1) Наблюдение, производимое при неизменном комплексе контролируемых условий, называется <u>статистическим испытанием</u>. А всякий исход испытаний — <u>случайным событием</u>.

2) <u>Случайная величина</u> — величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с опр-ными вероятностями.

Например, номер ячейки k, в которую попало зернышко, время падения в ячейку или пройденный до ячейки путь — это случайные величины, относящиеся к рассматриваемому случайному событию.

3) Отношение $P^*(k,N) = \frac{N_k}{N}$ называется относительной частотой события, заключающегося в попадании зерна в ячейку с номером k из серии из N испытаний.

По-другому, можно сказать, что $P^*(k)$ это относительная частота того, что случайный номер ячейки k примет значение k.
(Относит. частота — случайная величина)

5) Закон распределения дискретной случайной величины.

Пусть $P(k_1) = p_1, \dots P(k_n) = p_n, \dots$ ~ вероятности возможных событий

Если набор значений невелик, то составляют таблицу, первая строка которой включает все значения величины, а вторая — их вероятности. При этом говорят, что задан <u>закон распределения</u>. Тот же закон можно представить графически — по абсциссе — значения, которые принимает случайная величина, — по ординат — их вероятности.

4) Отн. частота — случайная величина. Но если провести N одинаковых испытаний то оказывается, что чем больше N, тем меньше относительная частота зависит от N. Это св-во называется <u>статистической устойчивостью</u>.

На математическом языке тот факт, что с увеличением N относительная частота становится всё менее случайной, записывается в виде.

$$\lim_{N\to\infty} P^*(k,N) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_k}{N} = P(k)$$

~ эта детерминированная величина $P(k)$ называют вероятностью случайного события.

7) Интегральная и дифференциальная функции распределения.

По опр-ю <u>интегральная функция распределения</u>

$$F(x) = P(X < x)$$

равна вероятности того, что случайная величина X принимает значение меньше наперёд заданного x.

Интегральная ф-я распределения обладает следующими св-вами:

1) $F(x)$ – неубывающая ф-я x, опр-ая на всей оси $x \in (-\infty, \infty)$ и принимающая значения в интервале $[0; 1]$.

2) Наименьшее значение ф-ии $F(x)$ достигается при $x = -\infty$, а наибольшее при $x = \infty$:

$$F(-\infty) = 0 \; ; \; F(\infty) = 1.$$

$$F(x) = \sum_k p_k \chi_0(x - x_k) \quad , \text{ где } \chi_0(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

~ эта величина скачка равна вероятности p_k.

3) Наряду с интегральной функцией распр-я часто используют и дифференциальную функцию распределения, или плотность вероятностей, по опр-ю равную

$$W(x) = \frac{dF}{dx}$$

$$\Rightarrow P(a \le X < b) = \int_a^b W(x)\, dx$$

В частности, отсюда следует явное выражение для интегральной ф-ии распределения через пл-ть вероятностей

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} W(z)\, dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(z)\, dz = 1.$$

ауд 509

Протокол

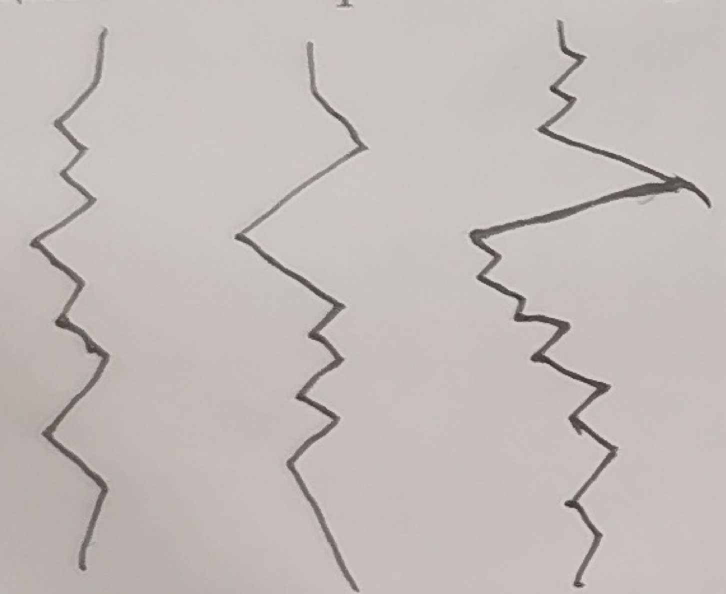
Лабораторная работа №31

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНЫ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Приборы и оборудование: доска Гальтона, воронка, линейка, частицы - пшено, ~~вольтметр В7-27,~~ резисторы ~~R=620 Ом ±10%,~~ измеритель индуктивностей и емкостей высокочастотный Е7-5А, е~~мкости С=130 пФ±5%,~~ С=82 пФ±10%

$\Delta h = 0{,}1$см

Задание 1. Зарисовать траектории отдельных зерен по доске Гальтона.

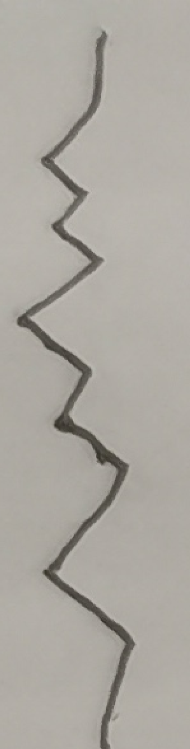


Задание 2,3. Выполнить 3 опыта с N=10 зернами и по 3 опыта с N=No/2 и N=No.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
N=10штук	1																			1				1		1				1	1	1	1						2		1													
	2				1									1							1			1							2			1	2				1															
	3									1										1	1		1			1		1	1	1		2																						
N=No/2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3,0	3,0	5,0	6,0	7,5	9,5	14,5	14,5	20,0	23,0	27,0	34,0	34,5	38,5	46,0	43,0	47,0	50,5	60,0	51,0	50,0	50,5	45,0	41,5	40,0	35,0	32,0	24,5	22,0	17,0	14,5	10,0	10,0	8,5	8,0	5,0	4,5	5,0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	3,5	4,0	4,5	6,5	7,0	10,0	13,5	17,0	18,0	22,5	28,0	33,0	34,0	38,5	42,5	44,0	48,0	49,0	51,5	48,5	47,0	48,5	44,5	42,0	38,0	34,5	31,0	25,0	23,5	19,0	15,0	13,0	13,0	10,0	7,5	5,0	3,5	3,0	2,0	2,0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3,0	2,0	5,5	6,0	7,0	8,0	14,5	14,5	17,0	21,5	27,5	31,0	31,5	38,0	44,5	43,0	46,5	50,0	50,0	49,0	48,5	47,0	44,0	40,0	37,5	33,5	30,5	25,0	23,0	17,5	16,0	12,0	9,0	8,0	7,0	5,0	4,5	4,0	0	0	0	0	0	0	0
N=No	1	0	0	0	0	0	0	0	2,0	4,5	4,5	8,0	10,5	12,5	15,5	22,0	24,0	34,0	40,5	51,0	56,0	56,0	69,5	75,5	79,5	82,0	81,0	89,0	86,0	85,0	84,5	74,0	73,0	68,0	60,0	52,0	43,0	37,5	32,0	25,0	20,0	16,0	14,0	12,0	8,0	6,5	5,0	3,5	3,5	2,0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	3,0	5,0	6,0	7,5	12,0	13,5	17,0	23,0	26,5	34,0	40,0	51,0	54,5	57,0	67,0	75,0	80,0	86,0	87,5	90,0	89,0	85,0	82,5	77,0	74,0	70,0	58,0	54,0	42,0	36,0	32,0	25,5	18,0	17,0	14,0	10,0	8,0	6,5	5,0	3,0	3,0	2,0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	2,0	3,0	5,0	7,0	9,5	13,5	16,5	24,0	25,0	34,0	42,0	50,0	57,0	57,0	69,0	74,0	76,5	85,0	92,0	88,5	90,0	87,0	85,5	77,0	74,5	70,0	61,5	55,0	42,0	36,5	32,0	27,5	20,0	18,0	14,0	11,0	8,5	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0	0	0	0	0

Прибор
~~R=620~~
C=82 п
Δh = 0,

Задание 1.



Задание 2,

N=10штук
N=No/2
N=No

C = 82 пФ ± 10%

пФ

1) 81,6
2) 80,6
3) 81,2
4) 86,4
5) 81,4
6) 81,0
7) 80,2
8) 86,2
9) 81,8
10) 80,4
11) 84,2
12) 78,2
13) 80,6
14) 79,4
15) 85,2
16) 82,4
17) 83,6
18) 82,2
19) 80,0
20) 81,0
21) 84,8
22) 80,8
23) 82,8
24) 80,6
25) 84,6
26) 78,6
27) 80,6
28) 82,8
29) 80,4
30) 81,6
31) 84,0
32) 82,0
33) 83,6
34) 80,2
35) 83,6
36) 83,4 ✓
37) 86,6
38) 82,6
39) 83,4
40) 80,8
41) 79,0
42) 81,8
43) 83,4
44) 82,4
45) 83,4
46) 82,6
47) 81,2
48) 81,8
49) 85,8
50) 80,0
51) 80,6
52) 81,8
53) 85,2
54) 85,2
55) 79,8
56) 78,8
57) 81,8
58) 82,0
59) 80,4
60) 82,4
61) 85,6
62) 81,8
63) 78,6
64) 84,8
65) 82,2
66) 81,0
67) 81,8
68) 80,0
69) 81,2
70) 83,0
71) 82,2
72) 82,6
73) 81,4
74) 80,2
75) 82,4
76) 82,6
77) 81,0
78) 77,0
79) 82,2
80) 78,0
81) 80,6
82) 81,8
83) 84,4
84) 84,2
85

Горюнов
7.04.21
Агтар

Отчёт по лабораторной работе № 31.
Некоторые законы случайных событий.

Цель работы: на примере доски Гальтона и с помощью мостика УМ-2 с конденсаторами познакомиться с понятиями, которые используются для описания случайных величин.

Приборы и оборудование: доска Гальтона, воронка, линейка, частицы – пшено, измеритель индуктивностей и ёмкостей высокочастотный Е7-5А, конденсаторы.

