтра и укладывается в диапазон частот, в котором фазо-частотную характеристику фильтра можно считать линейной. Спектральную плотность такого сигнала на выходе фильтра для прямой волны можно записать в виде

$$u_N(\eta) = A_1(\xi) e^{i[(\Omega+\eta)t - N\theta(\Omega+\eta)]} \quad (5.11)$$

Учитывая, что $|\eta| \leq \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ - полуширина спектра, и принимая во внимание условие узкополосности $\Delta\omega \ll \Omega$, разложим в этом выражении нелинейную функцию $\theta(\Omega + \eta)$ в ряд по степеням η , ограничившись двумя первыми членами:

$$\theta(\Omega + \eta) \approx \theta(\Omega) + \frac{d\theta}{d\omega} \Big|_{\Omega} \cdot \eta \quad (5.12)$$

При этом выражение (5.11) примет вид

$$u_N(\eta) \approx A_1(\eta) e^{i[\Omega t - N\theta(\Omega)]} e^{i(t - N \frac{d\theta}{d\omega})\eta} \quad (5.13)$$

Отсюда следует, что время задержки сигнала при прохождении через N -звенный фильтр равно $\tau_N = N \frac{d\theta}{d\omega} \Big|_{\Omega}$. Т.е. групповая скорость $d\omega/d\theta$ имеет смысл времени запаздывания, приходящегося на одно звено.

2 Конкретные виды фильтров

2.1 Фильтр низкой частоты (ФНЧ)

Вид отдельного звена ФНЧ изображен на рис. . ФНЧ служит для пропускания колебаний низкой частоты от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{cp}$ (частота "среза"). Для ФНЧ

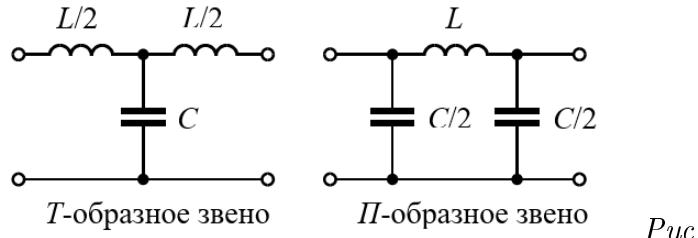


Рис. 3.1

$$Z = i\omega L, \quad G = i\omega C \quad (6.1.1)$$

При этом **дисперсионное уравнение** имеет вид (см. рис. 3.2)

$$\omega^2 = \frac{2}{LC} (1 - \cos \theta) \quad (6.1.2)$$

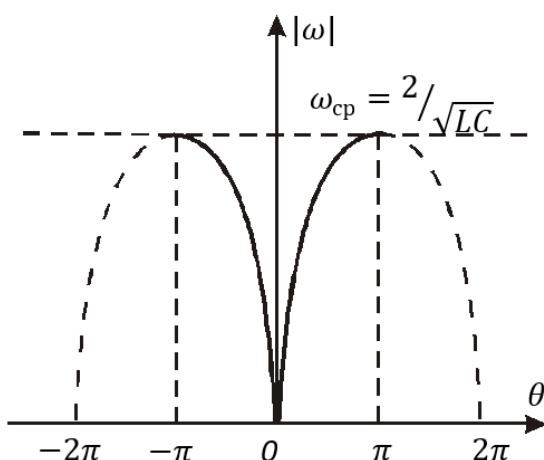


Рис. 3.2

Из периодического характера этого уравнения следует, что физический смысл имеет лишь та часть дисперсионных ветвей, которая лежит в области $|\theta| \leq \pi$. Т.е. набег фазы на одно звено не может превышать π . Поскольку постоянная распространения θ связана с длиной волны λ соотношением $\lambda = 2\pi/\theta$, то из существования $\theta_{max} = \pi$ вытекает существование $\lambda_{min} = 2$. Иными словами, волны с длиной в одну ячейку существовать не могут. Этот результат порожден дискретным характером структуры фильтра и может быть предсказан заранее.

Полоса прозрачности ФНЧ, в силу (3.15), задаётся условием

$$\omega^2 \leq \frac{4}{LC} \quad (\xi^2 = \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2} \leq 1) \quad (6.1.3)$$

