

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского  
Радиофизический факультет

---

**Кафедра теории колебаний**

**Отчёт по лабораторной работе**  
**Исследование динамики систем с разрывными колебаниями**

**Выполнили (430 гр):**  
Горюнов О.А., Индисов А.И.

2023 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретическая часть</b>	<b>3</b>
1.1	Динамика мультивибратора . . . . .	3
1.2	Триггер . . . . .	5
1.3	Динамика кипп-реле (одновибратора) . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Описание лабораторной установки</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Практическая часть</b>	<b>10</b>
3.1	Режим мультивибратора . . . . .	10
3.2	Режим триггера . . . . .	11
3.3	Режим кипп-реле . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>14</b>

## Цель работы

Изучить динамику систем, совершающие разрывные колебания, на примерах мультивибратора, триггера и кипп-реле. А также познакомиться с основными явлениями, происходящими в таких динамических системах.

## 1 Теоретическая часть

**Разрывные колебания** - это такие колебания, при которых наряду со сравнительно медленными изменениями величин, характеризующих состояние колебательной системы, в некоторые моменты происходят столь быстрые изменения этих величин, что их можно рассматривать как скачки, а весь колебательный процесс в целом - как последовательность медленных изменений состояния системы, начинающихся и кончающихся мгновенным изменением состояния системы.

### 1.1 Динамика мультивибратора

**Мультивибратор** - генератор электрических прямоугольных колебаний с короткими фронтами.

Рассмотрим схему, представленную на рисунке ниже.

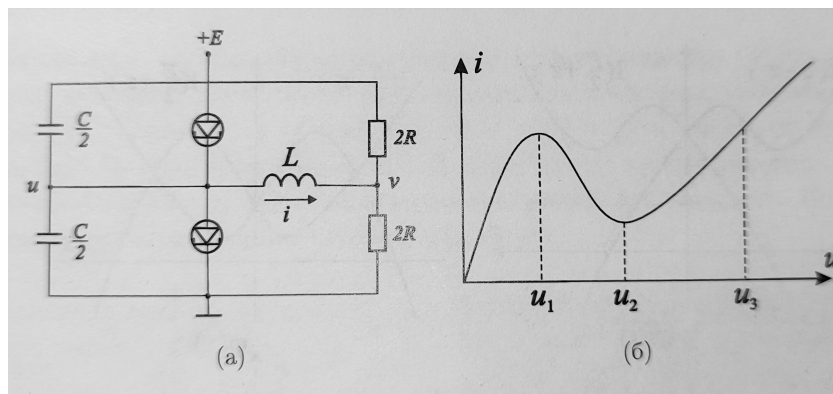


Рис. 1: Исследуемая схема (а), ВАХ диодов (б).

В качестве нелинейного элемента она содержит туннельные диоды, ВАХ которых приведена на рис.1б. Характеристика имеет падающий участок ( $u_1 < u < u_2$ ), что и позволяет получить релаксационные колебания. Динамические процессы рассматриваемой схемы описываются следующими уравнениями:

$$\frac{C}{2} \frac{d(u - E)}{dt} + \frac{C}{2} \frac{du}{dt} + i + I(u) = I(E - u) \quad (1)$$

$$L \frac{di}{dt} = u - v, \quad i = \frac{v - E}{2R} \quad (2)$$

Вводя в (1) новое время  $\tau = \frac{R}{L}t$ , параметр  $\mu = (CR^2)/L$  и безразмерные переменные  $x = 2u/E$ ,  $y = 2iR/E$  приходим к уравнениям:

$$\mu \frac{dx}{dt} = \varphi(x) - y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y \quad (2)$$

где  $\varphi(x) = \frac{2R}{E}[I(E/2 - u) + I(E/2 + u)]$ . Вид функции  $\varphi(x)$  зависит от входного напряжения  $E$ . Если  $\mu \ll 1$ , то система (2) является системой с малым параметром при производной, поэтому для её исследования может быть применен метод разрывных колебаний.

Запишем для случая мультивибратора *систему медленных движений*:

$$y = \varphi(x), \quad \frac{dy}{dt} = x - y \quad (3)$$

*систему быстрых движений*:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varphi(x) - y}{\mu}, \quad y = const \quad (4)$$

Кривая медленных движений определяется функцией  $\varphi(x)$ , а движение по этой кривой соответствующей системой (3). Из системы (4) определяется поведение на быстрых движениях. Тогда фазовый портрет при  $\mu = 0$  изображен на рис.2.