$C = 82$ пФ $\pm 10\%$; $\Delta h = 0{,}1$ см

Теоретическая часть.

1. Случайное событие и случайная величина.

Неопределённость исхода опыта при соблюдении основных условий его проведения наблюдается для очень широкого круга явлений. Мы изучим случайные явления, которые происходят в опытах с доской Гальтона. Это доска, поставленная вертикально, с передней стороны прикрытая стеклом. В доску в шахматном порядке достаточно часто вбиты гвозди. Под ними в нижней части доски располагается ряд одинаковых вертикальных ячеек. Вверху над гвоздями в средней части доски помещена воронка, в которую можно ссыпать дробинки/зёрна пшена. Если бросить в воронку одну частицу, то при падении вниз она испытает множество столкновений с гвоздями и в конце концов упадёт в какую-то из ячеек. Предсказать заранее, с какими гвоздями столкнётся зерно и в какую ячейку попадёт, невозможно. Кидая многократно зерна на доску, легко убедиться, что даже при самом тщательном воспроизведении условий опыта невозможно точно воспроизвести результат.

В теории вероятностей наблюдение, производимое при неизменном комплексе контролируемых условий, называется статистическим испытанием. Всякий исход испытания называется случайным событием. В нашем опыте случайным событием является попадание зёрнышка в какую-либо ячейку.

Случайные события принято описывать количественно с помощью случайных величин. Например, номер ячейки n, время падения зёрнышка в ячейку или пройденный до ячейки путь – это случайные величины, относящиеся к рассматриваемому случайному событию.

2. Свойство статистической устойчивости. Относительная частота и вероятность события.

Ключевое понятие вероятности случайного события опирается на свойство статистической устойчивости.

Пусть зёрнышко брошено на доску Гальтона N раз. N_k – число испытаний, в которых зерно попало в ячейку с заданным номером k.

Отношение $P^*(k,N) = \dfrac{N_k}{N}$ называется относительной частотой события, заключающегося в попадании зерна в ячейку с номером k.

Относительная частота – случайная величина. Но если провести N

одинаковых испытаний, то окажется, что чем больше N, тем меньше относительная частота зависит от N. Это свойство называется статистической устойчивостью относительной частоты появления случайного события.

Статистическая устойчивость - частный случай проявления основного статистического закона, который называется законом больших чисел.

На математическом языке тот факт, что с увеличением N относительная частота становится все менее случайной, записывают в виде:

$$\lim_{N\to\infty} P^*(k, N) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_k}{N} = P(k) \qquad (1)$$

Детерминированную величину $P(k)$ называют вероятностью случайного события.

3. Дискретные и непрерывные случайные величины.

Случайную величину X, которая может принимать ограниченное или счетное число значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, называют дискретной. В нашем случае - это номер ячейки

Величину, принимающую непрерывный ряд значений, называют непрерывной случайной величиной.

4. Закон распределения случайной величины.

Закон распределения дискретной случайной величины.

Все свойства дискретной случайной величины определяются вероятностями возможных событий:

$$P(k_1) = p_1, \ \ldots, \ P(k_n) = p_n, \ \ldots$$

Если набор значений невелик, то составляют таблицу, первая строка которой включает все значения случайной величины, а вторая - их вероятности. При этом говорят, что задан закон распределения дискретной случайной величины. Тот же закон можно представить графически, откладывая на оси абсцисс значения, которые принимает случайная величина, а на оси ординат - их вероятности.

Интегральная и дифференциальная функции распределения.

По определению интегральная функция распределения

$$F(x) = P(X < x) \qquad (2)$$

равна вероятности того, что случайная величина X принимает значение наперёд заданного x. Интегральная функция распределения имеет одинаковый смысл как для дискретной, так и для непрерывной случайной величины.

Из (2) следует, что интегральная функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $F(x)$ — неубывающая функция x, определённая на всей оси $x \in (-\infty, \infty)$ и принимающая значения в интервале $[0, 1]$.

2. Наименьшее значение функции $F(x)$ достигается при $x = -\infty$, а наибольшее при $x = \infty$:

$$F(-\infty) = 0 \quad , \quad F(\infty) = 1 \qquad (3)$$

Применительно к дискретной случайной величине $F(x)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию, терпящую скачки в точках разрешённых значений x_k случайной величины X:

$$F(x) = \sum_k p_k \, \chi(x - x_k) \qquad (4)$$

В записи (4) использована единичная функция

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \le 0 \\ 1 \ , & x > 0 \end{cases} \qquad (5)$$

так, что величина скачка равна вероятности p_k.

Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины является гладкой монотонно возрастающей.

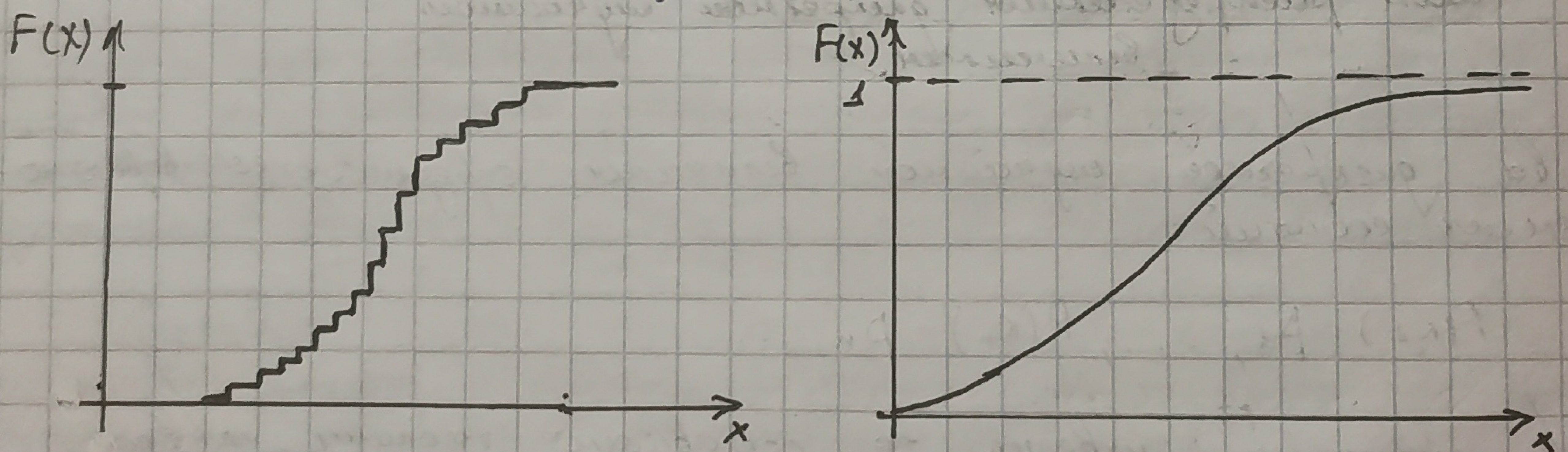


Рис. 1. Типичные графики интегральной функции распределения дискретной и непрерывной случайных величин.

Наряду с интегральной функцией распределения часто используют и дифференциальную функцию распределения, или плотность вероятностей, по определению равную

$$W(x) = \frac{dF}{dx} \qquad (6)$$

Если интервал Δx достаточно мал, то из (6) и (2) следует, что величина $W(x)\Delta x$ будет приближённо равна вероятности попадания случайной величины X в интервал значений Δx. Поэтому с помощью плотности вероятностей можно найти вероятность попадания случайной величины X в любой наперёд заданный интервал $[a; b]$:

$$P(a \le X < b) = \int_a^b W(x)\,dx \qquad (7)$$

В частности отсюда следует явное выражение для интегральной функции распределения через плотность вероятностей

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} W(z)\,dz \qquad (8)$$

Общие свойства плотности вероятностей.

1. Из (a) и (b) видно, что плотность вероятностей имеет размерность, обратную размерности случайной величины X.

2. Плотность вероятностей неотрицательна:

$$W(x) \ge 0 \qquad (9)$$

3. Для плотности вероятностей выполнено условие нормировки, которое получим, устремив в (8) x к бесконечности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(z)\,dz = 1 \qquad (10)$$

Среднее значение и дисперсия.

Пусть дискретная случайная величина X в N независимых испытаниях принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Тогда среднее значение (его будем обозначать чертой сверху) равно

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (11)$$

Здесь X_i - исход i-го испытания. Вычислим предел среднего арифметического при безграничном увеличении N:

$$\bar{X} = \sum_k X_k \frac{N_k}{N} \qquad (12)$$

При большом N каждая дробь под знаком суммы даёт вероятность p_k, в итоге:

$$\bar{X} = \sum_k X_k p_k \qquad (13a)$$

Равенство (13a) является определением среднего значения дискретной случайной величины. Его ещё называют математическим ожиданием и обозначают E_x.

Математическое ожидание (среднее значение) непрерывной случайной величины вычисляется с помощью плотности вероятностей:

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,W(x) \cdot dx \qquad (13b)$$

Ещё более информативной чем математическое ожидание является дисперсия случайной величины D_x, по определению равная

$$D_x = \overline{(X - \overline{X})^2} \qquad (14)$$

Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$D_x = \sum_n (x_n - \overline{X})^2 p_n = \sum_n x_n^2 p_n - \overline{X}^2 \qquad (14а)$$

а непрерывной – по формуле

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})^2 w(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x)\,dx - \overline{X}^2 \qquad (14б)$$

По смыслу математическое ожидание есть постоянная составляющая случайной величины X, а дисперсия служит количественной мерой случайности – разброса X вокруг среднего. В частности, детерминированная величина совпадает со своим средним, а её дисперсия равна нулю.

В физических приложениях, где приходится иметь дело с размерными величинами, удобнее использовать не дисперсию, а среднеквадратичное отклонение случайной величины от среднего:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \qquad (15)$$

По-другому эту величину называют стандартным отклонением или просто стандартом случайной величины X.