Характеристический импеданс фильтра, состоящего из T - и Π -образных звеньев задаётся соотношениями:

$$Z_x^T = \rho \sqrt{1 - \xi^2}, \quad Z_x^{\Pi} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (6.1.4)$$

$$(\rho = \sqrt{L/C})$$

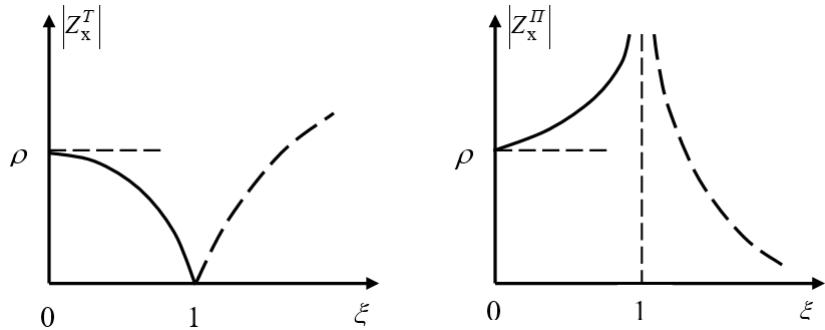


Рис. 3.3

Соответствующие им частотные зависимости изображены на рис. 3.3.

Параметры звеньев фильтра рассчитываются по формулам

$$L = \frac{2\rho}{\omega_{cp}}, \quad C = \frac{2}{\rho\omega_{cp}} \quad (6.1.5)$$

Время задержки на одно звено даётся выражением:

$$\tau = \frac{2}{\omega_{cp} \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (6.1.6)$$

Графически зависимость времени задержки от частоты изображена на рис. 3.4.

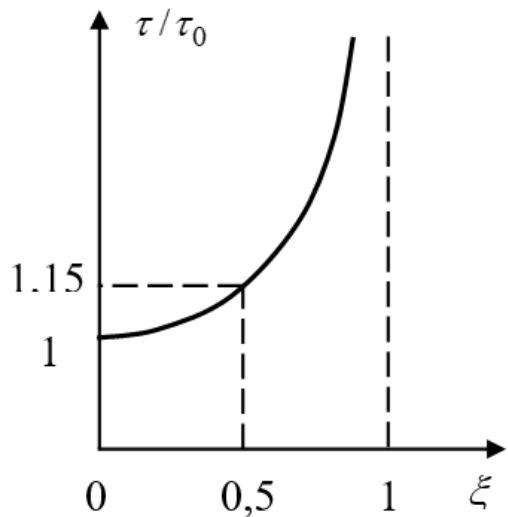


Рис. 3.4

2.2 Фильтр высокой частоты (ФВЧ)

Вид отдельного звена ФВЧ изображён на рис. 3.5. ФВЧ служит для пропускания колебаний с частотами $\omega \geq \omega_{cp}$. Для ФВЧ

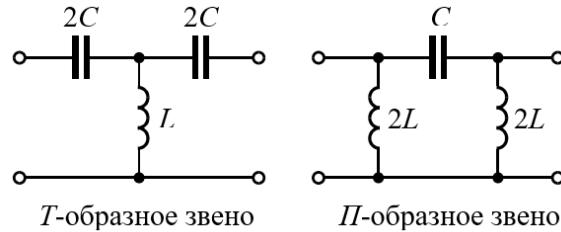


Рис. 3.5

$$Z = \frac{1}{i\omega C}, \quad G = \frac{1}{i\omega L} \quad (6.2.1)$$

При этом **дисперсионное уравнение** имеет вид.

$$\omega^2 = \frac{1}{2LC(1 - \cos\theta)} \quad (6.2.2)$$

График дисперсионной зависимости $\omega = \omega(\theta)$ приведён на рис. 3.6.

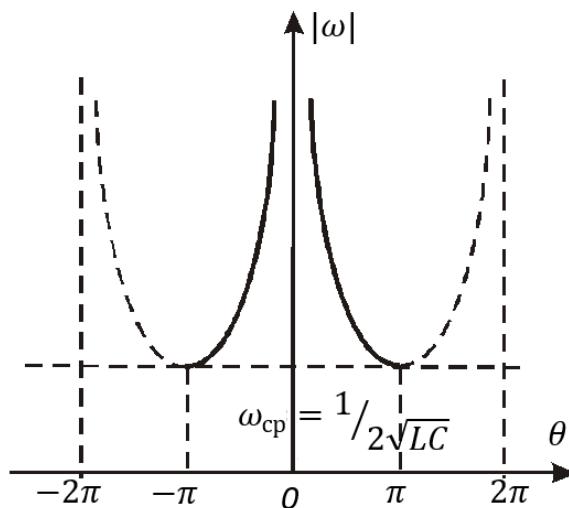


Рис. 3.6

Полоса прозрачности ФВЧ определяется из условия

$$1 - \frac{1}{4\omega^2 LC} \geq 0 \quad (\xi^2 \geq 1) \quad (6.2.3)$$

Характеристический импеданс фильтра, состоящего из Т- и Π-образных звеньев задаётся соотношениями

$$Z_x^T = \rho \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}, \quad Z_x^\Pi = \frac{\rho \xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (6.2.4)$$

$$(\rho = \sqrt{L/C})$$

Соответствующие им частотные зависимости изображены на рис. 3.7.