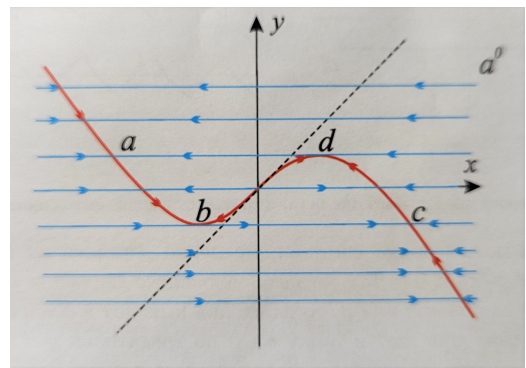


Рис. 2: Фазовый портрет мультивибратора при  $\mu = 0$

По фазовому портрету видно, что в начале координат расположен неустойчивый узел, а также есть предельный цикл. Если изображающая точка системы, медленно двигаясь по траектории  $y = \varphi(x)$  там, где  $\varphi'(x) < 0$  (а только здесь медленные движения устойчивы), приходит в одну из точек  $b$  или  $d$ , то далее она выходит в область быстрых движений и скачком попадает в точку  $c$  по траектории быстрых движений, пока снова не придёт на траекторию медленного движения. Замкнутая кривая  $abcd$  является предельным циклом, устанавливающимся при любых начальных условиях - такой режим автоколебательной системы называется *мягким*.

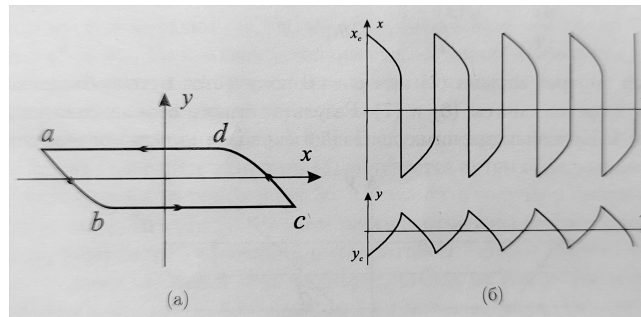


Рис. 3: Вид устойчивого предельного цикла и соответствующие ему осциллограммы.



Если функция  $\varphi(x)$  имеет вид, изображенный на рис.4 (медленные движения), то в схеме имеет место жесткий автоколебательный режим. Фазовая плоскость разбивается на устойчивый цикл  $abcd$  и неустойчивый  $a_1b_1c_1d_1$ , фазовые траектории внутри которого стремятся в устойчивый узел в начале координат. То есть всё определяется бассейнами притяжения.

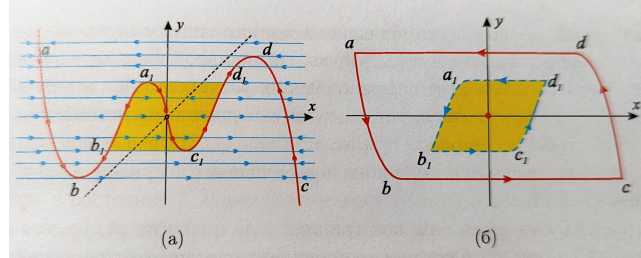


Рис. 4: Фазовый портрет мультивибратора в жёстком режиме.

## 1.2 Триггер

**Триггером** называется система, которая имеет два устойчивых состояния и может быть переброшена из одного устойчивого состояния в другое подачей соответствующего импульса напряжения в подходящий узел схемы.

Схема на рис.1а может вести себя как триггер. При этом система описывается той же системой уравнений (2), но фазовое пространство имеет другую структуру. Теперь прямая  $y = x$  должна пересекать кривую медленных движений  $\varphi(x)$  в двух точках (рис.4).

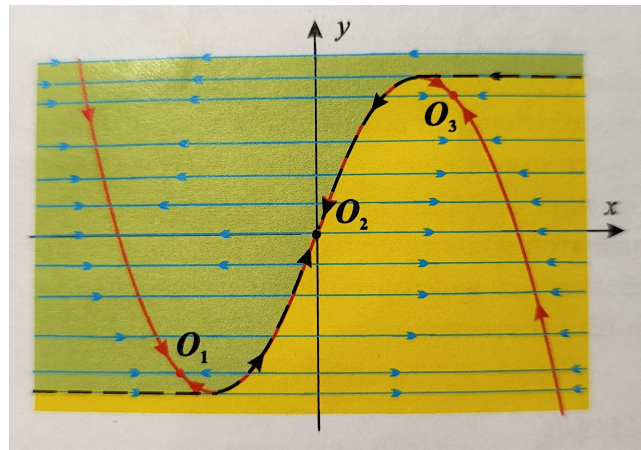


Рис. 5: Фазовый портрет модели триггера в случае  $\mu = 0$ .

Здесь красным цветом отмечена кривая медленных движений, синим - быстрые движения, красными кружочками - устойчивые состояния равновесия  $O_1$  и  $O_3$ , пунктиром

входящие сепаратрисы седла  $O_2$ , разграничивающие области притяжения устойчивых состояний равновесия  $O_1$  и  $O_3$ .