Случайные отклонения величины от среднего значения называются флуктуациями. Наиболее показательной характеристикой таких отклонений является относительная флуктуация, по определению равная:

$$\eta = \frac{\sigma_x}{\overline{X}}$$

Пусть некоторый опыт повторяется независимо N раз, а вероятность наступления события A не зависит от номера опыта и равна p. Если X – число наступлений события A в серии из N опытов, то можно показать:

$$\overline{X} = Np, \qquad \sigma_x = \sqrt{Np(1-p)}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{1-p}{Np}} \qquad (16)$$

5. Закон распределения для доски Гальтона.

В опытах с доской Гальтона при большом числе частиц вероятность $P(k)$ пропорциональная высоте столбика в ячейке k. В этом случае график $P(k)$ имеет вид, изображенный на рис. 2. Колоколообразная кривая, которую можно провести через точки на графике, будет иметь ту же форму, что и холмик, образованный зёрнами в ячейках. Эту кривую называют кривой вероятностей.

Обозначим $\bar{k}$ номер средней ячейки, над которой находится воронка. Средняя ячейка доски Гальтона оказывается наиболее вероятной: вероятность $P(\bar{k})$ попадания в неё максимальна. Оказывается, при достаточно большом числе ячеек вероятность $P(k)$ приближённо выражается формулой

$$P(k) = P(\bar{k}) \exp\left(-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\sigma_k^2}\right). \qquad (17)$$

Чтобы выяснить влияние σ_k на вид распределения, положим в формуле (17) значения k равными $k_1 = \bar{k} + \sigma_k$ и $k_2 = \bar{k} - \sigma_k$. Формула (17) даёт тогда:

$$P(k_1) = P(k_2) = \frac{P(\bar{k})}{\sqrt{e}}$$

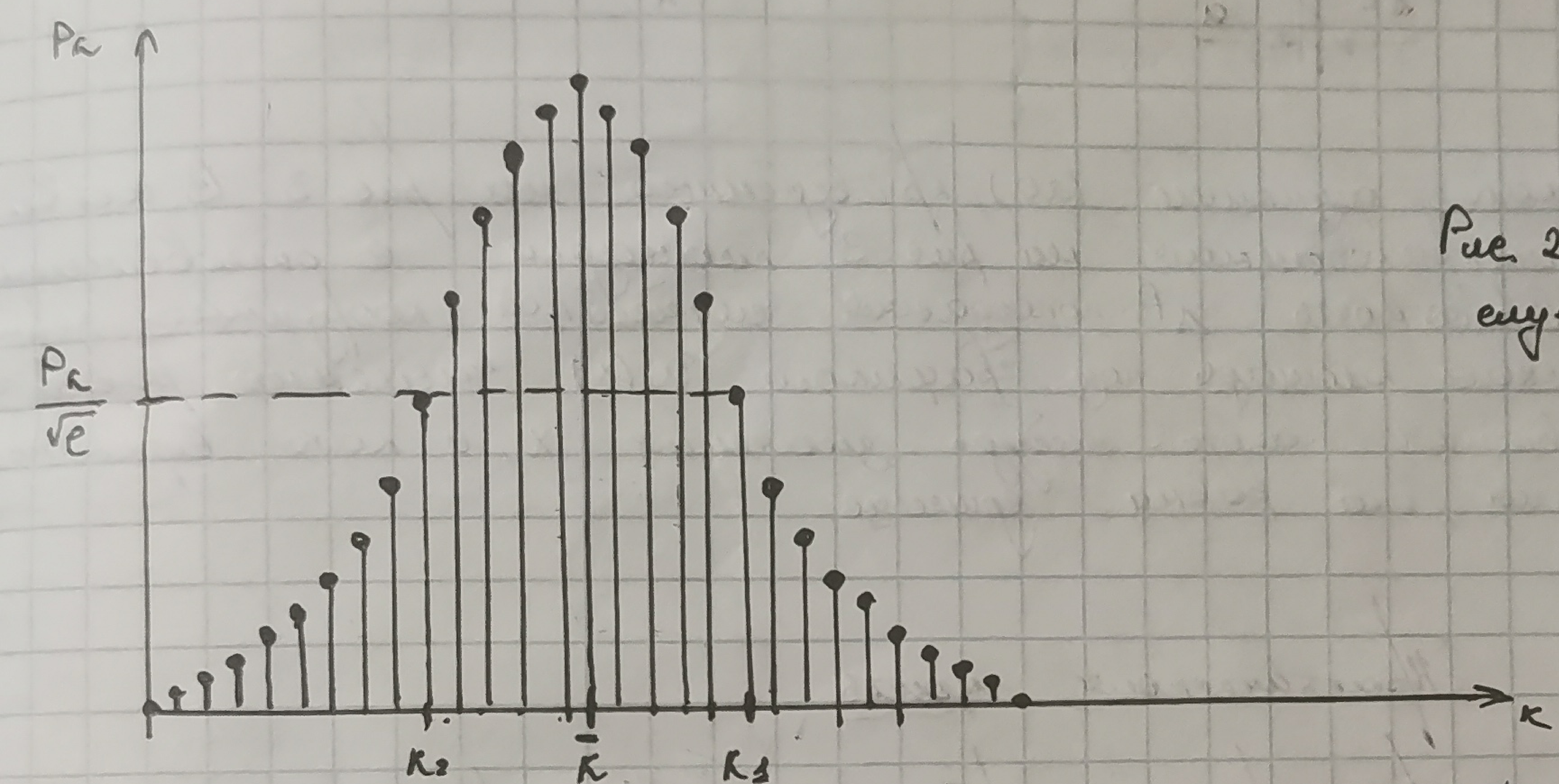


Рис. 2. Закон распределения случайной величины.

Это значит, что $2\sigma_k = k_2 - k_1$ равняется ширине кривой вероятностей, измеренной на уровне $P(\bar{k})/\sqrt{e}$, т.е. стандарт характеризует величину случайных отклонений от среднего значения.

Установим значение $P(\bar{k})$. Для этого учтём, что в любом испытании случайный номер ячейки n обязательно примет какое-либо значение $n=k$. Поэтому объединение всех событий, состоящих в попадании зерна в ячейку, есть достоверное событие. Вероятность достоверного события равна единице, а значит, суммарная вероятность всех возможных значений подчиняется условию нормировки:

$$\sum_k P_k = 1 \qquad (18)$$

Для формулы (17) условие (18) выполнено, если

$$P(\bar{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k} \qquad (19)$$

Таким образом, стандарт σ_k характеризует не только ширину, но и высоту холмика, описываемого формулой (17).

Если в качестве случайной величины рассматривать не номер ячейки, а координату x, то дифференциальная функция распределения будет

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot\exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right), \qquad (20)$$

где $\bar{x}$ - координата средней ячейки, $\sigma = \sigma_k l$, l - ширина ячейки. Функция (20) описывает нормальный закон распределения, или закон Гаусса.

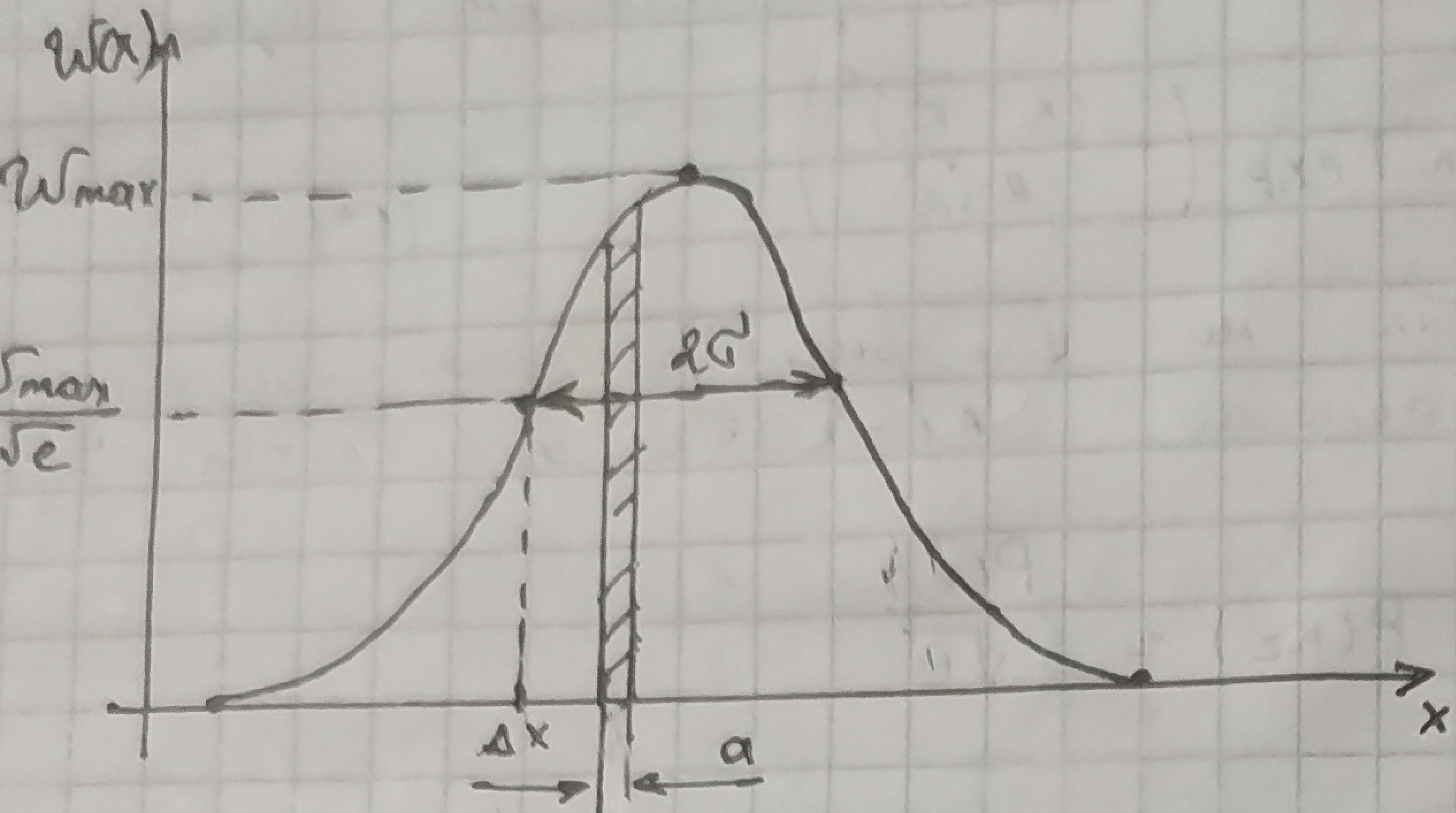
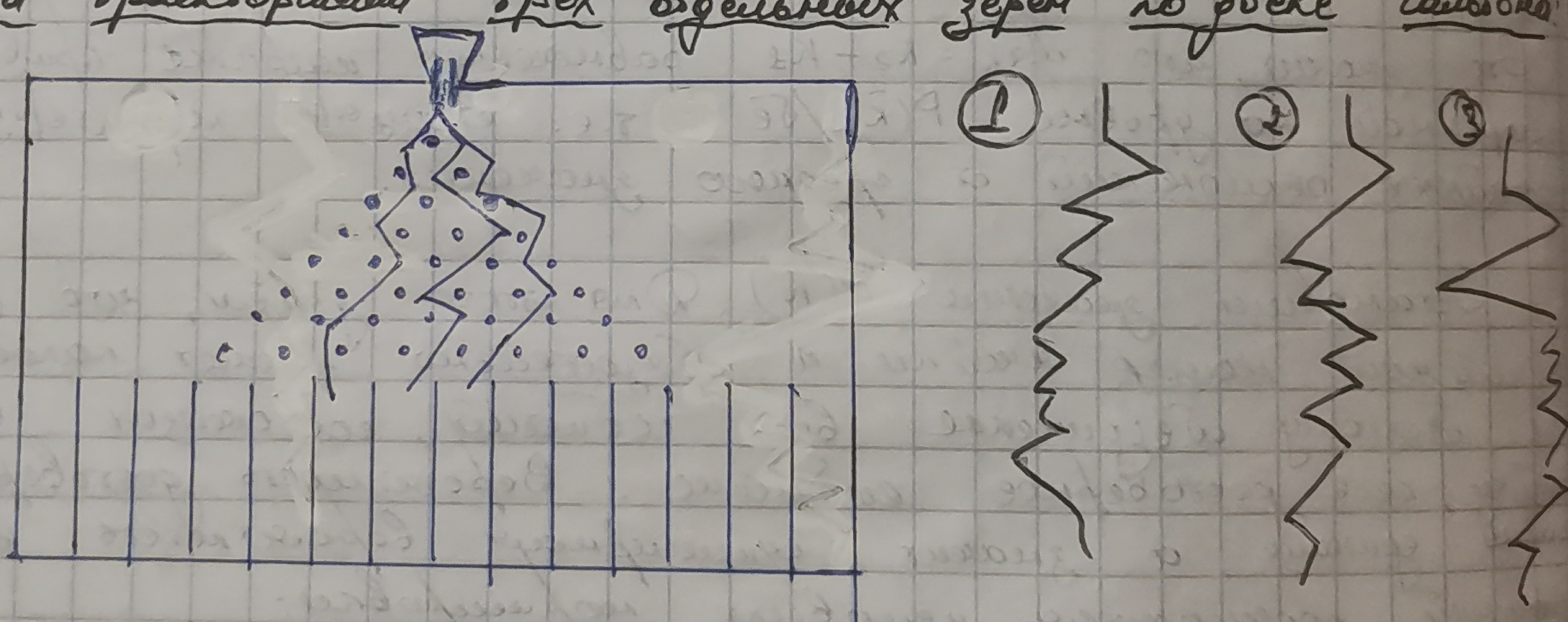