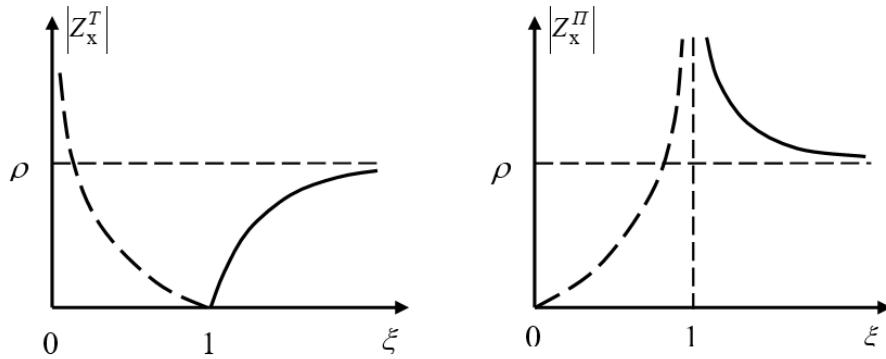


Рис. 3.7

Параметры звеньев фильтра рассчитываются по формулам

$$L = \frac{\rho}{2\omega_{cp}}, \quad C = \frac{1}{2\rho\omega_{cp}} \quad (6.2.5)$$

Время задержки на одно звено даётся выражением

$$\tau = \frac{1}{\omega_{cp}\xi\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (6.2.6)$$

Графически зависимость времени задержки от частоты изображена на рис. 3.8.

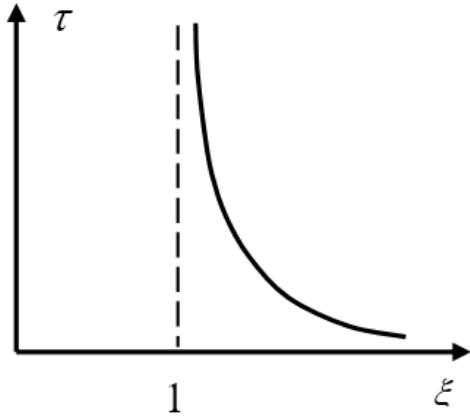


Рис. 3.8

2.3 Полосовой фильтр ($\Pi\Phi$)

Вид отдельного звена полосового фильтра изображен на рис. 3.9. Полосовой фильтр служит для пропускания колебаний в полосе частот $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$.

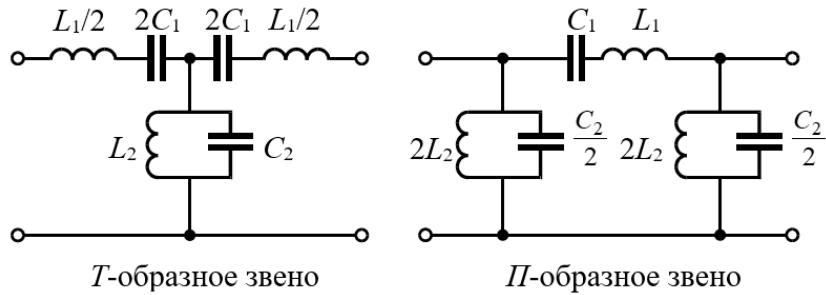


Рис. 3.9

Для полосового фильтра:

$$Z = i\omega L_1 + \frac{1}{i\omega C_1}, \quad G = i\omega C_2 + \frac{1}{i\omega L_2} \quad (6.3.1)$$

Дисперсионное уравнение полосового фильтра определяется следующей зависимостью:

$$f(\omega^2) = \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (6.3.2)$$

где

$$f(\omega^2) = \frac{(L_1 C_1 \omega^2 - 1)(L_2 C_2 \omega^2 - 1)}{4\omega^2 L_2 C_1} \quad (6.3.3)$$

(см. рис. 3.10). Так как $0 \leq \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 1$, то система будет пропускать частоты $\omega_1 \leq \omega \leq \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ и $\frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \leq \omega \leq \omega_2$.