В зависимости от начальных условий схема будет находиться в том или ином устойчивом состоянии 1 или 2 и может быть переведена в другое состояние подачей прямоугольного импульса. Подаче импульса эквивалентно изменению напряжения питания  $E$ , тогда характеристика  $y = \varphi(x)$  меняет вид, принимая форму II (рис.6). В этом случае остается единственное неустойчивое состояние равновесия в начале координат (режим мультивибратора). Изображающая точка из положения 1 будет двигаться быстрым движением по траектории 1-3. Минимальная длительность импульса  $\tau_{min}$ , необходимая для перехода триггера в состояние 2, определяется временем прохождения точки  $a$ , иначе точка вернется обратно в состояние 1 после снятия внешнего импульса. Если после прохождения точки  $a$  импульс не снимается, то дальнейшее движение аналогично движению, соответствующему режиму мультивибратора. Это быстрое движение 1-3, затем медленное движение в точку 4 и снова скачок в точку 5 через точку  $b$ . Если импульс снять после прохождения точки  $b$ , то система попадет в прежнее положение 1. Очевидно, что максимально допустимая длительность запускающего импульса  $\tau_{max}$  определяется временем движения изображающей точки от точки 1 до точки  $b$ .

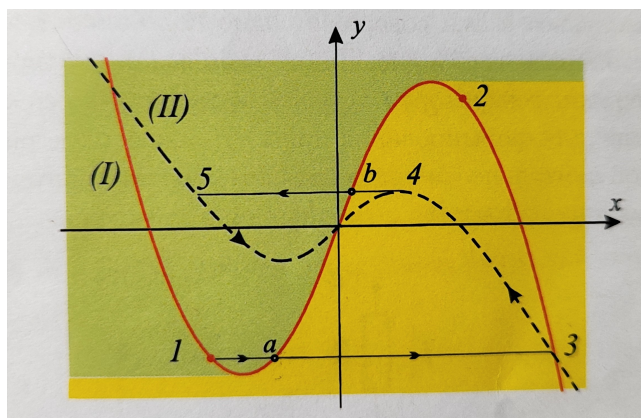


Рис. 6: Эволюция движений в модели триггера при подаче на его вход прямоугольного импульса.

Одним из параметров триггера является *разрешающее время триггера* - наименьший интервал времени между входными сигналами минимальной длительности, вызывающими бесперебойное переключение триггера. Отсюда следует, что разрешающее время триггера практически совпадает с временем движения изображающей точки по кривой медленных движений от точки 3 до точки 4. Если период следования импульсов существенно меньше, например в два раза, то можно получить деление частоты на триггере. Это означает, что на два подданных запускающих импульса, схема переходит из одного положения равновесия в другое.

### 1.3 Динамика кпп-реле (одновибратора)

**Кпп-реле (одновибратор)** - спусковая схема с реактивной связью, имеющая одно устойчивое состояние. Если на его вход подать короткий внешний импульс, то с выхода можно снять широкий прямоугольный импульс, длительность которого определяется только параметрами самой схемы. Схема одновибратора, выполненная на туннельном диоде в качестве нелинейного элемента, изображена на рис.7:

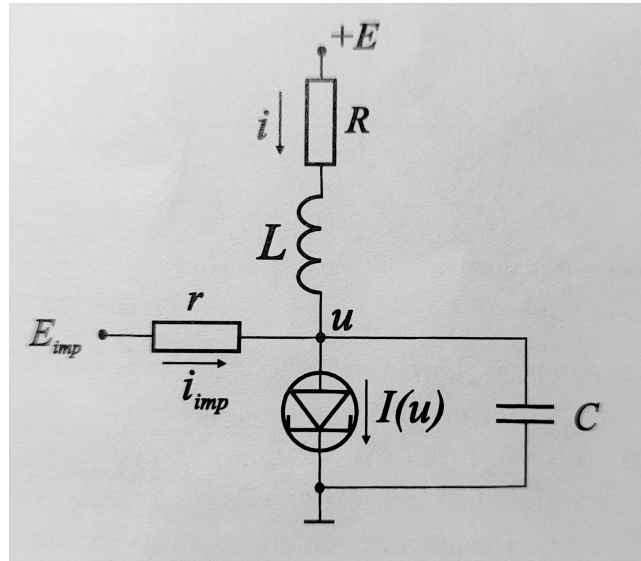


Рис. 7: Схема кпп-реле.