Рис. 3. Гауссов закон распределения.

Гаусс-м график функции (20), приведённой на рис. 3. В соответствии с формулой (*) заштрихованная на рис. 3 площадка с основанием Δx изображает вероятность ΔP попадания случайной координаты зерна в интервал Δx. Полная площадь под графиком $W(x)$ численно равна вероятности появления какого-нибудь значения x, и как вероятность достоверного события, она равна единице.

Практическая часть.

1. Наблюдение за траекториями трёх отдельных зёрен по доске Гальтона.



2. Проведение серии испытаний с $N=10$ зернами.

Таблица:

40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
1													

3. Проведение

Рис. Р

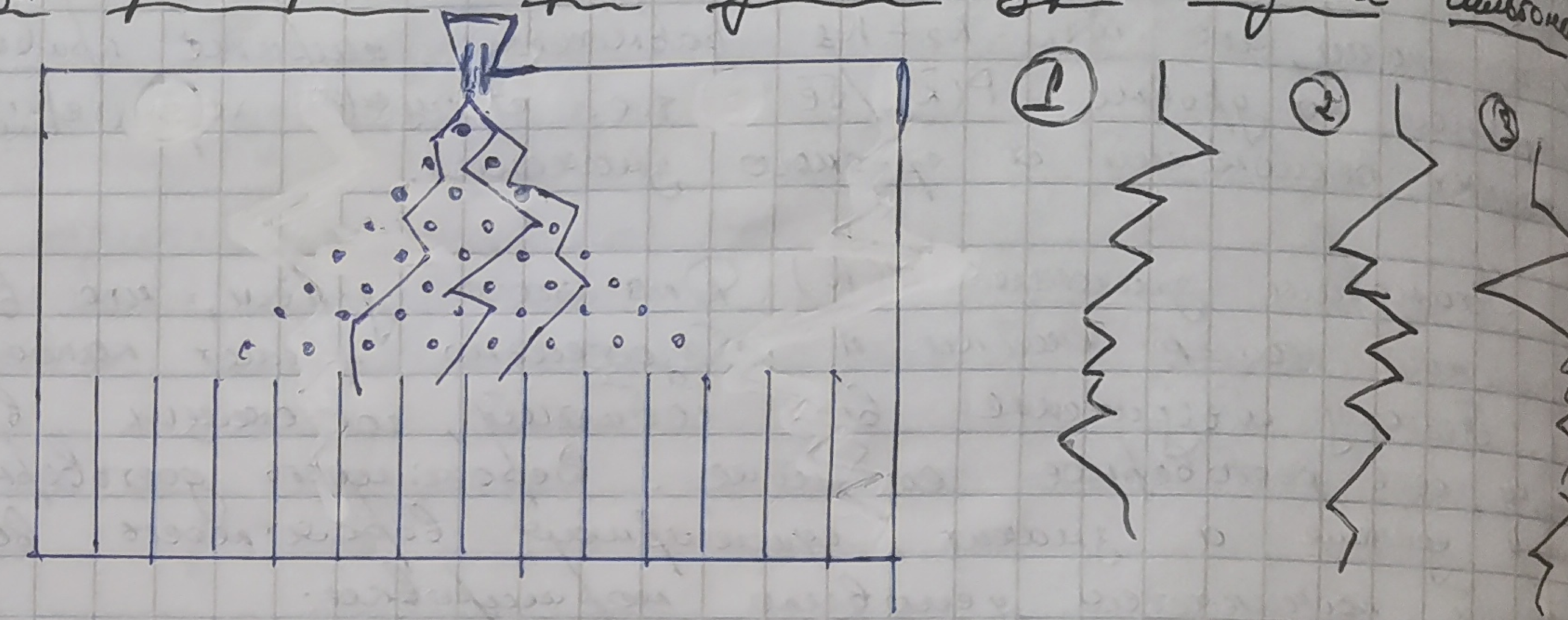
K	P(k)= ...
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0,0034
10	0,0032

K	P(k)= ...
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0,0014

достоверного события, она равна единице.

Практическая часть.

1. Наблюдение за траекториями трёх отдельных зёрен по доске Гальтона



2. Проведение серии испытаний с N=10 зернами.

Таблица:

N=10 штук	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
1																			1				1		1				1	1	1	1						2		1													
2				1									1							1			1							2			1	2				1															
3									1										1	1		1			1		1	1	1		2																						

Рис.

K	P(k)=
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0,003
10	0,003

K	P(k)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0,00

3. Проведение серий испытаний с $N=\frac{N_0}{2}$ и $N=N_0$:

k								
36	24,5	25,0	25,0	43,0	42,0	42,0	24,8	42,3
37	22,0	23,5	23,0	37,5	36,0	36,5	22,8	36,7
38	17,0	19,0	17,5	32,0	32,0	32,0	17,8	32,0
39	14,5	15,0	16,0	25,0	25,5	27,5	15,2	26,0
40	10,0	13,0	12,0	20,0	18,0	20,0	11,7	19,3
41	10,0	13,0	9,0	16,0	17,0	16,0	10,7	16,3
42	8,5	10,0	8,0	14,0	14,0	14,0	8,8	14,0
43	8,0	7,5	7,0	12,0	10,0	11,0	7,5	11,0
44	5,0	5,0	5,0	8,0	8,0	8,5	5,0	8,2
45	4,5	3,5	4,5	6,5	6,5	6,0	4,2	6,3
46	5,0	3,0	2,0	5,0	5,0	5,0	3,3	5,0
47	0	2,0	0	3,5	3,0	4,0	0,7	3,5
48	0	2,0	0	3,5	3,0	3,0	0,7	3,2
49	0	0	0	2,0	2,0	2,0	0	2,0
50	0	0	0	0	0	0	0	0
51	0	0	0	0	0	0	0	0
52	0	0	0	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	0	0	0	0

Т.к. P(k) пропорционально высоте => $P(k) = \frac{h_{ср}}{H}$

$H_1 = 938,8$ мм ; $H_2 = 1647,9$ мм.