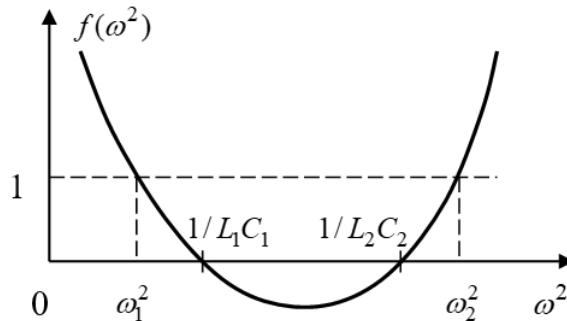


Рис. 3.10

На практике интересен случай, когда $\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0$, $\frac{L_1}{L_2} = \frac{C_1}{C_2} = \alpha$. При этом дисперсионное уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right) \frac{\omega_0}{2\omega} \sqrt{\alpha} = \pm \sin \frac{\theta}{2} \quad (6.3.4)$$

Соответствующие ему дисперсионные кривые изображены на рис. 3.11, где

$$\omega_1 = \frac{\omega - 0}{\sqrt{\alpha}}(\sqrt{1 + \alpha} - 1), \quad \omega_2 = \frac{\omega - 0}{\sqrt{\alpha}}(\sqrt{1 + \alpha} + 1) \quad (6.3.5)$$

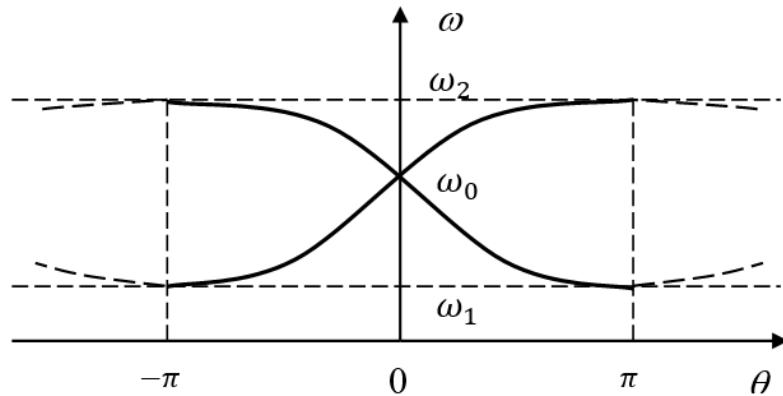


Рис. 3.11

Полоса прозрачности фильтра определяется из условия

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \alpha \leq 4 \quad (6.3.6)$$

Характеристический импеданс фильтра, состоящего из *T*- и *П*-образных звеньев задаётся соотношениями

$$Z_x^T = \rho \sqrt{1 - \frac{\alpha}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}, \quad Z_x^{\Pi} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (6.3.7)$$

где $\rho = \sqrt{L_2/C_1}$. Зависимость этого импеданса от частоты приведена на рис. 3.12.

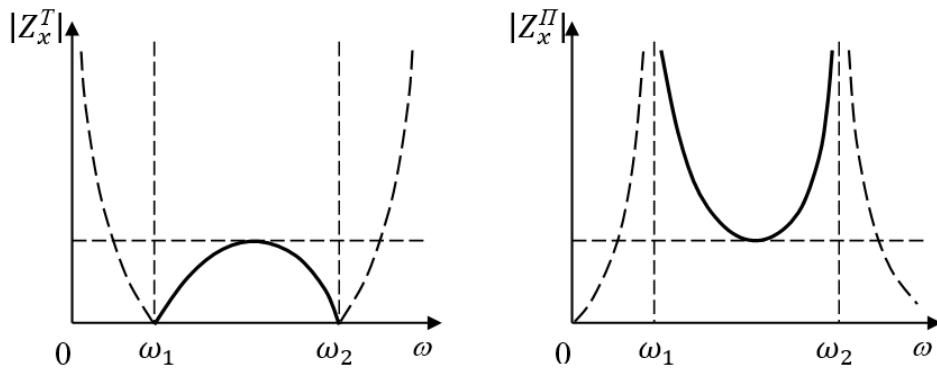


Рис. 3.12

Параметры фильтра рассчитываются по следующим формулам:

$$L_1 = \frac{\sqrt{\alpha}\rho}{\omega_0} = \frac{2\rho}{\omega_2 - \omega_1}, \quad L_2 = \frac{L_1}{\alpha} = \frac{\rho(\omega_2 - \omega_1)}{2\omega_0^2} \quad (6.3.7)$$

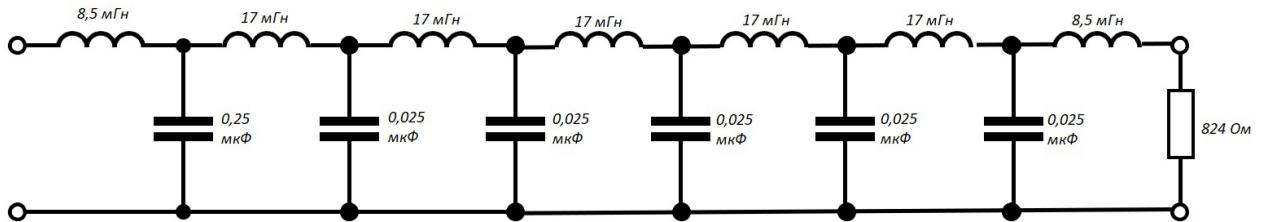
$$C_1 = \frac{1}{\omega_0^2 L_1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\rho\omega_1\omega_2}, \quad C_2 = \alpha C_1 = \frac{2}{\rho(\omega_2 - \omega_1)}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{\alpha C_1}}$$