Динамические процессы этой схемы описываются уравнениями:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E - u \quad (5)$$

$$I(u) + C \frac{du}{dt} = i + i_{imp}$$

$I(u)$  - характеристика диода. Введя безразмерные обозначения:

$$\tau = \frac{R}{L}t, \quad \mu = \frac{CR^2}{L}, \quad x = \frac{u}{E}, \quad y = \frac{Ri}{E}, \quad \varphi(x) = \frac{R}{E}I(u), \quad e = \frac{i_{imp}R}{E}$$

получим

$$\mu \frac{dx}{d\tau} = y - \varphi(x) + e, \quad \frac{dy}{d\tau} = 1 - x - y \quad (6)$$

при определенных соотношениях  $R$ ,  $L$ ,  $C$  параметр  $\mu$  может быть малым.

Медленные движения описываются системой уравнений:

$$y = \varphi(x) - e \quad (7)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = 1 - x - y$$

Уравнения быстрых движений:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{y^0 - \varphi(x) + e}{\mu} \quad (8)$$

$$y = y^0 - \text{const}$$

Фазовый портрет системы при  $\mu = 0$  и  $e = 0$  изображено на рис.8.

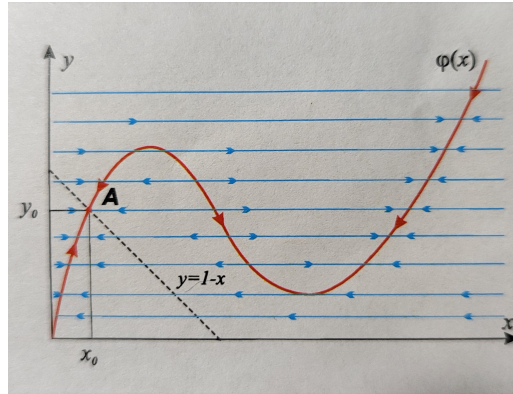


Рис. 8: Фазовый портрет системы при  $\mu = 0$  и  $e = 0$ .

Быстрые движения изображены синими линиями. В совокупности с красной кривой медленных движений быстрые движения формируют фазовый портрет системы при  $\mu = 0$ ,  $e = 0$ . В случае отсутствия внешнего сигнала ( $e = 0$ ) схема находится в устойчивом состоянии равновесия  $A$ , координаты которого определяются решением системы уравнений:

$$\varphi(x) - y + e = 0, \quad (9)$$

$$1 - x - y = 0$$

При подаче положительного импульса ( $e > 0$ ) кривая медленных движений смещается вниз, в результате состояние равновесия переходит в точку  $B$  (рис.9). При этом изображающая точка из положения  $A$ , в которой система находилась, до подачи импульса, будет двигаться быстрым движением в точку  $b$ . Затем по траектории медленных движений к новому состоянию равновесия  $B$ . Если внешний импульс достаточно короткий (кончается раньше, чем изображающая точка дойдёт до точки  $B$ ), то после его окончания система приходит в точку  $c$ , а затем по медленным и быстрым движениям, через точки  $d$  и  $e$ , возвращается в состояние  $A$  и готова к следующему импульсу. Осциллограмма напряжения представлена на рис.9б. Очевидно, что длительность запускающего импульса должна быть больше времени быстрого движения из точки  $A$  в точку  $a$ . Длительность выходного импульса определяется временем движения  $b - d$  и зависит от параметров схемы. Если длительность запускающего импульса сильно отличается от заданных, система перестает работать как формирователь импульсов.



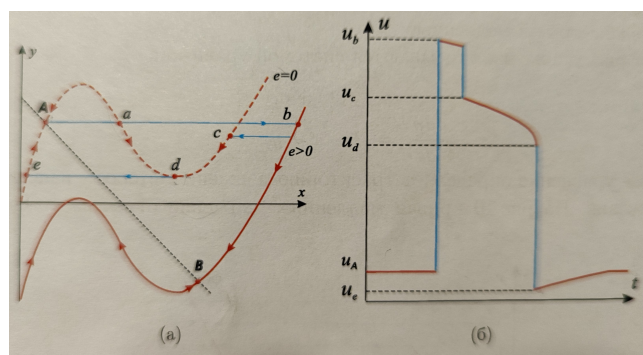


Рис. 9: Эволюция движений в модели кипп-реле при подаче на его вход прямоугольного импульса.

## 2 Описание лабораторной установки

Лабораторная установка состоит из блока для изучения разрывных колебаний, генератора импульсов и двухканального осциллографа. Блок релаксационных колебаний представлен на рис.10. Он включает схему для изучения колебаний триггера и мультивибратора и схему кипп-реле. Регулятор 1 есть регулятор входного напряжения  $E$  схемы на рис.1, с его помощью формируется вид нелинейности  $\varphi(x)$ , и схема на рис.1 переводится в режим мультивибратора, либо в режим триггера.