Таблица значений P(k) для $N = \frac{N_0}{2}$

k	$P(k)=\frac{h_{ср}}{H_1}$	k	P(k)	k	P(k)	k	P(k)	k	P(k)	k	P(k)	k	P(k)	H_1, мм
1	0	11	0,0053	21	0,0355	31	0,0474	41	0,0114	51	0			938,8
2	0	12	0,0066	22	0,0394	32	0,0439	42	0,0094	52	0			
3	0	13	0,0077	23	0,0469	33	0,0410	43	0,008	53	0			
4	0	14	0,0098	24	0,0461	34	0,0365	44	0,0053					
5	0	15	0,0151	25	0,0503	35	0,0332	45	0,0045					
6	0	16	0,0163	26	0,0530	36	0,0261	46	0,0035					
7	0	17	0,0195	27	0,0538	37	0,0249	47	0					
8	0	18	0,0238	28	0,0527	38	0,0190	48	0					
9	0,0034	19	0,0293	29	0,0517	39	0,0162	49	0					
10	0,0032	20	0,0348	30	0,0519	40	0,0125	50	0					

для $N = N_0$:

k	$P(k)=\frac{h_{ср}}{H_2}$	k	P(k)	k	P(k)	k	P(k)	k	P(k)	k	P(k)	k	P(k)	H_2, мм
1	0	9	0,0025	17	0,0206	25	0,0512	33	0,0421	41	0,0099	49	0,0012	1647,9
2	0	10	0,0032	18	0,0248	26	0,0547	34	0,0363	42	0,0085	50	0	
3	0	11	0,0046	19	0,0308	27	0,0541	35	0,0326	43	0,0067	51	0	
4	0	12	0,0065	20	0,0339	28	0,0536	36	0,0257	44	0,0050	52	0	
5	0	13	0,0080	21	0,0344	29	0,0520	37	0,0223	45	0,0038	53	0	
6	0	14	0,0099	22	0,0416	30	0,0511	38	0,0194	46	0,0030			
7	0	15	0,0140	23	0,0454	31	0,0481	39	0,0158	47	0,0021			
8	0,0014	16	0,0153	24	0,0478	32	0,0448	40	0,0117	48	0,0019			

$T_p = nT_e.$

$\sigma = \sigma_k l$, l - ширина ячейки

закон распределения, или закон

3. Проверка серий испытаний с $N = \frac{N_0}{2}$ и $N = N_0$:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$N = N_0/2$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3,0	3,0	5,0	6,0	7,5	9,5	14,5	14,5	20,0	23,0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	3,5	4,0	4,5	6,5	7,0	10,0	13,5	17,0	18,0	22,5
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3,0	2,0	5,6	6,0	7,0	8,0	14,5	14,5	17,0	21,5
$N = N_0$	1	0	0	0	0	0	0	0	2,0	4,5	4,6	8,0	10,5	12,5	15,5	22,0	24,0	34,0	40,5
	2	0	0	0	0	0	0	0	3,0	5,0	6,0	7,5	12,0	13,5	17,0	23,0	26,5	34,0	40,0
	3	0	0	0	0	0	0	0	2,0	3,0	5,0	7,0	9,5	13,5	16,5	24,0	25,0	34,0	42,0
$N = \frac{N_0}{2}$	$n_{ср}$	0	0	0	0	0	0	0	0	3,2	3,0	5,0	6,2	7,2	9,2	14,2	15,3	18,3	22,3
$N = N_0$	$n_{ср}$	0	0	0	0	0	0	0	2,3	4,2	5,2	7,5	10,7	13,2	16,3	23,0	25,2	34,0	40,8

		19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$N = N_0/2$	1	27,0	34,0	34,5	36,5	46,0	43,0	47,0	50,5	50,0	51,0	50,0	50,5	45,0	44,5	40,0	35,0	32,0	24,5
	2	28,0	33,0	34,0	36,5	41,5	44,0	48,0	49,0	51,5	48,5	47,0	48,5	44,5	42,0	38,0	34,5	31,0	25,0
	3	27,5	31,0	34,5	38,0	44,5	43,0	46,5	50,0	50,0	49,0	48,5	47,0	44,0	40,0	37,5	33,5	30,5	25,0
$N = N_0$	1	51,0	56,0	56,0	69,5	75,5	79,5	82,0	91,0	89,0	86,0	85,0	84,5	77,0	73,0	68,0	60,0	52,0	43,0
	2	51,0	54,5	57,0	67,0	75,0	80,0	86,0	87,5	90,0	89,0	85,0	82,5	77,0	74,0	70,0	58,0	54,0	42,0
	3	50,0	57,0	57,0	69,0	74,0	76,5	85,0	92,0	88,5	90,0	87,0	85,5	77,0	74,5	70,0	61,5	55,0	42,0
$N = \frac{N_0}{2}$	$n_{ср}$	27,5	32,7	33,3	37,0	44,0	43,3	47,2	49,8	50,5	49,5	48,5	48,7	44,5	41,2	38,5	34,3	31,2	24,8
$N = N_0$	$n_{ср}$	50,7	55,8	56,7	68,5	74,8	78,7	84,3	90,2	89,2	88,3	85,7	84,2	76,0	73,8	69,3	59,8	53,7	42,3

		37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
$N = N_0/2$	1	22,0	17,0	14,5	10,0	10,0	8,5	8,0	5,0	4,5	5,0	0	0	0	0	0	0	0
	2	23,5	19,0	15,0	13,0	13,0	10,0	7,5	5,0	3,5	3,0	2,0	2,0	0	0	0	0	0
	3	23,0	17,5	16,0	12,0	9,0	8,0	7,0	5,0	4,5	2,0	0	0	0	0	0	0	0
$N = N_0$	1	37,5	32,0	25,0	20,0	16,0	14,0	12,0	8,0	6,5	5,0	3,5	3,5	2,0	0	0	0	0
	2	36,0	32,0	25,5	18,0	17,0	14,0	10,0	8,0	6,5	5,0	3,0	3,0	2,0	0	0	0	0
	3	36,5	32,0	27,5	20,0	16,0	14,0	11,0	8,5	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0	0	0	0	0
$N = \frac{N_0}{2}$	$n_{ср}$	22,8	17,8	15,2	11,7	10,7	8,8	7,5	5,0	4,2	3,3	0,7	0,7	0	0	0	0	0
$N = N_0$	$n_{ср}$	36,7	32,0	26,0	19,3	16,3	14,0	11,0	8,2	6,3	5,0	3,5	3,2	2,0	0	0	0	0

Т.к. $P(k)$ пропорционально высоте $\Rightarrow P(k) = \frac{n_{ср}}{M}$.

$M_1 = 938,8$ мм ; $M_2 = 1647,9$ мм.

Таблица значений $P(k)$ для $N = \frac{N_0}{2}$

к	$P(k) = \frac{n_{ср}}{M}$	к	$P(k)$	к	$P(k)$	к	$P(k)$	к	$P(k)$	к	$P(k)$	к	$P(k)$

отдельных зёрен по доске Гальтона:

1 2 3

Вычисление Стандарта:

При $N = \frac{N_0}{2}$

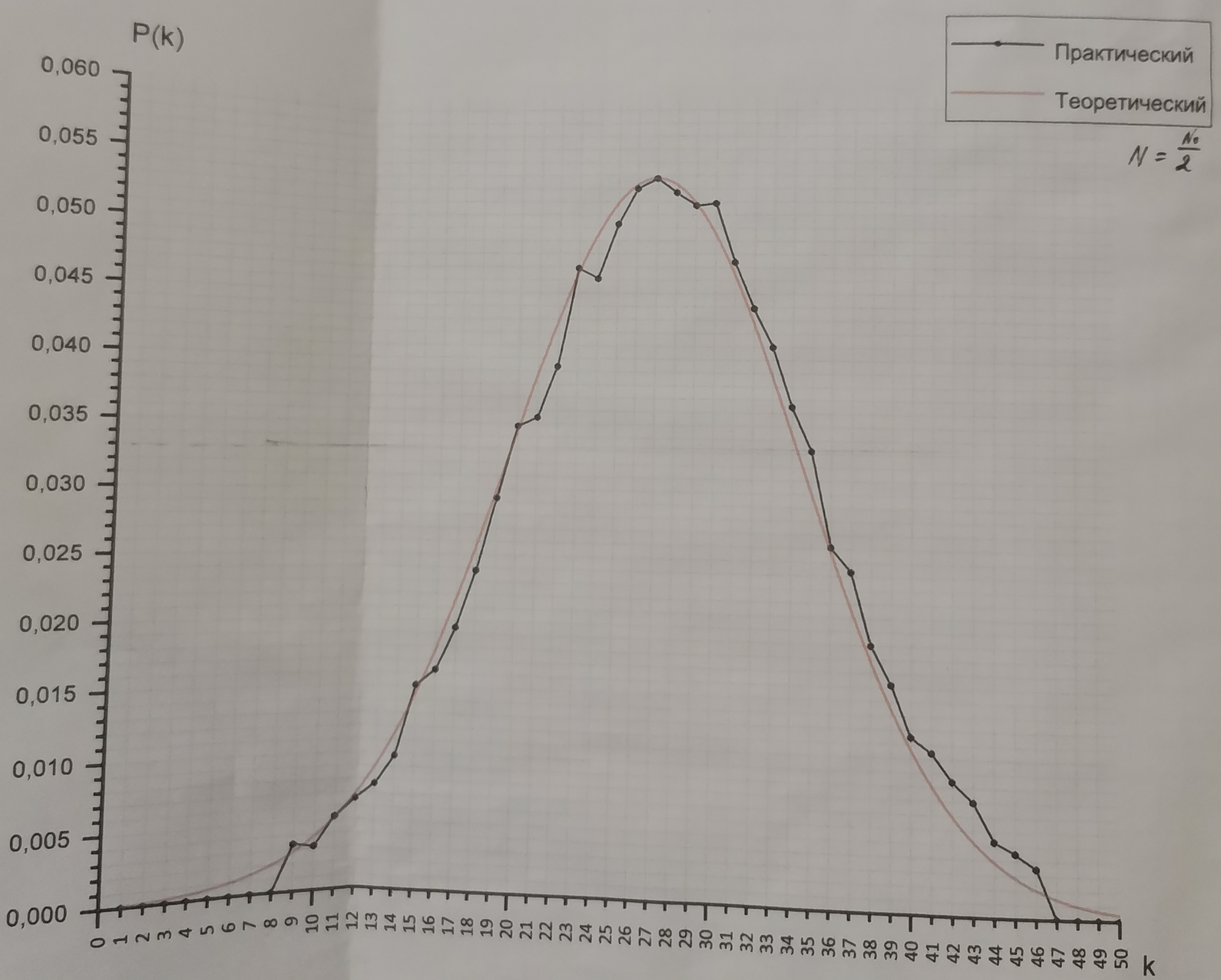
1) $\frac{P(\bar{k})}{\sqrt{e}} \approx 0,0326$