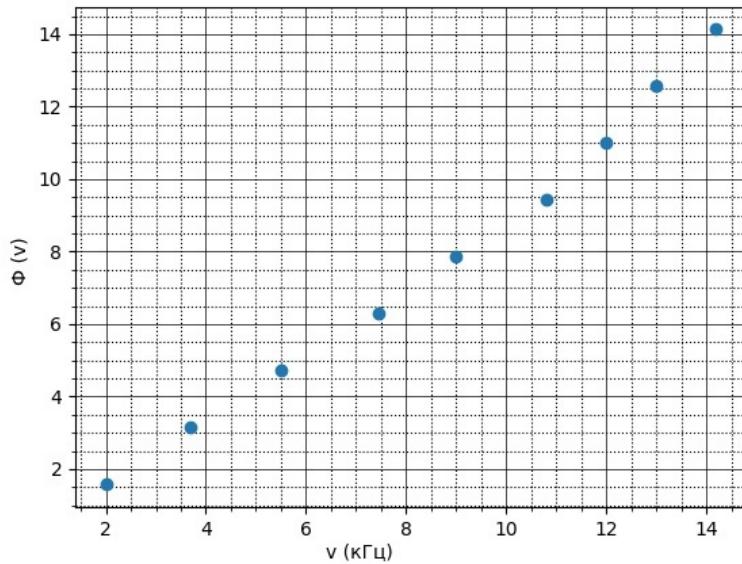
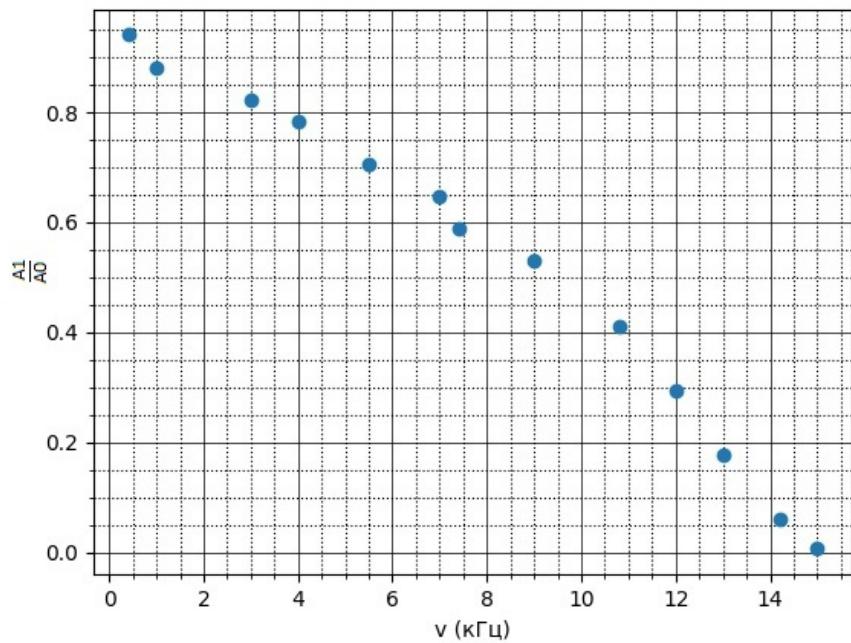
3 Практическая часть

3.1 Фильтр низкой частоты (ФНЧ)

Измерения с фильтром низкой частоты (ФНЧ):



$L = 17 \text{ мГн}, \ C = 0,025 \text{ мкФ}, \ R = 824 \text{ Ом}$					
$\nu, \text{ Гц}$	$U_{\text{вх}}, \text{ В}$	$U_{\text{вых}}, \text{ В}$	$\varphi, \text{ рад}$	N	$\tau, \text{ мс}$
400	1,7	1,6	0	6	0,11
1000		1,5	-	5	0,1
3000		1,4	-	4	0,075
4000		1,33	-	3	0,065
5500		1,2	$3\pi/2$	2	0,04
7000		1,1	-	1	0,02
7440		1,0	2π		
9000		0,9	$5\pi/2$		
10800		0,7	3π		
12000		0,5	$7\pi/2$		
13000		0,3	4π		



Сравнение времени задержки на одно звено.