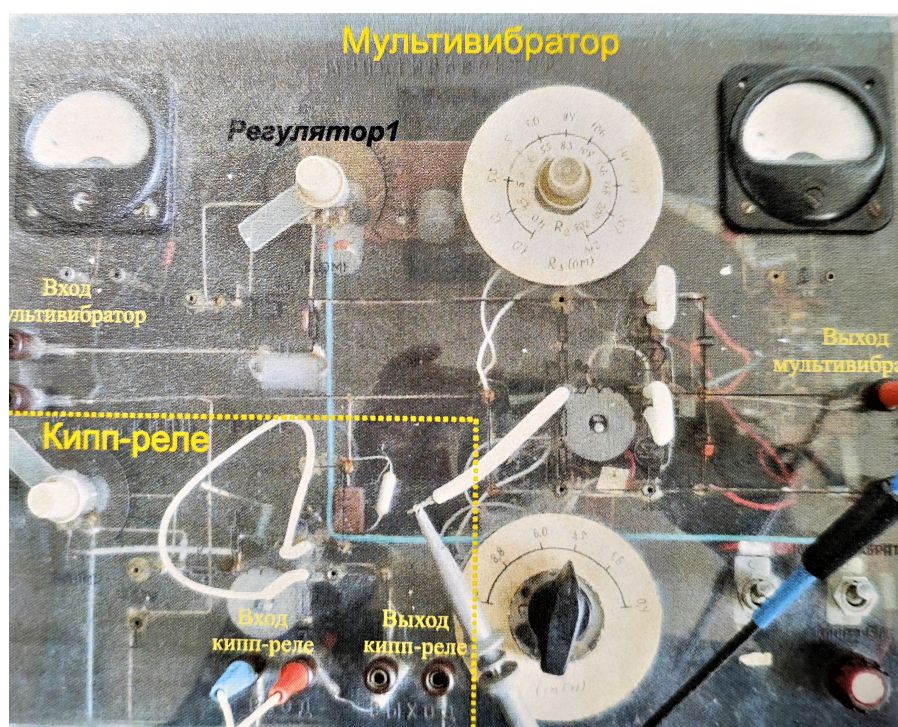


Рис. 10: Блок релаксационных колебаний.

### 3 Практическая часть

#### 3.1 Режим мультивибратора

С помощью регулятора 1 выбрали значение постоянного напряжения  $E$  таким образом, чтобы кривая  $\varphi(x)$  соответствовала режиму мультивибратора. На осциллографе наблюдали колебания напряжения (рис.11 верхняя кривая) и тока (рис.11 нижняя кривая). В режиме  $X - Y$  получили фазовую плоскость мультивибратора (рис.12).

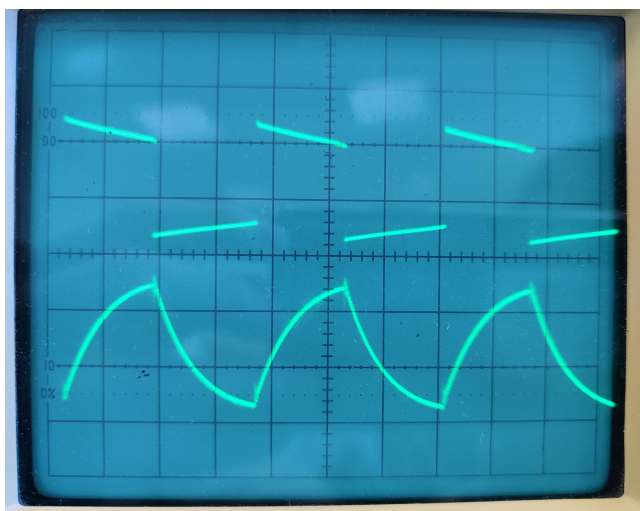


Рис. 11: Осциллограммы напряжения и тока.

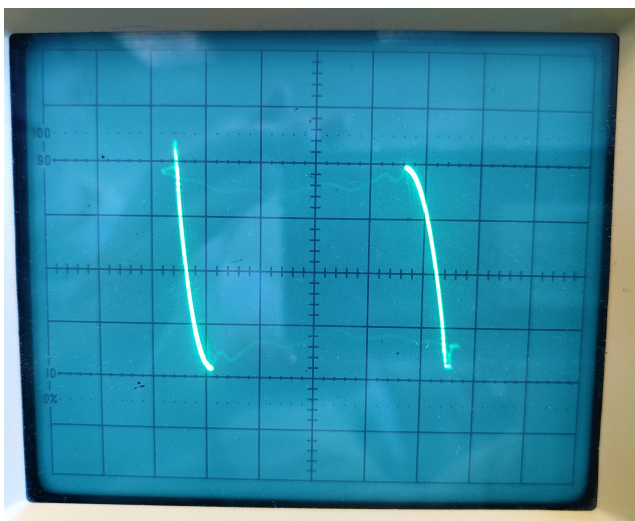
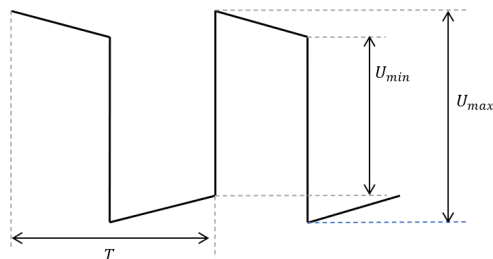


Рис. 12: Фазовый портрет.