2) $\Rightarrow \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,P(\bar{k})} \approx 7,41$

При $N = \frac{N_0}{1}$

1) $\frac{P(\bar{k})}{\sqrt{e}} \approx 0,0828$

2) $\Rightarrow \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,P(\bar{k})} \approx 7,87$



2-й способ: считая, что стандарт σ_k равен полуширине экспериментальной кривой на уровне $P(\bar{k})/\sqrt{e}$

1) $N = \frac{N_0}{2}$

$\sigma_k = \frac{k_2 - k_1}{2}$

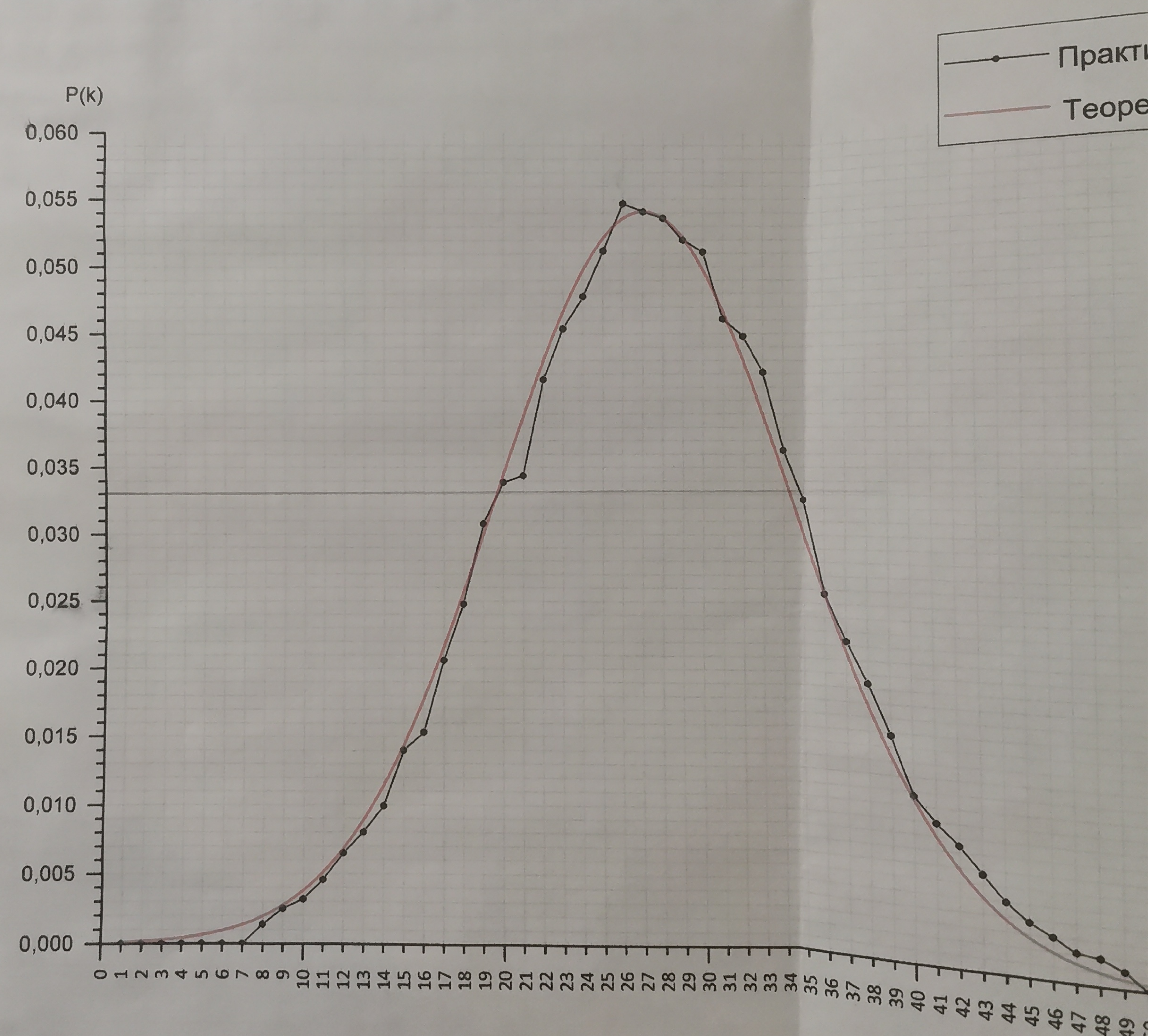
$\Rightarrow \sigma_k = \frac{35-20}{2} \approx 7,5$

2) $N = N_0$

$\sigma_k = \frac{k_2 - k_1}{2}$

$\Rightarrow \sigma_k = \frac{34-20}{2} \approx 7.$

В дальнейшем будем учитывать σ_k, полученную первым способом



Если посмотреть на графики, то можно заметить, что от 8 до 27 ячейки теоретический и практический графики могут довольно сильно отличаться, но от 27 и до 49 ячеек они довольно близки

4) Найдём отношение флуктуаций в средней ячейке при числе зерен $N = N_0/2$ и $N = N_0$.

$\eta = \frac{\sigma_K}{\bar{X}}$ – относительная флуктуация. $= \sqrt{\frac{Np(1-p)}{N^2p^2}}$, где $p = p(k)$

$$\eta_1 = \frac{\sigma_K}{\bar{X}} = \sqrt{\frac{(1-p)}{Np}} = \sqrt{\frac{(1-0{,}0538)\cdot 2}{N_0 \cdot 0{,}0538}} \approx 5{,}93 \cdot \sqrt{\frac{1}{N_0}}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{(1-0{,}0541)}{N_0 \cdot 0{,}0541}} \approx 4{,}18 \cdot \sqrt{\frac{1}{N_0}}$$

, где $\bar{X}$ – среднее число попадания зерна в какую-то выбранную ячейку

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{5{,}93}{4{,}18} \approx 1{,}42}$$

Найдём отношение флуктуаций в средней ячейке и в крайней:

$N = N_0/2$

а) Для средней ячейки: $\eta_1 \approx 5{,}93\sqrt{\frac{1}{N_0}}$

Для ячейки 46: $\eta_2 \approx \sqrt{\frac{(1-0{,}0035)\cdot 2}{N_0 \cdot 0{,}0035}} \approx 23{,}86\sqrt{\frac{1}{N_0}}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{23{,}86}{5{,}93} \approx 4{,}02}$$

б) $N = N_0$

Для средней ячейки: $\eta_1 \approx 4{,}18\sqrt{\frac{1}{N_0}}$

Для ячейки 46: $\eta_2 = \sqrt{\frac{(1-0{,}003)}{N_0 \cdot 0{,}003}} \approx 18{,}23\sqrt{\frac{1}{N_0}}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{18{,}23}{4{,}18} \approx 4{,}36}$$

Расчёт погрешностей.

$P(k) = \frac{h}{H}$, h – высота столба; H – общая (суммарная) высота зерен в ячейках.

$$\boxed{\Delta P_i(k) = P_i(k)\cdot\frac{\Delta h}{h_i}}$$

$$\delta P(k) = \delta h + \delta H = \frac{\Delta h}{h} + \underbrace{\frac{\Delta h}{H}}_{\approx 0} \approx \frac{\Delta h}{h}$$

~ погрешность мала, поэтому не учитываем в графиках.

Таблица погрешностей.

	$N = N_0/2$	
K	$\Delta P(k) = P(k)\cdot\frac{\Delta h}{h}$	Δh, мм
1	0	
2	0	1
3	0	
4	0	
5	0	

	$N = N_0$	
K	$\Delta P(k) = P(k)\cdot\frac{\Delta h}{h}$	Δh, мм
1	0	
2	0	1
3	0	
4	0	
5	0	

$$\delta P(K) = \delta h + \delta H = h + \underbrace{M}_{\simeq 0} \approx h$$

Таблица погрешностей.

$N = N_0/2$		
K	$\Delta P(K) = P(K) \cdot \frac{\Delta h}{h}$	Δh, мм
1	0	
2	0	1
3	0	
4	0	
5	0	
6	0	
7	0	
8	0	
9	0,00110	
10	0,00110	
11	0,00106	
12	0,00106	
13	0,00107	
14	0,00107	
15	0,00106	
16	0,00107	
17	0,00107	
18	0,00107	
19	0,00107	
20	0,00106	
21	0,00107	
22	0,00106	
23	0,00107	
24	0,00106	
25	0,00107	
26	0,00106	
27	0,00107	
28	0,00106	
29	0,00107	
30	0,00107	
31	0,00107	
32	0,00107	
33	0,00106	
34	0,00106	
35	0,00106	
36	0,00105	
37	0,00107	
38	0,00107	
39	0,00107	
40	0,00107	
41	0,00107	
42	0,00107	
43	0,00108	
44	0,00106	
45	0,00107	
46	0,00106	
47	0	
48	0	
49	0	
50	0	
51	0	
52	0	
53	0	