$$\tau = \frac{2}{\omega_{cp} \sqrt{1 - \xi^2}}$$

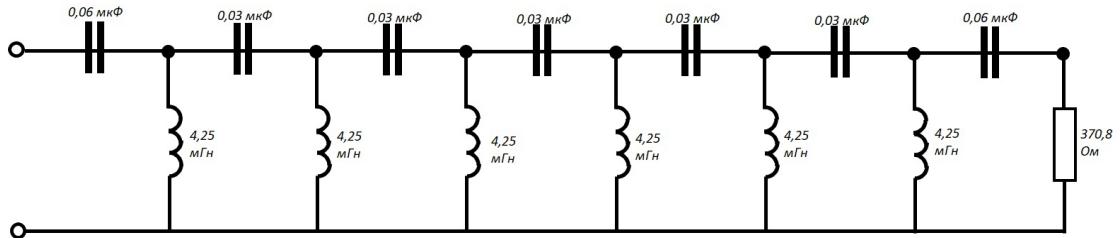
Экспериментальное $\tau = 0.02ms$

Экспериментальная $\omega_{cp} = 5500\text{Гц}$

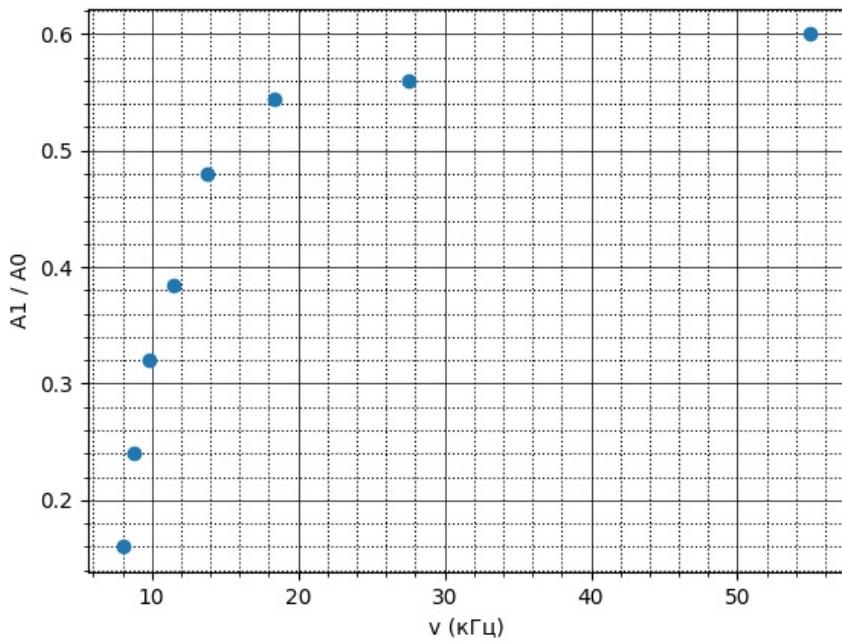
Теоритическое $\tau =$

3.2 Фильтр высокой частоты (ФВЧ)

Измерения с фильтром высокой частоты (ФВЧ):



$L = 4,25 \text{ мГн}, \quad C = 0,03 \text{ мкФ}, \quad R = 583 \text{ Ом}$			
$\nu, \text{ Гц}$	$U_{\text{вх}}, \text{ В}$	$U_{\text{вых}}, \text{ В}$	$\varphi, \text{ рад}$
0	Нелинейный режим	-	-
8000	1,25	0,2	0
8800		0,3	$\pi/2$
9800		0,4	π
11500		0,48	$3\pi/2$
13800		0,6	2π
18400		0,68	$5\pi/2$
27500		0,7	3π
55000		0,75	$7\pi/2$