Видно, что осциллограммы похожи на рис.3. На фазовой плоскости лучше прорисовываются медленные движения, так как на траекториях быстрых движений изображающая точка перемещается очень быстро.

Амплитуда колебаний (пик-пик) для напряжения:  $U_{max} = 1000$  мВ. От верхнего минимума до нижнего:  $U_{min} = 680$  мВ. Период колебаний:

$$T = 156 \text{ мкс}$$



Амплитуда тока:  $I = 360 \text{ а.е.}$ . Период колебаний тока совпадает с периодом колебаний напряжения.

### 3.2 Режим триггера

С помощью регулятора 1 выбрали значение постоянного напряжения  $E$  таким образом, чтобы кривая  $\varphi(x)$  соответствовала режиму триггера. Также подсоединили генератор прямоугольных импульсов к "Входу мультивибратора" (см. рис.10).

а) Период повторения импульсов  $T_{\text{и}} = 1$  мс, амплитуда  $A = 800$  мВ. Длительность импульса установили 2% от периода повторения, то есть  $\tau_{\text{и}} = 0,02$  мс. Соответствующая осциллограмма представлена на рис.13.

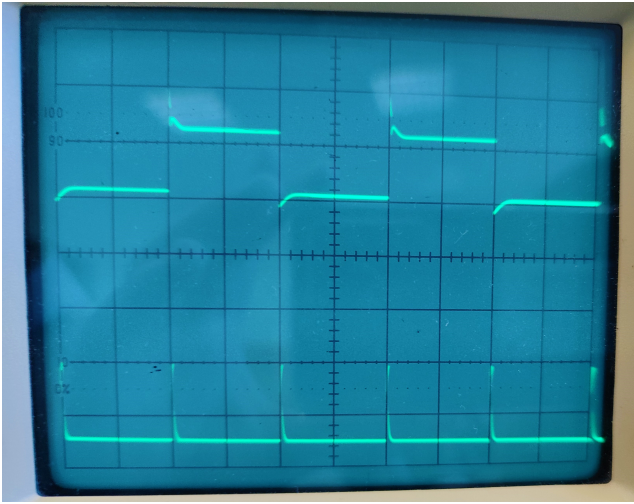


Рис. 13: Осциллограммы напряжения в режиме триггера.

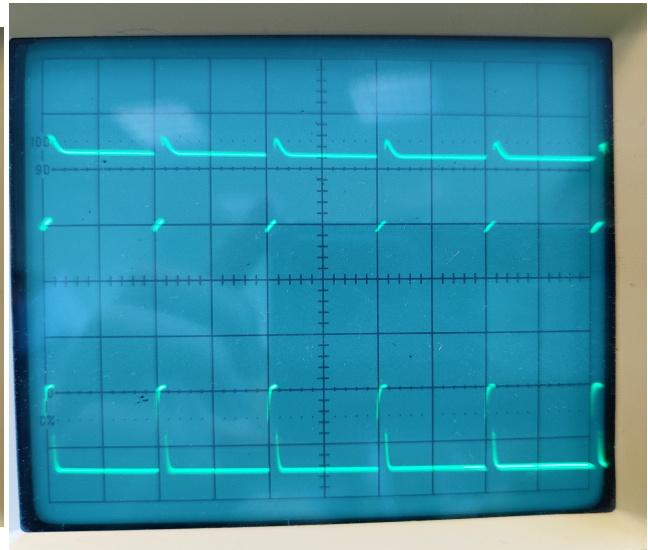


Рис. 14: При увеличении длительности импульса.

Длительность импульса на выходе триггера совпадает с периодом повторения импульсов:

$$T_{tr} = T_{\text{и}} = 1 \text{ мс}$$

**б-в)** При изменении длительности импульса  $\tau_{\text{и}}$  возможно, что система не будет работать как триггер, так как длительности может быть недостаточно для перенесения фазовой точки в другую область притяжения (см. рис.6). Например при  $\tau_{\text{и}} = 0,077$  мс (рис.14) система перестаёт работать как триггер. Длительность импульса настолько высока, что изображающая точка перескакивает через кривую медленных движений обратно в исходную область притяжения. А следовательно, возвращается в то же самое состояние равновесия.