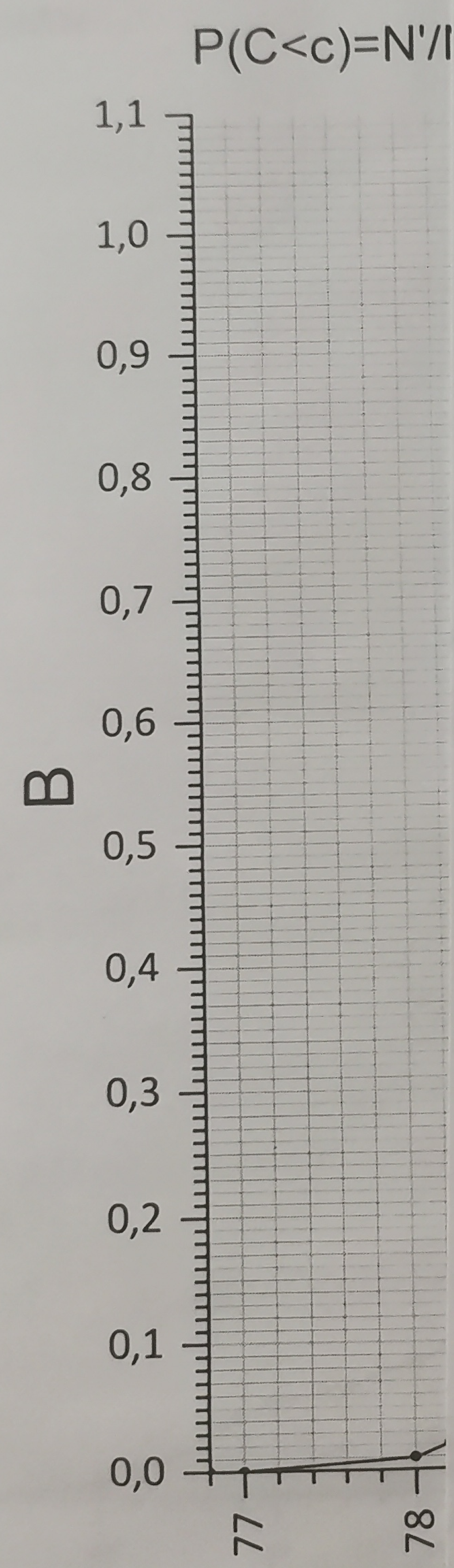
$N = N_0$		
K	$\Delta P(K) = P(K) \cdot \frac{\Delta h}{h}$	Δh, мм
1	0	
2	0	1
3	0	
4	0	
5	0	
6	0	
7	0	
8	0,00062	
9	0,0006	
10	0,0006	
11	0,0006	
12	0,0006	
13	0,0006	
14	0,0006	
15	0,0006	
16	0,0006	
17	0,0006	
18	0,0006	
19	0,0006	
20	0,0006	
21	0,0006	
22	0,00062	
23	0,0006	
24	0,0006	
25	0,0006	
26	0,0006	
27	0,0006	
28	0,0006	
29	0,0006	
30	0,0006	
31	0,0006	
32	0,0006	
33	0,0006	
34	0,0006	
35	0,0006	
36	0,0006	
37	0,0006	
38	0,0006	
39	0,0006	
40	0,0006	
41	0,0006	
42	0,0006	
43	0,0006	
44	0,0006	
45	0,0006	
46	0,0006	
47	0,0006	
48	0,0006	
49	0,0006	
50	0	
51	0	
52	0	
53	0	

④ Исследование интегрального закона распределения непрерывной случайной величины (на примере конденсаторов):

$$F(r) = P(R<r) \approx \frac{N'}{N}$$, где

N - общее число измерений

N' - число значений R, которые меньше r.



C = 82 Пф ± 10%

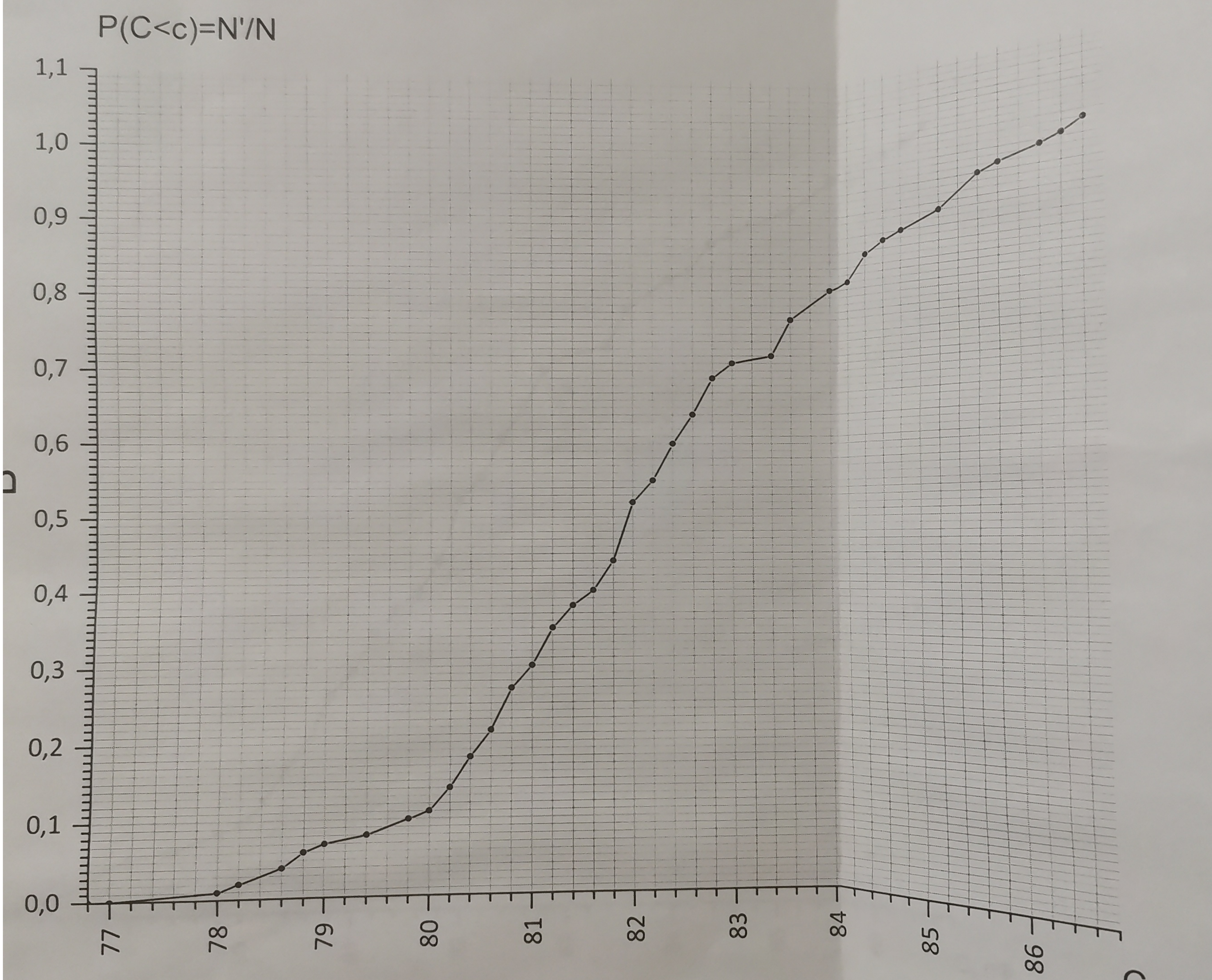
N опыта	C, пФ	N опыта	C, пФ
1	81,8	43	83,4
2	80,6	44	82,4
3	81,2	45	83,4
4	86,4	46	82,6
5	81,4	47	81,2
6	81,0	48	81,8
7	80,2	49	85,8
8	86,2	50	80,0
9	81,8	51	80,6
10	80,4	52	81,8
11	84,2	53	85,2
12	78,2	54	85,2
13	80,6	55	79,8
14	79,4	56	78,8
15	85,2	57	81,8
16	82,4	58	82,0
17	83,6	59	80,4
18	82,2	60	82,4
19	80,0	61	85,6
20	81,0	62	81,6
21	84,8	63	78,8
22	80,8	64	84,8
23	82,8	65	82,2
24	80,6	66	81,0
25	84,6	67	81,8
26	78,6	68	80,0
27	80,6	69	81,2
28	82,8	70	83,0
29	80,4	71	82,2
30	81,6	72	82,6
31	84,0	73	81,4
32	82,0	74	80,2
33	83,6	75	82,4
34	83,4	76	82,6
35	80,2	77	81,0
36	83,6	78	77,0
37	86,6	79	82,2
38	82,6	80	78,0
39	83,4	81	80,6
40	80,8	82	81,8
41	79,0	83	84,4
42	81,8	84	84,2

C, пФ	82,0
δ(C), %	10

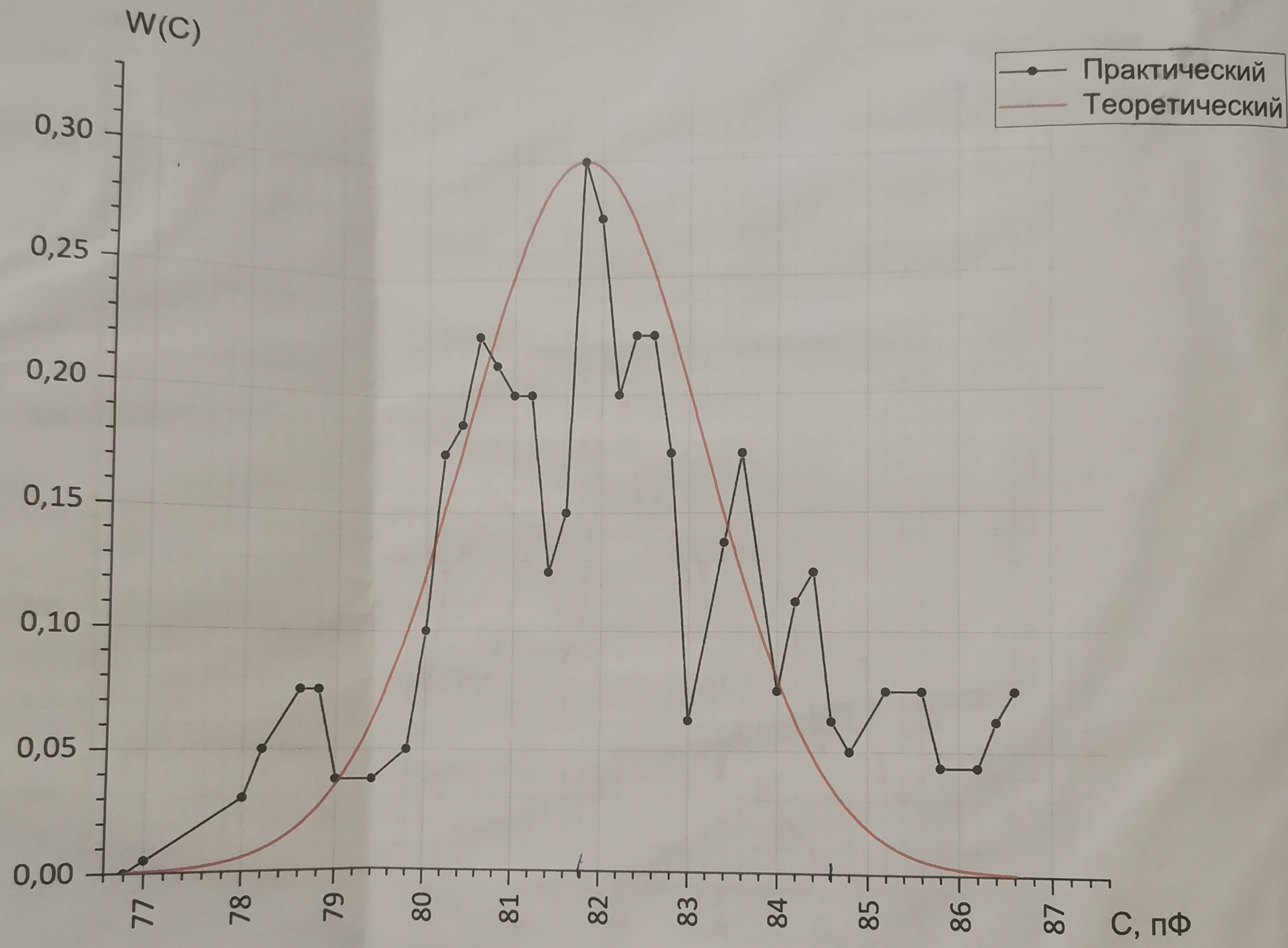
интегрального закона
непрерывной случайной
а примере конденсаторов):

$) = P(R<r) \approx \frac{N'}{N}$, где

сло измерений
чений R, которые меньше r.