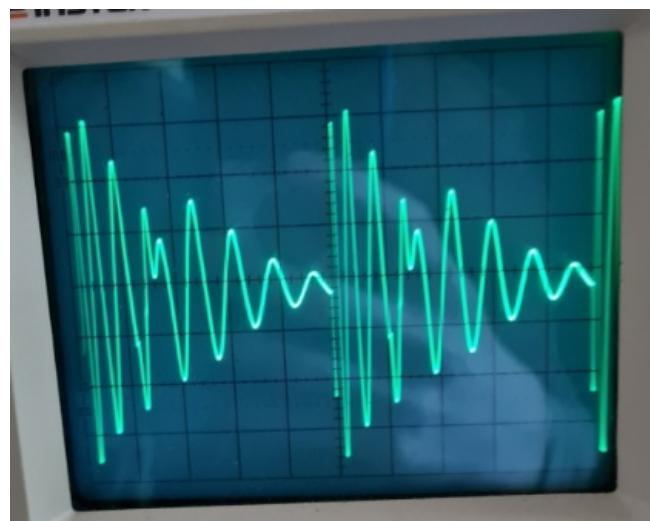
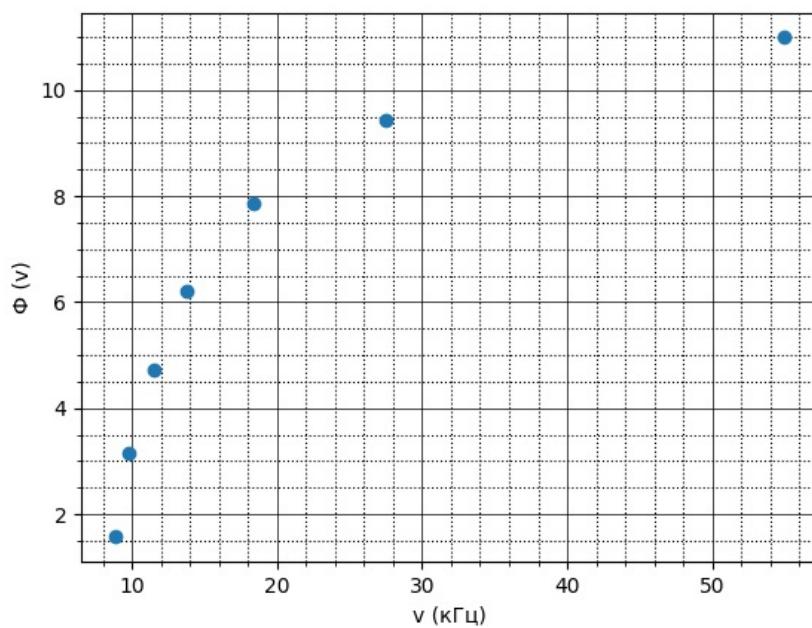
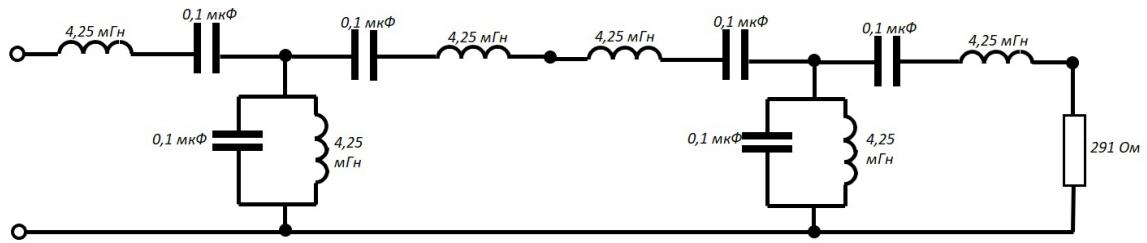


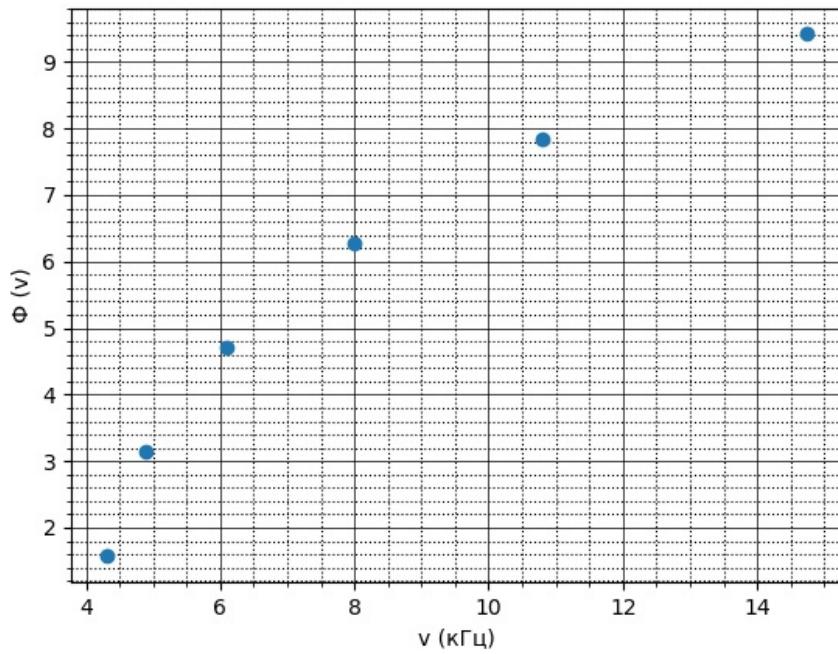
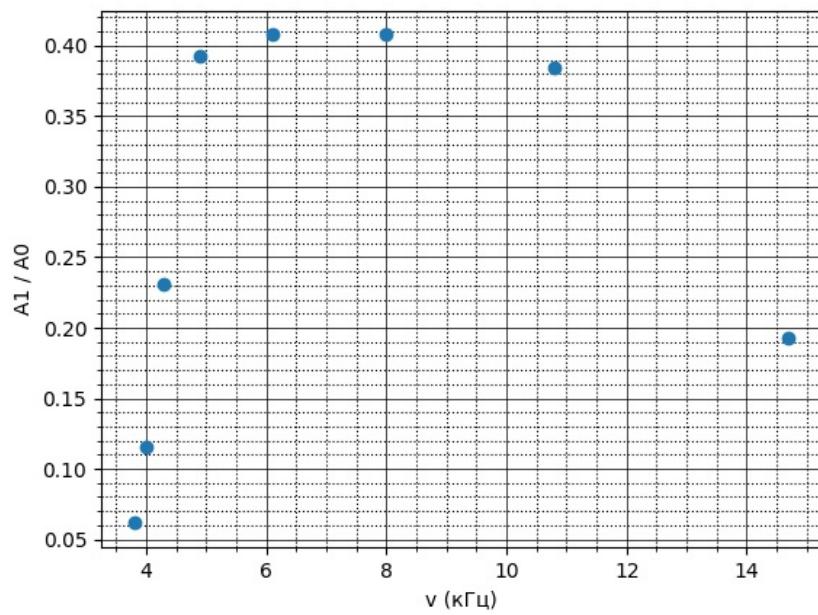
Рис. 1: Преобразование П - образного сигнала