При уменьшении длительности импульса до  $\tau_{\text{и}} = 0,001$  мс, система также перестаёт работать как триггер (рис.15). За это время изображающая точка просто не успевает преодолеть область медленных движений (на рис.6 точка  $a$ ), из-за чего при возвращении исходной кривой  $\varphi(x)$ , изображающая точка стремится в исходное состояние равновесия.



Максимальная и минимальная длительность импульса:

$$\tau_{\text{и}}^{\text{min}} = 0,001 \text{ мс}; \quad \tau_{\text{и}}^{\text{max}} = 0,077 \text{ мс}$$

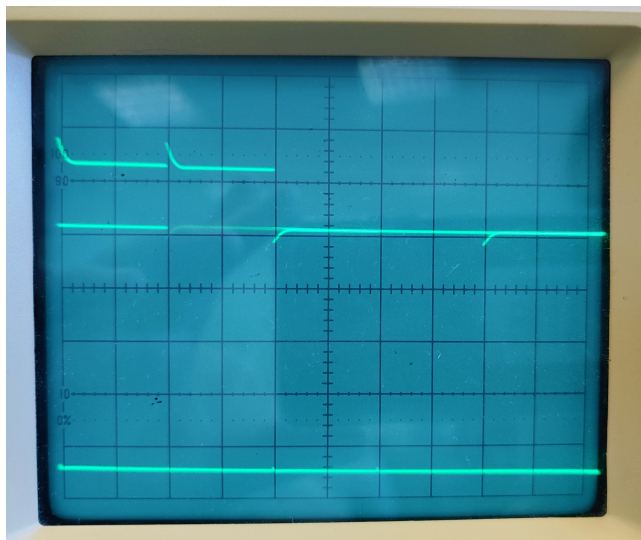


Рис. 15: При уменьшении длительности импульса.

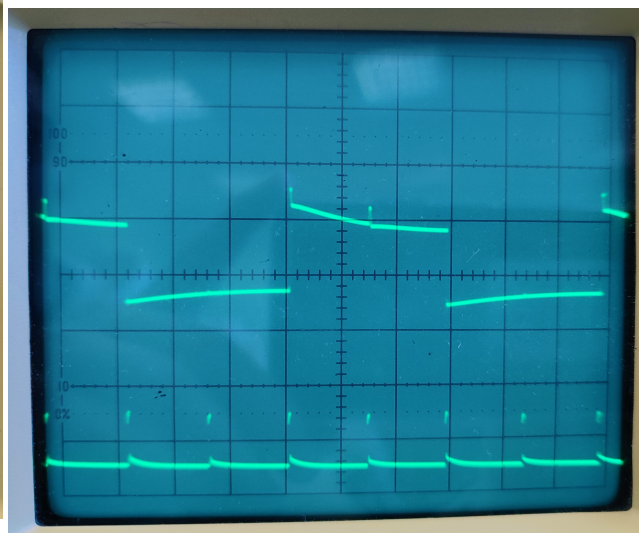


Рис. 16: Деление частоты на триггеры.

Что будет при изменении амплитуды входного импульса? *Длительность импульса и амплитуда на выходе триггера не изменяется.* Это понятно, ведь поведение фазовых траекторий определяется параметрами самой системой. Подачей импульса изменяется кривая  $\varphi(x)$ , а следовательно, от амплитуды внешнего воздействия будет зависеть именно степень изменения этой кривой и движение изображающей точки по траекториям быстрых движений.

Существуют пороговые минимальное и максимальное значения амплитуды внешнего импульса, при которых кривая медленных движений либо изменяется слабо (и изображающая точка остается в исходном состоянии равновесия), либо слишком сильно, из-за чего может кардинально поменяться структура разбиения фазового пространства:

$$A_{\text{вх}}^{\text{min}} = 580 \text{ мВ}; \quad A_{\text{вх}}^{\text{max}} = 1870 \text{ мВ}$$

г) Как отмечалось в теоретической части, для триггера характерно деление частоты - на два поданных запускающих импульса, схема переходит из одного положения равновесия в другое. Осциллограмма для такого случая представлена на рис.16.



### 3.3 Режим кипп-реле

а) На вход подали сигнал с частотой  $f_{\text{и}} = 15$  кГц и амплитудой  $A = 400$  мВ. На выходе получили сигнал следующего вида:

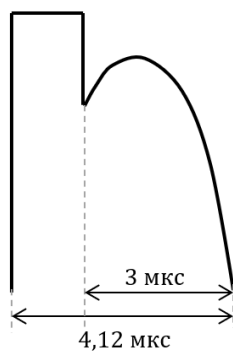


Рис. 17: Сигнал на выходе кипп-реле.