Продифференцировав график, получим:

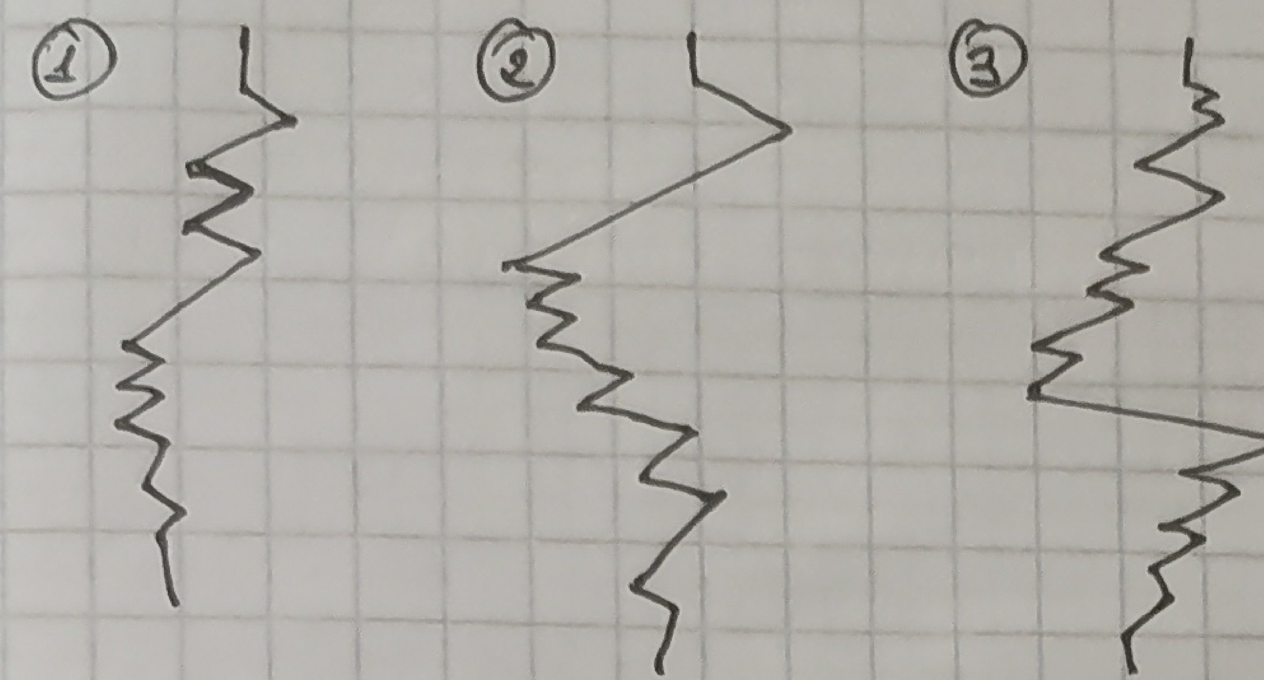


По графику видно, что практические данные сильно отличаю[тся] о[т] теоретических значений.

Схема построения дифференциального графика указана после вывода (см. вложение)

Вывод: 1) При наблюдении за траекториями отдельных зёрен по доске Гальтона можно сказать, что заранее предсказать движение невозможно.

Некоторые схематические траектории частиц:



2) Провели 3 испытания с $N = 10$ зёрнами.
Из закон распределения (полученной таблицы) очевидно, что распределение не является распределением Гаусса. Важным условием распределения Гаусса является $N \to \infty$.

3) Провели серии испытаний с $N = \frac{N_0}{2}$ и $N = N_0$, и, предполагая, что высота столбца (зёрен в ячейке) пропорциональна вероятности попадания зёрнышка в ячейку, построили графики $P(k)$ от k (номера ячейки)

При сравнении полученных графиков с теоретическими, можно заметить, что при $N = N_0$ практический график ближе к теоретическому, но не намного, чем при $N = \frac{N_0}{2}$.

По полученным графикам видно, что закон распределения является распределением Гаусса.

4) Исследовали интегральный закон распределения непрерывной случайной величины на примере конденсаторов.

С помощью мостика УМ-2 и 84 образцов конденсаторов с $C = (82 \pm 8{,}2)$ пФ построили интегральную функцию распределения.

Продифференцировав его графически, можно сказать, что график не похож на дифференциальный закон нормального распределения.

Если нанести теоретический график, то можно убедиться в сильном различии.

12.07.21

Вложение: Дифференцирование (в программе Origin Pro).

Алгоритм:

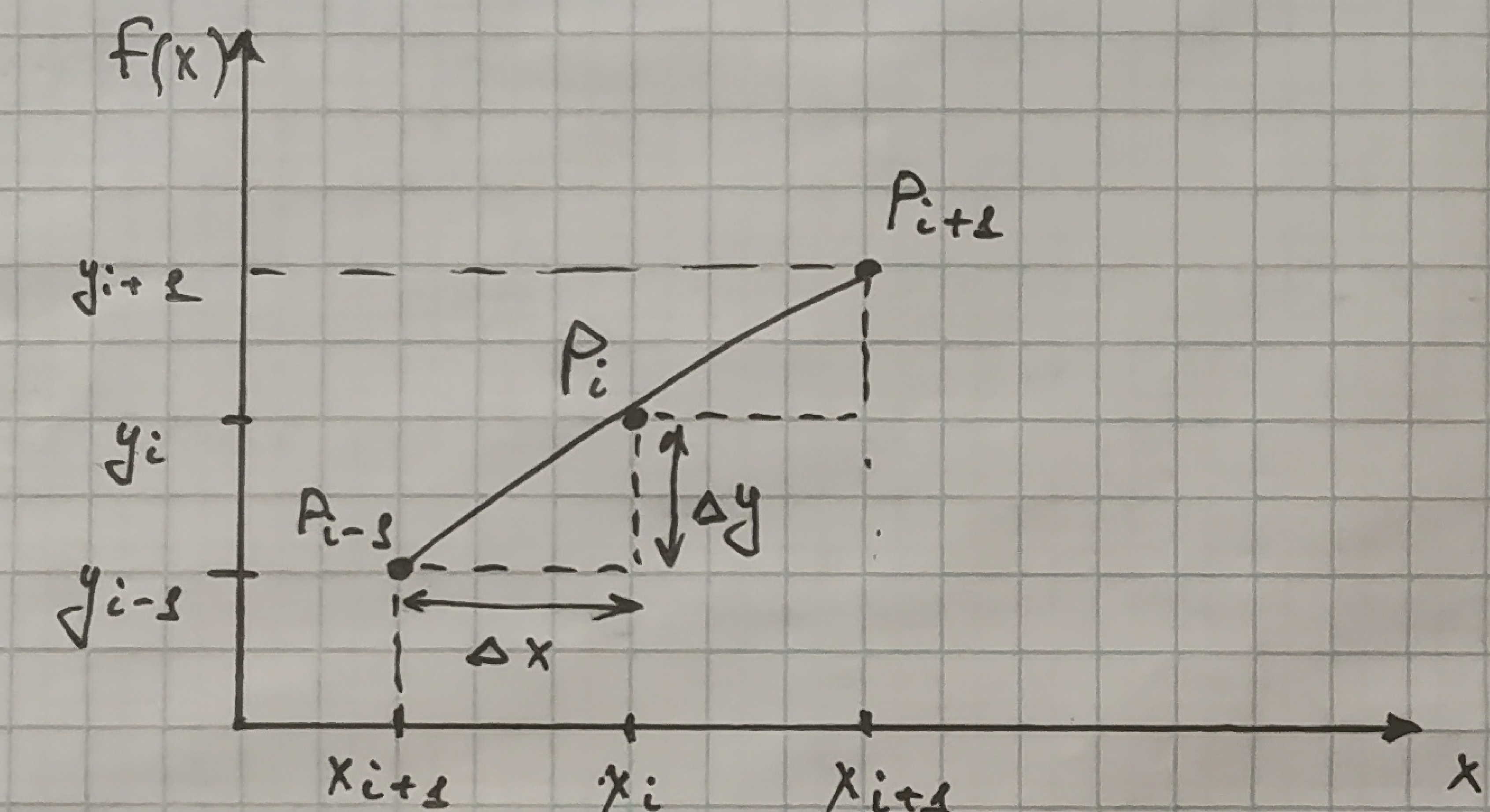
Производная функции определяется как:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Хотя величина h достаточно мала, можем использовать формулу центрированной разности для аппроксимации производной:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h}$$

На практике Origin обрабатывает дискретные данные путём преобразования формулы центрированной разности и вычисляет производную в точке, беря среднее значение наклонов между точкой и двумя ближайшими соседними:



Следовательно, формула для вычисления производной, может быть записана:

$$f'(x_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)$$