3.3 Полосовой фильтр ($\Pi\Phi$)

Измерения с полосовым фильтром ($\Pi\Phi$):



$L = 8,5 \text{ мГн}, \quad C = 0,1 \text{ мкФ}, \quad R = 291 \text{ Ом}$			
$\nu, \text{ Гц}$	$U_{\text{вх}}, \text{ В}$	$U_{\text{вых}}, \text{ В}$	$\varphi, \text{ радиан}$
3800	1,3	0,08	-
4000		0,15	-
4300		0,3	$\pi/2$
4900		0,51	π
6100		0,53	$3\pi/2$
8000		0,53	2π
10800		0,519	$5\pi/2$
14750		0,25	3π



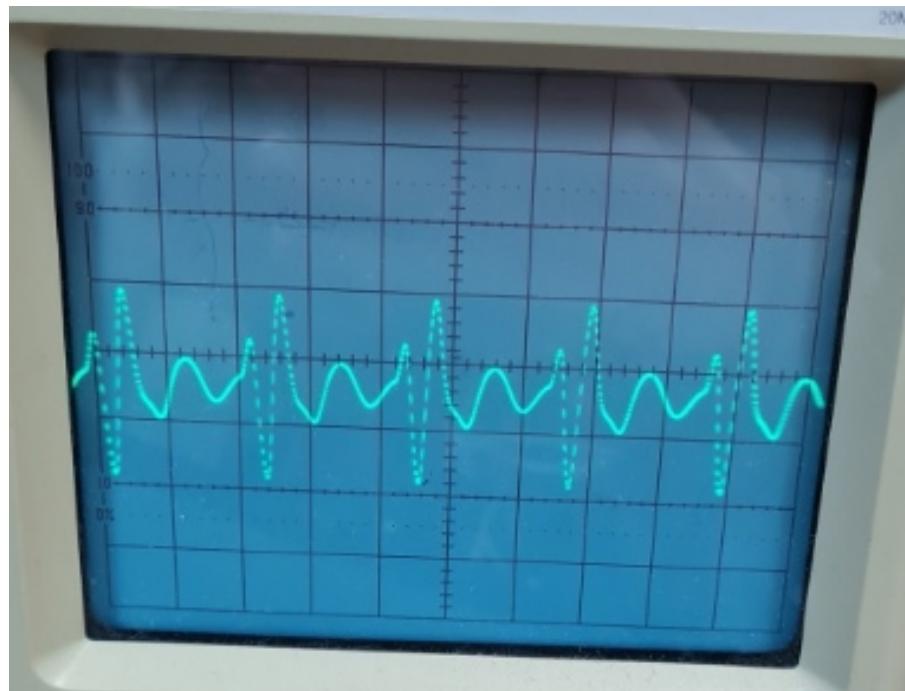


Рис. 2: Преобразование П-образного сигнала

4 Вывод.

Были изучены свойства линейных дискретных систем со многими степенями свободы на примере электрических фильтров. Измерены амплитудно- и фазо-частотная характеристика многозвенных фильтров низких частот, фильтров высоких частот и полосовых фильтров