б) Определили минимальную и максимальную длительность запускающего импульса, при которой схема работает как кипп-реле (т.е. длительность выходного сигнала не зависит от длительности входного импульса):

$$\tau_{\text{и}}^{\text{min}} = 0,14 \text{ мкс}; \quad \tau_{\text{и}}^{\text{max}} = 1,71 \text{ мкс} \quad (A = 400 \text{ мВ})$$

в) Минимальная амплитуда запускающего импульса, при котором спусковая схема работает как кипп-реле:

$$A_{\text{min}} = 309 \text{ мВ}$$

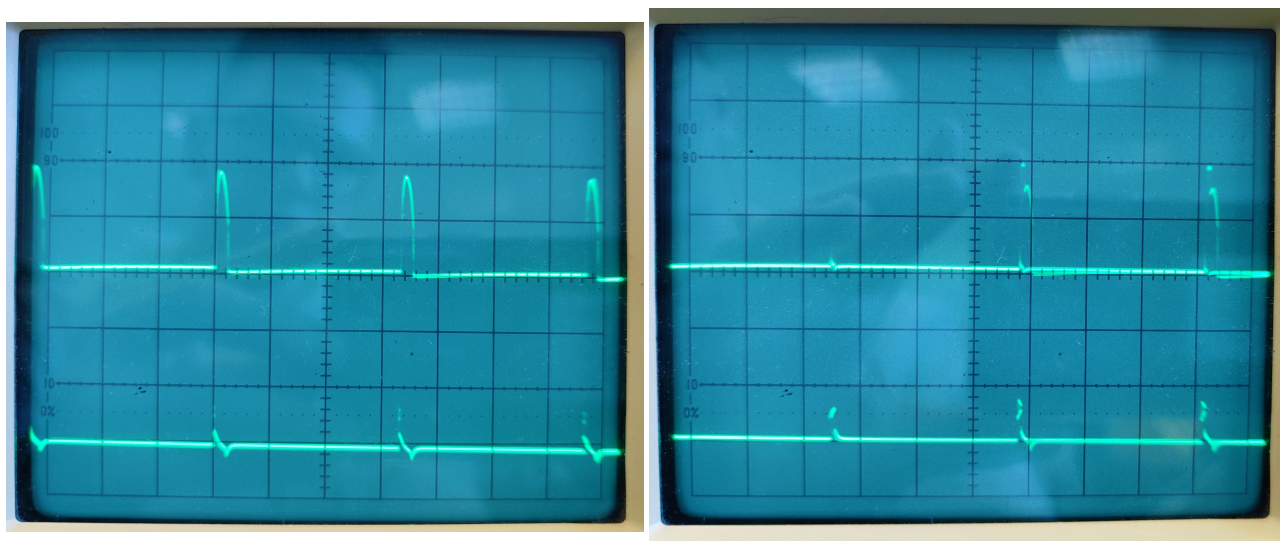


Рис. 18: Осциллограммы на выходе кипп-реле.

## 4 Вывод

*Выполнив лабораторную работу, мы:*

1) Изучили принцип работы мультивибратора, триггера и кипш-реле, их основные особенности.

2) В режиме мультивибратора наблюдали осциллограммы напряжения и тока, а также соответствующий им фазовый портрет. На нём видно явное разбиение на медленные и быстрые траектории. Определили параметры получившихся сигналов (см. п.3.1):

$$U_{max} = 1000 \text{ мВ}, U_{min} = 680 \text{ мВ}, I = 360 \text{ а.л.}$$

$$T = 156 \text{ мкс}$$

3) В режиме триггера наблюдали осциллограммы, изображенные на рис.13-16. Длительность импульса на выходе триггера практически совпадает с периодом повторения запускающих импульсов.

Определили минимальную и максимальную длительность импульса, при которых схема перестаёт работать как триггер:

$$\tau_{\text{и}}^{\min} = 0,001 \text{ мс}; \quad \tau_{\text{и}}^{\max} = 0,077 \text{ мс}$$

А также значения амплитуд импульсов, при которых система перестаёт работать как триггер:

$$A_{\text{вх}}^{\min} = 580 \text{ мВ}; \quad A_{\text{вх}}^{\max} = 1870 \text{ мВ}$$

4) При частоте сигнала  $f_{\text{и}} = 15 \text{ кГц}$  и амплитудой  $A = 400 \text{ мВ}$  получили на выходе кипш-реле сигнал, изображенный на рис.17.

Аналогично триггеру определили параметры запускающего импульса, при которых схема перестаёт работать как кипш-реле:

$$\tau_{\text{и}}^{\min} = 0,14 \text{ мкс}; \quad \tau_{\text{и}}^{\max} = 1,71 \text{ мкс} \quad (A = 400 \text{ мВ})$$

$$A_{\min} = 309 \text{ мВ}$$